١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـــة فلـسـطـين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـــات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الأولى

دولـــة فلـسـطـين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف 2983280-2-970+ | فاكس 2983250-2-970+

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتـــويات

النتـــاجات:

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف حساب التفاضل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير، وتفسيره هندسياً وفيزيائياً.
٢. حساب المشتقة الأولى عند نقطة باستخدام قواعد الاشتقاق.
٣. التعرف إلى المشتقات العليا للاقتران، وإجراء بعض التطبيقات عليها.
٤. إيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.
٥. التعرف إلى مشتقة الاقتران الأسّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي.
٦. إيجاد بعض النهايات باستخدام قاعدة لوبيتال.
٧. التعرف إلى قاعدة السلسلة، واستخدامها في إيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
٨. حساب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
٩. التعرف إلى المعنى الهندسي والفيزيائي للمشتقة، وحل مسائل عليهما.

البنود التي باللون الأحمر تستثنى من الفرع الصناعي

١ - ١ متوسط التغير (Rate of Change)

نشاط ١: عائلة فلسطينية مكونة من: أم محمد وولديها التوأمين محمد وخالد كانت كتلة محمد قبل عشر سنوات ٣٢ كغم، وأصبحت اليوم٦٢ كغم، أما كتلة خالد فكانت ٢٩ كغم، ولكنها اليوم ٥٢ كغم. ارتاحت أم محمد للتغير في كتلة محمد، بينما ذهبت بابنها خالد إلى الطبيب ... برأيك لماذا؟

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من س_1 إلى س_2، $\text{س}_1 \neq \text{س}_2$ فإن:

- التغير في س يساوي $\text{س}_2 - \text{س}_1$ ونرمز له بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .
- التغير في الاقتران ق(س) يساوي $\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)$ ويرمز له بالرمز Δص.
- متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) يساوي $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$$= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

ويمكن كتابته على الصورة $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

حيث هـ = Δس $\neq$ ٠ ، ونسميه اقتران متوسط التغير عند س_1.

مثال ١ : إذا كان ص = ق(س) = $\text{س}^3 - ٥\text{س} + ٣$ ، جد:

1. Δس عندما تتغير س من $^{-}١$ إلى ٢.
2. التغير في ق(س) عندما تتغير س من $^{-}١$ إلى ٢.
3. متوسط التغير في ق(س) عندما تتغير س من $^{-}١$ إلى ٢.

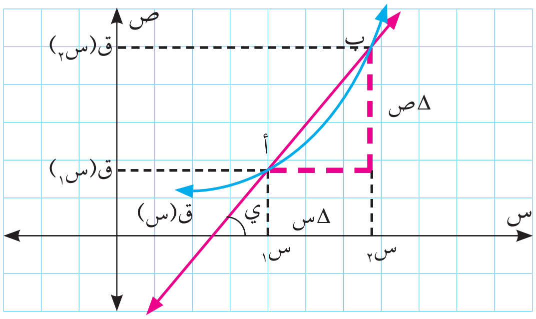
الحل :

1. بما أن $\text{س}_1 = {}^{-}١$ ، $\text{س}_2 = ٢$ ، فإن $\Delta\text{س} = \text{س}_2 - \text{س}_1 = ٣$
2. $\Delta\text{ص} = \text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}(٢) - \text{ق}({}^{-}١) = ١ - ٧ = {}^{-}٦$
3. متوسط التغير = $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{{}^{-}٦}{٣} = {}^{-}٢$

المعنى الهندسي لمتوسط التغير:

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) والمستقيم المار بالنقطتين أ ، ب والذي يسمى قاطعاً للمنحنى، ويكون

ميله = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$



تعريف:

متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_٢$ يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين، ($س_١$ ، ق($س_١$)) ، ($س_٢$ ، ق($س_٢$)) ونسمي الزاوية (ي) التي يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية ميل المستقيم، ويكون (ظاي = ميل القاطع).

مثال ٢ : إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) = س + جا٢س في النقطتين (٠ ، ق(٠)) ، ($\frac{\pi}{٢}$ ، ق($\frac{\pi}{٢}$))

١ احسب ميل المستقيم ل.

٢ جد قياس زاوية ميل المستقيم ل.

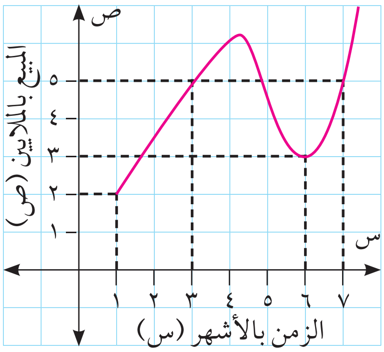
الحل :

١ ميل المستقيم ل = متوسط تغير ق(س) في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$= \frac{ق(\frac{\pi}{٢}) - ق(٠)}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{\frac{\pi}{٢} + جا(٢ \times \frac{\pi}{٢}) - (٠ + جا٠)}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{\frac{\pi}{٢}}{\frac{\pi}{٢}} = ١$$

٢ ميل المستقيم ل = ظا ي = ١ ومنها قياس زاوية ميل المستقيم ل هو $\frac{\pi}{٤}$ (لماذا؟)

نشاط ٢: يمثل منحنى الاقتران ص = ق(س) في الشكل المجاور مبيع شركة سيارات حيث ص: المبيع بالملايين خلال س شهراً ، أراد عمر من الرسم إيجاد متوسط التغير في المبيع عندما تتغير س من ١ إلى ٣، فكتب



$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = \frac{٥ - ٢}{٣ - ١} = \frac{٣}{٢}$$

والآن أكمل: متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٧ يساوي ....

متوسط التغير في ص عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ يساوي........

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير:

تعريف:

إذا كانت ف = ق(ن) حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم، ن الزمن، فإن متوسط التغير في المسافة عندما تتغير ن من $ن_١$ إلى $ن_٢$ هو $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ق(ن_٢) - ق(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

ويسمى السرعة المتوسطة في الفترة $[ن_١ ، ن_٢]$.

مثال ٣: يتحرك جسم على خط مستقيم، بحيث أن بعده ف بالأمتار عن النقطة (و) بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ف = ق(ن) = $ن^٢$ + ٨ ن ، جد:

١ السرعة المتوسطة في الفترة [٠ ، ٣].

٢ إذا كانت السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، أ] تساوي ١٣ م/ ث جد قيمة أ.

الحل :

١ $ن_١$ = ٠ ، $ن_٢$ = ٣

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٣^٢ + ٨ \times ٣ - ٠}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$ م/ ث

٢ السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ق(أ) - ق(١)}{أ - ١} = \frac{أ^٢ + ٨ \times أ - ٩}{أ - ١} = ١٣$

بالتبسيط ينتج أن: $أ^٢ - ٥أ + ٤ = ٠$ ، وبحل المعادلة ينتج أن قيمة أ المطلوبة هي ٤

تمارين ١ - ١

١ إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$ + س^٢، جد:

أ التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ .

ب متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ إلى ١ .

٢ إذا كان ق(س) = جتاس – ٣ جاس جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [$\frac{\pi}{٢}$ ، π].

٣ إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣]، يساوي ٤، وكان ك(س) = س^٢ + ٣ق(س)، جد متوسط التغير للاقتران ك(س) في نفس الفترة.

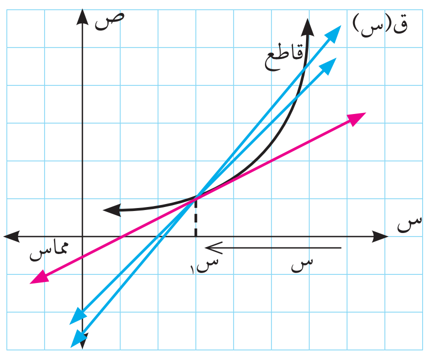
٤ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (١ ، أ) ، (٣ ، ب) وصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. احسب متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = ٣ق(س) + س^٢ – ١ في الفترة [١ ، ٣].

٥ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده ف بالأمتار عن نقطة الانطلاق بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ق(ن) = ن^٢ + ب ن وكانت السرعة المتوسطة في الفترة [١ ، ٣] تساوي ٦ م/ ث. فما قيمة الثابت ب؟

١ - ٢ قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)

تعلمت في الدرس السابق مفهوم متوسط التغير للاقتران $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ عندما تتغير س من س_1 إلى $\text{س}_1 + \Delta\text{س}$ وكان $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_1 + \Delta\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\Delta\text{س}}$ ، $\Delta\text{س} \neq ٠$

وإذا أخذنا $\underset{\Delta\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ وكانت هذه النهاية موجودة فإننا نسميها معدل التغير للاقتران ق(س) عند س_1 أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند $\text{س} = \text{س}_1$ ونقول إن ق(س) قابل للاشتقاق عند س_1 (أي كلما اقتربت س من س_1 فإن متوسط تغير الاقتران (ميل القاطع) يؤول إلى معدل تغير الاقتران ق(س) (ميل المماس) عند $\text{س} = \text{س}_1$، انظر الشكل المجاور.



تعريف (١)*:

إذا كانت $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ اقتراناً معرفاً عند س_1 في مجاله، وكانت $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}}$

موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند س_1،

ونرمز لها بأحد الرموز الآتية: $\text{قَ}(\text{س}_1)$ أو $\text{صَ}\big|_{\text{س} = \text{س}_1}$ أو $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س} = \text{س}_1}$

ويمكن كتابتها على النحو $\text{قَ}(\text{س}_1) = \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س} - \text{س}_1}$

تعريف (٢):

ليكن الاقتران ق(س) معرفاً عندما $\text{س} = \text{س}_1$ فإن:

$$\text{قَ}(\text{س}_1)^+ = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}} \quad \text{(مشتقة ق(س) من يمين العدد س}_1\text{)}$$

$$\text{قَ}(\text{س}_1)^- = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_1 + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{هـ}} \quad \text{(مشتقة ق(س) من يسار العدد س}_1\text{)}$$

وعندما $\text{قَ}(\text{س}_1)^+ = \text{قَ}(\text{س}_1)^- = \text{ل}$، فإن ق(س) قابل للاشتقاق عند س_1 وتكون $\text{قَ}(\text{س}_1) = \text{ل}$

* لا يطلب من الطلبة إيجاد المشتقة بالتعريف.

تعريف (٣):

- إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً على [أ ، ب] فإن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند أطراف الفترة [أ ، ب].
- يكون ق(س) قابلاً للاشتقاق على] أ ، ب[إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة فيها.

فكّر وناقش:

مجال قَ(س) ⊆ مجال ق(س).

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ ∈ ح فإن قَ(س) = ٠ لجميع قيم س ∈ ح.

مثال ١ : جد قَ(س) لكل مما يأتي: ① ق(س) = ٥ ② ق(س) = جتا π

الحل :

① قَ(س) = ٠

② قَ(س) = ٠

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = س فإن قَ(س) = ١

قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق وكان جـ ∈ ح فإن ك(س) = جـ ق(س) قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = جـ قَ(س).

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س ، جد قَ(س)

الحل : قَ(س) = ٥ × ١ = ٥

قاعدة (٤):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ك(س) = ق(س) ± هـ(س) قابل للاشتقاق، وتكون كَ(س) = قَ(س) ± هـَ(س).

ملاحظة:

تبقى القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين.

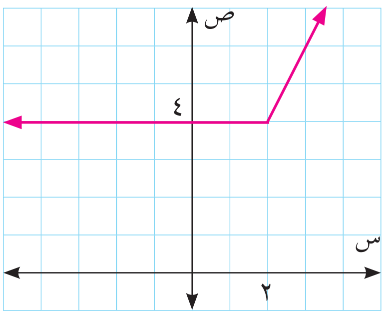
مثال ٣ : إذا كان قَ(١) = ٥ ، كَ(١) = ⁻٣ ، وكان ل(س) = ٢س + ق(س) − ٣ ك(س) ، جد لَ(١).

الحل : لَ(س) = ٢ + قَ(س) − ٣ كَ(س)

لَ(١) = ٢ + قَ(١) − ٣ كَ(١)

وبالتعويض ينتج أن: لَ(١) = ١٦

مثال ٤ : إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س} \geq \text{٢} \\ \text{٤} & \text{، س} < \text{٢} \end{cases}$$
، جد قَ(٢)



الحل : ق(س) متصل على مجاله (تحقق من ذلك)، ومنها يكون

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢} & \text{، س} > \text{٢} \\ \text{٠} & \text{، س} < \text{٢} \end{cases}$$

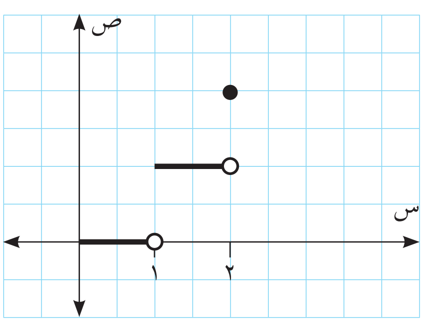
أما عند س = ٢ فنبحث بالمشتقة عن يمينها وعن يسارها

فتكون قَ(٢)⁺ = ٢ ، قَ(٢)⁻ = ٠ ، ومنها قَ(٢) غير موجودة. (لماذا؟)

مثال ٥ : إذا كان ق(س) = [س] ، س ∈ [٠ ، ٢] . جد قَ(س)

الحل : نعيد كتابة ق(س) دون رمز أكبر عدد صحيح.

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٠} & \text{، ٠} \leq \text{س} < \text{١} \\ \text{١} & \text{، ١} \leq \text{س} < \text{٢} \\ \text{٢} & \text{، س = ٢} \end{cases}$$



لاحظ أن ق(س) منفصلاً عند س = ١

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٠} & \text{، ٠} < \text{س} < \text{١} \\ \text{٠} & \text{، ١} < \text{س} < \text{٢} \end{cases}$$

قَ(٠) غير موجودة ، قَ(٢) غير موجودة ..... (لماذا؟)

و قَ(١) غير موجودة ..... (لماذا؟)

أتعلم:

عند إيجاد المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق، لا بد من بحث الاتصال أولاً.

قاعدة (٥):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن ك(س) = ق(س) × هـ(س)

قابل للاشتقاق وتكون كَ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = (٥س – ١)(٢ – س) جد قَ(س)، ثم قَ(⁻١).

الحل : قَ(س) = (٥س – ١) × (⁻١) + (٥) (٢ – س)

ومنها قَ(س) = ⁻٥س + ١ + ١٠ – ٥س = ⁻١٠س + ١١

وتكون قَ(⁻١) = ⁻١٠ × ⁻١ + ١١ = ٢١

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س ك (س) جد قَ(٢) علماً بأن ق(٢) = ⁻٦ ، كَ(٢) = ٤

الحل : قَ(س) = س × كَ(س) + ١ × ك(س)

قَ(٢) = ٢كَ(٢) + ك(٢) = ٨ + ك(٢)

لكن ق(٢) = ٢ × ك(٢) ، ومنها ك(٢) = ⁻٣

قَ(٢) = ٨ – ٣ = ٥

نظرية:

إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ ، فإن قَ(س) = ن $س^{ن-١}$ ، ن ≠ ١ ، ن ∈ $ص^{+}$

مثال ٨ : إذا كان ق(س) = $س^{٣}$ – ٢س + ٥، جد قَ(س)، ثم قَ(⁻٢).

الحل : قَ(س) = $٣س^{٢}$ – ٢ ومنها قَ(⁻٢) = $٣(⁻٢)^{٢}$ – ٢ = ١٠

أتعلم:

إذا كان ق(س) كثير حدود، فإن ق(س) قابل للاشتقاق.

نظرية:

يكون ق قابلاً للاشتقاق عند س = $س_١$

إذا وفقط إذا كان ق(س) متصلاً عند $س_١$ و $قَ(س_١)^+ = قَ(س_١)^-$

مثال ٩ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ س^٢ + ب &، س \leq ١ \\ س^٣ + س &، س > ١ \end{cases}$ ،

أوجد قيمة أ ، ب علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق على ح

الحل : نعلم أن ق(س) متصل عند س = ١ ..... (لماذا؟)

ومنها $\underset{س \to ١}{نهـــا}$ ق(س) = ق(١) أي أن أ + ب = ٢

$قَ(س) = \begin{cases} ٢أ س &، س \leq ١ \\ ٣س^٢ + ١ &، س > ١ \end{cases}$ ،

وكذلك $قَ(١)^+ = قَ(١)^-$ ومنها ٢أ = ٤

أي أن أ = ٢ ، ب = ٠

قاعدة (٦):

إذا كان ك(س) ، م(س) اقترانين قابلين للاشتقاق فإن ق(س) = $\frac{ك(س)}{م(س)}$ ، م(س) $\neq$ ٠

قابل للاشتقاق وتكون قَ(س) = $\frac{م(س) \times كَ(س) - ك(س) \times مَ(س)}{(م(س))^٢}$

نتيجة:

إذا كان ق(س) = $س^ن$ ، فإن قَ(س) = ن $س^{ن-١}$ ، ن ∈ ص ، س $\neq$ ٠

مثال ١٠: إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س^٣}$ + $\frac{س^٢}{س - ١}$ ، س ≠ ٠ ، ١ ، جد قَ(−١).

الحل : ق(س) = $س^{-٣}$ + $\frac{س^٢}{س - ١}$

$$قَ(س) = -٣ \times س^{-٤} + \frac{(س - ١) \times ٢س - س^٢ \times ١}{(س - ١)^٢}$$

$$قَ(س) = \frac{-٣}{س^٤} + \frac{(س - ١) \times ٢س - س^٢}{(س - ١)^٢}$$ ومنها قَ(−١) = $\frac{-٩}{٤}$ (تحقّق من ذلك)

المشتقات العليا (Higher Derivatives)

إذا كان ص = ق(س) = $س^٤$ + $٣س^٢$ − ٢، جد قَ(س).

هل يمكنك تكرار عملية الاشتقاق بالنسبة لـ س؟ ولماذا؟

نسمي المشتقات التي تلي المشتقة الأولى بالمشتقَات العليا.

وإذا كانت ص = ق(س) حيث ق قابل للاشتقاق، فإن المشتقة الأولى هي صَ = $\frac{د ص}{د س}$ = قَ(س) تمثل اقتراناً جديداً. وإذا كانت المشتقة الأولى قابلةً للاشتقاق، فإن مشتقتها $\frac{د}{د س}\left(\frac{د ص}{د س}\right)$ تسمى المشتقة الثانية، ويرمز لها بالرمز صً أو قً(س) أو $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ وتقرأ (دال اثنين ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة والرابعة... ونعبر عن المشتقة من الرتبة ن بإحدى الصور الآتية:

$ص^{(ن)}$ أو $\frac{د^ن ص}{د س^ن}$ أو $ق^{(ن)}(س)$، حيث ن ∈ $ص^+$ ، ن > ٢

مثال ١١: إذا كان ق(س) = $س^٥$ + $٤س^٣$ − ١، جد $ق^{(٥)}(س)$. ثم جد $ق^{(٤)}(٢)$.

الحل : قَ(س) = $٥س^٤$ + $١٢س^٢$ ، قً(س) = $٢٠س^٣$ + ٢٤س

$ق^{(٣)}(س)$ = $٦٠س^٢$ + ٢٤ ، $ق^{(٤)}(س)$ = ١٢٠س ، $ق^{(٥)}(س)$ = ١٢٠

$ق^{(٤)}(٢)$ = ١٢٠ × ٢ = ٢٤٠

تمارين ١ - ٢

١ جد $\bar{ق}$(س) في كل مما يأتي عند قيم س إزاء كلّ منها:

أ) ق(س) = س^{٥} − س^{٢} + جـ ، حيث جـ ثابت ، عندما س = $^{-}$١

ب) ق(س) = (س^{٣} − ١)(١٢ + س) ، عندما س = ٣

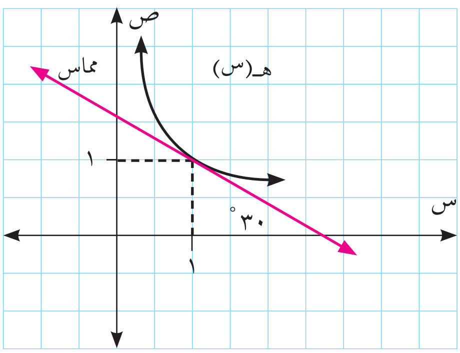
جـ) ق(س) = $\frac{س^{٢}}{٥ - س^{٢}}$ ، س ≠ ± $\sqrt{٥}$ ، عندما س = $^{-}$٢

٢ بالاعتماد على المعطيات في الجدول المجاور، جد ما يأتي:

أ) (ق + هـ^{٢})$\bar{}$ (١)

ب) $\left(س^{٢}\,ق - \frac{٣}{هـ}\right)\bar{}\,(١)$

ق(١)	$\bar{ق}$(١)	هـ(١)	$\bar{هـ}$(١)
٢	٣	$^{-}$١	$^{-}$٣



٣ إذا كان ق(س) = $\frac{س}{س^{٢} + ١}$ وكان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س)، فجد $\left(\frac{ق}{هـ}\right)\bar{}$ (١)

٥ إذا كان ق(س) = (١ − س)(١ + س)(١ + س^{٢}) (١ + س^{٤}) (١ + س^{٨})، جد $\bar{ق}$(١).

٦ إذا كان ق(س) = س^{٤} + أ س^{٣} − ٣ ، جد قيمة أ ، حيث ق$^{(٣)}$(٢) = ١٨

١ – ٣ مشتقات الاقترانات المثلثية (The Derivative of Trigonometric Functions)

لقد تعرفت في الدروس السابقة اشتقاق الاقترانات كثيرة الحدود، والاقترانات النسبية، وستتعرف في هذا الدرس على قواعد خاصة لإيجاد مشتقة الاقترانات المثلثية.

قاعدة (١):

إذا كان ق(س) = جاس، س بالتقدير الدائري فإن قَ(س) = جتاس

مثال ١ : إذا كان ق(س) = س جاس ، جد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل :

ق(س) = س جاس

قَ(س) = جاس + س جتاس

$\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٢}\right) = ١$

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = جتاس ، س بالتقدير الدائري ، فإن قَ(س) = ⁻جاس

مثال ٢ : إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{جتاس}}$ ، جد قَ(س)

الحل :

$\text{قَ(س)} = \frac{\text{جتاس} \times ٢\text{س} - \text{س}^{٢} \times {}^{-}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$= \frac{٢\text{س جتاس} + \text{س}^{٢}\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

قاعدة (٣):

- إذا كان ق(س) = ظاس ، فإن قَ(س) = $\text{قا}^{٢}\text{س}$.
- إذا كان ق(س) = ظتاس ، فإن قَ(س) = $^{-}\text{قتا}^{٢}\text{س}$.
- إذا كان ق(س) = قاس ، فإن قَ(س) = قاس ظاس .
- إذا كان ق(س) = قتاس ، فإن قَ(س) = ⁻قتاس ظتاس.

فكّر وناقش:

تحقّق من صحة القواعد السابقة بالتعويض بدلالة جاس، جتاس، ثم باستخدام قواعد الاشتقاق.

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = قاس + ظاس ، جد قَ(س) ، قَ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$.

الحل : قَ(س) = قاس ظاس + قا^{٢}س = قاس(ظاس + قاس)

قَ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = قا$\frac{\pi}{٤}$ $\left(\text{ظا}\frac{\pi}{٤} + \text{قا}\frac{\pi}{٤}\right)$ = ٢ + $\sqrt{٢}$ (لماذا؟)

مثال ٤ : إذا كانت ص = قتاس ظتاس ، أثبت أن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قتاس − ٢ قتا^{٣}س

الحل : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $^-$قتاس ظتاس ظتاس + قتاس × $^-$قتا^{٢}س = $^-$قتاس ظتا^{٢}س − قتا^{٣}س

= $^-$قتاس ($^-$١ + قتا^{٢}س) − قتا^{٣}س

= قتاس − قتا^{٣}س − قتا^{٣}س = قتاس − ٢ قتا^{٣}س

تمارين ١ ـ ٣

١ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكلٍ مما يأتي:

أ ص = ٢ جتاس − ٢ ظاس

ب ص = $\frac{١ - \text{قاس}}{١ + \text{قاس}}$

جـ ص = س^{٢}قاس

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س^٢ − جتاس ، س ∈ [$^-$٢ π ، ٢ π] ،

جد مجموعة قيم س التي تجعل قً(س) = ٠

١ – ٤ قاعدة لوبيتال، ومشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي (L'Hôpital's Rule)

أولاً: قاعدة لوبيتال

تعلمت في الصف الحادي عشر كيفية إيجاد النهايات التي تكون على الصورة غير المعينة $\left(\frac{٠}{٠}\right)$ ولاحظت أن كثيراً منها يحتاج إلى خطواتٍ عديدةٍ وأحياناً معقدةٍ، وهنا سوف نتعلم طريقة جديدة لحساب قيمة بعض هذه النهايات.

قاعدة لوبيتال:

إذا كان ق(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق عند النقطة $\text{س} = \text{أ}$ ، $\text{ل} \in \text{ح}$ ، وكانت

$$\frac{\text{ق(أ)}}{\text{هـ(أ)}} = \frac{٠}{٠} \quad ، \quad \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{قَ(س)}}{\text{هـَ(س)}} = \text{ل} \quad \text{فإن} \quad \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \text{ل}$$

ملاحظة:

سوف لا نتعرض لحالات لوبيتال الأخرى.

مثال ١ : جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{\text{جا}٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$ ، ومنها يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال

فتكون $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{١} = \text{جتا}\ ٠ = ١$

مثال ٢ : جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{٢^{٢} - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

ومنها $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}}{١} = ٤$

ملاحظة:

عند استخدام قاعدة لوبيتال، إذا كانت $\frac{\text{قَ(أ)}}{\text{هـَ(أ)}} = \frac{٠}{٠}$

فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل على عدد حقيقي.

مثال ٣ : جد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جتاس}}{\text{س}^{٢}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال.

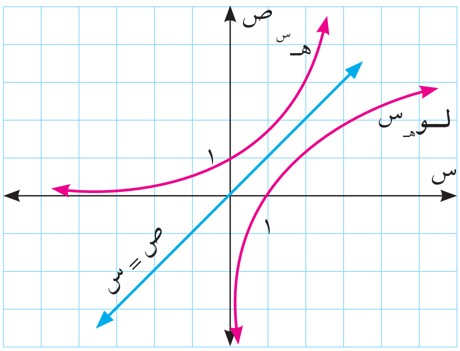
الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\dfrac{\text{١ − جتا٠}}{٠^{٢}} = \dfrac{٠}{٠}$

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{١ − جتاس}}{\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{٢س}} \quad \text{لكن} \quad \frac{\text{جا٠}}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نطبق قاعدة لوبيتال مرةً أخرى

$$\text{فتكون } \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{٢س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس}}{٢} = \frac{١}{٢}$$

ثانياً: مشتقة الاقتران الأسّي واللوغاريتمي



تعلمت سابقاً الاقتران الأسّي الذي يكتب على الصورة $\text{ق(س)} = \text{أ}^{\text{س}}$ ، $\text{أ} \neq ١$ ، $\text{أ} > ٠$ والاقتران اللوغاريتمي على الصورة $\text{ل(س)} = \text{لـو}_{\text{أ}}\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$ ، $\text{أ} \neq ١$ ، $\text{أ} > ٠$

وسوف نقتصر دراستنا على الاقتران الأسّي الطبيعي $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، $\text{ق(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، حيث هـ تسمى العدد النيبيري.

تعريف:

العدد النيبيري هو العدد الحقيقي، غير النسبي، الذي قيمته التقريبية $\text{هـ} \cong ٢,٧١٨٢٨١٨$

ويحقق العلاقة الآتية: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = ١$

ونورد بعض خصائص الاقترانين:

الاقتران الأسّي الطبيعي / مجاله ح

١) $\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س+ص}}$

٢) $\dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \text{هـ}^{\text{س−ص}}$

٣) $(\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س ص}}$

٤) $\text{هـ}^{٠} = ١$

٥) $\text{هـ}^{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي / مجاله ح^{+}

١) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

٢) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

٣) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن لـو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$

٤) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}$

قاعدة (١):

إذا كان ص = $هـ^{س}$ ، فإن $لـو_{هـ}$ص = س ، ص > ٠

قاعدة (٢):

إذا كان ق(س) = $هـ^{س}$ فإن ق َ(س) = $هـ^{س}$

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = $س^{٣}$ $هـ^{س}$ + قتاس ، فجد قَ(س) .

الحل : قَ(س) = $س^{٣}$ $هـ^{س}$ + $٣س^{٢}$ $هـ^{س}$ − قتاس ظتاس

قاعدة (٣):

إذا كان ق(س) = $لـو_{هـ}$س ، س > ٠ ، فإن قَ(س) = $\frac{١}{س}$

مثال ٥ : إذا كان ص = $لـو_{هـ}س^{١٠}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٥

الحل : ص = $لـو_{هـ}س^{١٠}$ = ١٠$لـو_{هـ}$س

ومنها يكون $\frac{د ص}{د س}$ = ١٠ × $\frac{١}{س}$ = $\frac{١٠}{س}$

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=٥}$ = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢

مثال ٦ : بيّن باستخدام قاعدة لوبيتال ما يأتي:

١ $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = ١$

٢ $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{لـو_{هـ}س}{س^{٢} - ١} = \frac{١}{٢}$

الحل : ١ بالتعويض المباشر $\frac{هـ^{٠} - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ^{س} - ١}{س} = \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{هـ^{س}}{١} = هـ^{٠} = ١$

٢ بالتعويض المباشر تكون $\frac{لـو_{هـ}١}{١^{٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال

ومنها $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{لـو_{هـ}س}{س^{٢} - ١} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{\frac{١}{س}}{٢س} = \frac{١}{٢}$

تمارين ١ - ٤

١ احسب النهايات الآتية باستخدام قاعدة لوبيتال:

أ $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{هـ^{س-١} - س}{لو_{هـ} س}$ ب $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{٤س}{ظاس}$

٢ جد $\frac{دص}{دس}$ في كلّ مما يأتي:

أ ص = $هـ^{س}$ جتاس ب ص = $لو_{هـ} \sqrt{س}$ ، س > ٠

جـ ص = $(هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} + ٢)$

٣ إذا كان $\acute{ق}(١) = -٢$ ، ق(٣) = -٢ ، $\acute{ق}(٣) = ٤$ جد قيمة: $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} - ١}{ق(١) - ق(س)}$

٤ إذا كانت ص = $س^{٢} + هـ^{-س} + ١$ ، فجد قيمة/ قيم س التي تجعل $\acute{ص}$ = ص

ورقة عمل (١)

١ إذا كانت ص = $\frac{جاس}{س}$ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: $\acute{\acute{ص}} + \frac{٢}{س}\acute{ص} + ص = ٠$

٢ إذا كان ق(س) = $س^{ن}$ ، ن ∈ ص ، وكان $ق^{(٣)}(س)$ = أ س ، جد قيمة أ

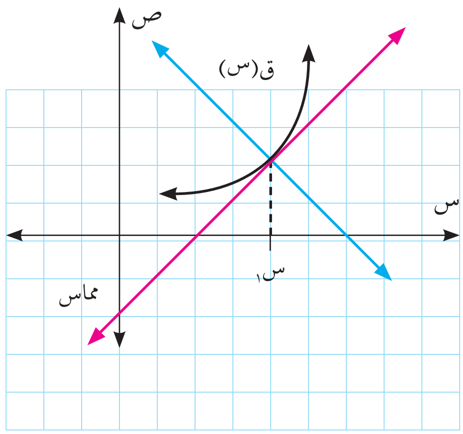
٣ إذا كان ق(س) = س + $هـ^{س+١}$ ، (هـ العدد النيبيري)
جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

٤ أثبت باستخدام قاعدة لوبيتال أن: $\lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}(أ)^{ن-م}$ ، أ ≠ ٠

١ - ٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية (Geometric and Physical Applications)

أولاً: تطبيقات هندسية:

نلاحظ في الشكل المجاور أن معدل التغير للاقتران ق(س) (ميل المنحنى) عند س$_١$ هو ميل المماس المرسوم للمنحنى وتساوي قَ(س$_١$) ونسمي النقطة (س$_١$ ، ق(س$_١$)) نقطة التماس.



تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند النقطة أ (س$_١$ ، ق(س$_١$))، فإن ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س)، ويساوي قَ(س$_١$) .

ويعرف العمودي على منحنى الاقتران، بأنه العمودي على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.

مثال ١ : جد ميل منحنى الاقتران ق(س) = س^٣ + ٥س عند س = ١، ثم جد معادلتي المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة.

الحل : ميل المنحنى عند س = ١ يساوي قَ(١)

قَ(س) = ٣س^٢ + ٥ ومنها قَ(١) = ٨ = ميل المماس

لكن نقطة التماس هي (١ ، ق(١)) = (١ ، ٦)

معادلة المماس هي: ص − ص$_١$ = م(س − س$_١$)

أي: ص − ٦ = ٨(س − ١) ومنها ص = ٨س − ٢

ميل العمودي على المماس = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-١}{٨}$

ومنها تكون معادلة العمودي على المماس هي:

٨ص + س − ٤٩ = ٠ (تحقق من ذلك)

مثال ٢ : إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = $\frac{٤}{س}$ ، س > ٠ ، يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، أثبت أن العمودي على المماس عند نقطة التماس لمنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠).

الحل : نفرض نقطة التماس أ(س$_١$ ، ص$_١$)

ميل المماس = ظا ١٣٥ = $^-$١ ، قَ(س) = $\frac{^-٤}{س^٢}$

لكن ميل المنحنى عند س$_١$ = $\frac{^-٤}{س_١^٢}$

ومنها $^-$١ = $\frac{^-٤}{س_١^٢}$

إذن س$_١$ = ٢ لأن س$_١$ > ٠

نقطة التماس هي (٢ ، ٢) ، ومنها ميل العمودي = $\frac{^-١}{^-١}$ = ١

معادلة العمودي هي ص − ٢ = ١(س − ٢) ومنها ص = س

النقطة (٠ ، ٠) تقع على العمودي على المماس.

أي أن العمودي على المماس يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢}{هـ^س}$ عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١

الحل : قَ(س) = $\frac{٢س هـ^س - س^٢ هـ^س}{(هـ^س)^٢}$ ومنها يكون ميل المماس = قَ(١) = $\frac{١}{هـ}$ (لماذا ؟)

عندما س$_١$ = ١، فإن ص$_١$ = $\frac{١}{هـ}$ فتكون معادلة المماس هي:

ص − $\frac{١}{هـ}$ = $\frac{١}{هـ}$(س − ١) ، ومنها هـ ص = س

مثال ٤ : إذا كان المستقيم ص = $^-$٣س + جـ يمس منحنى ق(س) = $^-$٢س^٢ + ٥س + ١

جد نقطة/ نقط التماس.

الحل : نفرض أن نقطة التماس (س$_١$ ، ص$_١$) ، قَ(س) = $^-$٤س + ٥

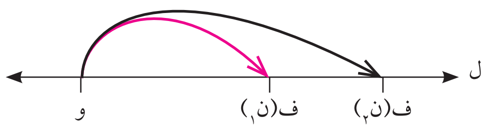
وبما أن ميل المماس = ميل المنحنى

إذن $^-$٣ = $^-$٤س$_١$ + ٥ ومنها س$_١$ = ٢

نقطة التماس = (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٣) (تحقق من ذلك)

ثانياً: تطبيقات فيزيائية:

لتكن (و) نقطة على المستقيم ل وتحرك جسم عليه بحيث كانت ف تمثل بعد الجسم عن النقطة (و) بعد ن ثانية فإن:



السرعة المتوسطة في الفترة [ن$_1$ ، ن$_2$]

تساوي $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

تعريف:

السرعة اللحظية (ع) عند الزمن ن هي ع(ن) = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = فَ

التسارع اللحظي (ت) عند الزمن ن هو $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د}^2\text{ف}}{\text{د ن}^2}$ = فً

مثال ٥ : تحرك جسم على خط مستقيم، بحيث إن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة ف = ن^3 − ٩ن^2 + ٧ حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني، جد:

١ السرعة المتوسطة للجسم في الفترة [١ ، ٣]

٢ تسارع الجسم عندما يعكس الجسم من اتجاه حركته.

الحل : ف = ن^3 − ٩ن^2 + ٧

١ السرعة المتوسطة $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٣ - ١} = \frac{-٤٧ - -١}{٣ - ١}$ = −٢٣ م/ ث.

٢ فَ(ن) = ع(ن) = ٣ن^2 − ١٨ن

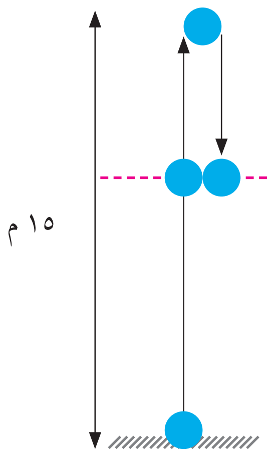
يعكس الجسم اتجاه حركته في اللحظة التي تتغير فيها إشارة ع

أي عندما ع(ن) = ٠ ومنها ٣ن^2 − ١٨ن = ٠ ⇐ ٣ن(ن − ٦) = ٠ ، ن = ٠، ن = ٦ ثوانٍ

يعكس الجسم اتجاه حركته بعد ٦ ثوانٍ

ت(ن) = ٦ن − ١٨ ⇐ ت(٦) = ٦ × ٦ − ١٨ = ١٨ م/ ث^2

مثال ٦ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يتحدد بعده عن سطح الأرض بالعلاقة ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢} ، حيث ف: ارتفاع الجسم بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، جد:



١ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

٢ سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٥ م من سطح الأرض.

٣ المسافة التي قطعها الجسم خلال الثواني الأربعة الأولى.

الحل : ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن^{٢}

١ عندما يصل الجسم أقصى ارتفاع فإن ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٢٠ − ١٠ن = ٠ أي أن ن = ٢ ثانية

∴ أقصى ارتفاع = ف(٢) = ٢٠ × ٢ − ٥ × ٤ = ٢٠م

٢ عندما يكون الجسم على ارتفاع ١٥م فإن ف(ن) = ١٥

⇐ ٢٠ن − ٥ن^{٢} = ١٥ ⇐ ٥ن^{٢} − ٢٠ن + ١٥ = ٠

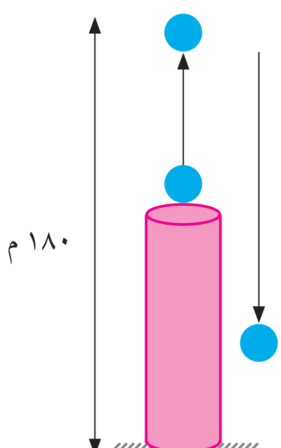
⇐ (ن − ١)(ن − ٣) = ٠ ومنها ن = ١ ، ن = ٣

يكون الجسم على ارتفاع ١٥م عندما:

- ن = ١ أي أن ع(١) = ٢٠ − ١٠ × ١ = ١٠ م/ ث، الجسم صاعد.
- ن = ٣ ، أي أن ع(٣) = ٢٠ − ١٠ × ٣ = $^{-}$١٠ م/ ث، (ماذا تعني السرعة السالبة؟)

٣ عندما ن = ٤ ثانية يكون الجسم على ارتفاع : ف(٤) = ٢٠ × ٤ − ٥ × ١٦ = ٠م ، أي يكون الجسم قد وصل سطح الأرض، وتكون المسافة المقطوعة = ٢ × أقصى ارتفاع − ف(٤) = ٤٠م

مثال ٧ : قذف جسم رأسياً إلى أعلى من قمة برج بحيث إن ارتفاعه عن البرج بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، جد:



١ ارتفاع البرج علماً بان أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض = ١٨٠م

٢ سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.

الحل :

١ عند أقصى ارتفاع عن قمة البرج تكون ع(ن) = ٠

ع(ن) = فَ(ن) = ٣٠ − ١٠ن = ٠ ومنها ن = ٣

أقصى ارتفاع عن قمة البرج = ف (٣) = ٤٥ م

لكن أقصى ارتفاع عن سطح الأرض= ١٨٠م ، ارتفاع البرج = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥م

٢ يرتطم الجسم بالأرض عندما تكون ف(ن) = ⁻١٣٥م (فسّر).

بحل المعادلة ينتج أن ن = ٩ ومنها السرعة ٣٠ − ١٠ × ٩ = ⁻٦٠ م/ ث

تمارين ١ ـ ٥

١ جد النقطة/ النقط على منحنى ق(س) = س^{٢} −٢س + ١ التي يكون عندها المماس للمنحنى عمودياً على المستقيم س + ٢ص − ٤ = صفر

٢ جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = ٣ − ظا^{٢}س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

٣ إذا كان المستقيم س = أ − ٦ص يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٣س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ ، جد قيم أ.

٤ قذف جسم رأسياً إلى أعلى وَفق العلاقة ف = ٤٠ن − ٥ن^{٢}، حيث ف ارتفاعه بالأمتار، ن بالثواني. جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠ م.

١ – ٦ قاعدة السلسلة (Chain Rule)

تواجهنا بعض الاقترانات مثل ق(س) = $(س^{٢} + ١)^{٣}$، والمطلوب إيجاد قَ(س)، وهنا نلجأ إلى فك المقدار أولاً ثم اشتقاق الناتج، أو استخدام مشتقة حاصل الضرب، ولكن هذه الطريقة تزداد صعوبةً وتعقيداً كلما كان الأسّ كبيراً، وهذا يدعو إلى البحث عن طريقة أسهل لإيجاد مشتقة هذه الاقترانات. فمثلاً، إذا كان ص = ق(س) = $(س^{٢} + ١)^{٣}$، وفرضنا أن ع = هـ(س) = $س^{٢} + ١$ فيكون ص = ق(ع) = $ع^{٣}$

أتذكر:

(ق ∘ هـ) (س) = ق(هـ(س)) هو الاقتران المركب من ق ، هـ

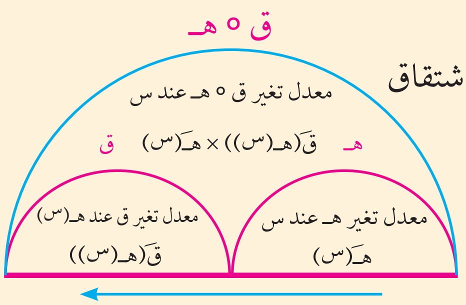
قاعدة السلسلة:

إذا كانت ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)

وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق و ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س) ، مدى هـ ⊇ مجال ق

فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

أي أن (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)



مثال ١ : إذا كان ق(س) = $س^{٣} + س$ ، هـ(س) = $س^{٢}$ ، جد:

١ (ق ∘ هـ)َ (س) ٢ (هـ ∘ هـ)َ (٢)

الحل : قَ(س) = $٣س^{٢} + ١$ ، هـَ(س) = ٢س

١ (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ$(س^{٢})$ × ٢س = $(٣(س^{٢})^{٢} + ١) × ٢س = ٦س^{٥} + ٢س$

٢ (هـ ∘ هـ)َ (٢) = هـَ(هـ(٢)) × هـَ(٢)

= هـَ(٤) × هـَ(٢) = ٨ × ٤ = ٣٢

مثال ٢ : إذا كان ص = $ع^{٢} - ٥ع$ ، ع = $\frac{١}{س + ١}$ ، س ≠ ‎−١، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٠

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = (٢ع - ٥) \times \frac{-١}{(س + ١)^{٢}}$ ، عندما س = ٠ فإن ع = ١

ومنها $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠ ،\ ع = ١} = (٢ - ٥) \times \frac{-١}{(٠ + ١)^{٢}} = -٣ \times -١ = ٣$

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة ص = س ق(س^{٢} + ١) عندما س = ٢، علماً بأن ق(س) قابل للاشتقاق، قَ(٥) = ٣ ، ق(٥) = $^{-}$١

الحل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١ \times \text{ق}(\text{س}^{٢} + ١) + \text{س} \times ٢\text{س قَ}(\text{س}^{٢} + ١)$$

$$\text{ميل المماس} = \left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = ٢} = \text{ق}(٥) + ٨\,\text{قَ}(٥) = {}^{-}١ + ٢٤ = ٢٣$$

ميل المماس = ٢٣ ، نقطة التماس هي (٢ ، $^{-}$٢) . (لماذا؟)

معادلة المماس هي ص − $^{-}$٢ = ٢٣(س − ٢) ومنها ص = ٢٣س − ٤٨

نتيجة:

إذا كان ص = (هـ(س))^{ن} ، وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق ، ن ∈ ص

$$\text{فإن} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـَ}(\text{س})$$

مثال ٤ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}\right)^{٥}$ ، س ≠ ١، جد قَ(٢)

الحل :

$$\text{قَ}(\text{س}) = ٥\left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}\right)^{٤} \times \frac{(\text{س} - ١) \times ١ - ١(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$= ٥\left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}\right)^{٤} \times \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$$

$$\text{قَ}(٢) = ٥ \times ٣^{٤} \times {}^{-}٢ = {}^{-}٨١٠$$

قاعدة:

إذا كان كـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن:

- ق(س) = هـ$^{\text{كـ(س)}}$ قابل للاشتقاق، وتكون قَ(س) = كـَ(س) هـ$^{\text{كـ(س)}}$
- م(س) = لـو$_{\text{هـ}}$ كـ(س) ، كـ(س) > ٠ قابل للاشتقاق وتكون مَ(س) = $\frac{\text{كـَ}(\text{س})}{\text{كـ}(\text{س})}$

مثال ٥ :

١) إذا كان ص = هـ$^{\text{جتاس}}$ فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$

٢) إذا كان ص = لـو$_{\text{هـ}}$ س^{٢} ، فبيّن أن: صً . هـ$^{\text{ص}}$ = $^{-}$٢

الحل :

١) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = {}^{-}\text{جاس هـ}^{\text{جتاس}}$ ومنها $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = \frac{\pi}{٢}} = {}^{-}١\,\text{هـ}^{٠} = {}^{-}١$

٢) ص = ٢لـو$_{\text{هـ}}$ س ومنها صَ = $\frac{٢}{\text{س}}$ ، صً = $\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{-٢}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$ (لماذا؟)

أي أن صً . هـ$^{\text{ص}}$ = $^{-}$٢

تمارين ١ - ٦

١ جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١ لكل مما يأتي:

أ ص = $(س^٢ + س + ١)^{-٣}$

ب ص = $س^٢$ قا $\frac{\pi}{س}$ ، س ≠ ٠

جـ ص = $٥ع^٢ - ٧$، ع = $\frac{١}{س^٢ + ١}$

د ص = ظا $\left(\frac{\pi}{س}\right)$ + $جتا^٢(\pi س)$ ، س ≠ ٠

هـ ص = $(لــو_{هـ} س)^٣$ ، س > ٠

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{لــو_{هـ} (م(س))}{٢س}$ ، وكان م(١) = $هـ^٢$ ، مَ(١) = ٢هـ ، فجد قَ(١).

٣ إذا كان ق(س) = $س^٢$م($س^٢$ + ١) اعتمد على الجدول المجاور في إيجاد قً(١).

م(٢)	مَ(٢)	مً(٢)
٥	$^{-}$١	١

٤ إذا كان ص = $ق^٣$(س) – ق($س^٣$)، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٢

علماً بأن ق(٢) = ١ ، قَ(٢) = $^{-}$٢ ، قَ(٨) = ٢.

١ - ٧ الاشتقاق الضمني (Implicit Differentiation) — للعلمي فقط

سبق لك إيجاد مشتقة الاقتران ص = ق(س) عندما تكون العلاقة بين المتغيرين صريحة (ص معرفة بدلالة س)، ولكن في العلاقة س^{٢} + ٥ص^{٢} = س ص − ٣ ليس من السهل كتابة ص بدلالة س ، فنسميها علاقةً ضمنيةً، ونجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ بطريقة تسمى الاشتقاق الضمني، حيث يتم اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة إلى س ضمن قواعد الاشتقاق.

مثال ١ : إذا كان س^{٢} + ص^{٢} + ١ = ٤س − ص ، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، ثم جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند النقطة (١ ، ١)

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س :

٢س + ٢ص صَ = ٤ − صَ

٢ص صَ + صَ = ٤ − ٢س (تجميع الحدود التي تحوي صَ على جهة واحدة)

صَ(٢ص + ١) = ٤ − ٢س (إخراج عامل مشترك صَ من الطرف الأيمن)

$\Leftarrow$ صَ = $\frac{\text{٤ − ٢س}}{\text{٢ص + ١}}$ ومنها $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند النقطة (١ ، ١) = $\frac{\text{٤ − ٢}}{\text{٢ + ١}}$ = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

مثال ٢ : إذا كان ٣ص = جاس جتا٢ص ، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س

٣صَ = جتاس جتا٢ص + جاس × − ٢جا٢ص × صَ

٣صَ + ٢جاس × جا٢ص × صَ = جتاس جتا٢ص

ومنها صَ = $\frac{\text{جتاس × جتا٢ص}}{\text{٣ + ٢جاس × جا٢ص}}$

مثال ٣ : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة (س + ص)^{٣} − ٣ص^{٢} = ٥ ، ص > ٠ ، عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم س + ص = ٢

الحل : بالتعويض بدل س + ص بالعدد ٢ في معادلة المنحنى ينتج أن: ٢^{٣} − ٣ص^{٢} = ٥

إذن ص = ١ ، ومنها نقطة التقاطع هي(١ ، ١)

لكن ميل المماس = ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ١)

نشتق العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س فينتج $٣(س + ص)^{٢} (١ + صَ) - ٦ص صَ = ٠$

وبتعويض النقطة (١ ، ١) ينتج أن: $٣(١ + ١)^{٢} (١ + صَ) - ٦ صَ = ٠$ ومنها $صَ = {}^{-}٢$

ميل المماس $= {}^{-}٢$ وتكون معادلة المماس هي: $ص = {}^{-}٢س + ٣$

قاعدة:

إذا كانت $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، م ، ن $\in$ ص ، م $\neq$ ن ، ن $\neq$ ٠ ، فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن} - ١}$

نتيجة:

إذا كان $ق(س) = (هـ(س))^{ن}$ ، ن $\in$ ح

وكان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن $قَ(س) = ن\,(هـ(س))^{ن-١} \times هـَ(س)$

مثال ٤ : إذا كان $ق(س) = (س^{٣} + ٥س - ٢)^{\frac{٣}{٤}}$ ، جد $قَ(٢)$

الحل : $قَ(س) = \frac{٣}{٤} (س^{٣} + ٥س - ٢)^{-\frac{١}{٤}} \times (٣س^{٢} + ٥)$

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣س^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{س^{٣} + ٥س - ٢}}$$

$$قَ(٢) = \frac{٣}{٤} \times \frac{(٣ \times ٢^{٢} + ٥)}{\sqrt[٤]{٢^{٣} + ٥ \times ٢ - ٢}}$$

$$= \frac{٣}{٤} \times \frac{١٧}{٢} = \frac{٥١}{٨}$$

نشاط: إذا كانت $ص = \frac{(س + ١)^{٥} (٢ + س)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$

لإيجاد $\left. \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٠}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين فيصبح:

$$\text{لـو}_{هـ} ص = \text{لـو}_{هـ} \frac{(س + ١)^{٥} (٢ + س)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$$

وبتطبيق قوانين اللوغاريتمات تصبح:

$$\text{لـو}_{هـ} ص = ٥\text{لـو}_{هـ}(س + ١) + ٤\text{لـو}_{هـ}(٢ + س) - ٣\text{لـو}_{هـ}(س^{٢} + ١)$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س تكون $\frac{صَ}{ص} =$ ....

منها $\frac{د ص}{د س} =$ ....

ومنها $\left. \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٠} =$ ....

تمارين ١ - ٧

١ جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي :

أ $س^{٣} + س ص + ٢ص^{٢} = ٥$ ب $ص = \sqrt[٥]{١ - س^{٢}} + ٣$

جـ $ص = جا(س + ص)$

٢ جد معادلة العمودي على منحنى الدائرة التي معادلتها $س^{٢} - ٣س + ص^{٢} = ٢٥$ ، عند كل من نقطتي تقاطعها مع منحنى $ص = س^{٢} - ٣س + ٥$

٣ إذا كان المستقيم المار بالنقطة $(^{-}٢ ، ٠)$ يمس منحنى العلاقة $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٤$، جد نقطة/ نقط التماس.

٤ إذا كان $هـ^{ص} + هـ^{س} = هـ^{-ص} + هـ^{-س}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(-١ ، ١)$.

ورقة عمل (٢)

١ إذا كانت $س^٢ = لو_{هـ}(س ص)$ ، س ، ص > ٠ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، هـ).

٢ من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسياً إلى أعلى، وكان ارتفاعه ف بالأمتار بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة $ف = ٣٠ن - ٥ن^٢$،
جد:

أ أقصى ارتفاع يصله الجسم.

ب سرعة الجسم وهو نازل عندما يكون على ارتفاع ٤٠ م.

٣ جد: أ $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ظا(٢س + هـ) - ظا ٢س}{هـ}$

ب $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١ + ٣هـ) - ق(١ - ٣هـ)}{١٠ هـ}$ ، علماً بأن $قَ(١) = -٢$

جـ $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{قَ(٢س) - قَ(٢)}{س - ١}$ ، علماً بأن $قَ(٢) = ٣$ ، $قً(٢) = ٥$

٤ جد النقطة/ النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ موازياً للقاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ٢) ، $(٢ ، \frac{٥}{٢})$

٥ إذا كان ق(س) = أجاس ، $هـ(س) = \frac{٣س}{س^٢ + ١}$ فجد قيمة أ بحيث $(هـ ∘ ق)َ(\frac{\pi}{٦}) = ٠$ ، أ ≠ ٠

٦ إذا كان $ق(س) = جا^٣س - جتا^٣س$ ، جد $قً(\frac{\pi}{٤})$.

١ ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلٍ مما يأتي:

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ وكان متوسط تغير نفس الاقتران في الفترة [٣ ، ٧] يساوي ⁻٥، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [١ ، ٧]؟

أ) ٢ ب) ١ جـ) ⁻١ د) ⁻٢

٢ إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، ⁻١) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤}$؟

أ) ⁻١ ب) $\frac{⁻١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٣ إذا كان ق(س) = جتا٢س، فما قيمة قً(س) + ٦ق(س) ؟

أ) جتا٢س ب) جا٢س جـ) ٢جتا٢س د) ٢جا٢س

٤ إذا كان $س^٢ - س ص + ص^٢ = ٣$، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ⁻١) ؟

أ) ⁻٢ ب) ⁻١ جـ) ١ د) ٢

٥ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢ &، س \neq ٥ \\ ١٠س &، س = ٥ \end{cases}$ ، فما قيمة قَ(٥) ؟

أ) ٠ ب) ٤ جـ) ١٠ د) غير موجودة

٦ يتحرك جسيم على خط مستقيم وَفق العلاقة: ف(ن) ع(ن) = ن

ف: المسافة بالأمتار، ن : الزمن بالثواني، ع(ن) السرعة، وكانت ع(٢) = ٣م/ ث، فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية؟

أ) ⁻٨ م/ $ث^٢$ ب) ٨م / $ث^٢$ جـ) ١٢ م / $ث^٢$ د) ⁻١٢م/ $ث^٢$

٧ إذا كانت ق(س) = $(س^٢ + ٧)^{\frac{٢}{٣}}$ ، فما قيمة قً(١) ؟

أ) $\frac{١١}{١٨}$ ب) $\frac{٤}{٩}$ جـ) $\frac{١٥}{١٨}$ د) $\frac{١}{٢}$

٨ إذا كان $(ق \circ هـ)'(٣) = ١٥$ ، وكان $ق(س) = س^٢ - ٩$ ، $هـ'(٣) = ٥$ ، فما قيمة $هـ(٣)$؟

أ) ٠ ب) ١,٥ جـ) ٢ د) ٣

أجب عن الأسئلة الآتية:

٢ جد متوسط التغير للاقتران $ص = ق(س) = (س + ١)هـ^{س^٢-س}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ١

٣ إذا كان $ق(٢) = ٣$ ، $ق'(٢) = -١$، جد $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \dfrac{ق(س^٢ + ٢س - ١) - ق(٢)}{س^٢ - ١}$.

٤ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{هـ^{٤س} - ١}{ظاس}$ ب $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{هـ^{س^٢} - هـ^{س}}{٢س}$

جـ $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{١ - جتاس}{س جاس}$

٥ إذا كانت $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \dfrac{ق(س) - ٢}{س - ١} = ٣$، ق متصلاً على ح.

جد $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \dfrac{س^٣ ق(س) - ق(١)}{س - ١}$

٦ إذا كان $ص = ق(س) = \dfrac{س هـ^{٦س}}{جاس}$ ، $جاس \neq ٠$ جد $\dfrac{د ص}{د س}$

المراجع

بسيوني، جابر أحمد (2014) : الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية .

حمدان، فتحي خليل (2012) ، الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية، دار وائل للنشر، عمان .

شاهر، ثائر فيصل (2009) : الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية، دار الحامد للنشر والتوزيع عمان.

رمضان، زياد (2001) : مبادئ الإحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2001.

الجندي، حسن عوض (2014) :منهج الرياضيات المعاصر محتواه واساليب تدريسه، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة .

المومني، غازي فلاح، الرياضيات المالية المعاصرة ، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2014

الخطيب، روحي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج1، دار المسيرة، عمان .

الخطيب، روحي إبراهيم (2012) : التفاضل والتكامل ج2، دار المسيرة، عمان .

عدنان عوض، أحمد علاونة ، مفيد عزام ،(1990) –دار الفكر – عمان –الأردن

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني(ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع

ابو أسعد ، صلاح عبد اللطيف (2010): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع

الزغلول، عماد (2005): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

حسين فرج، عبد اللطيف (2005): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Howard Anton, John Wiley (1999): Calculus, 6th Edition ,

Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

Edwards & Penny(1994): Calculus with Analytic Geometry, 4th Edition, Prentice hall

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سمية النخالة
م. فواز مجاهد	أ. عبد الحكيم أبو جاموس	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد مطر	د. سمية النخالة
د. محمد صالح (منسقًا)	د. علا الخليلي	أ. أحمد سياعرة
د. معين جبر	د. شهناز الفار	أ. قيس شبانة
د. علي عبد المحسن	د. علي نصار	أ. مبارك مبارك
د. تحسين المغربي	د. أيمن الأشقر	أ. عبد الكريم صالح
د. عادل فوارعة	أ. ارواح كرم	أ. نادية جبر
أ. وهيب جبر	أ. حنان أبو سكران	أ. أحلام صلاح
د. عبد الكريم ناجي	أ. كوثر عطية	أ. نشأت قاسم
د. عطا أبوهاني	د. وجيه ضاهر	أ. نسرين دويكات
د. سعيد عساف	أ. فتحي أبو عودة	

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للثاني عشر العلمي والصناعي:

خليل محيسن	لبنى ابو باشا	أروى مشارقة	محمد مسلم	عزيزة عيطة
نادية عباسي	يوسف الحروب	آسيا العلامي	محمد الفرا	صلاح الترك
أحمد العملة	رهام مصلح	صفية النجار	فلاح الترك	باسم المدهون
فداء أبو عرة	عريب الزبون	سناء أبو حماد	رائد عبد العال	سمير عمران
جوني مصلح	فهمي بشارات	محمد ابو سليم	رفيق الصيفي	مصطفى قنيص
توفيق السعدة	خالد طقاطقة	سهيلة بدر	حسين عرفات	نادر أبو عقيل
رائد ملاك	صهيب عكر	هيثم مسالمة	سميرة حنيف	مريم الحوامدة
أشجان جبر	ماهر أبو بدر	عبير لعسوس	مؤيد الحنجوري	وهيب جبر
علي زايد	خوله الشاعر	محمد عليان	سرين أبو عيشة	عبد الحافظ الخطيب
ابتسام بعباع	فادي زيدان	مطيعة صوافطه	ابتسام اسليم	كفاية مضية
جميل معالي	عبدالرحمن عزام	سوزان عبدالحميد	منال الصباغ	محمد دراوشة
سميه سلامه	خالد الدشت	محمد موسى	د.رحمة عودة	عماد النابلسي
ايناس سباعنة	هاشم عبيد	أيمن ابو زياد	هانم النخالة	نجود ريحان

تم مناقشة الكتاب بورشات عمل على مستوى مديريات الوطن

تَمَّ بِحَمْدِ الله