أسئلة على الفصل الأول

① إذا كان ق(س) = س^٤ ل(٢س + ١) ، ق(٢) = ١٢ ، لَ(٩) = ١ ، جد قَ(٢)

قَ(س) = س^٤ × لَ(٢س + ١) × ٢ + ل(٢س + ١) × ٤س^٣

قَ(٢) = ٤ × لَ(٩) × ٨ + ل(٩) × ٤ = ٤ × ١ × ٨ + ١ × ٤

= ٣٢ + ٤ = ٣٦

② إذا كان ق(جا٢س) = ظا٣س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٦}$] ، جد قَ($\frac{١}{٢}$)

$\frac{١}{٢}$ = جا٢س ⇐ ٢س = $\frac{\pi}{٦}$ ← س = $\frac{\pi}{١٢}$

نشتق الطرفين ⇐ قَ(جا٢س) × جتا٢س × ٢ = قا^٢ ٣س × ٣

قَ($\frac{١}{٢}$) × جتا $\frac{\pi}{٦}$ × ٢ = قا^٢ $\frac{\pi}{٤}$ × ٣

قَ($\frac{١}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\cancel{٢}$ = ١ × ٣

قَ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$

③ إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س\sqrt{س} + ١٩}$ ، جد نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ}{ق(٤) - ق(٢هـ + ٤)}$

نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ}{ق(٤) - ق(٢هـ + ٤)}$ = نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{-١}{\frac{ق(٢هـ + ٤) - ق(٤)}{هـ}}$ = نهـا $\frac{-١}{\frac{ق(٢هـ + ٤) - ق(٤)}{٢هـ + ٤ - ٤} \times \frac{٢هـ + ٤ - ٤}{هـ}}$

= $\frac{-١}{قَ(٤)}$ × نهـا $\frac{١}{\frac{٢هـ}{هـ}}$ = $\frac{-١}{قَ(٤)}$ × $\frac{١}{٢}$

= $\frac{-١}{٢}$ × $\frac{١}{قَ(٤)}$ ، ق(س) = (س$\sqrt{س}$ + ١٩)$^{\frac{١}{٣}}$

قَ(س) = $\frac{١}{٣}$ (س$\sqrt{س}$ + ١٩)$^{\frac{-٢}{٣}}$ (س × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ + $\sqrt{س}$ × ١)

قَ(٤) = $\frac{١}{٣}$ (٤$\sqrt{٤}$ + ١٩)$^{\frac{-٢}{٣}}$ (٤ × $\frac{١}{٢\sqrt{٤}}$ + $\sqrt{٤}$)

= $\frac{١}{٣}$ (٢٧)$^{\frac{-٢}{٣}}$ (١ + ٢) = $\frac{١}{\cancel{٣}}$ × $\frac{١}{(\sqrt[٣]{٢٧})^٢}$ × $\cancel{٣}$

= $\frac{١}{٩}$

∴ النهاية = $\frac{-١}{٢}$ × $\frac{١}{\frac{١}{٩}}$ = $\frac{-٩}{٢}$

٤) إذا كان $ص = ع^٣$ ، $س = ٣ع$ ، جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

$ص = ع^٣$ ، $س = ٣ع \Leftarrow ع = \frac{س}{٣}$

$\therefore ص = \frac{س^٣}{٢٧} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٣س^٢}{٢٧} \Leftarrow \frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٦س}{٢٧}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٢}{٩} س$

٥) $\frac{دص}{دس} = س^٢ ص + ١$ ، جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عند النقطة $(١ ، ٢)$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = س^٢ \times \frac{دص}{دس} + ص \times ٢س$

عند النقطة $(١ ، ٢)$
$\frac{دص}{دس} = ١(٢) + ١$
$= ٣$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢}\Big|_{(١ ، ٢)} = ١ \times ٣ + ٢ \times ٢(١)$

$= ٣ + ٤ = ٧$

٦) إذا كان $(ق \circ هـ)(س) = ٢ جا٣س$ ، $هـ(س) = ٣س$ ، جد $قَ(س)$

$(ق \circ هـ)'(س) = ٦ جتا ٣س$

$قَ(هـ(س)) \times هـَ(س) = ٦ جتا ٣س$

$قَ(٣س) \times ٣ = ٦ جتا ٣س \Leftarrow قَ(٣س) = ٢ جتا ٣س$

$\Leftarrow قَ(س) = ٢ جتا س$

٧) إذا كان $ل(س) = ق(هـ(س))$ ، $قَ(س) = \frac{س}{س^٢ + ١}$ ، $هـ(س) = \sqrt{٣س - ١}$
جد $لَ(١)$

$لَ(س) = قَ(هـ(س)) \times هـَ(س)$

$لَ(١) = قَ(هـ(١)) \times هـَ(١)$

$= قَ(\sqrt{٢}) \times \frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$

$هـَ(س) = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س - ١}}$

$هـَ(١) = \frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢ + ١} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢}$

٨) إذا كان $ص = جتا ن$ ، $\frac{دن}{دم} = ٧$ ، جد $\frac{دص}{دم}\Big|_{ن = \frac{\pi}{٢}}$

$\frac{دص}{دم} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دم} = - جا ن \times ٧ = - جا \frac{\pi}{٢} \times ٧ = -٧$

⑨ إذا كان $ق^3(٢ص) = ٣س^4 + ٥$ ، $س > ٠$ ، $ق(٨) = ٢$ ، $ق'(٨) = ٢$
جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{ص=٤}$

نشتق الطرفين ⟸ $٣ق^2(٢ص) \times ق'(٢ص) \times ٢ \frac{دص}{دس} = ٦س$ --- ①

$٢ص = ٨ ⟸ ص = ٤$

$ق^3(٨) = ٣س^4 + ٥ ⟸ (٢)^3 = ٣س^4 + ٥ ⟸ ٨ = ٣س^4 + ٥$

$⟸ ٣ = ٣س^4 ⟸ س^4 = ١ ⟸ س = \pm ١$ لكن $س > ٠$ ⟸ $\boxed{س = ١}$

إذن ① ⟸ $٣ق^2(٨) \times ق'(٨) \times ٢ \frac{دص}{دس} = ٦ \times ١$

$٣(٢)^2 \times ٢ \times ٢ \frac{دص}{دس} = ٦ ⟸ ٤٨ \frac{دص}{دس} = ٦$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٦}{٤٨} = \frac{١}{٨}$

⑩ إذا كان $ق(س) = \frac{[س-٢]}{ل(س)}$ ، $ق(\frac{١}{٢}) = ٢$ ، $ق'(\frac{١}{٢}) = ٣$ ، جد $ل'(\frac{١}{٢})$

عندما $س = \frac{١}{٢}$ تكون $[س-٢] = [\frac{١}{٢}-٢] = [\frac{-٣}{٢}] = -٢$

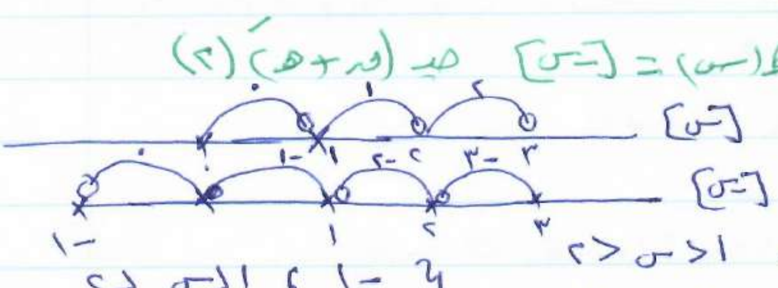
$\therefore ق(س) = \frac{-٢}{ل(س)} ⟸ ق'(س) = \frac{-٢ ل'(س)}{ل^2(س)}$

$ق'(\frac{١}{٢}) = \frac{-٢ ل'(\frac{١}{٢})}{ل^2(\frac{١}{٢})} = \frac{-٢ \times ل'(\frac{١}{٢})}{ل^2(\frac{١}{٢})}$ --- ①

$ق(\frac{١}{٢}) = \frac{[\frac{-٣}{٢}]}{ل(\frac{١}{٢})} ⟸ ٢ = \frac{-٢}{ل(\frac{١}{٢})} ⟸ \boxed{ل(\frac{١}{٢}) = -١}$

① ⟸ $٣ = \frac{-٢ ل'(\frac{١}{٢})}{(-١)^2} ⟸ ٣ = -٢ ل'(\frac{١}{٢}) ⟸ \frac{-٣}{٢} = ل'(\frac{١}{٢})$

⑪ إذا كان $ق(س) = [س]$ ، $هـ(س) = [-س]$ جد $(ق+هـ)'(٢)$



$$[س] + [-س] = \begin{cases} ١ + -٢ & ، ١ < س < ٢ \\ ٢ + -٣ & ، ٢ < س < ٣ \\ صفر & ، س = ٢ \end{cases} = \begin{cases} -١ & ، ١ < س < ٢ \\ -١ & ، ٢ < س < ٣ \\ ٠ & ، س = ٢ \end{cases}$$

∴ $(ق+هـ)(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

∴ $(ق+هـ)'(٢)$ غير موجودة.

(١٢) ق(س) = |٢س − س²| ، جد قيم س ∈ [−١ ، ١] حيث قَ(س) غير موجودة

قَ(س) غير موجودة عند اطراف الفترة المغلقة −١ ، ١

وكذلك عند اصفار الاقتران المطلق ٢س − س² = ٠

س(٢ − س) = ٠ ⇐ اما س = ٠ ∈]−١ ، ١[

او س = ٢ ∉]−١ ، ١[

∴ قيم س هي {−١ ، ٠ ، ١}

(١٣) ق(س) = ٣أ س² + ب س + جـ ، هـ(س) = ٣ب س² + أ س + جـ

جد س ، بحيث قَ(س) = هَ(س)

قَ(س) = ٦أ س + ب

هَ(س) = ٦ب س + أ ⇐ قَ(س) = هَ(س) ⇐ ٦أ س + ب = ٦ب س + أ

⇐ ٦أ س + ب = ٦ب س + أ ⇐ ٦أ س + ب − ٦ب س − أ = صفر

٦س(أ − ب) − (أ − ب) = صفر

(أ − ب)(٦س − ١) = صفر ⇐ اما أ = ب أو س = $\frac{1}{6}$

اذا كانت أ = ب ⇐ ق = هـ ⇐ س = جميع الاعداد الحقيقية

⇐ س ∈ ح

(١٤) اذا كان ص = س² + ١ ، ما قيمة $\frac{دص}{دس} - \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$\frac{دص}{دس}$ = ٢س

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ = $\frac{س^2 + ٢س هـ + هـ^2 + ١ - س^2 - ١}{هـ}$

= $\frac{٢س هـ + هـ^2}{هـ}$ = ٢س + هـ

⇐ $\frac{دص}{دس} - \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ٢س − ٢س − هـ = −هـ

حيث هـ = Δس

(١٥) اذا كانت ص = أ س$^{-ن+١}$ + ب س^{ن} ، اثبت أن س² صً = (ن² − ن) ص

صَ = أ(−ن+١) س$^{-ن}$ + ب ن س$^{ن-١}$ ⇐ صً = −أ ن(−ن+١) س$^{-ن-١}$ + ب ن(ن−١) س$^{ن-٢}$

س² صً = أ ن(ن−١) س$^{-ن-١+٢}$ + ب ن(ن−١) س$^{ن-٢+٢}$ = أ ن(ن−١) س$^{-ن+١}$ + ب ن(ن−١) س^{ن}

س² صً = ن(ن−١)(أ س$^{-ن+١}$ + ب س^{ن})

س² صً = (ن² − ن) ص

(16) $ق(س) = \frac{أس + ب}{س - 1}$ ، $ق''(2) = 4$ ، جد $ق'(2)$

$$ق'(س) = \frac{(س-1) \times أ - (أس + ب)}{(س-1)^2} = \frac{أس - أ - أس - ب}{(س-1)^2}$$

$$ق'(س) = \frac{-(أ+ب)}{(س-1)^2} \Leftarrow ق''(س) = \frac{-(أ+ب) \times 2(س-1)}{(س-1)^4}$$

$$ق''(س) = \frac{2(أ+ب)}{(س-1)^3} = \frac{-(أ+ب)}{(س-1)^2} \times \frac{-2}{(س-1)}$$

$$ق''(س) = ق'(س) \times \frac{-2}{س-1} \Leftarrow ق''(2) = ق'(2) \times \frac{-2}{2-1}$$

$$4 = -2\, ق'(2) \Leftarrow \boxed{ق'(2) = -2}$$

(17) إذا كان $ق(س) = س^3$ ، جد $\lim_{س \to 1} \frac{ق^{(3)}(س) - ق^{(3)}(1)}{س - 1}$

$$ق'(س) = 3س^2 \Leftarrow ق''(س) = 6س ، ق'''(س) = 6$$

$$\lim_{س \to 1} \frac{ق^{(3)}(س) - ق^{(3)}(1)}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{6 - 6}{س - 1} = صفر$$

أو مباشرة $\lim_{س \to 1} \frac{ق^{(3)}(س) - ق^{(3)}(1)}{س - 1} = ق^{(4)}(1) = صفر$.

(18) إذا كان $ق'(س) = -هـ(س)$ ، $هـ'(س) = ق(س)$ ، $ل(س) = \frac{هـ(س)}{ق(س)}$

اثبت أن $ل'(س) = ل^2(س) + 1$

$$ل'(س) = \frac{ق(س) \times هـ'(س) - هـ(س) \times ق'(س)}{ق^2(س)}$$

$$= \frac{ق(س) \times ق(س) - هـ(س) \times -هـ(س)}{ق^2(س)}$$

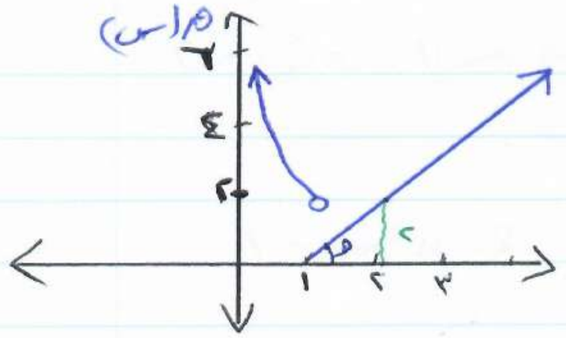
$$= \frac{ق^2(س) + هـ^2(س)}{ق^2(س)} = \frac{ق^2(س)}{ق^2(س)} + \frac{هـ^2(س)}{ق^2(س)}$$

$$ل'(س) = 1 + \left(\frac{هـ(س)}{ق(س)}\right)^2$$

$$ل'(س) = 1 + ل^2(س) .$$

(19) الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)

جد $\lim\limits_{س \to 2} \frac{ق(س) - 2}{س - 2}$



الحل: $\lim\limits_{س \to 2} \frac{ق(س) - 2}{س - 2} = \lim\limits_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(2)}{س - 2}$

$= ق'(2) = ظاهـ = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{2}{1} \Leftarrow ق'(2) = 2$

(20) إذا كان ق(س) = $س^2$ ، جد $\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق\left(\frac{1}{1+هـ}\right) - ق(1)}{هـ}$

$\lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق\left(\frac{1}{1+هـ}\right) - ق(1)}{هـ} = \lim\limits_{هـ \to 0} \frac{ق\left(\frac{1}{1+هـ}\right) - ق(1)}{\frac{1}{1+هـ} - 1} \times \frac{\frac{1}{1+هـ} - 1}{هـ}$

$= ق'(1) \times \lim\limits_{هـ \to 0} \frac{1 - (1+هـ)}{هـ(1+هـ)} = ق'(1) \times \lim\limits_{هـ \to 0} \frac{-هـ}{هـ(1+هـ)}$

$\therefore$ النهاية $= ق'(1) \times \frac{-1}{1+0}$

$= 2(1) \times -1 = (-2)$.

$ق'(س) = 2س$

(21) معتمداً على الجدول المرافق جد

س	ق	ق'	هـ	هـ'	ق''	هـ''
1	2	−1	3	5	−2	1

① $(ق \times هـ')'(1)$

$= ق(1) \times هـ''(1) + هـ'(1) \times ق'(1)$

$= 2 \times 1 + 5 \times -1 = 2 - 5 = -3$

② ل'(1) حيث $ل(س) = \frac{س^2 ق(س)}{هـ(س)}$

$ل'(س) = \frac{هـ(س)\left(س^2 \times ق'(س) + ق(س) \times 2س\right) - س^2 ق(س) \times هـ'(س)}{هـ^2(س)}$

$ل'(1) = \frac{هـ(1)\left(1^2 ق'(1) + ق(1) \times 2(1)\right) - 1^2 ق(1) \times هـ'(1)}{هـ^2(1)}$

$= \frac{3 \times (-1 \times 1 + 2 \times 2) - 1 \times 2 \times 5}{3^2} = \frac{3 \times 3 - 10}{9} = \frac{9 - 10}{9}$

$= \frac{-1}{9}$

(٣) $\frac{d}{d\text{س}}\left(\text{ق}(1) \times \frac{d}{d\text{س}}\,\text{هـ}(\text{س})\right) = \frac{d}{d\text{س}}\left(2 \times \text{هـ}'(\text{س})\right) = 2\,\text{هـ}''(\text{س})$

(٤) $\frac{d}{d\text{س}}\left(\frac{2}{\text{ق}(\text{س})}\right)$ عندما س = ١

$\frac{d}{d\text{س}}\left(\frac{2}{\text{ق}(\text{س})}\right) = \frac{-2\,\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}^2(\text{س})}$ عندما س = ١

$= \frac{-2\,\text{ق}'(1)}{\text{ق}^2(1)} = \frac{-2 \times -1}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(٥) $\frac{(\text{ق} + 2\text{ق}')'(1)}{(\text{ق}\cdot\text{ق}')(1)} = \frac{\text{ق}'(1) + 2\,\text{ق}''(1)}{\text{ق}(1) \times \text{ق}'(1)} = \frac{-1 + 2 \times -2}{2 \times -1}$

$= \frac{-1 - 4}{-2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$

(٦) $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{9\,\text{ق}(1+\text{هـ}) - (9+\text{هـ})\,\text{ق}(1)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{9\,\text{ق}(1+\text{هـ}) - (9+\text{هـ})2}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{9\,\text{ق}(1+\text{هـ}) - 2(9+\text{هـ})}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{9\,\text{ق}(1+\text{هـ}) - 18}{\text{هـ}} - \frac{2\text{هـ}}{\text{هـ}}$

$= 9 \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - 2}{\text{هـ}} - 2 = 9 \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{ق}(1+\text{هـ}) - \text{ق}(1)}{\text{هـ}} - 2$

$= 9 \times \text{ق}'(1) - 2 = 9 \times -1 - 2 = -9 - 2 = -11$

(٧) $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{ق}'(4\text{س} - 3) + 1}{\text{س} - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ← ب لوبيتال

$= \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{ق}''(4\text{س} - 3) \times 4}{1} = \text{ق}''(1) \times 4 = -2 \times 4 = -8$

طريقة أخرى:

$\text{النهاية} = \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{ق}'(4\text{س} - 3) - \text{ق}'(1)}{\text{س} - 1} = \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{ق}'(4\text{س} - 3) - \text{ق}'(1)}{4\text{س} - 3 - 1} \times \frac{4\text{س} - 3 - 1}{\text{س} - 1}$

$= \text{ق}''(1) \times \lim_{\text{س} \to 1} \frac{4\text{س} - 4}{\text{س} - 1} = -2 \times \lim_{\text{س} \to 1} \frac{4(\text{س} - 1)}{\text{س} - 1} = -2 \times 4$

$= -8$

(٢٢) إذا كان ق(س) = |أس − ب| ، قَ(١) غير موجودة ، قَ(٢) = ٣ جد أ ، ب (الموجبتين).

بما أن قَ(١) غير موجودة ⟸ ١ صفر للاقتران أس − ب

⟸ أ(١) − ب = صفر ⟸ $\boxed{\text{أ = ب}}$

قَ(٢) = ٣ ⟸ أ = ٣

⟸ ب = ٣

ب − أس ، أس − ب (عند ١)

الشرح: يكون ق(س) = أس − ب

⟸ قَ(س) = أ

(٢٣) إذا كان ق(س) = س^٤ + جا س ، جد قَ(π) باستخدام التعريف

$$\text{قَ}(\pi) = \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(\pi)}{\text{س} - \pi} = \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{س}^4 + \text{جا س} - (\pi^4 + \text{جا}\,\pi)}{\text{س} - \pi}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{س}^4 - \pi^4 + \text{جا س}}{\text{س} - \pi} = \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{س}^4 - \pi^4}{\text{س} - \pi} + \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{جا س}}{\text{س} - \pi}$$

$$= \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{(\text{س}^2 - \pi^2)(\text{س}^2 + \pi^2)}{\text{س} - \pi} + \lim_{\text{س}\to\pi} \frac{\text{جا}(\pi - \text{س})}{\text{س} - \pi}$$

(جا س = جا(π − س))

$$= 4\pi^3 + \lim_{\text{ع}\to 0} \frac{\text{جا ع}}{-\text{ع}} = 4\pi^3 - 1$$

(٢٤) إذا كان ق(س) كثير حدود ، $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س ق(س)} - 6}{\text{س} - 2} = 8$ ، جد $\frac{د}{د\text{س}}\left(\text{ق}^2(\text{س})\sqrt{2\text{س}}\right)$ عند س = ٢

$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س ق(س)} - 6}{\text{س} - 2} = 8$ ، بما أن النهاية موجودة وتعويض (المقام) = صفر

إذن تعويض البسط = صفر

⟸ $\lim_{\text{س}\to 2} \text{س ق(س)} - 6 = 0$ ⟸ ٢ ق(٢) − ٦ = ٠ ⟸ ق(٢) = ٣

$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س ق(س)} - 6}{\text{س} - 2} = 8$ بما أن النهاية بصورة ٠/٠ ⟸ إذن حسب لوبيتال

$\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س قَ(س)} + \text{ق(س)} \times 1}{1} = 8$ ⟸ ٢قَ(٢) + ق(٢) = ٨

⟸ ٢قَ(٢) = ٥ ⟸ $\boxed{\text{قَ(٢)} = \frac{5}{2}}$

$$\frac{د}{د\text{س}}\left(\text{ق}^2(\text{س}) \times \sqrt{2\text{س}}\right) = \text{ق}^2(\text{س}) \times \frac{2}{2\sqrt{2\text{س}}} + \sqrt{2\text{س}} \times 2\,\text{ق(س)} \times \text{قَ(س)}$$

عندما س = ٢ ⟸ $\text{ق}^2(2) \times \frac{2}{2\sqrt{4}} + \sqrt{4} \times 2\,\text{ق}(2) \times \text{قَ}(2)$

$$= 9 \times 1 + 2 \times 2 \times 3 \times \frac{5}{2} = 9 + 30 = 39$$

(٢٥) إذا كان $ق(١) = ٢$ ، $هـَ(١) = ٣$ ، $هـ(١) = ١٢$ ، $قَ(١) = -\sqrt{٣}$

$ل(س) = \frac{|س - ٥|\, هـ(س)}{ق(س)}$ ، جد $لَ(١)$

$$|س - ٥| = \begin{cases} ٥ - س ، & س < ٥ \\ س - ٥ ، & س \geq ٥ \end{cases}$$

عندما $س = ١$ يكون $|س - ٥| = ٥ - س$

$∴ ل(س) = \frac{(٥ - س)\, هـ(س)}{ق(س)} \Leftarrow لَ(س) = \frac{ق(س)\left[(٥ - س)\, هـَ(س) + هـ(س) \times -١\right] - (٥ - س)\, هـ(س) \times قَ(س)}{ق^٢(س)}$

$$لَ(١) = \frac{ق(١)\left[(٥ - ١)\, هـَ(١) + هـ(١) \times -١\right] - (٥ - ١)\, هـ(١) \times قَ(١)}{ق^٢(١)}$$

$$= \frac{٢(٤ \times ٣ - ١٢) - ٤ \times ١٢ \times -\sqrt{٣}}{٢^٢} = \frac{٠ - ٤٨\sqrt{٣}}{٤} = -١٢\sqrt{٣}$$

(٢٦) إذا كان $قَ(س) = س^٣ + س$ ، $ل(١) = ٢$ ، $لَ(١) = ٢$ ، $لً(١) = ٥$

جد $(ق \circ ل)''(١)$

$قً(س) = ٣س^٢ + ١$ ، $ق'''(س) = ٦س$

$(ق \circ ل)'(س) = قَ(ل(س)) \times لَ(س)$

$(ق \circ ل)''(س) = قَ(ل(س)) \times لً(س) + لَ(س) \times قً(ل(س)) \times لَ(س)$

$(ق \circ ل)''(١) = قَ(ل(١)) \times لً(١) + لَ(١) \times قً(ل(١)) \times لَ(١)$

$= قَ(٢) \times ٥ + ٢ \times قً(٢) \times ٢$

$= (٣(٢)^٢ + ١) \times ٥ + ٢ \times ٦(٢) \times ٢$

$= ١٣ \times ٥ + ٢ \times ١٢ \times ٢ = ٦٥ + ٤٨ = ١١٣$

(٢٧) إذا كان $جاس = \frac{١}{٢} جاص$ ، اثبت أن $(صَ)^٢ = ٣ قا^٢ص + ٢$

نشتق الطرفين ضمنياً $\Leftarrow جتاس = \frac{١}{٢} جتاص\, صَ$

$صَ = ٢ \frac{جتاس}{جتاص} \Leftarrow صَ = ٢ جتاس\, قاص$

$(صَ)^٢ = ٤ جتا^٢س\, قا^٢ص$

$= ٤(١ - جا^٢س)\, قا^٢ص = ٤(١ - \frac{١}{٢} جا^٢ص)\, قا^٢ص$

$= ٤(١ - \frac{١}{٢}(١ - جتا^٢ص))\, قا^٢ص = ٤(١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} جتا^٢ص)\, قا^٢ص$

$= ٤(\frac{١}{٢} قا^٢ص + \frac{١}{٢} \cancel{جتا^٢ص\, قا^٢ص})$

$= ٢ قا^٢ص + ٢$

https://www.wepal.net/library/?app=content.list&level=19&subject=2&type=5

المزيد من هنا

(٢٨) ف(ن) = ٢ جا^2 $\frac{ن}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن ، ن ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، جد التسارع عندما السرعة = $\sqrt{٣}$ م/ث

ع = ف' = ٢ × (٢ جا $\frac{ن}{٢}$ جتا $\frac{ن}{٢}$) × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ع = جا ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ عندما ع = $\sqrt{٣}$ ⟸ $\sqrt{٣}$ = جا ن + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

⟸ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = جا ن ⟸ ن = $\frac{\pi}{٣}$ أو ن = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∉]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ت = ع' = جتا ن

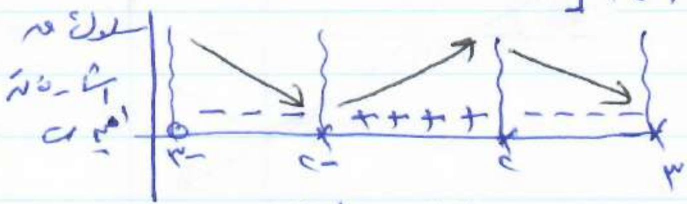
ت($\frac{\pi}{٣}$) = جتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ م/ث^2 .

(٢٩) اذا كان ق(س) = $-\frac{١}{٣}$ س^3 + ٤س + ١ ، س ∈ [-٣ ، ٣] جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وفترات التقعر ونقط الانعطاف لمنحنى ق(س) وكذلك زاوية الانعطاف

ق(س) متصل لانه كثير حدود

ق'(س) = -س^2 + ٤ ⟸ ق' = ٠ ⟸ -س^2 + ٤ = ٠

س^2 = ٤ ⟸ س = ±٢ ∈]-٣ ، ٣[



ق(س) متناقصة]-٣ ، -٢] وفي [٢ ، ٣]

ق(س) تزايدية [-٢ ، ٢]

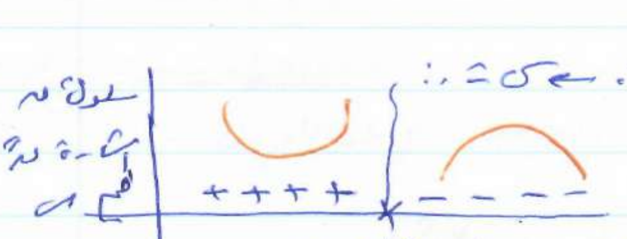
عند س = -٢ قيمة صغرى محلية

هي ق(-٢) = $\frac{٨}{٣}$ - ٨ + ١ = -٧ + $\frac{٨}{٣}$ = $-\frac{١٣}{٣}$ مطلقة

عند س = ٢ قيمة عظمى محلية هي ق(٢) = $-\frac{٨}{٣}$ + ٨ + ١ = $\frac{١٩}{٣}$ مطلقة

عند س = ٣ قيمة صغرى محلية هي ق(٣) = -٩ + ١٢ + ١ = ٤

ق''(س) = -٢س ⟸ ق''(س) = ٠ ⟸ س = ٠



ق(س) مقعرة للأعلى]-٣ ، ٠]

ق(س) مقعرة للأسفل [٠ ، ٣[

عند س = ٠ نقطة انعطاف هي (٠ ، ق(٠)) = (٠ ، ١) لان ق(س) متصل عندها ويتغير مجال التقعر حولها

زاوية الانعطاف ⟸ ظا هـ = ق'(٠) = ٤ ⟸ هـ = ظا$^{-1}$(٤)

https://www.wepal.net/library/?app=content.list&level=19&subject=2&type=5
المزيد من هنا

(٣٠) جد معادلة المماس المشترك لمنحنى الاقترانين ق(س) = س³ + ٢ ، هـ(س) = ٢س² + ٢ عند النقطة الواقعة على منحنييهما.

نجد نقط تقاطع المنحنيين ، نجعل ق = هـ

س³ + ٢ = ٢س² + ٢ ⟸ س³ − ٢س² = ٠ ⟸ س² (س − ٢) = ٠ ∴

س² = ٠ ⟵ $\boxed{\text{س} = 0}$ أو س − ٢ = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = 2}$

عندما س = ٠ ⟵ ق(٠) = ٢ ⟵ النقطة (٠، ٢)

عند س = ٢ ⟵ ق(٢) = ٨ + ٢ = ١٠ ⟵ النقطة (٢، ١٠)

نجد ميل المماس ⟸ لهما نفس الميل عند نقط التقاطع

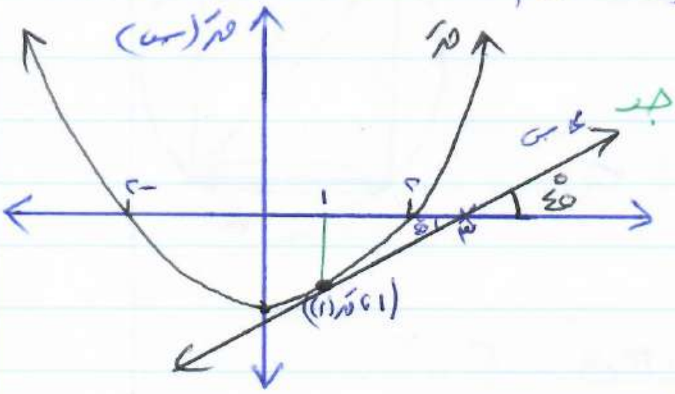
قَ(س) = ٣س² ، هـَ(س) = ٤س

قَ(٠) = ٠ ، هـَ(٠) = ٠ ⟵ لهما نفس الميل ⟸ م = صفر

⟸ المماس // محور السينات ⟸ معادلته هي ص = ص١ ⟸ $\boxed{\text{ص} = 2}$

قَ(٢) = ١٢ ، هـَ(٢) = ٨ ⟸ ليس نفس الميل ⟸ مماسان مختلفان

اذن معادلة المماس هي $\boxed{\text{ص} = 2}$



(٣١) معتمداً على شكل قَ(س) المجاور جد

① القيم القصوى المحلية لمنحنى ق(س)

سلوك ق	↗	↘	↗
قيم س		−٢ ، ٢	
إشارة قَ	+ + + +	− − − −	+ +

عند س = −٢ ⟵ قيمة عظمى محلية هي ق(−٢)

عند س = ٢ ⟵ قيمة صغرى محلية هي ق(٢)

② مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) ونقط الانعطاف

سلوك قَ	قَ متناقص	قَ متزايد
قيم س		
إشارة قً	− − − − −	+ + + + + + +

ق(س) مقعر للأسفل على]−∞ ، ٠[

ق(س) مقعر للأعلى على]٠ ، ∞[

النقطة (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف لاقتران ق(س) فيتصل عندها ويتغير مجال التقعر حولها

③ $\frac{د}{دس}\left(\frac{\text{قَ(س)}}{\text{س}+1}\right)$ عندما س = ١

$= \frac{(\text{س}+1) \times \text{قً(س)} - \text{قَ(س)}}{(\text{س}+1)^2}$

ظا٤٥ = $\frac{\text{قَ(1)}}{2}$

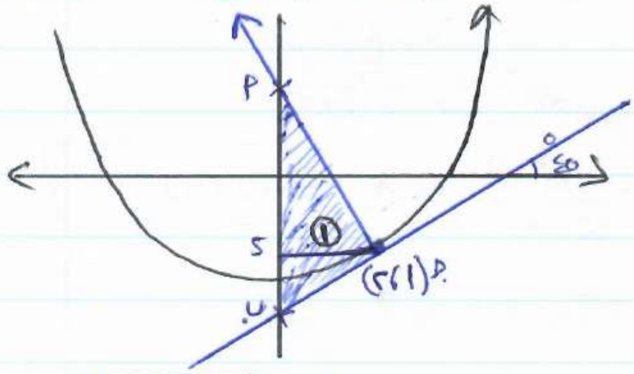
قَ(١) = ٢

عندما س = ١ ⟸ $\frac{2 \times \text{قً(1)} - \text{قَ(1)}}{(1+1)^2} = \frac{2 \times \text{ظا}45 - 2}{4} = \frac{\text{صفر}}{4}$

= صفر.

https://www.wepal.net/library/?app=content.list&level=19&subject=2&type=5
المزيد من هنا

(٤) مساحة المثلث المكون من محور ص والمماس والعمودي عليه للمنحنى ق(س) المرسوم عند النقطة (١، ق(١))



مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أب × جـ ء

$= \frac{١}{٢} \times ١ \times$ أ ء

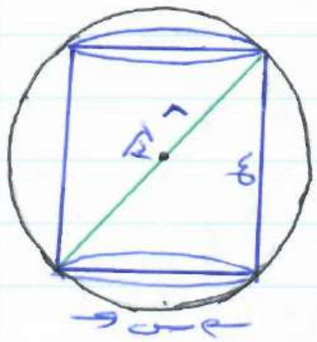
ميل المماس = ظا ٤٥

$١ = \frac{٢ + ب}{١ - ٠}$ ⇐ $\boxed{ب = ٢}$

ميل العمودي أ جـ = −١ = $\frac{٢ - أ}{١ - ٠}$ ⇐ −١ = ٢ − أ ⇐ $\boxed{أ = ٣}$

إذن مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times ٥ = ٢٫٥$ وحدة مربعة

(٣٢) أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ٣√٣ سم



حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \pi (\frac{١}{٢} س)^٢ \times ع$

ح $= \frac{\pi}{٤} س^٢ ع$

من فيثاغورس ⇐ $س^٢ + ع^٢ = (٦\sqrt{٣})^٢$

$س^٢ + ع^٢ = ٣٦ \times ٣$

$س^٢ = ١٠٨ - ع^٢$

∴ ح $= \frac{\pi}{٤} (١٠٨ - ع^٢) ع = ٢٧\pi ع - \frac{\pi}{٤} ع^٣$

ح$' = ٢٧\pi - \frac{٣\pi}{٤} ع^٢$ ⇐ $٠ = ٢٧\pi - \frac{٣\pi}{٤} ع^٢$

$٢٧\pi = \frac{٣\pi}{٤} ع^٢$ ⇐ $ع^٢ = ٣٦$ ⇐ $\boxed{ع = ٦}$

ح$'' = -\frac{٣\pi}{٢} ع$ ⇐ ح$''(٦) < ٠$ ⇐ عند ع = ٦ قيمة عظمى

ح$_{\text{أسطوانة}} = ٢٧\pi ع - \frac{\pi}{٤} ع^٣ = ٢٧\pi(٦) - \frac{\pi}{٤}(٦)^٣$

$= ١٦٢\pi - ٩\pi = ١٥٣\pi$ سم³

(٣٣) إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٢س ، $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٤س}{ق(٢) - ق(س)} = ٨$ جد قيمة أ

$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٤س}{ق(٢) - ق(س)} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{\frac{س^{٣} - ٤س}{س - ٢}}{-\frac{(ق(س) - ق(٢))}{س - ٢}} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{\frac{س(س^{٢} - ٤)}{س - ٢}}{-ق'(٢)}$

$= -\frac{\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س\cancel{(س - ٢)}(س + ٢)}{\cancel{س - ٢}}}{ق'(٢)} = ٨ \Leftarrow -\frac{٢(٤)}{ق'(٢)} = ٨ \Leftarrow \boxed{ق'(٢) = -١}$

$\Leftarrow$ ق'(٢) = أ(٢)٢ + ٢ $\Leftarrow$ −١ = ٤أ + ٢ ← أ = $-\frac{٣}{٤}$

أو حسب لوبيتال $\Leftarrow \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٣س^{٢} - ٤}{-ق'(س)} = ٨ \Leftarrow \frac{١٢ - ٤}{-ق'(٢)} = ٨$

$\Leftarrow$ ٨ = −٨ق'(٢) ← $\boxed{ق'(٢) = -١}$

(٣٤) ق(س) = $\begin{cases} ٩ - س^{٣} & ، س \neq ٢ \\ ٥س & ، س = ٢ \end{cases}$ جد ق'(٢)

ق(س) غير متصل عند س = ٢ $\Leftarrow$ ق'(٢) غ.م

(٣٥) إذا كان ق(س) = ٢س × ع(٥س) ، هـ(س) = $\frac{٣٠ - س}{٧}$ تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند (٢، ق(٢)) جد ع$''$(١٠)

ميل العمودي = $-\frac{١}{٧}$ ← ميل المماس = ٧ ← $\boxed{ق'(٢) = ٧}$

ق(٢) = هـ(٢) ← ق(٢) = $\frac{٣٠ - ٢}{٧}$ = ٤

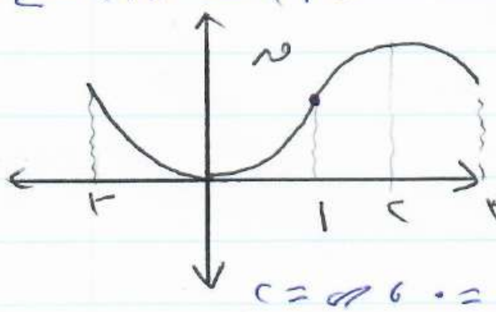
ق(٢) = ٢ × ٢ × ع(١٠) $\Leftarrow$ ٤ = ٤ ع(١٠) ← $\boxed{١ = ع(١٠)}$

الآن ق'(س) = ٢س × ع'(٥س) × ٥ + ع(٥س) × ٢

ق'(٢) = ٤ × ع'(١٠) × ٥ + ع(١٠) × ٢

٧ = ٢٠ ع'(١٠) + ٢ $\Leftarrow$ ٥ = ٢٠ ع'(١٠) $\Leftarrow$ ع'(١٠) = $\frac{١}{٤}$

(٣٦) معتمداً شكل ق(س) المجاور



ق متناقص [−١، ٠] ← ق' < ٠]−١، ٠[

ق متزايد [٠، ٢] ← ق' > ٠]٠، ٢[

ق متناقص [٢، ٣] ← ق' < ٠]٢، ٣[

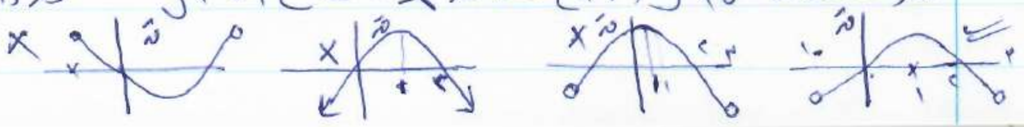
ق' = صفر ← لأن مماس أفقي للمنحنى عند س = ٠ ، س = ٢

ق' غ.م عند س = −١ ، ٣

ق مقعر للأعلى [−١، ١] $\Leftarrow$ ق$''$ > ٠]−١، ١[

ق مقعر للأسفل [١، ٣] $\Leftarrow$ ق$''$ < ٠]١، ٣[

ق$''$(١) = ٠ ← ق له نقطة انعطاف عند س = ١



(٣٧) إذا كانت $ص = \sqrt{٢\sqrt{س^٢+١} + س}$ بيّن أن
$$٢\sqrt{س^٢+١}\ صَ = ص$$

$ص = \sqrt{\sqrt{س^٢+١} + ٢}$ بتربيع الطرفين

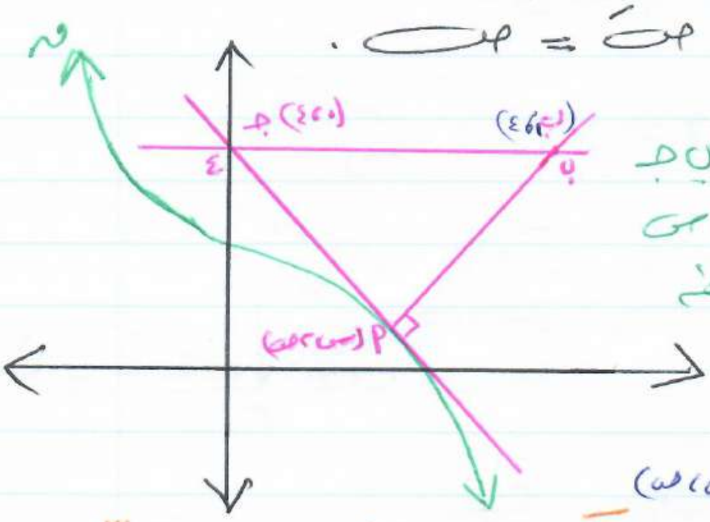
$ص^٢ = \sqrt{س^٢+١} + س$ نشتق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـ س

$٢ص\,صَ = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}} + ١$ لكن $ص^٢ - \sqrt{س^٢+١} = س$

$٢ص\,صَ = \frac{ص^٢ - \sqrt{س^٢+١}}{\sqrt{س^٢+١}} + ١ \Leftarrow ٢ص\,صَ = \frac{ص^٢}{\sqrt{س^٢+١}} - \frac{\sqrt{س^٢+١}}{\sqrt{س^٢+١}} + ١$

$٢ص\,صَ = \frac{ص^٢}{\sqrt{س^٢+١}} - ١ + ١ \Leftarrow ٢ص\,صَ\sqrt{س^٢+١} = ص^٢$ ÷ص

$\Leftarrow ٢\sqrt{س^٢+١}\ صَ = ص$.



(٣٨) من الشكل المجاور جد مساحة المثلث أ ب جـ المكوّن من المماس والعمودي على المماس للاقتران $ق(س) = ٢ - س^٣$ عند نقطة التماس أ (س، ص)

نجد احداثيات أ

ميل المماس = ميل المنحنى عند (س، ص)

$\frac{ص - ٤}{س - ٠} = قَ(س)$

لكن $ص = ق(س) = ٢ - س^٣$

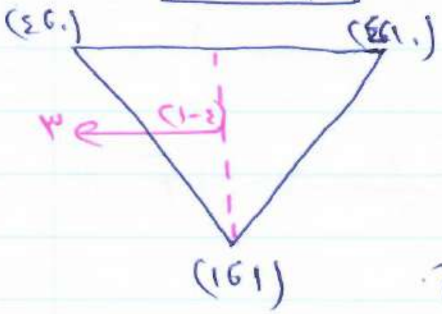
$\frac{ص - ٤}{س} = -٣س^٢ \Leftarrow \frac{٢ - س^٣ - ٤}{س} = -٣س^٢ \Leftarrow -٢ - س^٣ = -٣س^٣$

$\Leftarrow -٢ = -٢س^٣ \Leftarrow \boxed{س = ١} \Leftarrow ص = ق(١) = ٢ - (١)^٣ = ١$

اذن نقطة التماس هي (١، ١)

نجد احداثيات ب   ميل العمودي $= \frac{-١}{قَ(١)} \Leftarrow \frac{ص - ٤}{س - ب_١} = \frac{-١}{-٣(١)^٢}$

$\Leftarrow \frac{١ - ٤}{١ - ب_١} = \frac{١}{٣} \Leftarrow -٩ = -ب_١ + ١ \Leftarrow \boxed{ب_١ = ١٠}$



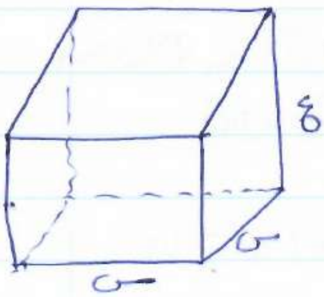
∴ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times (١٠ - ٠) \times (٤ - ١)$

$= \frac{١}{٢} \times ١٠ \times ٣ = ١٥$ وحدة مربعة.

https://www.wepal.net/library/?app=content.list&level=19&subject=2&type=5
المزيد من هنا

(٣٩) زيد صنع صندوق مفتوح على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وحجمه (٢١٦) دسم^٣ ، إذا كانت تكلفة الدسم^٢ من القاعدة (٥٠) دينار وسم الجوانب (٢٥) دينار ، ما أبعاد الصندوق لتكون تكاليف صنعه أقل ما يمكن؟



حجم الصندوق = مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = س^٢ × ع

٢١٦ = س^٢ × ع ⟸ ع = $\frac{٢١٦}{س^٢}$

التكاليف = تكاليف القاعدة + تكاليف الجوانب

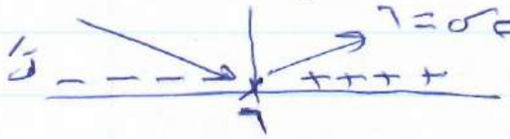
التكاليف = ت = ٥٠ س^٢ + ٤ × ٢٥ × س ع

ت = ٥٠ س^٢ + ١٠٠ س ع

ت = ٥٠ س^٢ + ١٠٠ س ($\frac{٢١٦}{س^٢}$) = ٥٠ س^٢ + $\frac{٢١٦٠٠}{س}$

ت' = ١٠٠ س − $\frac{٢١٦٠٠}{س^٢}$ ⟸ ٠ = ١٠٠ س − $\frac{٢١٦٠٠}{س^٢}$

$\frac{٢١٦٠٠}{س^٢}$ = ١٠٠ س ⟸ ٢١٦ = س^٣ ⟸ س = ٦



∴ عندما س = ٦ فيه صغرى مطلقة.

الطول = العرض = ٦ ، الارتفاع = $\frac{٢١٦}{٣٦}$ = ٦

∴ الصندوق مكعب.

(٤٠) إذا كان ق(س) = ٦ جتا(π س) ، هـ(س) = $\sqrt{٢س+٣}$ ، أجد (هـ' ∘ ق)'($\frac{١}{٣}$)

(هـ' ∘ ق)'($\frac{١}{٣}$) = هـ''(ق($\frac{١}{٣}$)) × ق'($\frac{١}{٣}$)

= هـ''(٦ جتا($\frac{π}{٣}$)) × −٦π جا($\frac{π}{٣}$)

= هـ''(٦ × $\frac{١}{٢}$) × −٦π × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= هـ''(٣) × −٣$\sqrt{٣}$ π

ق'(س) = −٦π جا(π س)

هـ'(س) = $\frac{١}{٢}$(٢س+٣)$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢

= (٢س+٣)$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢س+٣}}$

هـ''(س) = $-\frac{١}{٢}$(٢س+٣)$^{-\frac{٣}{٢}}$ × ٢

= $-\frac{١}{\sqrt{(٢س+٣)^٣}}$

= $-\frac{١}{\sqrt{(٩)^٣}}$ × −٣$\sqrt{٣}$ π = $-\frac{١}{٢٧}$ × −٣$\sqrt{٣}$ π

= $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ π

(٤١) من سطح برج ارتفاعه (ل) م قذف جسمان الأول رأسياً لأعلى حسب العلاقة $ف_1(ن) = ٤٠ن - ٥ن^2$ ، أما الثاني رأسياً لأسفل حسب العلاقة $ف_2(ن) = ٥ن^2$ ، اذا وصل الجسم الثاني للأرض قبل الجسم الأول بـ ٦ ثواني ، أوجد ما يلي

① قيمة ل ② سرعة الجسم الأول لحظة ارتطامه بالأرض

عند وصول الجسمين للأرض يكون $ف_2(ن-٦) = -ف_1(ن)$

$٥(ن-٦)^2 = -(٤٠ن - ٥ن^2)$

$٥ن^2 - ٦٠ن + ١٨٠ = -٤٠ن + ٥ن^2 \Leftarrow ١٨٠ = ٢٠ن$

$\Leftarrow \boxed{ن = ٩}$

اذن زمن الجسم الأول = ٩ ، زمن الجسم الثاني = ٩ − ٦ = ٣

① $ل = ف_2(٣) = ٥(٣)^2 = ٤٥$ م

② $ع_1(ن) = ف_1'(ن) = ٤٠ - ١٠ن$

$ع_1(٩) = ٤٠ - ١٠ \times ٩ = ٤٠ - ٩٠ = -٥٠$ م/ث.

(٤٢) اذا كان المستقيم $٤س - ص + ١ = صفر$ يمس منحنى الاقتران هـ(س) عند $س = ٢$ وكان $ق^3(٣س-١) = س^4 + ٢س^2 + ٥$ ، جد $\left(\frac{هـ}{ق}\right)'(٢)$

ميل المماس = $هـ'(٢) = \frac{-٤}{-١} = ٤ \Leftarrow \boxed{هـ'(٢) = ٤}$

$هـ(٢) = ص(٢) \Leftarrow ٨ - ص + ١ = ٠ \Leftarrow ص = ٩ \Leftarrow \boxed{هـ(٢) = ٩}$

$\left(\frac{هـ}{ق}\right)'(٢) = \frac{ق(٢) \times هـ'(٢) - هـ(٢) \times ق'(٢)}{ق^2(٢)}$

$= \frac{٢ \times ٤ - ٩ \times \frac{٥}{١٨}}{(٢)^2}$

$= \frac{٨ - \frac{٥}{٢}}{٤}$

$= \frac{\frac{١١}{٢}}{٤} = \frac{١١}{٨}$

$ق^3(٢) \Leftarrow ٣س - ١ = ٢$

$\Leftarrow س = ١$

$ق^3(٢) = (١)^4 + ٢(١)^2 + ٥$

$ق^3(٢) = ٨ \Leftarrow \boxed{ق(٢) = ٢}$

بالاشتقاق

$٣ق^2(٣س-١) ق'(٣س-١) \times ٣ = ٤س^3 + ٦س$

$٣ق^2(٢) ق'(٢) \times ٣ = ٤ + ٦$

$٩ \times ٤ ق'(٢) = ١٠ \Leftarrow ق'(٢) = \frac{٥}{١٨}$

(٤٣) إذا كان $س ص^2 + ص^2 + س = ٠$ ، أثبت أن $ص' = \frac{-ص^3}{٢س^2}$

$ص^2(س+١) = -س \Leftarrow ص^2 = \frac{-س}{(س+١)} \Leftarrow ٢ص ص' = \frac{-(س+١) + س \times ١}{(س+١)^2}$

$\Leftarrow ٢ص ص' = \frac{-١}{(س+١)^2}$ لكن $(س+١) = \frac{-س}{ص^2} \Leftarrow (س+١)^2 = \frac{س^2}{ص^4}$

$\Leftarrow ٢ص ص' = \frac{-١}{\frac{س^2}{ص^4}} \Leftarrow ٢ص ص' = \frac{-ص^4}{س^2} \Leftarrow ص' = -\frac{ص^3}{٢س^2}$

https://www.wepal.net/library/?app=content.list&level=19&subject=2&type=5

المزيد من هنا

(٤٤) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س + ظا س ، س ∈ $[0, \frac{\pi}{2}[$ الذي يعامد المستقيم ص = $-\frac{1}{3}$(س+2)

ميل العمودي = $-\frac{1}{3}$ ← ميل المماس = 3

⇐ ق'(س) = 3 ⇐ ق'(س) = 1 + قا²س

⇐ 3 = 1 + قا²س ⇐ 2 = قا²س ⇐ س = $\frac{\pi}{4}$ ∈ $[0, \frac{\pi}{2}[$

ق($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\pi}{4}$ + ظا($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{\pi}{4}$ + 1

∴ ص₁ = $\frac{\pi}{4}$ + 1

∴ معادلة المماس هي ص − ($\frac{\pi}{4}$ + 1) = 3(س − $\frac{\pi}{4}$)

⇐ ص − $\frac{\pi}{4}$ − 1 = 3س − $\frac{3\pi}{4}$ ⇐ ص = 3س − $\frac{\pi}{2}$ + 1

(٤٥) سقط جسم من ارتفاع (ل) م عن سطح الأرض سقوطاً حراً حيث أن المسافة بالأمتار بعد (ن) ثانية هي ف₁(ن) = 5ن² وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلى حسب العلاقة ف₂(ن) = 60ن − 5ن² فإذا تصادم الجسمان عندما فقد الجسم الثاني نصف سرعته الابتدائية وهو صاعد ، أجد ما يلي

① سرعة الجسم الأول لحظة التصادم ② قيمة الثابت ل

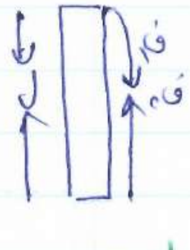
السرعة الابتدائية للجسم الثاني = ع₂(0)

ع₂ = ف₂' = 60 − 10ن ⇐ ع₂(0) = 60 − 10×0 = 60 م/ث

نصف السرعة الابتدائية ← ع = 30

30 = 60 − 10ن ← 10ن = 30 ← ن = 3

ع₁ = ف₁' = 10ن ← ع₁(3) = 10×3 = 30 م/ث



② لحظة التصادم يكون ل = ف₁ + ف₂

= 5ن² + 60ن − 5ن² = 60ن

لحظة التصادم يكون ن = 3 ← ل = 60×3 = 180 م

(٤٦) إذا كان س = ظا ص ، أثبت أن $\frac{ص''}{ص'}$ = −جا2ص

1 = قا²ص ص' ⇐ ص' = $\frac{1}{قا^2ص}$ = جتا²ص

ص'' = 2 جتاص × − جاص ص' ⇐ $\frac{ص''}{ص'}$ = −2 جاص جتاص

∴ $\frac{ص''}{ص'}$ = − جا2ص

(٤٧) اذا كان س = ظاص + قاص ، اثبت أن ص' = جتاص / س

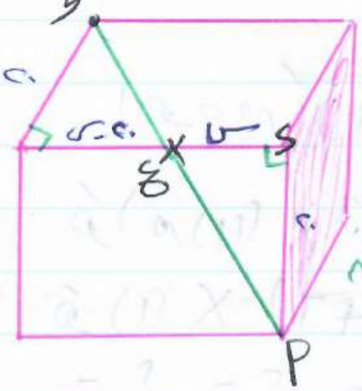
$$\text{س} = \frac{\text{جاص}}{\text{جتاص}} + \frac{1}{\text{جتاص}} \Leftarrow \text{س} = \frac{1+\text{جاص}}{\text{جتاص}}$$

$$1 = \frac{\text{جتاص} \times \text{جتاص ص}' - (1+\text{جاص}) \times -\text{جاص ص}'}{\text{جتا}^2\text{ص}}$$

$$1 = \frac{\text{جتا}^2\text{ص ص}' + \text{جا}^2\text{ص ص}' + \text{جاص ص}'}{\text{جتا}^2\text{ص}} = \frac{\text{ص}'(\text{جتا}^2\text{ص} + \text{جا}^2\text{ص}) + \text{جاص ص}'}{\text{جتا}^2\text{ص}}$$

$$1 = \frac{\text{ص}' + \text{جاص ص}'}{\text{جتا}^2\text{ص}} = \frac{\text{ص}'(1+\text{جاص})}{\text{جتا}^2\text{ص}} = \frac{\text{ص}' \times \text{س} \times \text{جتاص}}{\text{جتا}^2\text{ص}}$$

$$1 = \frac{\text{ص}' \times \text{س}}{\text{جتاص}} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{جتاص}}{\text{س}}$$



(٤٨) يشكل المجاور يمثل مكعب طول ضلعه (٢٠م) يراد مد انابيب من النقطة أ الى النقطة و مروراً بالنقطة ع جد طول (دع) ليكون طول الانابيب أقل ما يمكن

طول الانابيب = طول أع + طول ع و

$$\text{ل} = \sqrt{400+\text{س}^2} + \sqrt{400+(20-\text{س})^2}$$

$$\text{ل} = \sqrt{400+\text{س}^2} + \sqrt{400+400-40\text{س}+\text{س}^2}$$

$$\text{ل} = \sqrt{400+\text{س}^2} + \sqrt{800-40\text{س}+\text{س}^2}$$

$$\text{ل}' = \frac{2\text{س}}{2\sqrt{400+\text{س}^2}} + \frac{-40+2\text{س}}{2\sqrt{800-40\text{س}+\text{س}^2}}$$

$$\therefore 0 = \frac{\text{س}}{\sqrt{400+\text{س}^2}} - \frac{20-\text{س}}{\sqrt{800-40\text{س}+\text{س}^2}}$$

$$\frac{20-\text{س}}{\sqrt{800-40\text{س}+\text{س}^2}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{400+\text{س}^2}} \text{ بالتربيع } \Leftarrow \frac{400-40\text{س}+\text{س}^2}{800-40\text{س}+\text{س}^2} = \frac{\text{س}^2}{400+\text{س}^2}$$

$$\Leftarrow 160000 - 16000\text{س} + 400\text{س}^2 + \cancel{400\text{س}^2} - \cancel{40\text{س}^3} + \cancel{\text{س}^4} = \cancel{800\text{س}^2} - \cancel{40\text{س}^3} + \cancel{\text{س}^4}$$

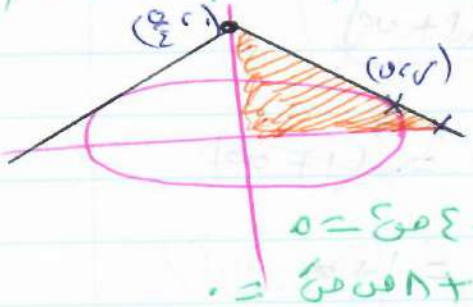
$$160000 - 16000\text{س} = 0 \;\therefore \longrightarrow \boxed{\text{س} = 10}$$

∴ عندما تكون س = ١٠ هي صغرى محلية

$$- - - \underset{10}{\times} + + +$$

∴ طول دع = ١٠م

(٤٩) ارسم من النقطة $(٠ ، \frac{٥}{٤})$ مماساً لمنحنى العلاقة $س^٢ + ٤ص^٢ = ٥$ جد معادلة هذا المماس $(س > ٠)$ ، ثم جد مساحة المثلث المكون من المماس ومحوري السينات والصادات



نفرض أن نقطة التماس هي $(س ، ص)$

فيكون ميل المماس = ميل المنحنى

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{دص}{دس}$$

$$س^٢ + ٤ص^٢ = ٥$$

$$٢س + ٨ص \, ص' = ٠$$

$$ص' = \frac{-٢س}{٨ص} = \frac{دص}{دس} = \frac{-س}{٤ص}$$

$$\frac{ص - \frac{٥}{٤}}{س - ٠} = \frac{-س}{٤ص}$$

$$٤ص^٢ - ٥ص = -س^٢ \Leftarrow ٤ص^٢ + س^٢ = ٥ص \Leftarrow ٥ = ٥ص$$

بالتعويض في معادلة القطع $\Leftarrow س^٢ + ٤(١)^٢ = ٥ \Leftarrow \boxed{ص = ١}$

$\Leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

$\therefore$ نقطة التماس هي $(١ ، ١)$

$$\Leftarrow م = \frac{دص}{دس} = \frac{-١}{٤}$$

معادلة المماس هي $ص - ١ = \frac{-١}{٤}(س - ١) \Leftarrow ٤ص - ٤ = -س + ١$

$$\Leftarrow ٤ص + س = ٥$$

لإيجاد مساحة المثلث نجد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات

$٤(٠) + س = ٥ \Leftarrow \boxed{س = ٥}$

$\therefore$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times \frac{٥}{٤} = \frac{٢٥}{٨}$

(٥٠) إذا كان $ق(س) = س(٢س - ١)^٣$ ، $هـ(س) = \frac{م}{س - ٢}$ وكان $(هـ \circ ق)'(١) = ١٤$

جد قيمة الثابت م؟

$$ق'(س) = س \times ٣(٢س - ١)^٢ \times ٢ + (٢س - ١)^٣ \times ١ = ٦س(٢س - ١)^٢ + (٢س - ١)^٣$$

$$هـ'(س) = \frac{-م}{(س - ٢)^٢}$$

$$(هـ \circ ق)'(١) = هـ'(ق(١)) \times ق'(١) = ١٤$$

$$١٤ = هـ'(١) \times (٦ + ١) \Leftarrow ١٤ = \frac{-م}{(١ - ٢)^٢} \times ٧$$

$$١٤ = -٧م \Leftarrow م = -٢$$

(٥١) إذا كان المستقيم ٣ص − س = أ يمس منحنى العلاقة $(ص+١)^٣ = س^٢$ عند النقطة (س١، ص١) جد قيمة الثابت أ حيث س > ٠، ص > ٠ ؟

ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{١}{٣}$ ← $\boxed{ص' = \frac{١}{٣}}$

نشتق منحنى العلاقة ضمنياً

$٣(ص+١)^٢ ص' = ٢س \Leftarrow ٢س = \frac{١}{٣} \times ٣(ص+١)^٢$

$٢س = (ص+١)^٢ \Leftarrow س = \frac{(ص+١)^٢}{٢}$

نعوض س في منحنى العلاقة ⇐ $(ص+١)^٣ = \left(\frac{(ص+١)^٢}{٢}\right)^٢$

$٤(ص+١)^٣ = (ص+١)^٤ \Leftarrow ٤(ص+١)^٣ - (ص+١)^٤ = \text{صفر}$

$(ص+١)^٣(٤ - (ص+١)) = \text{صفر} \Leftarrow ص+١ = ٠$ ← ص = −١ ×

$٤ = ص + ١$ ← $\boxed{ص = ٣}$

⇐ $س = \frac{(٣+١)^٢}{٢} = ٨$ ← نقطة التماس هي (٨، ٣)

نقطة التماس تحقق معادلة المستقيم ⇐ $٣ \times ٣ - ٨ = أ$ ← $\boxed{أ = ١}$

(٥٢) إذا كان $ص = \sqrt{٢ع^٢ + ١٢}$ ، ع = قاس ، أوجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

$ص = \sqrt{٢قا^٢س + ١٢} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٤ قاس \times قاس \times ظاس}{٢\sqrt{٢قا^٢س + ١٢}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{قا^٢س ظاس}{\sqrt{٢قا^٢س + ١٢}}$ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{(\sqrt{٢})^٢ \times ١}{\sqrt{٢(\sqrt{٢})^٢ + ١٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٤+١٢}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(٥٣) إذا كان $ق(\frac{-١}{٣}س) = (س^٤ + |١ - س|)$ جد ق'(١)

|١−س| ← + × −

$ق(\frac{-١}{٣}س) = (س^٤ + س)$

ق'(١) ⇐ $١ = \frac{-١}{٣} س$ ← $\boxed{س = -٣}$

$ق'(\frac{-١}{٣}س) \times \frac{-١}{٣} = ٢س + ١$ عندما س = −٣

$ق'(١) \times \frac{-١}{٣} = ٢(-٣) + ١$

$-ق'(١) = ٣(-٦+١) \Leftarrow -ق'(١) = -١٥$

$\boxed{ق'(١) = ١٥}$

(٥٤) قذفت كرة رأسياً للأعلى من سطح بناء ارتفاعه (ل) وفق العلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥ن² ، إذا كان أقصى ارتفاع يصله الجسم عن الأرض (٤٠٥)م ، جد سرعة ارتطام الكرة بسطح الأرض

نجد أقصى ما يصله الجسم عن سطح البناء ⇐ ع = ٦٠ − ١٠ن ⇐ ٠ = ٦٠ − ١٠ن

$\boxed{ن = ٦}$ ⇐ أقصى ارتفاع = ف(٦) = ٦٠(٦) − ٥(٦)² = ٣٦٠ − ١٨٠

أقصى ارتفاع = ١٨٠م

⇐ ارتفاع البناء = ٤٠٥ − ١٨٠ = ٢٢٥

عندما يرتطم الجسم بالأرض تكون ف = −٢٢٥

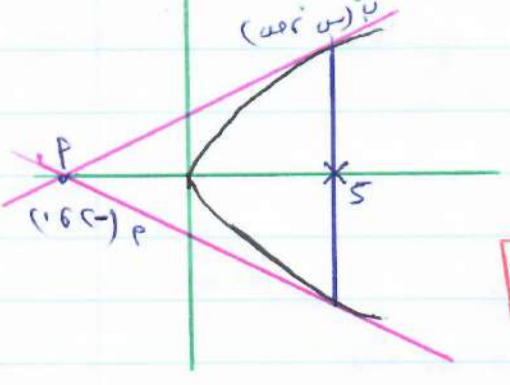
−٢٢٥ = ٦٠ن − ٥ن² ⇐ ٥ن² − ٦٠ن − ٢٢٥ = صفر ÷٥

ن² − ١٢ن − ٤٥ = ٠ ⇐ (ن − ١٥)(ن + ٣) = ٠ ⇐ $\boxed{ن = ١٥}$

سرعة ارتطام الجسم بالأرض = ع(١٥) = ٦٠ − ١٠ × ١٥

= ٦٠ − ١٥٠ = −٩٠م/ث .

(٥٥) من النقطة م(−٢، ٠) رسم مماسان لمنحنى العلاقة ص² = ٨س ، فمسّاه في النقطتين ب، ج ، أجد مساحة المثلث م ب ج



نفرض نقطة التماس (س، ص)

ميل المماس = ميل المنحنى عند نقطة التماس

$\frac{Δص}{Δس}$ = ص′

ص² = ٨س

٢ص ص′ = ٨

$\boxed{ص′ = \frac{٤}{ص}}$

$\frac{ص − ٠}{س + ٢} = \frac{٤}{ص}$

⇐ ص² = ٤س + ٨   لكن ص² = ٨س

٨س = ٤س + ٨ ⇐ ٤س = ٨ ⇐ $\boxed{س = ٢}$

⇐ ص² = ٨(٢) = ١٦ ⇐ ص = ±٤

مساحة المثلث م ب ج = ٢ × مساحة المثلث م ب د

= ٢ × ½ × م د × د ب

= ٢ × ½ × ٤ × ٤ = ١٦ وحدة مربعة .

(٥٦) باستخدام التعريف العام للمشتقة جد ق'(س) حيث ق(س) = س² قا(س) علماً بأن قا(س) قابل للاشتقاق؟

الحل: ق'(س) = $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{ع}^2 \text{ قا(ع)} - \text{س}^2 \text{ قا(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

نضيف ونطرح س² قا(ع)

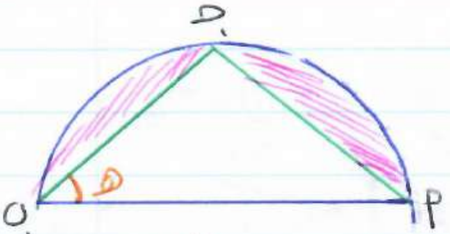
ق'(س) = $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{ع}^2 \text{ قا(ع)} - \text{س}^2 \text{ قا(ع)} + \text{س}^2 \text{ قا(ع)} - \text{س}^2 \text{ قا(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

= $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{قا(ع)}(\text{ع}^2 - \text{س}^2)}{\text{ع} - \text{س}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{س}^2 (\text{قا(ع)} - \text{قا(س)})}{\text{ع} - \text{س}}$

= $\lim_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{قا(ع)} \cancel{(\text{ع} - \text{س})} (\text{ع} + \text{س})}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} + \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \text{س}^2 \times \dfrac{\text{قا(ع)} - \text{قا(س)}}{\text{ع} - \text{س}}$

= قا(س) × ٢س + س² × قا'(س)

ق'(س) = ٢س قا(س) + س² قا'(س)



(٥٧) الشكل المجاور على نصف دائرة أب قطر فيه طوله ٨ سم ، ج نقطة على الدائرة ، جد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المنطقة المظللة أصغر ما يمكن؟

جتاهـ = $\dfrac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$

$\boxed{\text{١٠ جتاهـ = ب ج}}$

قياس ∠ أ ج ب = ٩٠ (المحيطية على القطر)

مساحة المثلث أ ب ج = ½ × أ ب × ب ج × جاهـ

= ½ × $\cancel{٨}^{٤}$ × ١٠ جتاهـ × جاهـ

= ٢٠ × ٢جاهـ جتاهـ = ٢٠ جا٢هـ

مساحة المنطقة المظللة = مساحة نصف الدائرة − مساحة المثلث أ ب ج

= ½ × (٤)² π − ٢٠ جا٢هـ

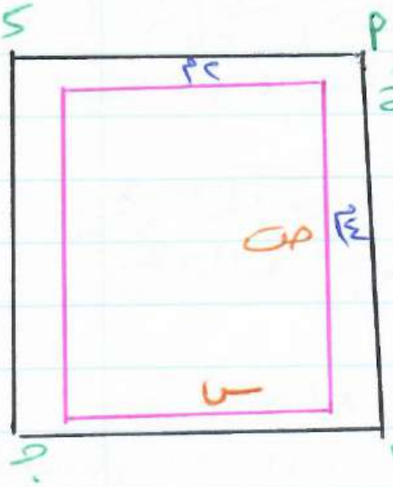
م = ٨π − ٢٠ جا٢هـ

م' = −٤٠ جتا٢هـ

٠ = −٤٠ جتا٢هـ ⟸ ٢هـ = $\frac{\pi}{2}$ ⟸ هـ = $\frac{\pi}{4}$

م'' = ٨٠ جا٢هـ

م''($\frac{\pi}{4}$) = ٨٠ جا $\frac{\pi}{2}$ = ٨٠ > ٠ ∴ عندما هـ = $\frac{\pi}{4}$ قيمة صغرى



(٥٨) أرض مستطيلة الشكل رؤوسها أ، ب، جـ، د تتكون من حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢٠٠ م² محاطة بأرصفة عرض كل من (أب، جـ د) ٤ م وعرض كل من الرصيفين على الضلعين الآخرين (٢ م). جد أقل مساحة ممكنة لقطعة الأرض

مساحة الحديقة = س ص

$٣٢٠٠ = س ص \Leftarrow ص = \frac{٣٢٠٠}{س}$

مساحة قطعة الأرض = (س + ٨) × (ص + ٤)

$م = (س + ٨)\left(\frac{٣٢٠٠}{س} + ٤\right)$

$م = ٣٢٠٠ + ٤س + \frac{٢٥٦٠٠}{س} + ٣٢$

$م' = ٤ - \frac{٢٥٦٠٠}{س^٢} \Leftarrow ٠ = ٤ - \frac{٢٥٦٠٠}{س^٢} \Leftarrow \frac{٢٥٦٠٠}{س^٢} = ٤$

$٤س^٢ = ٢٥٦٠٠ \Leftarrow س^٢ = ٦٤٠٠$

$\Leftarrow س = ٨٠$

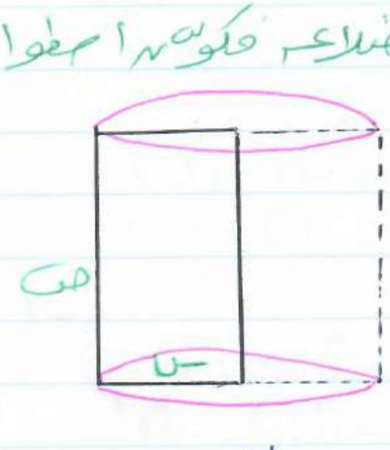
$م'$ — — — — | + + + + + + (٨٠)

عندما س = ٨٠ قيمة صغرى

$\therefore م = ٣٢٠٠ + ٤ \times ٨٠ + \frac{٢٥٦٠٠}{٨٠} + ٣٢$

$م = ٣٨٧٢ م^٢$

(٥٩) مستطيل محيطه (٣٦) سم دار حول أحد أضلاعه فكون اسطوانة أوجد أكبر حجم ممكن للاسطوانة



حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = س^٢ \pi \times ص$

لكن ٢س + ٢ص = محيط المستطيل

$٢س + ٢ص = ٣٦ \Leftarrow س + ص = ١٨$

$\Leftarrow ص = ١٨ - س$

$\therefore ح = س^٢ \pi (١٨ - س) = ١٨ \pi س^٢ - \pi س^٣$

$ح' = ٣٦ \pi س - ٣ \pi س^٢ \Leftarrow ح' = ٠ \Leftarrow ٠ = ٣\pi س(١٢ - س)$

اما س = ٠ × أو $\boxed{س = ١٢}$

$ح'$ + + + | — — — (١٢)

عندما س = ١٢ قيمة عظمى $\Leftarrow ح = ١٢^٢ \pi (١٨ - ١٢)$

$ح = ١٤٤ \pi \times ٦ = ٨٦٤ \pi$ سم³

(٦٠) مجموع محيطي مستطيلين ٩٩ سم، والنسبة بين بعدي المستطيل الأول هي ٣ : ٢ وبين بعدي المستطيل الثاني ٣ : ٤، أوجد أصغر قيمة لمجموع مساحتي المستطيلين.

بما أن النسبة بين بعدي المستطيل الأول كنسبة ٣ : ٢ ⇐ أطواله هي ٣س، ٢س وكذلك بالنسبة للمستطيل الثاني تكون أطواله هي ٣ص، ٤ص

مجموع مساحتي المستطيلين = م = $٣س \times ٢س + ٣ص \times ٤ص$

$م = ٦س^2 + ١٢ص^2$

لكن مجموع محيطيهما = $٢ \times (٣س + ٢س) + ٢(٣ص + ٤ص)$

$٩٩ = ١٠س + ١٤ص$

$ص = \frac{٩٩ - ١٠س}{١٤}$

$م = ٦س^2 + ١٢\left(\frac{٩٩ - ١٠س}{١٤}\right)^2$

$م' = ١٢س + \frac{١٢}{١٩٦} \times ٢(٩٩ - ١٠س) \times -١٠$

$م' = ١٢س + \frac{٣}{٤٩} \times -٢٠(٩٩ - ١٠س)$

$م' = ١٢س + \frac{-٦٠}{٤٩}(٩٩ - ١٠س) \Leftarrow ٠ = ١٢س - \frac{٦٠ \times ٩٩}{٤٩} + \frac{٦٠٠س}{٤٩}$

$٠ = \frac{١١٨٨س}{٤٩} - \frac{٥٩٤٠}{٤٩} \Leftarrow ٥٩٤٠ = ١١٨٨س$

$س = \frac{٥٩٤٠}{١١٨٨} = ٥$

$م'' = \frac{١١٨٨}{٤٩} > ٠$ ∴ عندما س = ٥ فيه صغرى

$∴ م = ٦(٥)^2 + ١٢\left(\frac{٩٩ - ١٠ \times ٥}{١٤}\right)^2 = ١٥٠ + ١٢ \times \left(\frac{٤٩}{١٤}\right)^2$

$م = ١٥٠ + ١٢ \times \frac{٤٩}{٤} = ١٥٠ + ١٤٧ = ٢٩٧$ سم²

(٦١) إذا كان $د(س) = (س - أ)^ن (س - ب)^م$ كمقدار رول على [أ، ب] أثبت أن قيمة جـ التي عندها النظرية هي $جـ = \frac{م أ + ن ب}{م + ن}$

بما أن د(س) تحقق رول ⇐ د'(جـ) = صفر

$د'(س) = (س - أ)^ن \times م(س - ب)^{م-1} + (س - ب)^م \times ن(س - أ)^{ن-1}$

$∴ ٠ = م(جـ - أ)^ن (جـ - ب)^{م-1} + ن(جـ - ب)^م (جـ - أ)^{ن-1}$

بالقسمة على $(جـ - ب)^{م-1}(جـ - أ)^{ن-1}$

$٠ = \frac{م(جـ - أ)^ن (جـ - ب)^{م-1}}{(جـ - ب)^{م-1}(جـ - أ)^{ن-1}} + \frac{ن(جـ - ب)^م (جـ - أ)^{ن-1}}{(جـ - ب)^{م-1}(جـ - أ)^{ن-1}}$

$∴ م(جـ - أ) + ن(جـ - ب) = ٠ \Leftarrow م جـ - م أ + ن جـ - ن ب = \text{صفر}$

$جـ(م + ن) = م أ + ن ب \Leftarrow جـ = \frac{م أ + ن ب}{م + ن}$

(٦٢) قطاع دائري محيطه (٢٨) سم أثبت أن مساحته تكون أكبر ما يمكن عندما تكون زاويته المركزية (٢) راديان

مساحة القطاع الدائري = م = $\frac{١}{٢}$ نق² هـ

لكن محيط القطاع الدائري = ٢ نق + ل   ل: طول القوس

٢٨ = ٢ نق + نق هـ ⟸ ٢٨ = نق(٢ + هـ)

نق = $\frac{٢٨}{٢ + هـ}$ هـ = $\frac{٢٨ - ٢ نق}{نق}$ = $\frac{٢٨}{نق}$ − ٢

∴ م = $\frac{١}{٢}$ نق² × هـ

م = $\frac{١}{٢}$ نق² ($\frac{٢٨}{نق}$ − ٢) = ١٤ نق − نق²

م' = ١٤ − ٢ نق   م' = ٠ ⟵ $\boxed{نق = ٧}$

∴ عندما نق = ٧ م عظمى

م' + + + + ✗ − − − −
٧

∴ هـ = $\frac{٢٨}{نق}$ − ٢ = $\frac{٢٨}{٧}$ − ٢ = ٤ − ٢ = ٢ .

(٦٣) إذا علمت أن −$\frac{١}{٢}$ أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة س التي تحقق

$\frac{٢}{٣}$ س + ٣ أ = أ² − $\frac{١}{٣}$ س

$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{١}{٣}$ س = أ² − ٣ أ

−$\frac{١}{٢}$ أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

أ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ − ٣ $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣٢ \\ ٠ & ١٦ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} -٦ & ٢٤ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

(٦٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} س^٢ & س ص \\ س ص & ص^٢ \end{bmatrix}$ وكان س² + ص² = ١ أثبت أن أ² = أ

أ² = $\begin{bmatrix} س^٢ & س ص \\ س ص & ص^٢ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} س^٢ & س ص \\ س ص & ص^٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} س^٤ + س^٢ ص^٢ & س^٣ ص + س ص^٣ \\ س^٣ ص + س ص^٣ & س^٢ ص^٢ + ص^٤ \end{bmatrix}$

أ² = $\begin{bmatrix} س^٢ (س^٢ + ص^٢) & س ص (س^٢ + ص^٢) \\ س ص (س^٢ + ص^٢) & ص^٢ (س^٢ + ص^٢) \end{bmatrix}$

أ² = $\begin{bmatrix} س^٢ \times ١ & س ص \times ١ \\ س ص \times ١ & ص^٢ \times ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} س^٢ & س ص \\ س ص & ص^٢ \end{bmatrix}$

(٦٥) بدون إيجاد المحدد اثبت أن

$$(جـ-ب)(جـ-أ)(ب-أ)=\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1\\ ب^2 & ب & 1\\ جـ^2 & جـ & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1\\ (ب+أ)(ب-أ) & ب-أ & 0\\ (جـ+أ)(جـ-أ) & جـ-أ & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1\\ ب^2-أ^2 & ب-أ & 0\\ جـ^2-أ^2 & جـ-أ & 0\end{vmatrix} \longleftarrow \begin{matrix} ص_2-ص_1\\ ص_3-ص_1\end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1\\ أ+ب & 1 & 0\\ \cancel{أ}-ب-\cancel{أ}+جـ & 0 & 0\end{vmatrix} (جـ-أ)(ب-أ) \Leftarrow ص_3-ص_2 \qquad \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1\\ أ+ب & 1 & 0\\ أ+جـ & 1 & 0\end{vmatrix} (جـ-أ)(ب-أ) =$$

$$(جـ-ب)(جـ-أ)(ب-أ) = \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1\\ أ+ب & 1 & 0\\ جـ-ب & 0 & 0\end{vmatrix} (جـ-أ)(ب-أ) =$$

(٦٦) باستخدام خصائص المحددات اثبت أن

$$(س-ع)(ع-ص)(ص-س)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ ع & ص & س\\ س ص & س ع & ص ع\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} س ص & س ع - س ص & ص ع - س ص\\ ع & ع - ص & ع - س\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} - \Leftarrow \begin{matrix} ع_1-ع_3\\ ع_2-ع_3\end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} س ص & س ع & ص ع\\ ع & ص & س\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} - \Leftarrow ص_3 \Leftrightarrow ص_1$$

$$\begin{vmatrix} س ص & س & ص\\ ع & 1- & 1-\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} (\cancel{ع-ص})(س-ع) - \Leftarrow \begin{vmatrix} س ص & س(ص-ع) & ص(س-ع)\\ ع & ع-ص & ع-س\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} - \Leftarrow$$

$$(ص-س)(ع-ص)(س-ع) = \begin{vmatrix} س ص & س & ص-س\\ ع & 1- & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} (ع-ص)(س-ع) \Leftarrow ع_1-ع_2$$

(٦٧) باستخدام خصائص المحددات اثبت أن

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 8 & 8 & 5\end{vmatrix} 2 = \begin{vmatrix} 5- & 1 & 9\\ 6 & 2- & 6-\\ 8- & 5 & 8\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 5- & 1\\ 6- & 6 & 2-\\ 8 & 8- & 5\end{vmatrix} \Leftarrow \begin{matrix} ع_2 \Leftrightarrow ع_1\\ ع_3 \Leftrightarrow ع_2\end{matrix} \Leftarrow \begin{vmatrix} 5- & 1 & 9\\ 6 & 2- & 6-\\ 8- & 5 & 8\end{vmatrix}$$

نخرج (١-) من ع٢ $\qquad \begin{vmatrix} 9 & 5- & 1\\ 3 & 3- & 1\\ 8 & 8- & 5\end{vmatrix} 2- \Leftarrow$ نخرج ٢- من ص٢

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 8 & 8 & 5\end{vmatrix} 2 = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 8 & 8 & 5\end{vmatrix} (2-) - \Leftarrow$$