١٠

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المهني

الفترة الثانية

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
+970-2-2983280 هاتف | +970-2-2983250 فاكس

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات الأسّية واللوغاريتمية والارتباط ونظرية ذات الحدين في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرّف إلى مفهوم اللوغاريتم وعلاقته بالأُسس.
- استنتاج قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات أسّية أو لوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسّيَة بيانيّاً.
- استنتاج خصائص الاقتران الأسّي.
- تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياًّ.
- استنتاج خصائص الاقتران اللوغاريتمي.
- توظيف التحويلات الهندسيّة المختلفة في رسم الاقترانات اللوغاريتمية والأسّيّة.
- استنتاج العلاقة بين الاقترانين الأسّي واللوغاريتمي.
- رسم شكل الانتشار الذي يمثّل العلاقة بين متغيّريْن.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون.
- كتابة معادلة الانحدار.
- استخدام مبدأ العد في سياقات حياتيّة.
- حساب التباديل والتوافيق الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- استخدام نظرية ذات الحدّين في إيجاد مفكوك مقدار جبري.

(١) الأسس واللّوغاريتمات

نشاط ١

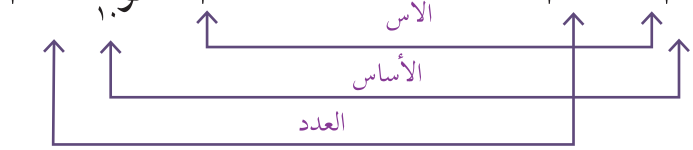
أكملُ الجدولَ الآتي:

المقدار	$٢^{٣}$	$٣^{-٢}$	$٨^{\frac{٢}{٣}}$	$٤^{٠}$	$٥^{٩} \div ٥^{٧}$	$٢^{\frac{١}{٢}}$	$٤^{٣} \times ٤^{-١}$
قيمة المقدار	٨	$\frac{١}{٩}$					

تعريف: إذا كان ص = $أ^{س}$ ، حيث ص، أ ∈ $ح^{+}$ ، أ ≠ ١، نسمي س لوغاريتم العدد ص للأساس أ، ويُعَبَّر عنه رياضيّاً: $لو_{أ}$ (ص) = س (الصّورة اللّوغاريتميّة)، ويُقرأ لوغاريتم ص للأساس أ يساوي س. المثال الآتي يوضّح العلاقة بين الصّورة الأُسّيَّة، والصّورة اللّوغاريتميّة:

الصّورة الأُسّيَّة $١٠^{٣} = ١٠٠٠$

الصّورة اللّوغاريتميّة $٣ = لو_{١٠} ١٠٠٠$



نشاط ٢

أُكْمِلُ الجدول الآتي بما يناسبه:

الصّورة الأُسّيَّة	$٢^{٣} = ٨$		$٣^{-٤} = \frac{١}{٨١}$	$٩^{٠} = ١$
الصّورة اللّوغاريتميّة	______	$لو_{١٠} (١٠٠٠٠) = ٤$		$لو_{٩} ١ = ٠$

نشاط ٣

أحول الآتي من الصّورة الأُسِّيَّة إلى الصّورة اللّوغاريتميّة:

أ) $٣^{١}$ = ٣   ب) $٢^{١}$ = ٢   جـ) $٣^{٠}$ = ١

د) $٥^{٠}$ = ١   هـ) $٣^{٤}$ = ٨١   و) $٢^{٥}$ = ٣٢

أ) لو$_{٣}$ (٣) = ١   ب) لو$_{٢}$ (٢) = _____   جـ) لو$_{٣}$ (١) = صفر

د) لو$_{٥}$(١) = _______   هـ) لو$_{٣}$ ٨١ = ٤   د) لو$_{٢}$ ٣٢ = _____

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: لو $_{م}$ (م) = ١،   لو $_{م}$ (١) = صفر،   لو $_{م}$ م^{س} = س

نشاط ٤

أَجِدُ قيمة اللّوغاريتمات الآتية:

١) لو$_{٢}$ ($٢^{٦}$) = ٦.

٢) لو$_{٧}$ ($\sqrt{٧}$) = ____________.

٣) لو$_{٣}$ ($\frac{١}{٩}$) = ______________.

نشاط ٥

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٢		٨	١٦	٣٢
لو$_{٢}$ (س)	١	٢	٣	٤	٥
لو$_{٤}$(س)	$\frac{١}{٢}$			٢	

(١) لو$_{٢}$ (٢ × ٤) = لو$_{٢}$ (٨) = ٣ ، لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٤) = ١ + ٢ = ٣

(٢) لو$_{٢}$ (٢ × ٨) = _______ ، لو$_{٢}$ (٢) + لو$_{٢}$ (٨) = _________

(٣) لو$_{٤}$ (٢ × ٤) = ________ ، لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٤) = _________

(٤) لو$_{٤}$ (٢ × ٨) = ________ ، لو$_{٤}$ (٢) + لو$_{٤}$ (٨) = __________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان م عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو$_م$ (س × ص) = لو$_م$ (س) + لو$_م$ (ص).

نشاط ٦

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٣		٢٧	٨١	
لو$_٣$ (س)	١	٢			٥

(١) لو$_٣$ ($\frac{٨١}{٢٧}$) = لو$_٣$ (٣) = ١ ، لو$_٣$ (٨١) − لو$_٣$ (٢٧) = ٤ − ٣ = ١

(٢) لو$_٣$ ($\frac{٢٤٣}{٩}$) = ________________ ، لو$_٣$ (٢٤٣) − لو$_٣$ (٩) = ________________

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان س، ص عددَيْنِ حقيقيَّيْن موجبيْن، وكان م عدداً حقيقيّاً موجباً غير الواحد، فإنَّ: لو$_م$ ($\frac{س}{ص}$) = لو$_م$ (س) − لو$_م$ (ص)

- إذا كان ص عدداً حقيقيّاً موجباً، فإنَّ: لو$_م$ (ص)^م = م لو$_م$ (ص)، بحيث م ∈ ح*.

نشاط ٧

أكتب كل ممّا يأتي بصورة لوغاريتم واحد:

١) (لو$_٢$ (٨) − لو$_٢$ (ص)) = لو$_٢$ ($\frac{٨}{ص}$)

٢) (لو$_٣$ (٤) + لو$_٣$ (س)) − (٣ لو$_٣$ (٢)) = لو$_٣$ (٤س) − لو __________

= ________________

نشاط ٨

إذا كان لو$_٢$ (٧) = ٢,٨١ ، أَجِدُ قيمة كل مما يأتي:

١) لو$_٢$ (٢٨) ٢) لو$_٢$ (٧)^٣ ٣) لو$_٢$ (٣,٥)^٢

١) لو$_{٢}$ (٢٨) = لو$_{٢}$ (٤×٧) = لو$_{٢}$ (٤) + لو$_{٢}$ (٧) = ٢ + ٢,٨١ = ٤,٨١

٢) لو$_{٢}$ (٧)^{٣} = ____ × لو$_{٢}$ (٧) = ٣ × ______ = ٨,٤٣

٣) لو$_{٢}$ (٣,٥)^{٢} = لو$_{٢}$ (   )^{٢} = __________

= __ × (لو$_{٢}$ (   ) − لو$_{٢}$ (   )) = __________

مثال: أحل المعادلة: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = ٢

الحل: لو$_{٢}$ (س + ٢) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}+٢}{\text{س}-١}$ = ٢

$\frac{\text{س}+٢}{\text{س}-١}$ = ٢^{٢}

س + ٢ = ٤(س − ١)

س= ٤س − ٤ − ٢ ، ومنها: س = ٢

نشاط ٩

أحلّ المعادلة: لو$_{١٠}$ (س) + لو$_{١٠}$ (٣) = ٢

لو$_{١٠}$ (   ) = ٢

١٠^{٢} = __________

١٠٠ = __________

س = $\frac{١٠٠}{٣}$

تمارين ومسائل:

(١) أحسبُ قيمة كل من:

أ) $\text{لو}_{٢}\,(٦٤)$ ب) $\text{لو}_{٣}\,(٨١)$

(٢) أُحوّلُ من الصّورة الأُسِّيَّة إلى اللّوغاريتميّة:

أ) $٢^{٤} = ١٦$ ب) $٠,١٠ = ١٠^{-١}$

(٣) أُحوّلُ من الصّورة اللّوغاريتميّة إلى الصّورة الأُسِّيَّة:

أ) $\text{لو}_{٦}\,١ = ٠$ ب) $\text{لو}_{١٠}\,(٠,٠٠١) = -٣$

(٤) إذا كان $\text{لو}_{٢}\,(٧) = ٢,٨١$ ، $\text{لو}_{٢}\,(٥) = ٢,٣٢$ ، أَجِدُ قيمة ما يأتي:

أ) $\text{لو}_{٢}\,(٣٥)$ ب) $\text{لو}_{٢}\,\left(\frac{٧}{١٠}\right)$

(٥) أَجِدُ قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $\text{لو}_{٢}\,\sqrt{٣٢} + \text{لو}_{٢}\,\sqrt{٢}$ ب) $\text{لو}_{٣}\,(٨١) - \text{لو}_{٣}\,(٩)$ جـ) $\text{لو}_{٥}\,(٥^{٢})^{٣}$

(٦) أَحُلُّ المعادلاتِ الآتية:

أ) $\text{لو}_{٢}\,(٧\text{س}) = \text{لو}_{٢}\,(\text{س}^{٢} + ١٢)$ ب) $\text{لو}_{١٠}\,(٥\text{س}^{٢} - ٣) - \text{لو}_{١٠}\,(\text{س}^{٢} + ١) = ٠$

(٢) الاقتران الأسّي (Exponential Function)

تعريف: يُسمّى الاقترانُ اقتراناً أسّيّاً إذا كان على الصورة: ق(س) = $\text{أ}^{\text{س}}$ ، أ ≠ ١ ، أ > ٠ ، س ∈ ح

أناقش لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

نشاط ١

أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أُسّيٌّ ؟

ألاحظُ انّ: ق(س) = $٢^{\text{س}}$ اقترانٌ أسّيٌّ؛ لأنّ ....

بينما هـ(س) = $(-٣)^{\text{س}}$ ليس اقتراناً أسياً؛ لأن الأساس أ = -٣ < ٠ .

وعليه فإنّ: ل(س) = $\text{س}^{٢}$ هو اقترانٌ ....؛ لأنّ المتغير ليس أساً.

م(س) = $\left(\frac{١}{٦}\right)^{\text{س}}$ هو اقترانٌ ....؛ لأنّ ....

نشاط ٢

أمثّلُ الاقترانَ: ق(س) = $٢^{\text{س}}$ ، س ∈ ح في المستوى الديكارتي.

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢	١	٠	-١	-٢	
ق(س)	٨			١	$\frac{١}{٢}$		$\frac{١}{٨}$

• أعيّنُ النّقاطَ من الجدول السابق في المستوى الديكارتي،

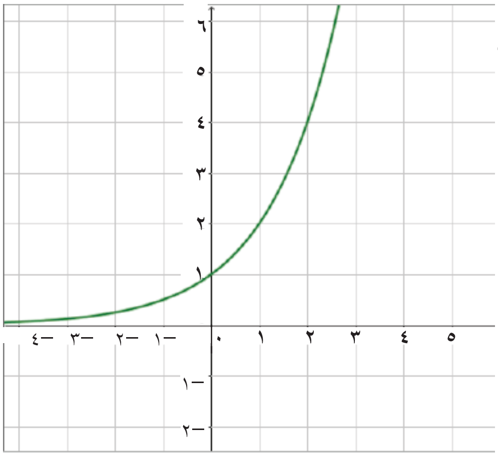
وألاحظُ شكل منحنى الاقتران:

من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران، أتعلّمُ أهم خصائص منحنى

١) مدى الاقتران الأسّي هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح +).

٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

٣) كلّما زادت قِيمُ س تزداد قِيمَ ص المُناظِرةُ لها.



نشاط ٣

أُكملُ الجدولَ الآتيَ لِقيَمِ س ، والاقتران ق(س) ، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٣	٢	١		١-		٣-
ق(س)= $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	$\frac{١}{٨}$			١	٢	٤	

أعيّنُ النقاطَ على المستوى الديكارتي، وأرسم منحنى الاقتران.

- ألاحظُ من الرسم أنّ: منحنى ق(س) = $٢^{س}$ هو انعكاس لمنحنى الاقتران هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ في محور الصادات، أوضح ذلك جبريّاً.
- من التمثيل البياني للاقتران في النشاط السابق، ألاحظُ أهمَّ خصائص الاقتران الأسّي: ق(س) = $أ^{س}$ ، ٠ < أ < ١ وهي:

١) مدى الاقتران الأسّي هو: ....

٢) يقطعُ منحنى الاقتران محورَ الصادات في النقطة: ....

٣) كلما زادت قيم س، فإنّ قيمَ ص المناظِرَةَ لها ....

نشاط ٤

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي اذا كان ق(س) = ٣^{س} + ٢:

س	٣	٢		٠		-٢	-٣
ص= ق(س)	٢٩		٥		٢ $\frac{١}{٣}$	٢ $\frac{١}{٩}$	

- أعيّنُ النقاطَ في الجدول السابق على المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.

- **ألاحظُ أنّ:** الاقتران ق(س) = ٣^{س} + ٢هو انسحاب لمنحنى الاقتران هـ(س) = ٣^{س} وَحدتين إلى الأعلى.

أتعلّمُ: يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلاتِ الهندسيّةِ التي تعلمتُها على الاقتران الأسّي.

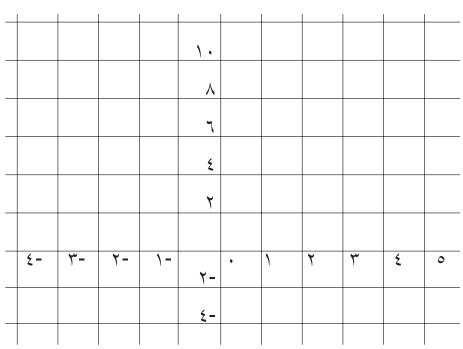
الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ

الاقتران الأسّي الطبيعي: هو اقترانٌ أسّيٌّ يكون أساسُه العددَ هـ ، حيثُ هـ عددٌ غيرُ نسبي له أهمية خاصة في الرياضيات ويسمى العدد النيبيري نسبة إلى (John Napier) ويساوي تقريباً ٢,٧١٨٢٨

نشاط ٥

أكمل ُ الجدولَ الآتيَ لقيم س ، ق(س) للاقتران ق(س) = هـ^{س}، باستخدام الآلة الحاسبة، ثمّ أرسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	٠	-١
ق(س)		٧,٣٩		١,٦٥		



تمارين ومسائل:

(١) أيٌّ من الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقتراناً أُسّيّاً ؟ مع بيان السبب.

أ) ق(س) = $٥^{س}$

ب) م(س) = $٤^{-س}$

جـ) هـ(س) = ٢$س^{٣}$

د) ص = $(-٢)^{س}$

هـ) ص = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س}$

(٢) أمثّلُ منحنى الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ) ص = $٣^{س}$ − ٢

ب) ص = ٥ − $٢^{س}$

جـ) ص = $٤^{-س}$

د) ص = $-\left(\frac{١}{٤}\right)^{س}$

مهمة تعليمية:

(١) استخدمُ منحنى ق(س) = $هـ^{س}$، والتحويلات الهندسيّة المناسبة لرسم الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $هـ^{-س}$

ب) ق(س) = ٣ − $هـ^{س}$

جـ) ق(س) = $هـ^{(س-١)}$

(٢) أجدُ قيمةَ كلٍّ من: أ ، ب لمنحنى ق(س) = أ $(٣)^{س}$ + ب، الذي يمرُّ بالنقطتين: (١،٣) ، (٠،٢).

(٣) الاقتران اللوغاريتمي (Logarithmic Function)

نشاط ١

أجدُ قيمةَ ما يأتي:

لـو$_{٤}$ ٦٤ = ...

لـو$_{١٠}$ ١٠٠ = ...

لـو$_{٨}$ ١ = ... ، لـو$_{٣}$ ٣ = ... ، لـو$_{٧}$ $\frac{١}{٤٩}$ = ...

أتعلم: الاقتران على الصورة ق(س) = لـو$_{أ}$س ، حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س > ٠ يُسمّى اقتراناً لوغاريتميّاً.

أناقش **لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟**

ملحوظة: من اللوغاريتمات الأكثر شيوعاً اللوغاريتم ذو الأساس ١٠، ويُسمّى اللوغاريتم العادي، ويُكتبُ عادةً على الصورة ص= لـوس ، س > ٠ (لا يُكتبُ له الأساس ١٠).

وإذا كان الأساسُ العدد هـ يُسمّى اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب على الصورة: ق(س) = لـو$_{هـ}$س.

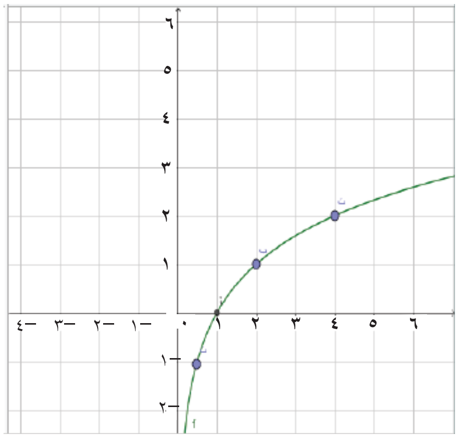
نشاط ٢

أكوّنُ جدولاً لقيم س ، ق(س) المناظرة لها، للاقتران ق(س) = لـو$_{٢}$س، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٨	٤		١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	
ق(س) = لـو$_{٢}$س	٣		١			-٢	-٣

أتذكرُ أنّ: $لـو_{٢} \frac{١}{٤} = -٢$ لأن $٢^{-٢} = \frac{١}{٢^{٢}} = \frac{١}{٤}$

عيّنُ النقاط في المستوى البياني، وأرسمُ منحنى الاقتران ، كما هو في الشكل (٢-٣):



من منحنى الاقتران ص= $لـو_{٢}$س ، ألاحظُ خصائصَ الاقتران ص= $لـو_{أ}$س ، حيث أ > ١ :

- مجال الاقتران اللوغاريتمي هو: .... ومداه هو: ....
- نقطة (أو نقاط) تقاطع منحنى الاقتران مع محوريّ الإحداثيات هي: ....
- كلما زادت قيمُ س فإنّ قيمَ ص المناظِرة لها ....

نشاط ٣

أرسم منحنى ص = $٢^{س}$ على المستوى المرسوم عليه منحنى الاقتران ص= $لـو_{٢}$س ثم أقارنُ بين منحنييّ الاقترانين.

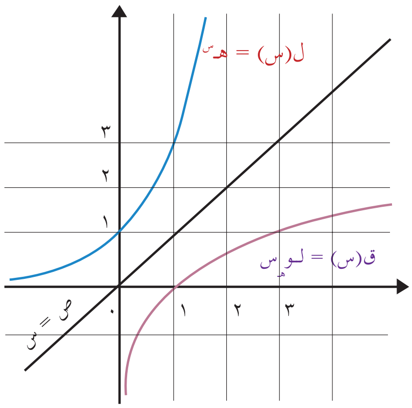
أتعلّمُ: بشكلٍ عام، يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلات الهندسيّة التي تعلمتها على الاقتران اللوغاريتمي.

نشاط ٤

مثال(١): بالاعتماد على منحنى الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ ل(س) = $هـ^{س}$ ، وخصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي، أرسمُ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = $لـو_{هـ}$س

الحلّ: عرفت من النشاط السابق أن منحنى الاقتران ق(س) = $لـو_{هـ}$س ، هو انعكاسٌ لمنحنى ص = $هـ^{س}$ في المستقيم ص = س.

نرسم منحنى ل(س) = $هـ^{س}$ ، ثم نرسمُ انعكاسَه في الخط المستقيم ص = س ، فيكون لدينا منحنى الاقتران، كما هو في الشكل المجاور.



نشاط ٥

أجدُ مجالَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

- ق(س) = $لـو_{٢}$ (س − ٣)
- هـ(س) = $لـو_{٣}$ ($س^{٢}$ − ١)

مجال الاقتران اللوغاريتمي هو $ح^{+}$، فإن مجال ق(س) معرّفٌ عندما س − ٣ > ٠

مجال ق(س) هو : ....

أما مجال هـ (س) فهو معرّفٌ عندما $س^{٢}$ − ١ > ٠

وعليه فإن: مجال هـ (س) هو : ....

تمارين ومسائل:

(١) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران ق(س) = لـوس، أمثّلُ الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) هـ(س) = $لـو_{٢}$س − ١

ب) ل(س) = $لـو_{٢}$ (س + ٢)

جـ) م(س) = -$لـو_{٢}$ (س + ١)

(٢) أجدُ مجال كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $لـو_{هـ}$ (٥س − $س^{٢}$)

ب) ق(س) = $لـو_{٢}$ $\sqrt{٢س − ٣}$

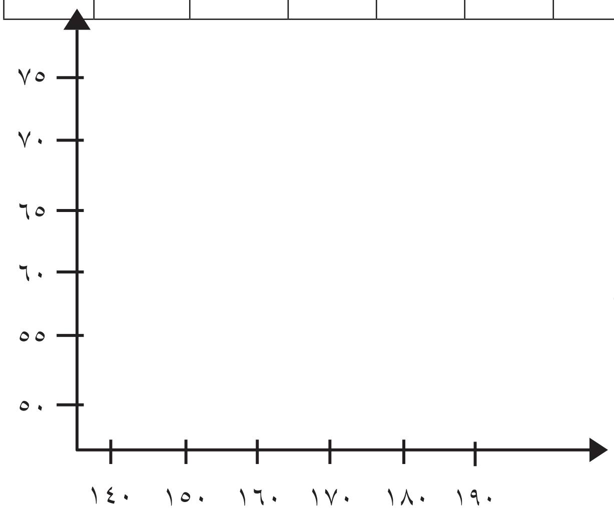
(٤) الارتباط الخطي (Linear Correlation)

نشاط ١

قام قيس بجمع بيانات حول أطوال مجموعة من طلبة الصف العاشر، وكُتلِهم، فكانت كما في الجدول الآتي:

الطول بالسنتمتر	١٧٠	١٦٠	١٦٥	١٦٠	١٥٥	١٦٢	١٥٠	١٦٧	١٥٨
الكتلة بالكيلوغرام	٧٠	٦٥	٦٢	٦٠	٥٨	٦٠	٥٥	٦٨	٥٦

أمثلُ شكل الانتشار لهذه البيانات:



- هل توجد علاقة بين طول الإنسان وكتلته ؟
- هل يمكنُ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط ؟

أتعلمُ: إذا أمكنَ رسمُ مستقيم يمرُّ بمعظم النقاط في شكل الانتشار، فإن العلاقة بين المتغيّريْن خطيّة، وتسمى هذه العلاقة الارتباط الخطيّ.

- هل بالإمكان تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيّريْن؟

أستنتج: شكل الانتشار يفيد في تحديد ما إذا كانت هناك علاقة، ونوعها خطيّة، أو غير خطيّة بين متغيّريْن، ولكن لا يكفي للحكم على قوة الارتباط بين المتغيّريْن؛ لأنّ تقديرَه يختلفُ باختلاف الشخص الذي يقومُ بالحكم على قوة الارتباط؛ ولذلك يجبُ استخدامُ طريقةٍ أكثر دقّة، يتمُّ بواسطتها تحديدُ قيمةٍ عدديةٍ لقوة الارتباط بين المتغيّريْن، وهي ما يسمّى معامل الارتباط، وهذا ما سيتم تعلّمه في الدرس القادم.

تمارين ومسائل:

١) يمثلُ الجدولُ الآتي علاماتِ مجموعةٍ من الطلبة في مبحثيّ الفيزياء (س)، والكيمياء (ص).
أرسمُ شكل الانتشار، وأبيّنُ نوع الارتباط.

س	٥	٩	٨	١٢	١٠	١١	٢	٤
ص	٧	١٠	٨	١٥	٩	١٣	٤	٦

٢) في الجدول الآتي أعمارُ مجموعةٍ من الأشخاص (س)، وعدد الساعات اليومية التي يمارسون فيها التمارين الرياضية (ص):

س	٣٠	٢٥	٢٢	٢٠	٣٥	٤٠	٥٠	٥٥	٦٠
ص	٣	٢	١,٥	١	٤	٥	٣,٥	٢	١

- أرسمُ شكل الانتشار لهذه البيانات.
- هل يوجد ارتباطٌ خطيٌّ بين عمر الشخص وعدد الساعات اليومية التي يقضيها في ممارسة التمارين الرياضية؟

(٥) معامل ارتباط بيرسون
(Pearson Correlation Coefficient)

تعريف: إذا كانت س ، ص مجموعتين من القيم المتناظرة فيعرّفُ معامل ارتباط بيرسون $ر$ كما يأتي:

$$ر = \frac{\sum_{ك=1}^{ن} س_{ك}\, ص_{ك} - ن\, \overline{س}\, \overline{ص}}{\sqrt{\sum_{ك=1}^{ن} س_{ك}^{2} - ن\, \overline{س}^{2}}\ \sqrt{\sum_{ك=1}^{ن} ص_{ك}^{2} - ن\, \overline{ص}^{2}}}$$

حيث: $\overline{س}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم س ، $\overline{ص}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم ص ، $ن$ عدد القيم.

نشاط ١

خالدٌ ورفاقُهُ في الصف العاشر، يعيشون في حيّ الياسمينة في نابُلْسَ، استلموا علاماتِهم المدرسيّة، بعد اختبارات الشهرين، فأرادوا دراسةَ العلاقةِ بين علاماتهم في مبحثيّ اللغة العربية واللغة الانجليزية، من خلال حساب معامل ارتباط بيرسون.

اللغة العربية س	٢٠	٢٥	٢٠	١٥	٣٠
اللغة الانجليزية ص	٢٥	٢٢	١٨	٢٠	٣٠

أكملُ الجدولَ الآتيَ

	س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
	٢٠	٢٥			
	٢٥	٢٢		٤٨٤	
	٢٠	١٨	٤٠٠		
	١٥	٢٠			
	٣٠	٣٠			٩٠٠
المجموع	١١٠	١١٥		٢٧٣٣	

$\sum_{ك=١}^{ن} س_ك^٢ = ...$ $\quad \sum_{ك=١}^{ن} ص_ك^٢ = ...$ $\quad \sum_{ك=١}^{ن} س_ك ص_ك = ...$

- أحسبُ:

$\bar{س} = ...$ $\quad \bar{ص} = ...$

- أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون:

$$ر = \frac{٢٦١٠ - ٥ \times ٢٢ \times ٢٣}{\sqrt{٢٥٥٠ - ٥ \times (٢٢)^٢}\ \sqrt{٢٧٣٣ - ٥ \times (٢٣)^٢}}$$

$ر = ...$

أتعلمُ: $-١ \leq ر \leq ١$

تمارين ومسائل:

١) حسبَ ثائرٌ معدّلَ درجاتِ الحرارةِ في قريتِه، في الأسابيعِ الثمانيةِ من شهريّ كانون أول وكانون ثاني، وعددَ أُسْطواناتِ الغازِ التي تستهلكُها أسرتُه للتدفئة في كلِّ أسبوع، فكانت على النحو الآتي:

درجة الحرارة س	١-	٥	٨	١٢	٠	٢-	١٠	٨
عدد أُسطوانات الغاز ص	٣	٢	٢	١	٢	٣	١	٢

أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

٢) قام طلبةُ الصفّ العاشرِ الأساسيّ في مدرسة المجدل الثانوية، بدراسة العلاقةِ بين عددِ أفرادِ الأُسرةِ لَدى طلبةِ الصفّ، وكميّةِ استهلاكِ الماءِ شهريّاً، فجمعوا البياناتِ، وحصلوا على النتائج الآتية، عِلماً بأنّ عددَ الأُسَرِ خمسٌ. أحسبُ معاملَ ارتباط بيرسون.

$$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} = ٤٩٠ \qquad \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ك}} = ١١٠ \qquad \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}} = ٢٠$$

$$\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{ص}^{2}_{\text{ك}} = ٢٧٠٠ \qquad \sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}^{2}_{\text{ك}} = ٩٠$$

مهمة تقويمية:

- أحسبُ معاملَ ارتباطِ بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

س	١٠	٨	٥	١٦	٦	١٥
ص	٩	٧	٥	١٥	٦	١٢

الانحدارُ الخطّيُّ البسيط
(Simple Linear Regression)

(٦)

تعريف:

تسمى المعادلة $\hat{\text{ص}} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$ التي تربط بين قيم المتغيرين س ، ص معادلة خط انحدار ص على س

حيث: $\text{أ} = \dfrac{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\sum_{\text{ك}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ك}}^{2} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}^{2}}$ و $\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}}$

$\bar{\text{س}}$ الوسطَ الحسابيَّ لقيمِ المتغيّر س

$\bar{\text{ص}}$ الوسطَ الحسابيَّ لقيمِ المتغيّر ص

نشاط ١

أحسبُ كلاًّ من: $\bar{\text{س}}$ ، $\bar{\text{ص}}$ للبيانات في الجدول الآتي:

س	٣	٦	٨	-٢	٥
ص	٧	١	٠	٦	-٤

$\bar{\text{س}}$ = ... ، $\bar{\text{ص}}$ = ...

أُكملُ الجدولَ الآتيَ:

س ص	$س^٢$	ص	س
٢١		٧	٣
	٣٦	١	٦
		٠	٨
		٦	-٢
-٢٠	٢٥	-٤	٥

أجدُ معادلة خطِّ الانحدار: $\hat{ص}$ = أس + ب

أحسبُ: قيمةَ أ = ... ، وقيمة ب = ...

معادلة خطِّ الانحدار: $\hat{ص}$ = ... + ...

أتعلّمُ: يُمكنُ استخدامُ معادلةِ الانحدارِ في حسابِ قيمِ ص إذا عُلِمتْ قيمُ س.

تمارين ومسائل:

- يُمثِّلُ الجدولُ الآتي عددَ ساعاتِ الدراسةِ اليوميّةِ، ومعدّلَ الثانويّةِ العامّةِ، لدى مجموعةٍ من الطلبة:

عدد ساعات الدراسة س	٢	٤	٦	٥	٣
معدل الثانوية العامة ص	٦٠	٧٠	٨٠	٧٠	٧٠

- أجدُ معادلةَ خطِّ انحدارِ ص على س.
- إذا درس طالب ٨ ساعات يومياً، فكم تتوقع المعدل الذي سيحصل عليه؟

مهمة تقويمية:

- اعتماداً على البيانات في الجدول الآتي، أجدُ معادلةَ خطِّ انحدار ص على س :

س	٣	٥	٧	٩	١١	٧
ص	٨	١٠	٧	١١	١٢	٦

(٧) مبدأُ العدّ (Counting Principle)

مبدأ العدِّ الأساسيّ:

إذا أمكننا إجراءُ عمليّةً ما على خطواتٍ عددُها ك، بحيث تتمُّ الأولى بطرقٍ عددها $ن_١$، وتتمُّ الثانية بطُرُقٍ عددها $ن_٢$، وهكذا حتى الخطوةِ الأخيرةِ التي تتمُّ بطرقٍ عددها $ن_ك$، فإنّ عددَ الطُّرقِ الكليّةِ التي تتمُّ بها هذه العملية هي: $ن_١ \times ن_٢ \times ن_٣ \times \ldots \times ن_ك$.

نشاط ١

يُرادُ تكوينُ مجلسِ إدارةٍ لشركةٍ ما، مكوَّنٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينٍ للصندوقِ، بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ هذا المجلسِ، إذا كان عددُ الأشخاصِ المرشّحين ٥ ؟

لاختيار الرئيس، هناك ٥ طرقٍ مختلفة.

لاختيار نائبِ الرئيس، هناك .... طرقٍ مختلفة، لماذا ؟

لاختيار أمينِ الصندوق، هناك .... طرقٍ مختلفة.

عدد الطرق المختلفة لتكوين المجلس= ... × ... × ٣ =... طريقة مختلفة.

نشاط ٢

كم عدداً مكوّناً من منزلتيْن، يمكنُ تكوينُه من مجموعة الأرقام: { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } ؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تتمُّ العمليّةُ في مرحلتين: المرحلةُ الأولى اختيارُ منزلةِ الآحاد، وتتمُّ بـ ... طُرُق، واختيارُ منزلةِ العشراتِ، وتتمُّ أيضا بـ ... طرق. إذن عددُ الطرقِ الكليّة = ... × ... = ١٦ طريقةً.

ب) إذا لم يُسمَحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ... طرق، وعددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشرات ... طرق.

عدد الطرق المختلفة = ... × ... = ١٢ طريقةً، أيّ أنّ: عدد الأعداد المختلفة ١٢ عدداً.

مضروبُ العدد:

بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ لخمسةِ أشخاصٍ أن يجلسوا في خمسةِ أماكنَ في خطٍّ مستقيم؟

حسب مبدأ العدّ: عدد الطرق المختلفة هي ٥ × ... × ... × ... × ... = ١٢٠ طريقةً مختلفةً.

اصطلِحَ على كتابة حاصلِ الضرب ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ على الصورة ٥! ، وتُقرَأُ مضروب العدد ٥.

تعريف: إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ مضروبَ العدد ن ، ويُرمَزُ له بالرمز ن!

حيث: ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) .... ٣ × ٢ × ١ ، ٠! = ١

نشاط ٤

أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ...

ب) $\frac{٥!}{٣!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣!} = ... = ٢٠$

جـ) $\frac{٨!}{٥!\ ٣!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٥! \times ٣ \times ٢ \times ١}$

نشاط ٥

أكتبُ $\frac{ن!}{(ن - ٢)!}$ في أبسط صورة.

$\frac{ن!}{(ن - ٢)!} = \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)!}{(ن - ٢)!} = ...$

قيمةُ المقدارِ عندما ن = ٥ تساوي ....

تمارين ومسائل:

١) يقدِّمُ أحدُ المطاعمِ في مدينةِ نابُلْسَ ٣ أنواعٍ من اللّحوم، و ٤ أنواعٍ من الحَلْوى، ونوعيْن من المشروبات. بكم طريقةٍ يمكنُ لأحدِ مرتادي المطعم اختيارَ وجبةٍ مكوّنةٍ من نوعٍ من اللّحومِ، ونوعٍ من الحَلْوى، ومشروبٍ؟

٢) أُلقِيتْ قطعةُ نقدٍ ٣ مرات، فما عددُ النتائجِ الممْكِنةِ؟ أكتبُ النتائجَ في مجموعة.

٣) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاث منازل، يمكنُ تكوينُهُ من مجموعة الأرقام: { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ب) إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقمِ في أكثر من منزلة.

(٨) التباديل (Permutations)

تعريف:

التباديل: عدد التراتيب المختلفة لمجموعة من العناصر مأخوذة كلها أو جزء منها في كل مرة
عددُ تباديل ن من العناصر مأخوذةٌ جميعاً في كل مرة، هو ن! ، ويُرمَزُ له بالرّمزِ ل(ن،ن)،
حيث ن $\in$ ص$^{+}$

ل(ن،ن) = ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) × .... × ٣ × ٢ × ١

نشاط ١

أجدُ قيمةَ: ل(٦،٦).

ل(٦،٦) = ٦ × ... × ... × ... × ... × ١ =٧٢٠

ل(٥،٥) = ... ماذا نلاحظ؟

نشاط ٢

أجدُ عددَ الأعداد المكوّنةِ من منزلتيْن، التي يمكنُ تكوينُها من مجموعة الأرقام:
{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ألاحظُ أنَّ المطلوبَ هو عددُ الترتيباتِ الثنائيّةِ لمجموعةِ الأرقامِ هذه، بشرط عدم التكرار،
ويساوي ....×....=....

وهذا ما يُسمَّى التباديلَ الثنائيّةَ لمجموعةٍ فيها ٥ عناصر، وبشكلٍ عام، فإنّ عددَ التباديلِ الرائيّةِ لمجموعةٍ مكوّنةٍ من (ن) من العناصر، ويُرمَزُ له بالرمز ل(ن ، ر)،

يساوي $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن} - \text{ر})!}$ حيث ن ، ر عددان طبيعيّان، ن $\geq$ ر

نشاط ٣

أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(٥ ، ٣) = $\frac{٥!}{(٥ - ٣)!}$ = ...

ب) ل(ن ، ٣) = $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن} - ٣)!}$ = ... = ...

أتعلمُ: يمكنُ كتابةُ ل(ں،ر) على الشكل: ں(ں-١)(ں-٢)(ں-٣)...(ں-ر+١).

نشاط ٤

أتحقّقُ ممّا يأتي:

أ) ل(ں ، ١) = $\frac{ں!}{(ں - ١)!}$ = ... = ں

ب) ل(ں ،٠) = ... = ١

جـ) ل(ں ، ں) = ... = ں!

نشاط ٥

بكم طريقةٍ يمكنُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ من بين سبعة أشخاص ؟

عددُ الطرقِ التي يمكنُ تشكيلُ اللجنةِ بها هي:

ل(٧ ، ٣) = ... × ... × ... = ٢١٠ طرقٍ مختلفة.

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ قيمةَ ما يأتي:

أ) ل(٦،٤) ب) $\frac{ل(٩،٢)}{ل(٩٠،٠)}$

٢) أرادَ أحمدُ وإخوانُه الثلاثةُ الذهابَ إلى المسجدِ الأقصى، واتفقوا على أنْ يدخلَ كلٌّ منهم من بابٍ مختلفٍ من أبوابِ القدسِ السبعةِ. بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ للإخوةِ الأربعةِ الوصولُ إلى المسجد الأقصى؟

٣) أجدُ قيمةَ ں في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(ں ، ٢) = ٥٦ ب) ل(ں - ٣ ، ٢) = ٦

مهمة تقويمية:

أُعبِّرُ عن كلٍّ ممّا يأتي بالصورة ل(ں،ر) :

أ) ٩ × ٨ × ٥ × ٦ × ٧ ب) ٢٥٢٠ ج) ں(ں^٢ - ٣ں + ٢)

(٩) التوافيق (Combinations)

تعريف: عدد المجموعات الجزئية التي عناصرها ر مأخوذة من مجموعة عناصرها ن عدد التوافيق الرائيّةِ لمجموعة فيها ن من العناصر، ويُرمزُ له بالرّمز:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ل}(\text{ن}،\text{ر})}{\text{ر}!} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!\ \text{ر}!}\ ،\ \text{ن} \geq \text{ر}$$

نشاط ١

لدى معرِضِ سيّاراتٍ ٦ أنواعٍ من السيارات، يريدُ صاحبُ المعرِضِ اختيارَ ٤ منها، لعرضها للزبائن. أجدُ عددَ الطرقِ التي يمكنُ بها الاختيار.

بما أنّ إعادة الترتيب لا تعطي نتيجة جديدة، أي أنّ الترتيبَ غيرُ مهم.

إذن: عددُ الطرق يساوي $= \binom{٦}{٤} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢!\ ٤!} = ...$

أتعلم: أ) $\binom{\text{ن}}{٠} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - ٠)!\ ٠!} = ١$ ب) $\binom{\text{ن}}{\text{ن}} = ١$

ج) $\binom{\text{ن}}{١} = \text{ن}$ د) $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن} - \text{ر}}$

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ ما يأتي: أ) $\binom{٩}{٥}$ ب) $\binom{٩}{٤}$ ج) $\binom{٧٥}{١}$

٢) أجدُ قيمَ ن في كلٍّ من الحالات الآتية: أ) $\binom{\text{ن}}{٢} = ٣$ ب) $\binom{\text{ن}}{٩} = \binom{\text{ن}}{٤}$

مهمة تقويمية:

١) بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ فريقٍ لكرةِ السّلةِ، يتمُّ اختيارُه من بين ثمانية لاعبين ؟

٢) صفٌّ مكوّنٌ من ٩ طلابٍ، و٧ طالباتٍ، يُرادُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ طلابٍ، و٤ طالباتٍ، بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ تشكيلُ اللجنة ؟

نموذج اختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

١) أحد الاقترانات الآتية اقتران أسي:

أ) $(٢)^{س}$ ب) $س^{٢}$ ج) $(-٣)^{س}$ د) $(\frac{-١}{٢})^{س}$

٢) منحنى الاقتران ق(س)= $(٢)^{س}$:

أ) متزايد ويمر بالنقطة (٠، ١)   ب) متناقص ويمر بالنقطة (٠ ، ١)

ج) متزايد ويمر بالنقطة (٠ ، -٢)   د) متناقص ويمر بالنقطة (٠ ، -٢)

٣) إذا كان ن! = ٢٤ فإنّ ل(٢ن، ٣) =

أ) ٢٤   ب) ٥٠٤   ج) ٤   د) ٣٣٦

٤) الحد الأوسط في مفكوك $(٢س - 1)^{٦}$:

أ) ١٦٠ $س^{٣}$ ب) -١٦٠ $س^{٣}$ ج) ٢٤٠ $س^{٤}$ د) -٢٤٠ $س^{٤}$

السؤال الثاني: أوجد قيمة ما يأتي:

١) لــو٢٠ + لــو٥

٢) [١ - $\sqrt{٢}$]

٣) $\binom{٧}{٣} + \binom{٧}{٤}$ - ل (٧ ، ١)

السؤال الثالث: إذا كان مجموع مربعات فرق الرتب للمتغيرْين (س،ص) لعينة حجمها ٦ يساوي ٢٤ احسب معامل ارتباط سبيرمان موضّحاً نوع الارتباط ومدى الارتباط.

السؤال الرابع:

أ) بالاعتماد على رسم ق(س)= هـ^س^ ارسم منحنى م (س)= - هـ^س^ - ٣ ،موضّحاً التحويلات الهندسية .

ب) الجدول الآتي يمثل العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، بالاعتماد على الجدول أوجد.

- معامل ارتباط بيرسون
- معادلة خط انحدار ص على س

س	ص				
١-	٤				
٢-	٥				
١	٢				
٢	١				
٥	٢-				

ج) أوجد مفكوك: $\left(\frac{س}{٢} + \frac{٢}{س}\right)^{٥}$

السؤال الخامس: أ) لديك المجموعة: س { ٢، ٣، ٥ ، ٤ ، ٧ } ، كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ٣ منازل يمكن تكوينه من المجموعة س إذا لم يسمح بتكرار الرقم؟

ب) إذا كان ق (س)= أس + ب، وكان منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ،٣) ، وكان $\binom{أ}{ب}$ = ١٥

أوجد قيمة الثوابت أ ، ب .