١٢

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الفترة الثانية

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم
مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

الفترة الثانية	قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب)	Chain Rule	٣
	القيم القصوى	Extreme Values	٦
	العلامة المعيارية	Standard Score	١١
	التوزيع الطبيعي المعياري	Standard Normal Distribution	١٤
	ورقة عمل		
	اختبار		

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف تطبيقات المشتقات والمنحنى الطبيعي في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- إيجاد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران.
- التعرف إلى العلاقة بين العلامة المعيارية والعلامة الخام.
- حساب العلامة المعيارية، وتفسيرها.
- التعرف إلى التوزيع الطبيعي المعياري، وخواصّه.
- استخدام جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد المساحة تحت المنحنى.
- توظيف خواص التوزيع الطبيعي في حل مسائل عملية.

البنود الملونة باللون الأحمر يستثنى منها الفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب)

Chain Rule

نشاط ١

إذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين بحيث مدى هـ(س) $\subseteq$ مجال ق(س) فإننا نعرف الاقتران المركب (ق$\circ$هـ)(س) = ق(هـ(س)).

أكمل ما يلي: إذا كان ق(س) = س^٢ ، هـ(س) = ٢س ـ ١ فإن:

(ق$\circ$هـ)(س) = ق(هـ(س))

= (.............)^٢

= ٤س^٢ ـ ٤س + ١ لماذا؟

(ق$\circ$هـ)$^/$ (س) = ٨س ـ ٤ ،

هل يمكن إيجاد (ق$\circ$هـ)$^/$ (س) بطريقة أخرى ؟

قاعدة السلسلة:

إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ق(س) قابلاً للاشتقاق عند هـ(س) فإن الاقتران المركب (ق$\circ$هـ)(س) يكون قابلاً للاشتقاق عند س، ويكون (ق$\circ$هـ)$^/$ (س) = ق$^/$(هـ(س))هـ$^/$ (س).

مثال (١): إذا كان ق(س) = س^٣ + ٢س + ٥ ، هـ(س) = س^٢ + ١ ، أجد (ق$\circ$هـ)$^/$ (س)، ثم أجد (ق$\circ$هـ)$^/$ (١).

الحل: (ق$\circ$هـ)$^/$ (س) = ق$^/$(هـ(س))هـ$^/$(س)

لكن ق$^/$(س) = ٣س^٢ + ٢ ، هـ$^/$(س) = ٢س

ومن ذلك (ق$\circ$هـ)$^/$ (س) = ق$^/$(س^٢ + ١) × ٢س

= (٣(س^٢ + ١)^٢ + ٢)×٢س ، لماذا؟

= ٦س^٥ + ١٢س^٣ + ١٠س ، لماذا؟

(ق$\circ$هـ)$^/$ (١) = ٦ × ١ + ١٢ × ١ + ١٠ × ١ = ٢٨

مثال (٢): إذا كان ق(س) = س^{٢} − ١ ، هـ(س) = ٢س + ١ أجد (ق∘هـ)$^{/}$(٤)، (هـ∘ق)$^{/}$(٤)

الحل: (ق∘هـ)$^{/}$(٤) = ق$^{/}$(هـ(٤))هـ$^{/}$(٤)

ق$^{/}$(س) = ٢س ، هـ$^{/}$(س) = ٢

هـ(٤) = ٩ ، هـ$^{/}$(٤) = ٢ ،

(ق∘هـ)$^{/}$(٤) = ق$^{/}$(٩) × ٢

= ١٨ × ٢

= ٣٦

(هـ∘ق)$^{/}$(٤) = هـ$^{/}$(ق(٤))ق$^{/}$(٤)

= هـ$^{/}$(١٥) × ٨

= ٢ × ٨ = ١٦

نتيجة (١):

إذا كان ص = ق(ع)، ع = هـ(س)، اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن ص = ق(هـ(س)) وبالتالي:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}^{/}(\text{ع}) \times \text{هـ}^{/}(\text{س})$$

$$= \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

أي أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

مثال (٣): إذا كانت ص = ع^{٢} + ع ، ع = ٢س + ١ ، أجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

= (٢ع +١) × ٢

= (٢(٢س+١) + ١) × ٢

= (٤س + ٣) × ٢

= ٨س + ٦

مثال (٤): إذا كانت ص = م^{٢} + ٢م ، م = س^{٢} + س + ١ ، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ٠

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءم}} \times \frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}$

= (٢م + ٢) (٢س + ١)

عندما س = ٠ تكون م = ١

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٢×١ + ٢) (٢×٠+١) = ٤

نتيجة (٢):

إذا كانت ص = (ق(س))$^{\text{ن}}$ ، ن عدد نسبي وكان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ن(ق(س))$^{\text{ن}-١}$. ق$'$(س)

مثال (٥): إذا كانت ص = (٤س + ٢)^{٣} أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣(٤س + ٢)^{٢} × ٤

= ١٢ (٤س + ٢)^{٢}

تمارين ومسائل

س١. إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س + ١ أجد (ق∘هـ)$'$(س).

س٢. إذا كانت ص = (٢س – ١)^{٢} ، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

س٣. إذا كان ص = ع^{٢} – ٥ع + ١ ، ع = ٢س + ٣ ، أجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

س٤. إذا كان م(س) = (س^{٢} – س)^{٤} ، أجد م$'$(٢).

س٥. إذا كان ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١) ، أجد ق$'$(١)، علماً بأن هـ$'$(١) = ٥ ، هـ$'$(٤) = ٢.

س٦. إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ$'$(٢) = ٣، ق$'$(٢) = ٥، ق$'$(٤) = -٢،
هـ(٢) = ٤، ق(٢) = ٣، هـ$'$(٣) = ١، أجد (ق∘هـ)$'$(٢)، (هـ∘ق)$'$(٢)

القيم القصوى
(Extreme Values)

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً وكانت س = جـ في مجال الاقتران، فإنه يقال أن ق(جـ):

أ. قيمة عظمى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِ جـ.

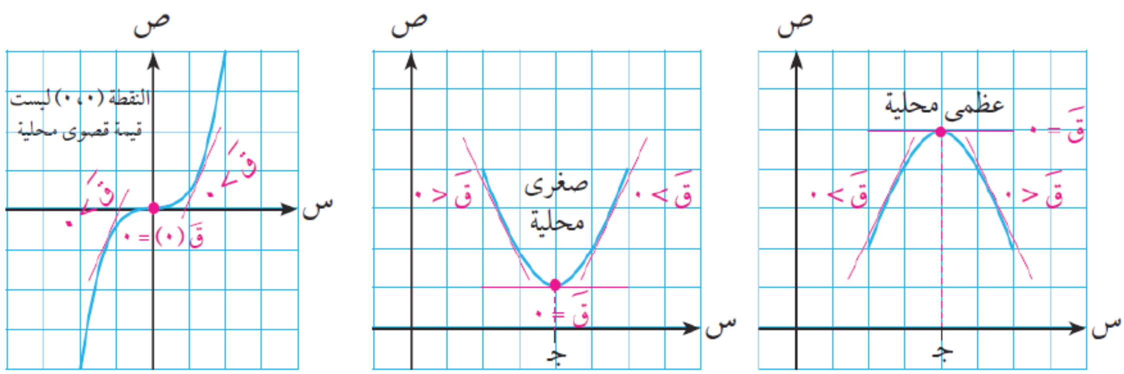
ب. قيمة صغرى محلية للاقتران، إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لِ جـ.

ملاحظة: سنقتصر في دراستنا للقيم القصوى على الاقترانات كثيرة الحدود المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ح فقط.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن: كيف تساعدنا المشتقة الأولى لهذا الاقتران في تعيين القيم القصوى المحلية له؟

أتأمل الأشكال الآتية، وألاحظ العلاقة بين إشارة ق/(س) والقيم القصوى للاقتران.



(أ) (ب) (جـ)

في الشكل (أ): ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)، ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) تغيرت من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ .

في الشكل (ب): ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)، ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) تغيرت من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ .

في الشكل(ج): ق/(جـ) = صفر، إشارة ق/(س) موجبة لقيم س < جـ وموجبة لقيم س > جـ .

ق(جـ) ليست قيمة قصوى محلية للاقتران.

ماذا تستنتج؟

نتيجة (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت ق$^{/}$(جـ) = صفراً، حيث جـ ∈ مجال ق(س)، فإن:

أ. إذا تغيرت إشارة ق$^{/}$(س) من موجبة لقيم س < جـ إلى سالبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

ب. إذا تغيرت إشارة ق$^{/}$(س) من سالبة لقيم س < جـ إلى موجبة لقيم س > جـ فإن ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

يسمى هذا باختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

مثال (١): أعيّن جميع القيم القصوى للاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٣س^{٢} + ٨ س + ٢.

الحل: ق$^{/}$(س) = س^{٢} – ٦س + ٨

ق$^{/}$(س) = ٠

س^{٢} – ٦س + ٨ = ٠

(س – ٢) (س – ٤) = ٠

س = ٢ ، ٤

إشارة ق$^{/}$(س)	++++++++	صفر	– – – – – – –	صفر	++++++
س		٢		٤	

إشارة ق$^{/}$(س) تغيرت من موجبة حيث س < ٢ إلى سالبة حيث س > ٢ ⟸ ق(٢) قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة ق$^{/}$(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٤ إلى موجبة حيث س > ٤ ⟸ ق(٤) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة العظمى المحلية = ق(٢) = $\frac{٢٦}{٣}$

القيمة الصغرى المحلية = ق(٤) = $\frac{٢٢}{٣}$

مثال (٢): أعيّن القيم القصوى للاقتران = س^{٢} – ٦س + ٩.

الحل: ق$^{/}$(س) = ٢س – ٦

ق$^{/}$(س) = ٠

٢س – ٦ = ٠

س = ٣

إشارة ق$^{/}$(س)	- - - - - - -	صفر	+ + + + + + + +
س		٣	

إشارة ق$^{/}$(س) تغيرت من سالبة حيث س < **٣** إلى موجبة حيث س > **٣** ⟸ ق(٣) قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

القيمة الصغرى المحلية = ق(٣) = ٩ – ١٨ + ٩ = ٠ .

مثال (٣): إذا كان ق(س) = س^{٣} – ١٢س – ٥ ، س ∈ ح ، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س).

الحل: ق$^{/}$(س) = ٣س^{٢} – ١٢

ق$^{/}$(س) = صفر

٣س^{٢} – ١٢ = ٠

س^{٢} – ٤ = ٠

س = ٢ أو -٢

إشارة ق$^{/}$(س)	+ + + + + + + +	صفر	- - - - - - -	صفر	+ + + + + +
س		-٢		٢	

ألاحظ أن إشارة ق$^{/}$(س) تغيرت من موجبة حيث س < -٢ إلى موجبة حيث س > -٢ ⟸ عند (س= -٢) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س).

إشارة ق$^{/}$(س) تغيرت من سالبة حيث س < ٢ إلى موجبة حيث س > ٢ ⟸ عند (س= ٢) يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س).

مثال (٤): أعيّن القيمة/ القيم القصوى المحلية إن وجدت للاقتران ق(س)= س^{٣} ، س ∈ ح.

الحل: ق$^{/}$(س) = ٣س^{٢}

ق$^{/}$(س) = ٠

٣س^{٢} = ٠

س = ٠

إشارة ق$^{/}$(س)	+ + + + + + + +	صفر	+ + + + + + + +
س		صفر	

لم تتغير إشارة ق$^{/}$(س) حول (س = ٠)، ومنها لا توجد للاقتران ق(س) قيمة قصوى محلية.

تمارين ومسائل

س١. أعيّن القيمة/ القيم القصوى إن وجدت لكل من الاقترانات الآتية:

أ . ق(س) = ٤س – ٢س^{٢} ، س ∈ ح

ب. ق(س) = س(س^{٢} – ١٢) ، س ∈ ح

جـ. ق(س) = س^{٣} – ٣س + ٢ ، س ∈ ح

د. ق(س) = -س^{٢} +١٠س + ٥ ، س ∈ ح

س٢. أعيّن القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٢} – ٢س + ١ ، س ∈ ح

س٣. إذا كان للاقتران ق(س) = -س^{٢} + ب س -٣ ، س ∈ ح قيمة عظمى محلية عند س = -٢ فما قيمة ب؟

س٤. إذا كان ق(س) = س^{٣}– ٥ ، س ∈ ح، أبيّن أنه لا توجد للاقتران ق(س) أي قيم قصوى.

س٥. الشكل الآتي يبين إشارة ق$^{/}$(س)، أجد قيم س التي عندها قيم قصوى للاقتران ق(س) وأبيّن نوعها، علماً بأن ق(س) كثير حدود معرّف على ح.

إشارة ق$^{/}$(س)	++++++++	صفر	--- - - - - -	صفر	+ +++++
س		-٢		٢	

العلامة المعيارية (Standard Score)

نشاط ١

إذا كانت علامتا الطالبة رنيم في مبحثي الرياضيات والفيزياء هي ٩٣ ، ٨٨ على الترتيب، فهل يعني ذلك أن تحصيل الطالبة رنيم أفضل في الرياضيات ؟ .... لماذا ؟ ....

للحكم على أفضلية التحصيل، لا يكفي أن نعتمد على العلامة فقط، وإنما نحتاج إلى معرفة الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلامات جميع طلبة الصف.

أتذكر

الوسط الحسابي (μ): هو مجموع القيم (المشاهدات) مقسوماً على عددها.

$$\mu = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$$

الانحراف المعياري (σ): هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \mu)^2}{ن}}$$

العلامة المعيارية (ع) :Standard Score

القيمة الخام: هي القيمة الأصلية التي نحصل عليها في اختبار أو مقياس ما، ويرمز لها بالرمز "س".

العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية التي تبعدها القيمة (العلامة) الخام عن الوسط الحسابي، وبالرموز فإن: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

مثال (١): مزارع فلسطيني يزرع البندورة في سهل مرج ابن عامر، كان الوسط الحسابي لكتلة (٣٠٠) صندوق بندورة ١٧ كغم، وانحرافها المعياري (٢) كغم، اختيرت ٣ صناديق، وكانت كتلها ١٣ كغم، ١٩ كغم، ١٧ كغم على الترتيب. أجد العلامة المعيارية لكتل كل من الصناديق الثلاثة.

الحل: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$، حيث ع هي العلامة المعيارية، س الكتلة الخام، μ الوسط الحسابي للكتل، σ الانحراف المعياري لها.

- العلامة المعيارية للصندوق الأول $ع_{١} = \frac{١٣ - ١٧}{٢} = -٢$
- العلامة المعيارية للصندوق الثاني $ع_{٢} = \frac{١٩ - ١٧}{٢} = ١$
- العلامة المعيارية للصندوق الثالث $ع_{٣} = \frac{١٧ - ١٧}{٢} =$ صفر

مثال (٢): حصلت عهد على علامة ما في الرياضيات، وكانت العلامة المعيارية المقابلة لها (١,٥) علماً بأن الوسط الحسابي لعلامة طالبات صفها كان (٨٥) والانحراف المعياري (٦)، أجد علامة عهد في اختبار الرياضيات.

الحل: $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$١,٥ = \frac{س - ٨٥}{٦}$ ، $٩ = س - ٨٥$ ومنها $س = ٩٤$

نتيجة: إذا كانت $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$ مجموعة من القيم الأصلية، وكانت العلامات المعيارية المقابلة لها هي $ع_١$ ، $ع_٢$ ، ....، $ع_ن$ فإن الوسط الحسابي $\bar{ع}$ لمجموعة هذه العلامات يساوي صفراً، والانحراف المعياري لها $\sigma_ع = ١$.

مثال (٣): إذا كانت العلامات المعيارية المناظرة لأطوال ٥ أشجار صنوبر كالآتي:

ل ، ٠,٥ ، صفر، -٠,٥، -١,٥ فما قيمة ل

الحل: ل + ٠,٥ + ٠ + -٠,٥ + -١,٥ = صفر

ل + $^-$١,٥ = صفر

ل = ١,٥

مثال (٤): إذا كانت علامتا طالبين في امتحان المحاسبة ٧٠ ، ٨٨ وكانت علامتاهما المعياريتان المناظرتان -٠,٨ ، ١ على الترتيب، ما الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف في الامتحان؟

$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$-٠,٨ = \frac{٧٠ - \mu}{\sigma}$

وبالضرب التبادلي: $-٠,٨\sigma = ٧٠ - \mu$ .... (١)

$١ = \frac{٨٨ - \mu}{\sigma}$

وبالضرب التبادلي: $\sigma = ٨٨ - \mu$ .... (٢)

أحل المعادلتين (١) ، (٢) بالحذف

σ = ٨٨ − μ

-٠,٨σ = ٧٠ − μ

بالطرح ١,٨σ = ١٨ ومنها σ = ١٠

وبالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج أن ١٠ = ٨٨ − μ ومنها μ = ٧٨

أي أن الوسط الحسابي = ٧٨ والانحراف المعياري = ١٠

تمارين ومسائل

س١: في مزرعة خراف، إذا كانت كتل (٥) خراف كالآتي ٤٠ كغم، ٥٠ كغم، ٦٠ كغم، ٧٠ كغم، ٥٥ كغم. أجد العلامات المعيارية للكتل؟

س٢: إذا علمت أن علامة علي في امتحان اللغة العربية ٧٢، وفي المحاسبة ٦٩، وفي الرياضيات ٧٥، والوسط الحسابي لعلامات طلبة الصف في المواد الثلاث بالترتيب هو ٦٩، ٦٨، ٧٩، والانحراف المعياري ١، ٤، ٢، في أي المواد كان تحصيل علي أفضل؟

س٣: إذا كان الوسط الحسابي لأطوال أشجار الصنوبر في محيط برك سليمان في بيت لحم ١٧متراً والانحراف المعياري لمجموعة الأطوال يساوي ٣م، أجد الأطوال الحقيقية للأشجار التي العلامات المعيارية لأطوالها هي: ٢ ، -١,٨.

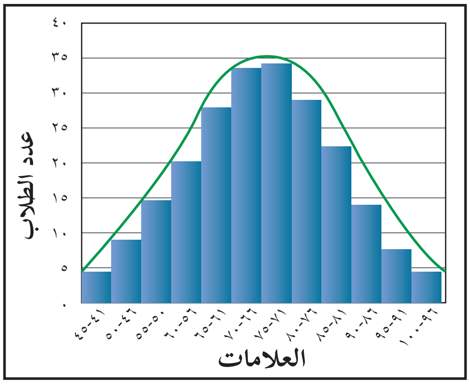
س٤: إذا حولت القيم الخام لمجتمع إحصائي إلى علامات معيارية وكانت كالآتي ٠,٥ ، ٠,٥ك ، -١,٥ ، ٠ ، -٠,٥، أجد قيمة ك ؟ أتحقق أن الانحراف المعياري للعلامات المعيارية يساوي ١ .

س٥: إذا كانت العلامتان ٤٤ ، ٨٤ تقابلهما العلامتان المعياريتان -٢ ، ٣ على الترتيب. أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع العلامات الأصلية؟

س٦: إذا كانت العلامات المعيارية المقابلة للعلامتين ٨٥ ، ٧٠ هي ١ ، -٢ على الترتيب. أحسب العلامة المعيارية للعلامة الخام ٧٥.

التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution)

نشاط ١



مثّل المعلم حمدان علامات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بيانياً، كما هو في الشكل المجاور. ألاحظ أن هناك تجمعاً لعلامات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع العلامات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.

الوسط الحسابي للعلامات يقع في الفئة (٧١-٧٥)

الوسيط للعلامات يقع في الفئة ....

المنوال للعلامات هو مركز الفئة ....

أتعلم

إذا كان الوسط = الوسيط = المنوال يكون التوزيع طبيعياً.

التوزيع الطبيعي:

يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية، ومنها التوزيع الطبيعي، ويعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الإحصاء، لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية، مثل: الأطوال، والكتل، والأعمار، ودرجات الحرارة، والدخول الشهرية، وغيرها من الظواهر المتصلة.

خصائص التوزيع الطبيعي:

١) التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالوسط.

٢) يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال.

٣) المنحنى متصل.

٤) يقترب المنحنى من المحور س، ولكنه لا يمسه.

التوزيع الطبيعي المعياري: هو التوزيع للعلامات المعيارية، وسطه الحسابي يساوي صفراً، وانحرافه المعياري يساوي (١).

وسنركز في دراستنا هذه على التوزيع الطبيعي المعياري.

جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي وحدة مساحة واحدة، وقد وضع العلماء جداول خاصة تبين نسبة المساحة تحت المنحنى والمحدودة بقيمة معينة من العلامات المعيارية.
سنعتمد الجداول الملحقة في نهاية الكتاب والتي تعطي المساحة المحصورة تحت ع حيث ع عدد حقيقي.

مثال (١): باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد كلاً من:

أ) المساحة تحت (ع = ١,١٧)

ب) المساحة فوق (ع = ١,٢)

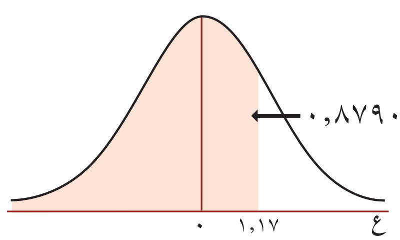
جـ) المساحة تحت (ع = -١)

د) المساحة فوق (ع = -٠,٥)

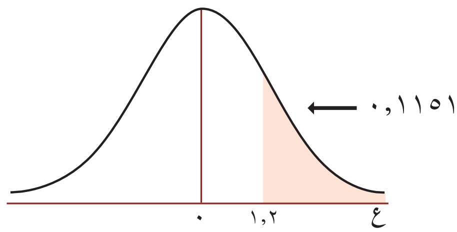
هـ) المساحة المحصورة بين ($ع_١$ = -٠,٨) و ($ع_٢$ = ٠,١٥)

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥

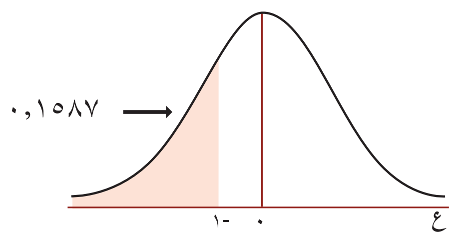
الحل: أ) المساحة تحت (ع = ١,١٧) = ٠,٨٧٩٠ ويتم إيجادها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وتحدد من تقاطع الصف ١,١ ومن العمود ٠,٠٧، حيث أن تقاطع العمود مع الصف يمثل قيمة المساحة. ألاحظ الشكل:



ب) المساحة فوق (ع = ١,٢) = ١ – المساحة تحت (ع = ١,٢) = ١ – ٠,٨٨٤٩ = ٠,١١٥١ ألاحظ الشكل:

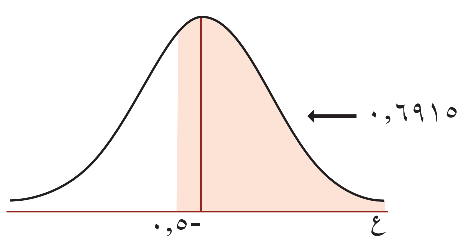


جـ) المساحة تحت (ع = -١) = ٠,١٥٨٧ مباشرة من الجدول، ألاحظ الشكل:



د) المساحة فوق (ع = -٠,٥) = ١ ـ (المساحة تحت ع = -٠,٥)

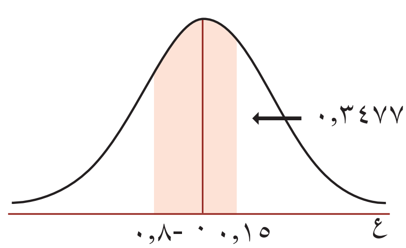
= ١ ـ ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٩١٥ ألاحظ الشكل:



هـ) المساحة المحصورة بين ($ع_١$ = -٠,٨) و ($ع_٢$ = ٠,١٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,١٥) ـ المساحة تحت (ع = -٠,٨)

= ٠,٥٥٩٦ ـ ٠,٢١١٩ = ٠,٣٤٧٧

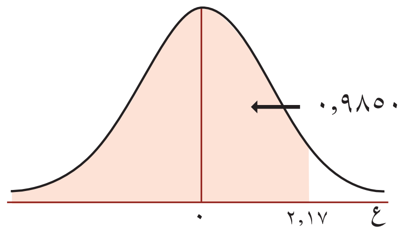


مثال (٢): أجد قيمة ع في كل مما يأتي:

أ) المساحة تحتها تساوي ٠,٩٨٥٠

ب) المساحة فوقها تساوي ٠,٦٦٢٨

الحل: أ) المساحة تحت ع تساوي ٠,٩٨٥٠ ، أبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٨٥٠ ، أجد أنها تقع عند تقاطع صف ع = ٢,١ وعمود ٠,٠٧ ، ومنها ع = ٢,١٧ ، ألاحظ الشكل الآتي:

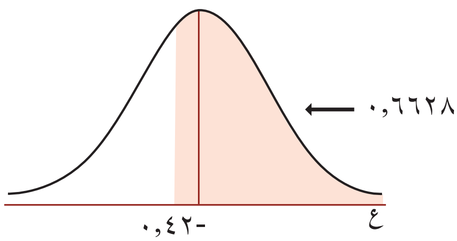


ب) المساحة فوق ع تساوي ٠,٦٦٢٨ = ١ ـ المساحة تحت ع

المساحة تحت ع = ١ ـ ٠,٦٦٢٨

= ٠,٣٣٧٢

من الجدول ع = -٠,٤٢ ألاحظ الشكل المجاور:

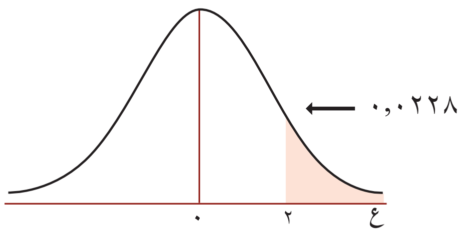


مثال (٣): الوسط الحسابي لأعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٢٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٣٠٠ ساعة، فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي واختير أحد المصابيح عشوائياً، فما النسبة المئوية لأن يبقى المصباح الكهربائي صالحاً مدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة.

الحل: نسبة أن يبقى المصباح صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة = المساحة فوق $\left(\text{ع}\Big|_{\text{س}=١٨٠٠}\right)$

$$\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

$$\text{ع}\Big|_{\text{س}=١٨٠٠} = \frac{١٨٠٠ - ١٢٠٠}{٣٠٠} = ٢$$



المساحة = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ − المساحة تحت (ع = ٢)

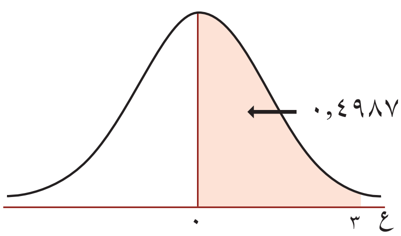
= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

النسبة المطلوبة = ٠,٠٢٢٨ × ١٠٠٪ = ٢,٢٨٪

مثال (٤): الوسط الحسابي لكتل ١٠٠٠ شخص يساوي ٦٥ كغم، والانحراف المعياري للكتل ١٠ كغم، فإذا كانت الكتل تتبع التوزيع الطبيعي، فما نسبة الأشخاص الذين تقع كتلهم بين ٦٥ كغم و ٩٥ كغم؟ وما عددهم؟

الحل: نسبة الأشخاص الذين كتلهم بين ٦٥ كغم، ٩٥ كغم

= المساحة المظللة في الشكل المقابل.



أحول القيمة الخام ٩٥ إلى علامة معيارية

$$\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

$$\text{ع}\Big|_{\text{س}=٩٥} = \frac{٩٥ - ٦٥}{١٠} = ٣$$

نسبة الأشخاص = المساحة بين (ع = صفر ، و ع = ٣)   لماذا؟

= المساحة تحت (ع = ٣) − ٠,٥   لماذا؟

= ٠,٩٩٨٧ − ٠,٥

= ٠,٤٩٨٧

أي أن النسبة المئوية للأشخاص الذين تنحصر كتلهم بين ٦٥ كغم و ٩٥ كغم = ٤٩,٨٧٪

عدد هؤلاء الأشخاص = ١٠٠٠ × ٠,٤٩٨٧ ≈ ٤٩٩ شخصاً.

تمارين ومسائل

س١: أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كل من الحالات الآتية:

أ) تحت (ع = ١,٣٨)

ب) فوق (ع = ٠,٩٠)

جـ) بين (ع = -١,٥) و (ع = ١,٥)

س٢: أجد العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الآتية:

أ) المساحة تحت ع هي ٠,٨٥٥٤

ب) المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

جـ) المساحة بين -ع و ع هي ٠,٦

س٣: مدرسة ثانوية فيها ٥٠٠ طالب، أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥سم، وبانحراف معياري ١٠سم، ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠سم، ١٨٠سم ؟ وما عددهم ؟

س٤: إذا كان الزمن الذي يستغرقه بائع جرائد للوصول إلى أحد البيوت يتخذ توزيعاً طبيعياً، بوسط حسابي ١٢ دقيقة وبإنحراف معياري دقيقتان، وكان هذا الموزّع ينقل الجرائد يوميّاً على مدار ٣٦٥ يوماً، ما عدد الأيام التي يستغرق فيها الموزّع زمناً:

أ) يزيد على ١٧ دقيقة؟

ب) ينحصر بين ٩ - ١٣ دقيقة؟

س٥: إذا كانت علامات ٦٠٠ طالب تتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٢ وبانحراف معياري ٨ وكانت علامة النجاح هي ٦٠، أجد:

أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢، ٧٨

ب) عدد الطلبه الراسبين.

س٦: تتبع رواتب ١٠٠٠ موظف في إحدى الشركات توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٠٠ دينار، وبانحراف معياري ٢٠ ديناراً. أحسب عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٦٨٠ ديناراً و ٧٤٠ ديناراً.

ورقة عمل

١- إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: هـ′(١) = ٤، ق′(١) = -١ ، ق′(٦) = -٢، هـ(١) = ٦ ، أجد (ق∘هـ)′ (١).

٢- إذا كانت أعمار (٥) أشخاص كالآتي: ٢٠، ٨، ١٢، ١٤، ١٦، أجد:

١) العلامة المعيارية المناظرة لأعمار هؤلاء الأشخاص.

٢) الوسط الحسابي للعلامات المعيارية.

٣) الانحراف المعياري للعلامة المعيارية.

٣- إذا كانت العلامات المعيارية لخمسة طلاب كما يلي ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{-٣}{٢}$، م ، $\frac{-١}{٢}$ فما قيمة الثابت م ؟

٤- نادي رياضي مكون من ٤٠٠ عضو تتبع أعمارهم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٤٠ سنة وبانحراف معياري ٥ أجد:

أ) عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم على ٥٠ سنة.

ب) عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥ سنة إلى ٤٥ سنة.

٥- إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س − ٢ ما قيمة (ق∘هـ)′(١) ؟

٦- أجد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٧

نموذج اختبار

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

١) ما قيمة الوسط الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) μ = ١ ، σ = ١ ب) μ = ٠ ، σ = ٠ جـ) μ = ٠ ، σ = ١ د) μ = ١ ، σ = ٠

٢) ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٧٧ علماً بأن الوسط الحسابي ٧٠ والانحراف المعياري ١٤ ؟

أ) -٢ ب) -٠,٥ جـ) ٠,٥ د) ٢

٣) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات ٧٥ والانحراف المعياري ١٥ فما العلامة الخام المناظرة للعلامة المعيارية ع = ٢؟

أ) ١٠٣ ب) ١٠٨ جـ) ١٠٤ د) ١٠٥

٤) ما مساحة المنطقة بين (٠,٩٦ < ع < ١,٦٥):

أ) ٠,٠٩٩١ ب) ٠,١١٩٠ جـ) ١,٨١٢ د) ١,٧٨٢

٥) إذا كانت ص = (س − ١)^{٥} ما قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س= -١ ؟

أ) ٥ ب) ٢٥ جـ) صفر د) ٨٠

٦) إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س − ٢ ما قيمة (ق∘هـ)$'$(١) ؟

أ) -٢ ب) ٢ جـ) صفر د) ٤

٧) إذا كان ق(س) = س^{٢}، هـ(س) = س + ١ فما قيمة (هـ∘ق)$'$ (٢) ؟

أ) ٣ ب) ١ جـ) ٤ د) ٢

٨) إذا كانت ص = (١ − ٢س^{٢})^{٢} ما قيمة $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ عندما س = ٣ ؟

أ) -٢٠ ب) ٨ جـ) -٨ د) ٢٠

س٢: أجد القيم القصوى للاقتران: أ) ق(س) = - س^{٣} + ٣س^{٢} + ٧ ب) ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢}

س٢: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٠,٥ ، -١ على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٣: خط إنتاج في مصنع ينتج أكياساً من الأرز بوسط حسابي يساوي ١,٠١ كغم، وبانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم. أجد:

أ) نسبة الأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم.

ب) نسبة الأكياس التي تتراوح كتلها بين ١ كغم و ١,٠٥ كغم.

س٤: إذا ارتبط عمر بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها السيارة باستعمال هذه البطارية، وعلم أن عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ١٠٠٠٠٠كم، وبانحراف معياري ١٠٠٠٠كم. وأنتجت إحدى الشركات ٢٠٠٠٠ بطارية من هذا النوع في الشهر. أجد:

أ) عدد البطاريات التي يتراوح عمرها بين ٩٠٠٠٠ كم، ١١٠٠٠٠ كم.

ب) عدد البطاريات التي يزيد عمرها على ١٢٠٠٠٠ كم.

جـ) النسبة المئوية للبطاريات التي تتراوح أعمارها بين ٨٠٠٠٠ كم، ١١٠٠٠٠ كم.