١٢

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

"التكنولوجي"

الفترة الثانية

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف 2983280 2 970+ | فاكس 2983250 2 970+

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاشتقاق في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران وإيجاده.

٢. التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.

٣. التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.

٤. إيجاد معادلة المماس، ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة تقع عليه.

٥. إيجاد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة السلسلة.

٦. إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران.

متوسط التغير (Rate of Change):

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت فيه س من $س_1$ إلى $س_2$ فإن Δ س = $س_2$ − $س_1$ تمثل التغير في س وتقرأ دلتا س.

وبناءً على التغير في س تتغير ص، حيث Δ ص = $ص_2$ − $ص_1$ = ق($س_2$) − ق($س_1$) تمثل التغير في ص.

مثال (١): إذا كان ص = ق(س) =٢س + ٣ جد Δس ، Δص ، عندما تتغير س من $س_1$ = ١ إلى $س_2$ = ٤.

الحل: Δس = $س_2$ − $س_1$ = ٤ − ١ = ٣

Δص = $ص_2$ − $ص_1$ = ق($س_2$) − ق($س_1$) = ق(٤) − ق(١) =١١ − ٥ = ٦

يسمى المقدار $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ = $\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$.

مثال (٢): إذا كان ص= ق(س)= ٢س^{٢} + ٤ ، س ∈ ح ، وتغيرت س من س$_{١}$ = ٢ إلى س$_{٢}$ = ٥، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{\text{ق(س}_{٢}\text{) − ق(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢} − \text{س}_{١}}$

= $\frac{\text{ق(٥) − ق(٢)}}{٥ − ٢}$

= $\frac{٥٤ − ١٢}{٥ − ٢}$

= ١٤

مثال (٣): إذا كان ص= ق(س) = ١ − ٣س ، س ∈ ح ، وزادت س من س$_{١}$= ٣ بمقدار ٢، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير = $\frac{\text{ق(س}_{٢}\text{) − ق(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢} − \text{س}_{١}}$

Δس = س$_{٢}$ − س$_{١}$

٢ = س$_{٢}$ − ٣ ومنها س$_{٢}$ = ٥

متوسط التغير = $\frac{\text{ق(٥) − ق(٣)}}{\text{س}_{٢} − \text{س}_{١}}$

= $\frac{{}^{-}١٤ − {}^{-}٨}{٥ − ٣}$

= $^{-}$٣

مثال (٤): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$= $^{-}$٢ إلى س$_{٢}$ = ٩ يساوي $^{-}$٦، أجد:

أ. التغير في ص ب. ق(٩) علماً بأن ق($^{-}$٢) = ٦

الحل: أ. التغير في س = Δس

= س$_{٢}$ − س$_{١}$

= ٩ − $^{-}$٢

= ١١

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{١١} = {}^{-}٦\text{، ومنها } \Delta \text{ص} = {}^{-}٦ \times ١١ = {}^{-}٦٦$$

ب. Δص = ص$_٢$ − ص$_١$

= ق(٩) − ق($^-$٢)

$^-$٦٦ = ق(٩) − ٦

ق(٩) = $^-$٦٦ + ٦

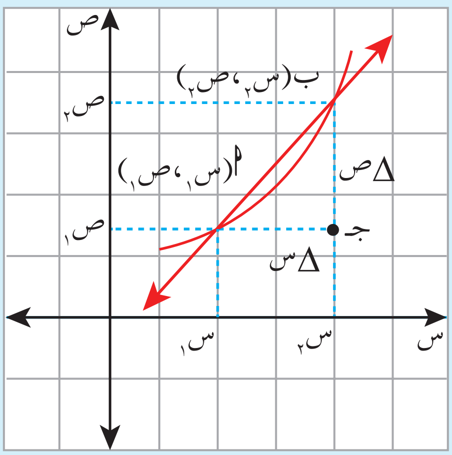
= $^-$٦٠

أتذكر:

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ص= ق(س)، والنقطتان أ(س$_١$، ص$_١$) ، ب(س$_٢$، ص$_٢$) واقعتين عليه، فإن ميل المستقيم القاطع أب = $\dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$.

ومتوسط التغير للاقتران ص = ق(س) يساوي $\dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

أي أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع أب.



مثال (٥): تقع النقطتان أ($^-$١، $^-$٣)، ب(٣، ٩) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع أب.

الحل: ميل المستقيم القاطع أب = $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$

$$= \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$$

$$= \frac{٩ - {}^{-}٣}{٣ - {}^{-}١}$$

= ٣

تمارين ومسائل (٣-١)

س١: إذا كان ص = ق(س) =٥س – ١ جد Δس ، Δص عندما تتغير س:

أ. من س$_{١}$ = ٢ إلى س$_{٢}$ = ٣,٨

ب. من س$_{١}$ = ٤ إلى س$_{٢}$ = ⁻٢

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) في الحالات الآتية:

أ. ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ٣}$ ، عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٧ إلى س$_{٢}$ = ٤

ب. ق(س) = س^{٢} – ١ ، عندما س$_{١}$ = ٢ ، Δس = ٤

س٣: تقع النقطتان أ(-٢، ٥)، ب(٣،١٠) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع أب.

س٤: ليكن ص = ق(س) اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من س$_{١}$ = ١ إلى س$_{٢}$ = ٤ هو ١٣، أجد:

أ. التغير في ص.

ب. ق(٤) علما بأن ق(١) = ٦

مفهوم المشتقة الأولى (First Derivative):

تعريف:

المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) عند النقطة ($س_١$ ، ق($س_١$)) هي:

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ق(س_١ + \Delta س) - ق(س_١)}{\Delta س}$$ ويرمز لها بالرمز $ق'(س_١)$ أو $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=س_١}$ أو $\left.ص'\right|_{س=س_١}$ ،

وللتبسيط يمكن كتابة Δس = هـ ، فتكون $ق'(س_١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٥ ، أجد $ق'(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: $ق'(٢) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥ - ٥}{هـ}$

= صفر.

مثال (٢): إذا كان ق(س) = ٣س، أجد $ق'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: $ق'(١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣(١ + هـ) - ٣(١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣ + ٣هـ - ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣هـ}{هـ}$

= ٣

نشاط (١):

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٥ - ٢\text{س}$، أجد $\text{ق}'(٤)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: $$\text{ق}'(٤) = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٤ + \text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٨ - ٢\text{هـ} + ٣}{\text{هـ}}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= {}^{-}٢$

مثال (٣): إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ١$ ، أجد $\text{ق}'(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: $$\text{ق}'(٢) = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(٢ + \text{هـ})^٢ + ١ - (٣ \times ٢^٢ + ١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣(٤ + ٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢) + ١ - (٣(٤) + ١)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٣ + ١٢\text{هـ} + ٣\text{هـ}^٢ - ١٣}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١٢\text{هـ} + ٣\text{هـ}^٢}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}\,(١٢ + ٣\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} (١٢ + ٣\text{هـ})$$

$= ١٢ + ٣ \times ٠$

$= ١٢$

مثال (٤): إذا كان $ق(٢) = ٨$، $ق'(٢) = ٢$، أجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{٥هـ}$

الحل: $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{٥هـ}$

$= \frac{-١}{٥} \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$ (لماذا؟)

$= \frac{-١}{٥} ق'(٢)$ (لماذا؟)

$= \frac{-١}{٥} \times ٢$

$= \frac{-٢}{٥}$

مثال (٥): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير في الفترة [٣، ٣ + هـ] يساوي $\frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$ أجد $ق'(٣)$.

الحل: متوسط التغير $= \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{هـ} = \frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$

$ق'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ (هـ - ٥)}{هـ} = -٥$

ألاحظ أن $ق'(س_١)$ تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [$س_١$، $س_١ +$ هـ] عندما تؤول هـ إلى الصفر.

نشاط (٢):

إذا كان $ق(س) = س^٢ + ٣$ ، أجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد $ق'(٢)$.

الحل: $ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س + هـ)^٢ + ٣ - (س^٢ + ٣)}{هـ}$ = ...

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{س^٢ + ٢س هـ + هـ^٢ + ٣ - س^٢ - ٣}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢س هـ + هـ^٢}{هـ}$ = ...

$= \lim_{هـ \to ٠} (٢س + هـ)$

$= ٢س$

ومنها $ق'(٢) = ٢ \times ٢$

$= ٤$

تمارين ومسائل (٣-٢)

س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد ق/(س) عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ. ق(س) = ٢س − ٧ ، س = ⁻٣

ب. ق(س) = ٣ − س ، س = ٢

جـ. ق(س) = س^{٢} + س ، س = ٠

س٢: إذا كان ق/(٣) = ٨ ، أجد:

أ. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{هـ}$

ب. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + هـ) - ق(٣)}{٢هـ}$

ج. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣) - ق(٣ + هـ)}{هـ}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) في الفترة [٣، ٣ + هـ] يساوي $\frac{٢}{(⁻١ + هـ)}$ أجد ق/(٣).

س٤: إذا كانت Δص = $\frac{٧هـ - هـ^{٢}}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٥ إلى س$_{٢}$ = ٥ + هـ ، أجد ق/(٥).

قواعد الاشتقاق (١): (Differentiation Rules)

نشاط (١):

حاول همّام إيجاد ق/(٢) حيث ق(س) = ٢س^{٥} + س^{٣} − ٢س^{٢} باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، فبدأ بالحل بالطريقة التي تعلمها في الدرس السابق كما يأتي:

$$ق^{/}(٢) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ}$$

$$ق^{/}(٢) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٢(٢ + هـ)^{٥} + (٢ + هـ)^{٣} - ٢(٢ + هـ)^{٢} - ٦٤}{هـ}$$

فوجد صعوبة في إيجاد هذه النهاية، كيف سيجد همّام ق/(٢) ؟

قاعدة (١):

إذا كان ق (س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي، فإن ق/(س) = صفر. ∀ س ∈ ح.

مثال (١): إذا كان ق (س) = ٣ ، أجد ق/(س)، ق/(٥).

الحل: ق/(س) = صفر لجميع قيم س ∈ ح

ق/(٥) = صفر

قاعدة (٢):

إذا كان ق (س) = $س^{ن}$ فإن = ق$'$(س) = ن$س^{ن-١}$ ، ن عدد حقيقي.

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{ءص}{ءس}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) ص = $س^{٤}$

ب) ص = $س^{-٥}$ ، س $\neq$ ٠

ج) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ س $\neq$ ٠

د) ص = $\sqrt{س}$ ، س $\geqslant$ ٠

الحل: أ) ص = $س^{٤}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤$س^{٤-١}$ = ٤$س^{٣}$ ، $\forall$ س $\in$ ح

ب) ص = $س^{-٥}$ ، س $\neq$ ٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = -٥ $س^{-٥-١}$ = -٥$س^{-٦}$

ج) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ = $س^{-٣}$ ، س $\neq$ ٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = -٣ × $س^{-٣-١}$ = -٣$س^{-٤}$ = $\frac{-٣}{س^{٤}}$

د) ص = $\sqrt{س}$ ، س $\geqslant$ ٠

= $س^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$$س^{\frac{١}{٢}-١}$ = $\frac{١}{٢}$$س^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ، س > ٠

قاعدة (٣):

إذا كان الاقترانان ق(س)، هـ (س) قابلين للاشتقاق عند س، وكانت أ $\in$ ح، وكان هـ (س) = أق(س)،

فإن هـ$'$(س) = أ ق$'$ (س).

مثال (٣): إذا كان $ق(س) = ٢س^٥$ ، جد $ق^/(س)$، $ق^/(^-١)$.

الحل: $ق(س) = ٢س^٥$

$ق^/(س) = ٢ \times ٥س^{٥-١} = ١٠س^٤$

$ق^/(^-١) = ١٠ \times (^-١)^٤$

$= ١٠ \times ١ = ١٠$

قاعدة (٤):

إذا كان الاقترانان ك(س)، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) + ع(س)، فإن $ق^/(س) = ك^/(س) + ع^/(س)$

مثال (٤): إذا كان $ك(س) = س^٢$ ، $ع(س) = ٢س$، $ق(س) = ك(س) + ع(س)$، جد $ق^/(س)$ ، $ق^/(٠)$ ؟

الحل: $ق^/(س) = ك^/(س) + ع^/(س)$

$= (٢س) + (٢)$

$= ٢س + ٢$

$ق^/(٠) = ٢ \times ٠ + ٢ = ٢$

قاعدة (٥):

إذا كان الاقترانان ك(س)، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) − ع(س)، فإن $ق^/(س) = ك^/(س) − ع^/(س)$

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان $ق(س) = س^٢ − ٥س + ٦$ ، جد $ق^/(س)$، $ق^/(٣)$

الحل: $ق(س) = س^٢ − ٥س + ٦$

$ق^/(س) = ٢س − ٥ +$ صفر

$ق^/(٣) = ٢ \times ٣ − ٥$

$= ١$

مثال (٦): إذا كان $ك'(١) = ٣$، $ع'(١) = ٢$ وكان $ق(س) = ك(س) - ٢ع(س)$، جد $ق'(١)$ ؟

الحل: $ق'(س) = ك'(س) - ٢ع'(س)$

$ق'(١) = ك'(١) - ٢ع'(١)$

$= ٣ - ٢ \times ٢$

$= {}^-١$

مثال (٧): إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq$ صفر ، أجد $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

الحل: $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = ق'(س)$

لكن $ق(س) = \frac{١}{س} = س^{-١}$

$ق'(س) = {}^-١ س^{-٢}$

$= \frac{{}^-١}{س^٢}$

ومنها $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \frac{{}^-١}{س^٢}$

تمارين ومسائل (٣-٣)

س١: أجد $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{هـ}$ علماً بأن ق(س) = $س^٣ - س$.

س٢: أجد $\frac{ءص}{ءس}$ الاقترانات الآتية:

أ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب) ص = ٥س + $٣س^٢$

جـ) ص = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ، س > صفر

س٣: أجد $ص^/ \Big|_{س=١}$ في كل حالة مما يأتي:

أ) ص = $\frac{٣}{س^٢}$ + ٥س ، س ≠ ٠

ب) ص = $٧س^٢ + \sqrt[٣]{س^٢}$

س٤: إذا كان ع(س) = $٣س^٤$ + ب $س^٢$، وكانت $ع^/(١)$ = ٢٢ ، أجد قيمة الثابت ب.

قواعد الاشتقاق (٢): (Differentiation Rules)

سبق وأن قدمنا في البند السابق قواعد اشتقاق جمع اقترانات وطرحها، وكذلك مشتقة اقتران مضروب في عدد ثابت، وسنتناول في هذا البند مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.

قاعدة (١):

إذا كان ىٓ(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ىٓ(س) × هـ(س) **فإن**

ل$'$(س) = ىٓ(س) × هـ$'$(س) + هـ(س) × ىٓ$'$(س) **وبالكلمات**

ل$'$(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

مثال (١): إذا كان ص = (س^{٢} + ٣س + ٢)(٥س + ١) أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٢.

الحل: ص = (س^{٢} + ٣س + ٢)(٥س + ١)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (س^{٢} + ٣س + ٢) × ٥ + (٥س + ١) × (٢س + ٣)

$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س} = ٢}$ = (٤ + ٦ + ٢) × ٥ + (١٠ + ١) × (٤ + ٣)

= ٦٠ + ٧٧ = ١٣٧

أفكر وأناقش: هل هناك طريقة أخرى للحل؟

مثال (٢): إذا كان ك(٢) = ٥، ك$'$(٢) = ٣، ع(٢) = ٤ ، ع$'$ (٢) = ٦ وكان ىٓ(س) = ك(س) × ع(س)، أجد ىٓ$'$(٢).

الحل: ىٓ$'$(س) = ك(س) × ع$'$(س) + ع(س) × ك$'$(س)

ىٓ$'$(٢) = ك (٢) × ع$'$(٢) + ع(٢) × ك$'$(٢)

= ٥ × ٦ + ٤ × ٣

= ٣٠ + ١٢

= ٤٢

قاعدة (٢):

إذا كان الاقتران ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق هـ(س) $\neq$ ٠ فإن:

$$\text{ل}'\text{(س)} = \frac{\text{هـ(س)} \times \text{ق}'\text{(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـ}'\text{(س)}}{\text{(هـ(س))}^{٢}}$$

وبالكلمات ل$'$(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{(المقام)}^{٢}}$

مثال (٣): إذا كان ق(س) = $\frac{\text{٣س + ١}}{\text{٢س − ٥}}$ ، س $\neq \frac{٥}{٢}$ ، أجد ق$'$(س).

الحل: ق$'$(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{(المقام)}^{٢}}$

$$= \frac{\text{(٢س − ٥)} \times ٣ - \text{(٣س + ١)} \times ٢}{\text{(٢س − ٥)}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{(٦س − ١٥)} - \text{(٦س + ٢)}}{\text{(٢س − ٥)}^{٢}} = \frac{{}^{-}١٧}{\text{(٢س − ٥)}^{٢}}$$

مثال (٤): إذا كان ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، هـ(س) $\neq$ ٠ ، وكان ق$'$(٢) = ${}^{-}$١، ق(٢) = ١ ، هـ(٢) = ٢

ل$'$(٢) = ${}^{-}$٢ جد هـ$'$(٢).

الحل: ل$'$(س) = $\frac{\text{هـ(س)} \times \text{ق}'\text{(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـ}'\text{(س)}}{\text{(هـ(س))}^{٢}}$

$$\text{ل}'\text{(٢)} = \frac{\text{هـ(٢)} \times \text{ق}'\text{(٢)} - \text{ق(٢)} \times \text{هـ}'\text{(٢)}}{\text{(هـ(٢))}^{٢}}$$

$${}^{-}٢ = \frac{٢ \times {}^{-}١ - ١ \times \text{هـ}'\text{(٢)}}{\text{(٢)}^{٢}}$$

${}^{-}$٨ = ${}^{-}$٢ − هـ$'$(٢) ومنها هـ$'$(٢) = ٦

مثال (٥): إذا كان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{س+١}$ ، س $\neq$ -١ ، أجد ق$'$(١) علما بأن هـ (١) = ٢ ، هـ$'$(١) = ٣

الحل: ق$'$(س) = $\frac{(س + ١) \times هـ'(س) - هـ(س) \times ١}{(س + ١)^٢}$

ق$'$(١) = $\frac{(١ + ١) \times هـ'(١) - هـ(١)}{(٢)^٢}$

= $\frac{٢هـ'(١) - هـ(١)}{٤}$

= $\frac{٢\times ٣ - ٢}{٤}$

= $\frac{٤}{٤}$

= ١

تمارين ومسائل (٣-٤)

س١: أجد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ. ص = (٢س + ٥) (٣ − س^{٣})

ب. ص = $\frac{س}{س + ٣}$ ، س ≠ $^{-}$٣ ، عندما س = ١

س٢: أجد ق$'$(٣) علماً بأن ق(س) = س^{٢} − س + ٥ .

س٣: إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣س، وكان ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥، هـ$'$(٢) = ١،
أجد ل$'$(٢).

س٤: إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ٢}{٤س + ١}$ ، س ≠ $\frac{^{-}١}{٤}$ ، جد ق$'$(٢)؟

س٥: إذا كان ق(س) = س^{٣} ل(س) + هـ(س)، وكان ل($^{-}$١) = ٥، هـ$'$($^{-}$١) = ٧، ل$'$($^{-}$١) = $^{-}$٣،
فما قيمة ق$'$($^{-}$١)؟

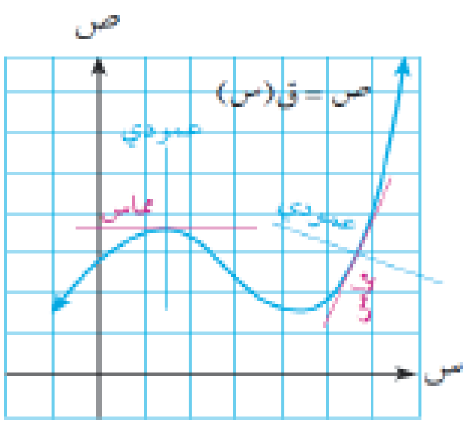
تطبيقات هندسية (المماس والعمودي): Tangent Line

تعريف:

- ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة ($س_١$، $ص_١$) الواقعة عليه يساوي $ق^/(س_١)$،
ومعادلة المماس هي: ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$)، حيث م = $ق^/(س_١)$، $ص_١$ = ق($س_١$).
- ميل العمودي على منحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة ($س_١$، $ص_١$) الواقعة عليه يساوي $\frac{-١}{م}$، م ≠ ٠ .
ومعادلة العمودي على المنحنى هي: ص − $ص_١$ = $\frac{-١}{م}$ (س − $س_١$)، حيث م = $ق^/(س_١)$، $ص_١$ = ق($س_١$).

ملاحظة:

عندما يكون المماس أفقياً فإن ميله يساوي صفراً، ويكون موازياً لمحور السينات.



المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) عند س = $س_١$ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة التي إحداثها السيني = $س_١$ ، وبمعرفة نقطة التماس ($س_١$، $ص_١$) يمكننا إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران، ومعادلة العمودي عليه.

مثال (١): أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣} - س^{٢} + ١$ عندما س = ٣.

الحل: ميل المماس عند (س = ٣) هو $ق^{/}(٣)$

$$ق^{/}(س) = ٣س^{٢} - ٢س$$

$$ق^{/}(٣) = ٣ \times ٣^{٢} - ٢ \times ٣$$

$$= ٢١$$

ميل المماس = ٢١

مثال (٢): أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^{٣}}{س^{٢} + ١}$ عند النقطة $(١، \frac{١}{٢})$ الواقعة عليه.

الحل: معادلة المماس هي:

$$ص - ص_{١} = م (س - س_{١})$$

نقطة التماس هي $(س_{١}، ص_{١}) = (١، \frac{١}{٢})$

ميل المماس عند $(س_{١}، ص_{١}) = م = ق^{/}(١)$

لكن $ق^{/}(س) = \frac{((س^{٢} + ١) \times ٣س^{٢}) - (س^{٣} \times ٢س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

$$ق^{/}(١) = \frac{((١^{٢} + ١) \times ٣ \times ١^{٢} - ١^{٣} \times ٢ \times ١}{(١^{٢} + ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{(٢)^{٢}}$$

$$= \frac{٦ - ٢}{٤}$$

$$= \frac{٤}{٤} = ١$$

أي أن معادلة المماس هي:

$$ص - \frac{١}{٢} = ١ (س - ١)$$

$$ص - \frac{١}{٢} = س - ١$$

$$ص - س + \frac{١}{٢} = ٠$$

مثال (٣): أجد النقطة على المنحنى ص = ق(س) = س^{٢} − ٤س + ٥ ، والتي يكون عندها المماس أفقياً.

الحل: نقطة التماس هي (س$_{١}$، ص$_{١}$) = (س$_{١}$، ق(س$_{١}$))

بما أن المماس أفقي فإن ميل المماس = صفر

ق$'$(س$_{١}$) = صفر

ق$'$(س) = ٢س − ٤

ق$'$(س$_{١}$) = ٢س$_{١}$ − ٤ = صفر

ومنها س$_{١}$ = ٢

نقطة التماس هي (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ١) (لماذا؟)

مثال (٤): أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = (س^{٢} + ١)(س + ١) عند النقطة (١، ٤) الواقعة عليه.

الحل: معادلة العمودي على المماس لمنحنى عند النقطة (١، ٤) هي:

ص − ص$_{١}$ = $\frac{-١}{م}$ (س − س$_{١}$) حيث (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) = (١، ٤)، م = ق$'$(١)

ق$'$(س$_{١}$) = (س^{٢} + ١) × ١ + (س + ١) × ٢س

= س^{٢} + ١ + ٢س^{٢} + ٢س

= ٣س^{٢} + ٢س + ١

ميل المماس = م = ق$'$(١) = ٣ × (١)^{٢} + ٢ × ١ + ١

= ٦

ومنها ميل العمودي = $\frac{-١}{م}$ = - $\frac{١}{٦}$

معادلة العمودي هي ص − ٤ = - $\frac{١}{٦}$ (س − ١)

٦ ص + س − ٢٥ = ٠ (لماذا؟)

تمارين ومسائل (٣-٥)

س١: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} + ٢}{س + ٣}$ س ≠ ⁻٣ ، عندما س = ⁻٢.

س٢: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} − س + ١ عند النقطة (٠، ١) الواقعة عليه.

س٣: أجد النقطة الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٣س + ٥ التي يكون المماس عندها أفقياً.

س٤: أجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٠، ٧) الواقعة عليه، ويعامد المستقيم الذي ميله = - $\frac{١}{٣}$.

س٥: إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٥س − ٢ ، وكان ميل المماس لمنحنى ق(س) عندما (س = ١) يساوي ١١، أجد قيمة الثابت أ.

قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) Chain Rule:

قاعدة السلسلة:

إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س) فإن الاقتران المركب (ق∘هـ)(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س، ويكون (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س).

مثال (١): إذا كان ق(س) = س^٢ − ١ ، هـ (س) = ٢س + ١ أجد (ق∘هـ)$'$(٤)، (هـ∘ق)$'$(٤).

الحل: (ق∘هـ)$'$(٤) = ق$'$(هـ(٤)) × هـ$'$(٤)

ق$'$(س) = ٢س ، هـ$'$(س) = ٢

هـ(٤) = ٩ ، هـ$'$(٤) = ٢

(ق∘هـ)$'$(٤) = ق$'$(٩) × ٢

= ١٨ × ٢

= ٣٦

(هـ∘ق)$'$(٤) = هـ$'$(ق(٤)) × ق$'$(٤) = هـ$'$(١٥) × ٨ (لماذا؟)

= ٢ × ٨ = ١٦ (لماذا؟)

مثال (٢): إذا كان ق(س) = س^٣ + ٢س + ٥ ، هـ(س) = س^٢ + ١ ، أجد (ق∘هـ)$'$(س) ، ثم أجد (ق∘هـ)$'$(١).

الحل: (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(هـ(س)) × هـ$'$(س).

لكن ق$'$(س) = ٣س^٢ + ٢ ، هـ$'$(س) = ٢س

ومن ذلك (ق∘هـ)$'$(س) = ق$'$(س^٢ + ١) × ٢س

= (٣(س^٢ + ١)^٢ + ٢) × ٢س ، (لماذا؟)

= ٦س^٥ + ١٢س^٣ + ١٠س ، (لماذا؟)

(ق∘هـ)$'$(١) = ٦ × ١ + ١٢ × ١ + ١٠ × ١ = ٢٨

نتيجة (١):

إذا كان ص = ق(ع)، ع = هـ(س)، اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ص = ق(هـ(س)) وبالتالي

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{ع}) \times \text{هـ}'(\text{س})$$

$$= \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

أي أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

مثال (٣): إذا كانت ص = $\text{ع}^{٢}$ + ع ، ع = ٣ − ٢س ، أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = ٢ع + ١ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = $^{-}$٢

= (٢ع +١) × $^{-}$٢

= (٢(٣ − ٢س) + ١) × $^{-}$٢

= (٧ − ٤س) × $^{-}$٢

= $^{-}$١٤ + ٨س

مثال (٤): إذا كانت ص = $\text{م}^{٢}$ + ٢م، م = $\text{س}^{٢}$ + س + ١ ، أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = ٠ .

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دم}} \times \frac{\text{دم}}{\text{دس}}$

= (٢م + ٢)(٢س +١)　　　(لماذا؟)

عندما س = ٠ تكون م = ١　　　(لماذا؟)

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=٠} = (٢ \times ١ + ٢)(٢ \times ٠ + ١) = ٤$$

مثال (٥): إذا كان ق(س)،هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ/(١) = ٤، ق/(١) = -١، ق/(٦) = -٢ ، هـ(١) = ٦ ، أجد (ق○هـ)/(١) .

الحل: (ق○هـ)/(١) = ق/(هـ(١)) × هـ/(١)

= ق/(٦) × ٤

= -٢ × ٤ = -٨

نتيجة (٢):

إذا كانت ص = $(\text{ق(س)})^{\text{ن}}$، ن عدد نسبي وكان ق(س) اقترانًا قابلاً للاشتقاق، فإن:

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{ق(س)})^{\text{ن}-١} \, . \, \text{ق}^{/}(\text{س})$

مثال (٦): إذا كانت ص = $(٤\text{س} + ٢)^{٣}$ أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣(٤\text{س} + ٢)^{٢} \times ٤$

$= ١٢\,(٤\text{س} + ٢)^{٢}$

تمارين ومسائل (٣-٦)

س١: إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س + ١ أجد (ق$\circ$هـ)$'$(س).

س٢: إذا كانت ص = (٢س − ١)^{٢} ، أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

س٣: إذا كان ص = ع^{٢} − ٥ع + ١، ع = ٢س + ٣ ، أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

س٤: إذا كان م(س) = (س^{٢} − س)^{٤}، أجد م$'$(٢).

س٥: إذا كان ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١)، أجد ق$'$(١)، علماً بأن هـ$'$(١) = ٥، هـ$'$(٤) = ٢.

س٦: إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ$'$(٢) = ٣، ق$'$(٢) = ٥، ق$'$(٤) = -٢، هـ(٢) = ٤، ق(٢) = ٣ ، هـ$'$(٣) = ١ ، أجد (ق$\circ$هـ)$'$(٢)، (هـ$\circ$ق)$'$(٢).

القيم القصوى (Extreme Values):

تعريف: ❋

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وكانت س = جـ في مجال الاقتران، فإنه يقال أن ق(جـ):

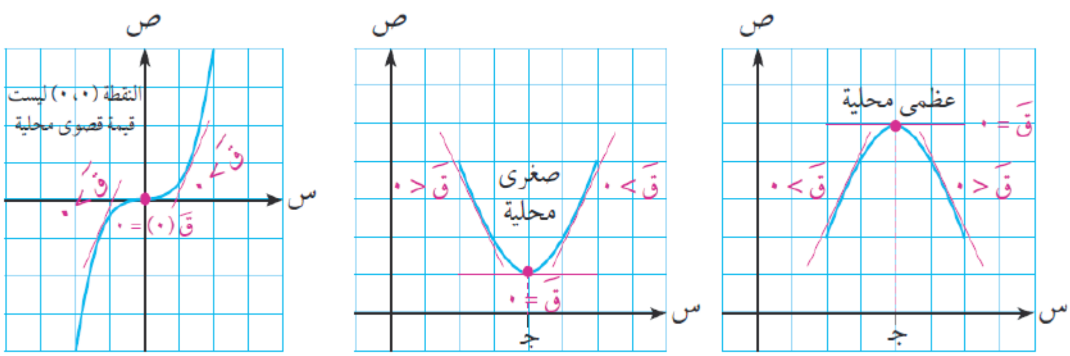
أ. قيمة عظمى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) $\geqslant$ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِ جـ.

ب. قيمة صغرى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) $\leqslant$ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِ جـ.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن: كيف تساعدنا المشتقة الأولى لهذا الاقتران في تعيين القيم القصوى المحلية له؟

أتأمل الأشكال الآتية، وألاحظ العلاقة بين إشارة ق/(س) والقيم القصوى للاقتران.



(أ) (ب) (جـ)

في الشكل (أ): ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)، ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) تغيرت من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ.

في الشكل (ب): ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)، ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) تغيرت من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ.

في الشكل(ج): ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) موجبة لقيم س < جـ وموجبة لقيم س > جـ . ق(جـ) ليست قيمة قصوى محلية للاقتران ق(س).

ماذا تستنتج؟

❋ سنقتصر في دراستنا للقيم القصوى على الاقترانات كثيرة الحدود المعرفة على ح

نتيجة:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت ق/(جـ) = صفراً، حيث جـ ∈ مجال ق(س)، فإن:

أ. إذا تغيرت إشارة ق/(س) من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

ب. إذا تغيرت إشارة ق/(س) من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

يسمى هذا باختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

مثال (١): أعيّن جميع القيم القصوى للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٣س^{٢} + ٨س + ٢ .

الحل: ق/(س) = س^{٢} − ٦س + ٨

ق/(س) = ٠

س^{٢} − ٦س + ٨ = ٠

(س − ٢) (س − ٤) = ٠

س = ٢ ، ٤

س		٢		٤	
إشارة ق/(س)	+ + + + + + + +	صفر	− − − − − − −	صفر	+ + + + + +

إشارة ق/(س) تغيرت من موجبة حيث س < ٢ إلى سالبة حيث س > ٢ ← ق(٢) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة ق/(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٤ إلى موجبة حيث س > ٤ ← ق(٤) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة العظمى المحلية = ق(٢) = $\frac{٢٦}{٣}$

القيمة الصغرى المحلية = ق(٤) = $\frac{٢٢}{٣}$

مثال (٢): أعيّن القيم القصوى للاقتران = س^{٢} − ٦س + ٩.

الحل: ق$'$(س) = ٢س − ٦

ق$'$(س) = ٠

٢س − ٦ = ٠

س = ٣

إشارة ق$'$(س)	− − − − − − −	صفر	+ + + + + + + +
س		٣	

(لماذا؟)

إشارة ق$'$(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٣ إلى موجبة حيث س > ٣ ← ق(٣) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة الصغرى المحلية = ق(٣) = ٩ − ١٨ + ٩ = ٠ .

نشاط (١):

إذا كان = س^{٣} − ١٢س − ٥ ، س ∈ ح ، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س).

الحل: ق$'$(س) = ...

نجعل ق$'$(س) = ...

٣س^{٢} − ١٢ = ٠

س^{٢} − ٤ = ٠

س = ...

إشارة ق$'$(س)	+ + + + + + + + +	صفر	− − − − − − −	صفر	+ + + + + +
س		−٢		٢	

ألاحظ أن إشارة ق$'$(س) تغيرت من موجبة حيث س < −٢ إلى سالبة حيث س > −٢ ← عند (س = −٢) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة ق$'$(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٢ إلى موجبة حيث س > ٢ حول (س = ٢) ← عند (س = ٢) يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

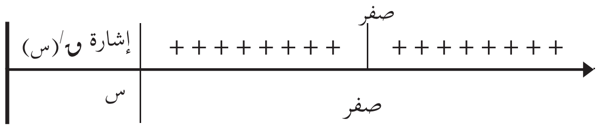
مثال (٣): أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت للاقتران **ق**(س) = س^{٣} ، س ∈ ح.

الحل: **ق**$^{/}$(س) = ٣س^{٢}

ق$^{/}$(س) = ٠

٣س^{٢} = ٠

س = ٠



لم تتغير إشارة **ق**$^{/}$(س) حول (س = ٠) ومنها لا توجد قيمة قصوى محلية للاقتران **ق**(س).

تمارين ومسائل (٣-٧)

س١: أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت لكل من الاقترانات الآتية:

أ. ق(س) = ٤س − ٢س^{٢} ، س ∈ ح

ب. ق(س) = س(س^{٢} − ١٢) ، س ∈ ح

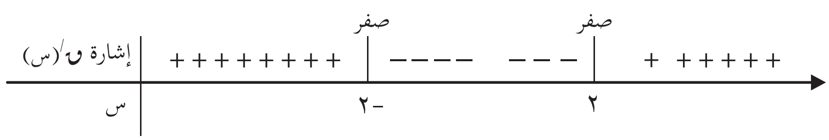
ج. ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٢ ، س ∈ ح

د. ق(س) = ‑س^{٢} + ١٠س + ٥ ، س ∈ ح

س٢: إذا كان للاقتران ق(س) = ⁻س^{٢} + ب س − ٣ ، س ∈ ح قيمة عظمى محلية عند س = ⁻٢ فما قيمة ب؟

س٣: إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٥ ، س ∈ ح، أبيّن أنه لا توجد للاقتران ق(س) أية قيم قصوى.

س٤: الشكل الآتي يبين إشارة ق$'$(س)، جد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س) وأبيّن نوعها، علماً بأن ق(س) كثير حدود، معرف على ح.



ورقة عمل

١) ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

٢) إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = س^{٢} + ٣ عندما تتغير س من ٢ إلى م يساوي ٦ فما قيمة الثابت م ؟

٣) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س^{٣} + ٥س^{٢} − ٣ عند النقطة التي إحداثيها السيني = ١.

٤) أجد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٧.

نموذج اختبار

س١: أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [⁻٤ ، ٢] يساوي ٣ ، ق(⁻٤) =٢ ما قيمة ق(٢)؟

أ) ٢٠   ب) ٢٦   جـ) ١٦   د) ١٨

٢) إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ما قيمة ق$'$(٤)؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) - $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) ٢

٣) ما ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٥}{\text{س}^{٢} - ١}$ عند س = ٢؟

أ) $\frac{٤}{٩}$ ب) - $\frac{٢٠}{٩}$ جـ) ١٥   د) $\frac{٥}{٣}$

٤) إذا كانت ص = (س − ١)^{٥} ما قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ⁻١؟

أ) ٥   ب) ٢٥   جـ) صفر   د) ٨٠

٥) إذا كان ق(س) = س^{٢}، هـ(س) = س − ٢ ما قيمة (ق$\circ$هـ)$'$(١)؟

أ) ⁻٢   ب) ٢   جـ) صفر   د) ٤

٦) إذا كانت ص = (١ − ٢س)^{٢} ما قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ٣؟

أ) ⁻٢٠   ب) ٢٠   جـ) ⁻١٠   د) ١٠

س٢: إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$=٢ إلى س$_{٢}$=٥ هو ١٠، أجد ق(٥) علماً بأن ق(٢) = ٦؟

س٣: إذا كان ق(س) = س^{٢}+١، أجد ق$'$ (٣) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

س٤: إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ٢) (٣س + ٤) أجد $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{٢\text{هـ}}$

س٥: إذا كان م(س) = س^{٢} × ق(س) جد م$'$ (٣) علما بأن ق(٣) = ⁻٢ ، ق$'$(٣) = ٥.

س٦: أجد قيمة الثابت أ التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = أس^{٢} + ٣س + ١ مساوياً ٤ عندما س = ١.

س٧: عددان طبيعيان مجموعهما ٢٠، أجد العددين ليكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.