

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وَأَذِّنُ بِالْمَقَرَّةِ وَالْمَقَرَّةِ

١٢

الرياضيات

"التكنولوجي"

الفترة الأولى

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وَأَذِّنُ بِالْمَقَرَّةِ وَالْمَقَرَّةِ



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970 2 2983280 | فاكس +970 2 2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

الإحصاء والنهيات Statistics and Probability

٤	Standard Score العلامة المعيارية
٨	Standard Normal Distribution التوزيع الطبيعي المعياري
١٥	Limit of a function نهاية الاقتران
١٧	Limits Rules قوانين النهايات
٢١	Limit of Multi Rules Function نهاية الاقتران متعدد القاعدة
٢٣	Limit of afunction at Infinity ∞ نهاية الاقتران عندما س ←
٢٦	Continuity الاتصال

يتوقع من الطلبة دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التوزيع الطبيعي وخواصه في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. حساب العلامة المعيارية، وتفسيرها.
٢. التعرف إلى منحنى التوزيع الطبيعي المعياري، وخواصه.
٣. استخدام جدول التوزيع الطبيعي في إيجاد المساحة تحت المنحنى.
٤. توظيف خواص التوزيع الطبيعي في حل مسائل مشكلات حياتية.
٥. التعرف إلى مفهوم نهاية الاقتران عند نقطة.
٦. إيجاد نهاية الاقتران عند نقطة باستخدام الرسم البياني.
٧. إيجاد نهاية اقتران متعدد القاعدة عند نقطة.
٨. التعرف إلى نهاية الاقتران في المالا نهية باستخدام القوانين.
٩. بحث اتصال اقتران عند نقطة.

العلامة المعيارية Standard Score

القيمة الخام: هي القيمة الأصلية التي نحصل عليها في اختبار أو مقياس ما، ويرمز لها بالرمز «س». العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية التي تبعتها القيمة (العلامة) الخام عن الوسط الحسابي، وبالرموز

$$\text{فإن: } ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$$

نشاط (١):



معتمداً على المعلومات الواردة في الجدول الآتي الذي يبين علامات ثلاثة طلاب في الرياضيات والتكنولوجيا. أجب عن كل مما يأتي:

التكنولوجيا	الرياضيات	
٧٠	٦٤	الوسط الحسابي
٥	١٠	الانحراف المعياري
٨٠	٨٢	بلال
٧٠	٦٤	يامن
٦٠	٦٠	كنان

تحصيل بلال أفضل في
أجد العلامة المعيارية للطلاب بلال في الرياضيات والتكنولوجيا:

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = \text{العلامة المعيارية للرياضيات } ع_1$$

$$١,٨ = \frac{٦٤ - ٨٢}{١٠} =$$

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = \text{العلامة المعيارية للتكنولوجيا } ع_٢$$

$$٢ = \frac{٧٠ - ٨٠}{٥} =$$

تحصيل بلال أفضل في التكنولوجيا؛ لأن علامته المعيارية في التكنولوجيا أكبر من علامته المعيارية في الرياضيات.

تحصيل يامن أفضل في

تحصيل كنان أفضل في

❖ **مثال (١):** مزارع فلسطيني يزرع البندورة في سهل مرج ابن عامر، كان الوسط الحسابي لكتل (٣٠٠) صندوق بندورة ١٧ كغم، وانحرافها المعياري (٢) كغم، اختيرت ٣ صناديق، وكانت كتلتها ١٣ كغم، ١٩ كغم، ١٧ كغم على الترتيب. أجد العلامة المعيارية لكتل كل من الصناديق الثلاثة.

الحل: $\frac{\mu - \text{س}}{\sigma} = \text{ع}$ ، حيث ع هي العلامة المعيارية، س الكتلة الخام، μ الوسط الحسابي للكتل، σ الانحراف المعياري لها.

$$\text{٢-} = \frac{١٧ - ١٣}{٢} = \text{ع}_١ \text{ - العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الأول ع}_١$$

$$\text{١} = \frac{١٧ - ١٩}{٢} = \text{ع}_٢ \text{ - العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الثاني ع}_٢$$

$$\text{صفر} = \frac{١٧ - ١٧}{٢} = \text{ع}_٣ \text{ - العلامة المعيارية لكتلة الصندوق الثالث ع}_٣$$

❖ **مثال (٢):** حصلت عهد على علامة ما في الرياضيات، وكانت العلامة المعيارية المقابلة لها (١,٥) علماً بأن الوسط الحسابي لعلامات طالبات صفها كان (٨٥) والانحراف المعياري (٦)، أجد علامة عهد في اختبار الرياضيات.

$$\frac{\mu - \text{س}}{\sigma} = \text{ع} \text{ **الحل:** }$$

$$\frac{٨٥ - \text{س}}{٦} = ١,٥$$

$$\text{ومنها } ٩ = \text{س} - ٨٥$$

$$\text{س} = ٩٤$$

نتيجة: إذا كانت القيم الخام لمجتمع إحصائي هي س_١، س_٢،، س_٦، وكانت العلامات المعيارية المقابلة لها هي ع_١، ع_٢،، ع_٦ فإن الوسط الحسابي $\bar{\text{ع}}$ للعلامات المعيارية يساوي صفرًا، والانحراف المعياري لها $\sigma = ١$.

❖ **مثال (٣):** إذا كانت العلامات المعيارية المناظرة لأطوال ٥ أشجار صنوبر كالاتي:

ل ، ٥ ، ، صفر ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، فما قيمة ل؟

الحل: ل + ٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥ = صفر

$$ل + ٥ = صفر$$

$$ل = ٥$$

❖ **مثال (٤):** إذا كانت علامتا طالين في امتحان التكنولوجيا ٧٠ ، ٨٨ وكانت علامتهما المعياريتان المناظرتان

٨ ، ١ ، على الترتيب، ما الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف في الامتحان؟

الحل:

$$\frac{\mu - ٨}{\sigma} = ١$$

$$\frac{\mu - ٧٠}{\sigma} = ٨ ، \text{ وبالضرب التبادلي:}$$

$$\mu - ٧٠ = ٨\sigma \quad (١)$$

$$\frac{\mu - ٨٨}{\sigma} = ١ \text{ وبالضرب التبادلي:}$$

$$\mu - ٨٨ = \sigma \quad (٢)$$

أحل المعادلتين (١) ، (٢) بالحذف

$$\mu - ٨٨ = \sigma$$

$$\mu - ٧٠ = ٨\sigma$$

بالطرح ٨ = ١٨ = ٨σ ومنها σ = ١٠

وبالتعويض في إحدى المعادلتين ينتج أن ١٠ = μ - ٨٨ ومنها μ = ٧٨

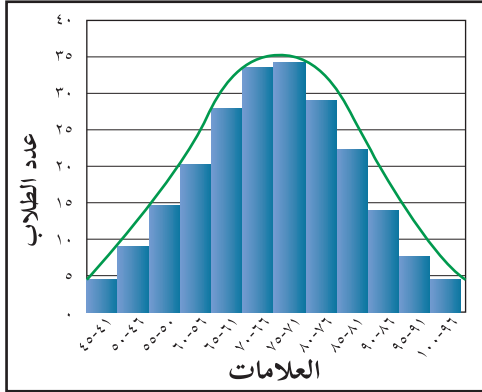
أي أن الوسط الحسابي = ٧٨ والانحراف المعياري = ١٠

التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

نشاط (١):



مثل المعلم حمدان علامات طلاب مدرسته في مادة الرياضيات بياناً، كما هو في الشكل المجاور. ألاحظ أن هناك تجمعاً لعلامات الطلاب في المنتصف، كما أن شكل التمثيل البياني لتوزيع العلامات يشبه الجرس تقريباً. إن مثل هذا التوزيع يسمى توزيعاً طبيعياً.



(١) الوسط الحسابي للعلامات يقع في الفئة (٧٠-٧٩)

(٢) الوسيط للعلامات يقع في الفئة

(٣) المنوال للعلامات هو مركز الفئة

أتعلم:



إذا كان الوسط = الوسيط = المنوال يكون التوزيع طبيعياً.

التوزيع الطبيعي:

يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية، ومنها التوزيع الطبيعي، ويعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في علم الإحصاء، لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية، مثل: الأطوال، والكتل، والأعمار، ودرجات الحرارة، والدخل الشهري، وغيرها من الظواهر المتصلة.

خصائص التوزيع الطبيعي:

(١) التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس، ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالوسط.

(٢) يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال.

(٣) المنحنى متصل.

(٤) يقترب المنحنى من المحور س، ولكنه لا يمسّه.

وسنركز في دراستنا هذه على التوزيع الطبيعي المعياري.

التوزيع الطبيعي المعياري: إذا كانت s_1 ، s_2 ،، s_n علامات خام تتبع التوزيع الطبيعي، فإن العلامات المعيارية المقابلة لها هي z_1 ، z_2 ،، z_n تتبع توزيعاً طبيعياً يسمى التوزيع الطبيعي المعياري، ويكون فيه الوسط الحسابي يساوي صفراً، والانحراف المعياري يساوي (١).

جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري:

المساحة الكلية تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي وحدة مساحة واحدة، وقد وضع العلماء جداول خاصة تبين نسبة المساحة تحت المنحنى والمحدودة بقيمة معينة من العلامات المعيارية. سنستخدم الجداول الملحقة في نهاية الكتاب والتي تعطي المساحة المحصورة تحت z حيث z عدد حقيقي.

❖ **مثال (١):** باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد كلاً من:

(أ) نسبة المساحة تحت ($z = 1.17$).

(ب) نسبة المساحة فوق ($z = 1.2$).

(ج) نسبة المساحة تحت ($z = -1$).

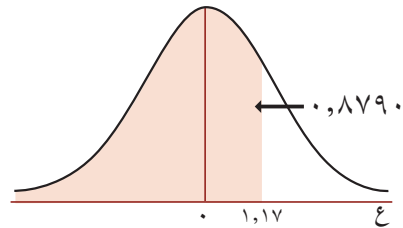
(د) نسبة المساحة فوق ($z = -0.5$).

(هـ) نسبة المساحة المحصورة بين ($z = -0.8$ و $z = 0.15$).

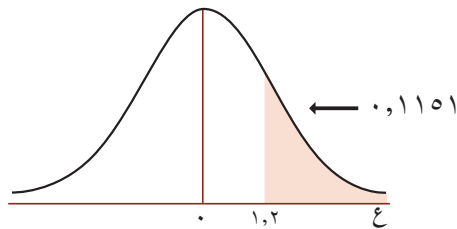
ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥

الحل:

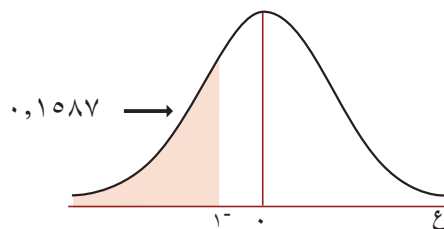
أ) نسبة المساحة تحت $(ع = 1,17)$ $= 0,8790$ ويتم إيجادها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وتحدد من تقاطع الصف 1,1 ومن العمود 0,07، حيث أن تقاطع العمود مع الصف يمثل قيمة المساحة. ألاحظ الشكل:



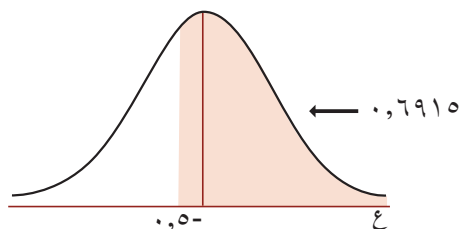
ب) نسبة المساحة فوق $(ع = 1,2) = 1 -$ المساحة تحت $(ع = 1,2) = 0,8849 - 1 = 0,1151$ ألاحظ الشكل:



ج) نسبة المساحة تحت $(ع = 1^-) = 0,1087$ مباشرة من الجدول، ألاحظ الشكل:

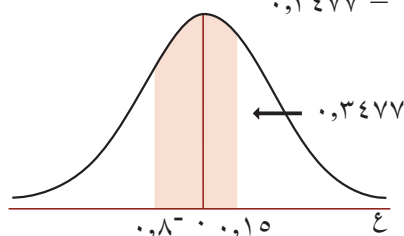


(د) نسبة المساحة فوق (ع = ٠,٥-) = ١ - (المساحة تحت ع = ٠,٥-) = ٠,٦٩١٥ - ١ = -٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٩١٥ ألاحظ الشكل:



(هـ) نسبة المساحة المحصورة بين (ع = ٠,٨-) و (ع = ٠,١٥-) = المساحة تحت (ع = ٠,١٥-) - المساحة تحت (ع = ٠,٨-) =

$$٠,٥٥٩٦ - ٠,٢١١٩ = ٠,٣٤٧٧$$

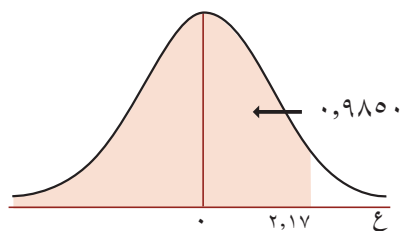


مثال (٢): أجد قيمة ع في كل مما يأتي:

(أ) نسبة المساحة تحتها تساوي ٠,٩٨٥٠

(ب) نسبة المساحة فوقها تساوي ٠,٦٦٢٨

الحل: (أ) نسبة المساحة تحت ع = ٠,٩٨٥٠ ، أبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٨٥٠ ، جد أنها تقع عند تقاطع صف ع = ٢,١ وعمود ٠,٠٧ ، ومنها ع = ٢,١٧ ، ألاحظ الشكل الآتي:

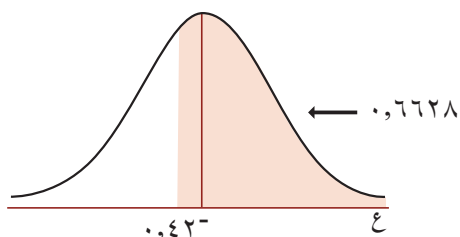


(ب) نسبة المساحة فوق ع = ٠,٦٦٢٨ = ١ - المساحة تحت ع

$$٠,٦٦٢٨ - ١ = -٠,٣٣٧٢ =$$

$$٠,٣٣٧٢ =$$

من الجدول ع = -٠,٤٢ = ألاحظ الشكل المجاور:



❖ **مثال (٣):** الوسط الحسابي لأعمار المصاييح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع هو ١٢٠٠ ساعة بانحراف معياري مقداره ٣٠٠ ساعة، فإذا كانت هذه الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي واختير أحد المصاييح عشوائياً، فما النسبة المئوية لأن يبقى المصباح الكهربائي صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة.

الحل: نسبة أن يبقى المصباح صالحاً لمدة تزيد على ١٨٠٠ ساعة = المساحة فوق (ع) $\mu = 1200$
 $\sigma = 300$

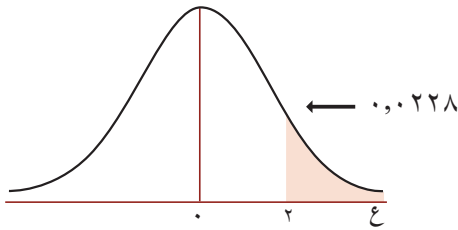
$$z = \frac{1200 - 1800}{300} = \frac{\mu - s}{\sigma} = \frac{1800 - 1200}{300} = 2$$

المساحة = المساحة فوق (ع = ٢)

$$1 - \text{المساحة تحت (ع = ٢)} =$$

$$0,0228 = 0,9772 - 1 =$$

$$\text{النسبة المئوية المطلوبة} = 0,0228 \times 100 = 2,28\%$$



❖ **مثال (٤):** الوسط الحسابي لكتل ١٠٠٠ شخص يساوي ٦٥ كغم، والانحراف المعياري للكتل ١٠ كغم، فإذا كانت الكتل تتبع التوزيع الطبيعي، فما نسبة الأشخاص الذين تقع كتلتهم بين ٦٥ كغم و ٩٥ كغم؟ وما عددهم؟

الحل: نسبة الأشخاص الذين كتلتهم بين ٦٥ كغم، ٩٥ كغم = نسبة المساحة المظللة في الشكل المقابل.

أحول القيمة الخام ٩٥ إلى علامة معيارية

$$z = \frac{65 - 95}{10} = \frac{\mu - s}{\sigma} = \frac{95 - 65}{10} = 3$$

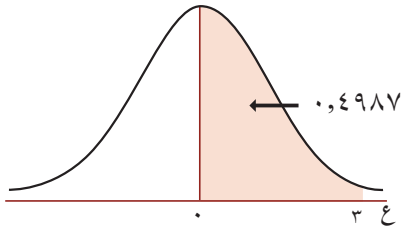
نسبة الأشخاص = المساحة بين (ع = ٣ ، و ع = ٠) لماذا؟

$$= \text{المساحة تحت (ع = ٣)} - 0,5 \text{ لماذا؟}$$

$$= 0,5 - 0,9987 =$$

$$0,4987 =$$

عدد هؤلاء الأشخاص = $0,4987 \times 1000 \approx 499$ شخصاً.



تمارين ومسائل (١ - ٢)



س١: أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كل من الحالات الآتية:

(أ) تحت (ع = ١,٣٨)

(ب) فوق (ع = ٠,٩٠)

(ج) بين (ع = ١,٥⁻) و (ع = ١,٥)

س٢: أجد العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الآتية:

(أ) المساحة تحت ع هي ٠,٨٥٥٤

(ب) المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

(ج) المساحة بين ع⁻ و ع هي ٠,٦

س٣: إذا كانت أطوال طلبة مدرسة ثانوية فيها ٥٠٠ طالب، أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥ سم، وبانحراف معياري ١٠ سم، ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠ سم ، ١٨٠ سم؟ وما عددهم؟

س٤: إذا كانت علامات ٦٠٠ طالب تتخذ توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٢ وبانحراف معياري ٨ وكانت علامة النجاح هي ٦٠، أجد:

(أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢، ٧٨.

(ب) عدد الطلبة الراسبين.

س٥: تتبع رواتب ١٠٠٠ موظف في إحدى الشركات توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي ٧٠٠ دينار، وبانحراف معياري ٢٠ ديناراً. أحسب عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٦٨٠ ديناراً و ٧٤٠ ديناراً.

ورقة عمل

س١: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٢ ، ١- على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٢: خط إنتاج في مصنع ينتج أكياساً من الأرز بوسط حسابي يساوي ١,٠١ كغم، وانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم. أجد:

أ) نسبة الأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم.

ب) نسبة الأكياس التي تتراوح كتلتها بين ١ كغم و ١,٠٥ كغم.

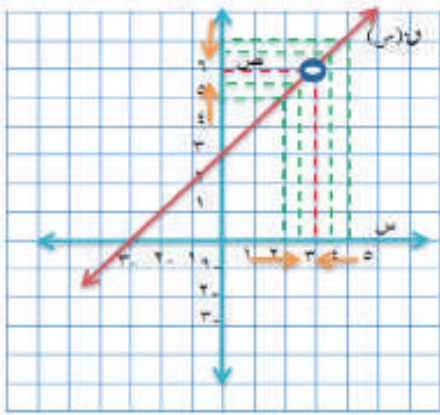
نهاية الاقتران : Limit of a function

تعريف: نهاية الاقتران ق(س) عند نقطة:

- كلما اقتربت قيم س من العدد l من جهة اليمين اقتربت قيم $ق(س)$ المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عنها بالصورة **نهاية (س) ل** $ل = \lim_{س \rightarrow l^+} ق(س)$.

- كلما اقتربت قيم س من العدد l من جهة اليسار اقتربت قيم $ق(س)$ المقابلة لها من عدد حقيقي معين (ل) يعبر عنها بالصورة **نهاية (س) ل** $ل = \lim_{س \rightarrow l^-} ق(س)$.

- إذا كانت **نهاية (س) ل** = **نهاية (س) ل** فإن **نهاية (س) ل** موجودة ويكون **نهاية (س) ل** $ل = \lim_{س \rightarrow l} ق(س)$.



مثال (١): الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران:

$$ق(س) = \frac{9 - س^2}{3 - س}, \quad س \neq 3 \text{ أجد ما يأتي:}$$

(١) $ق(3)$ (إن وجدت)

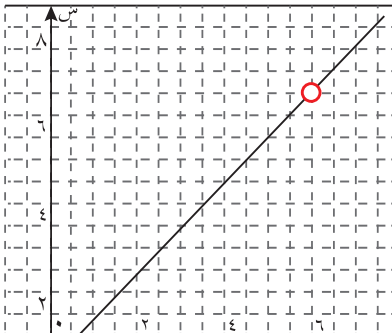
(٢) نهاية $ق(س)$ عندما تقترب س من العدد ٣ (إن وجدت)

الحل: بملاحظة الشكل، أجد أن:

(١) $ق(س)$ غير معرف عندما $س = 3$

(٢) **نهاية (س) ل** = ٦ وكذلك **نهاية (س) ل** = ٦ أي أن **نهاية (س) ل** = ٦ $ل = \lim_{س \rightarrow 3^-} ق(س) = 6$ $ل = \lim_{س \rightarrow 3^+} ق(س) = 6$

أفكر وأناقش: هل توجد علاقة بين وجود النهاية عندما تقترب س من س_٠ ووجود صورة س_٠ في الاقتران؟



نشاط (١):

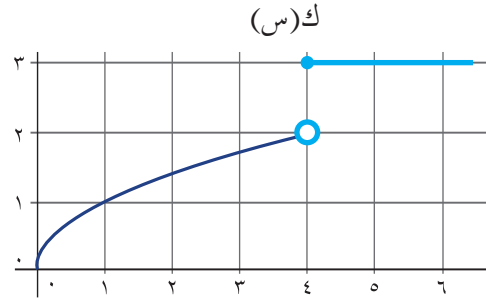
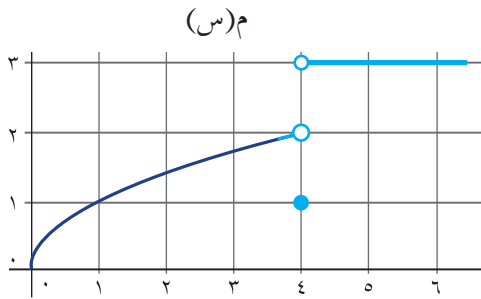
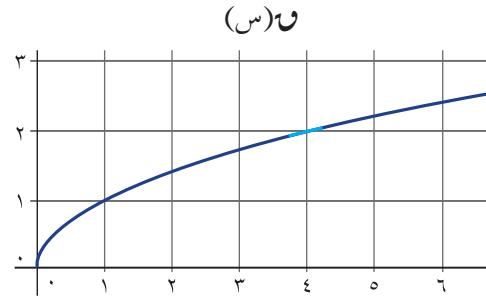
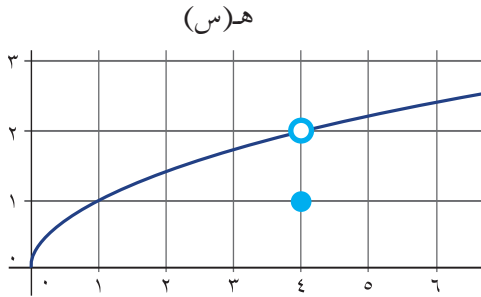
يوضح الشكل المجاور منحنى $ق(س) = \frac{س^2 - ٥س - ٦}{س - ٦}$ ، $س \neq 6$

$ق(س) = \frac{(س - ٦)(س + ١)}{(س - ٦)} = س + ١$ ، $س \neq 6$

تمارين ومسائل (١-٢)



س١: بالاعتماد على منحنيات الاقترانات الآتية: و(س) ، هـ(س) ، ك(س) ، م(س) أجد ما يأتي:



هـ(٤) = = هـ(٤)

و(٤) = = و(٤)
 س ← ٤

م(٤) = = م(٤)

ك(٤) = = ك(٤)
 س ← ٤

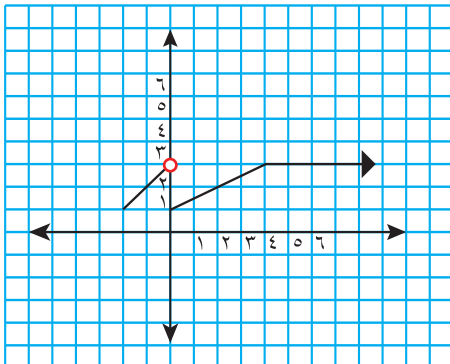
أ(٤) = = أ(٤)

ب(٤) = = ب(٤)
 س ← ٤

ج(٤) = = ج(٤)

د(٤) = = د(٤)
 س ← ٤

س٢: أعتمد الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران و(س) لإيجاد:



أ(٤) = = أ(٤)
 س ← ٤

ب(٤) = = ب(٤)
 س ← ٤

ج(٤) = = ج(٤)
 س ← ٤

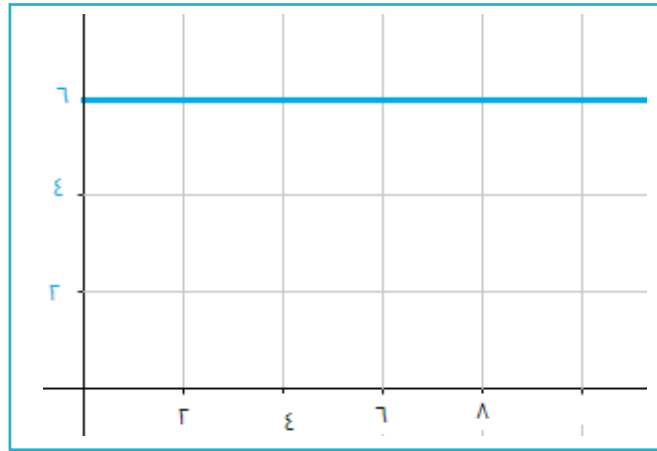
د(٤) = = د(٤)
 س ← ٤

قوانين النهايات Limits Rules

نشاط (١):



تعتبر البطاريات "الأعمدة الجافة" مصدراً من مصادر الطاقة الكهربائية، حيث تقوم بتزويد الدارة بالطاقة عن طريق المفتاح الكهربائي، عندما يكون المفتاح مغلقاً، ويسمى التيار الذي يسري في الدارة المغلقة تياراً مستمراً DC "Direct Current" وتبقى قيمة هذا النوع من التيار واتجاهه ثابتين مع مرور الزمن، فإذا استخدم طالب بطارية ذات مصدر جهد ثابت مقداره ٦ فولت، فإنه يمكن تمثيل الجهد مع مرور الزمن بالشكل المجاور:



...	...	١,٩٩	→ ١,٩٩٩	٢	← ٢,٠٠١	٢,٠١	...	...	الزمن
...	...	٦	...	...	...	...	٦	...	الجهد

الجهد عندما يقترب الزمن من ثابنتين هو ٦

الجهد عندما يقترب الزمن من ٣ ثوانٍ هو ٦

الجهد عندما يقترب الزمن من ٤ ثوانٍ هو ٦

الجهد عندما يقترب الزمن من ٥ ثانية هو ٦

يمكن تمثيل الجهد بالاقتران $(n) = \dots\dots\dots$

استخدم الجدول في إيجاد نهايات (n)



- قاعدة (١): إذا كان $u(s) = \lim_{s \rightarrow p} u(s)$ و $v(s) = \lim_{s \rightarrow p} v(s)$ حيث $p \in \mathbb{C}$
- قاعدة (٢): إذا كانت $u(s) = \lim_{s \rightarrow p} u(s)$ و $v(s) = \lim_{s \rightarrow p} v(s)$ وكان $v(s) \neq 0$ ، فإن:
- (١) $\lim_{s \rightarrow p} (u(s) \pm v(s)) = \lim_{s \rightarrow p} u(s) \pm \lim_{s \rightarrow p} v(s)$
 - (٢) $\lim_{s \rightarrow p} (u(s)v(s)) = \lim_{s \rightarrow p} u(s) \times \lim_{s \rightarrow p} v(s)$
 - (٣) $\lim_{s \rightarrow p} \frac{u(s)}{v(s)} = \frac{\lim_{s \rightarrow p} u(s)}{\lim_{s \rightarrow p} v(s)}$ ، $v(s) \neq 0$
 - (٤) $\lim_{s \rightarrow p} \frac{u(s)}{v(s)} = \frac{\lim_{s \rightarrow p} u(s)}{\lim_{s \rightarrow p} v(s)}$ ، $v(s) \neq 0$
 - (٥) $\lim_{s \rightarrow p} u(s) = \lim_{s \rightarrow p} (u(s)) = \lim_{s \rightarrow p} (u(s))$ ، $\lim_{s \rightarrow p} u(s) = \lim_{s \rightarrow p} (u(s))$

مثال (١): إذا كان $u(s) = \lim_{s \rightarrow 3} u(s)$ ، $v(s) = \lim_{s \rightarrow 3} v(s)$

- (١) $\lim_{s \rightarrow 3} (u(s) + v(s)) = \lim_{s \rightarrow 3} u(s) + \lim_{s \rightarrow 3} v(s)$
- (٢) $\lim_{s \rightarrow 3} (u(s) - v(s)) = \lim_{s \rightarrow 3} u(s) - \lim_{s \rightarrow 3} v(s)$
- (٣) $\lim_{s \rightarrow 3} (u(s)v(s)) = \lim_{s \rightarrow 3} u(s) \times \lim_{s \rightarrow 3} v(s)$
- (٤) $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{u(s)}{v(s)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 3} u(s)}{\lim_{s \rightarrow 3} v(s)}$ ، $v(s) \neq 0$
- (٥) $\lim_{s \rightarrow 3} u(s) = \lim_{s \rightarrow 3} (u(s)) = \lim_{s \rightarrow 3} (u(s))$

أذكر: اقتران كثير الحدود هو اقتران يكون على الصورة:

$$u(s) = \lim_{s \rightarrow p} u(s) = \lim_{s \rightarrow p} (u(s)) = \lim_{s \rightarrow p} (u(s))$$



$$\text{ب) } \frac{s^2 - 25}{s^2 - 5s} = \frac{s^2 - 5s + 5s - 25}{s^2 - 5s} = \frac{(s-5)(s+5)}{s(s-5)} = \frac{s+5}{s}$$

بالتعويض المباشر ينتج ÷ وهي كمية غير معينة، لذا نلجأ للتحليل ثم الاختصار ثم التعويض.

$$= \frac{(s-5)(s+5)}{s(s-5)}$$

$$= \frac{s+5}{s}$$

..... =

نشاط (٣):

$$\text{جد } \frac{s^2 - 4}{s^2 - 2s}$$

عند التعويض المباشر، نحصل على: $\frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معينة.

$$\frac{s^2 - 4}{s^2 - 2s} = \frac{(s-2)(s+2)}{s(s-2)} = \frac{s+2}{s} = \frac{s+2}{s} = \frac{s+2}{s}$$

نشاط (٤):

$$\text{جد } \frac{s^3 + 27}{(s+3)^2}$$

عند التعويض المباشر نحصل على

$$\frac{s^3 + 27}{(s+3)^2} = \frac{s^3 + 27}{(s+3)^2} = \frac{s^3 + 27}{(s+3)^2}$$



س١: إذا كان $\frac{س}{س-٢} = ٢^-$ ، $\frac{س}{س-٢} = ٣$. أجد النهايات الآتية:

(أ) $\frac{س}{س-٢} (٢ - س)$

(ب) $\frac{س}{س-٢} \frac{س}{س+٢}$

(ج) $\frac{س}{س-٢} (٣ - س)$

س٢: جد النهايات الآتية:

(أ) $\frac{س٣ - ١٢س}{س٢ - ١٦}$

(ب) $\frac{س٣ - ١}{س٢ - ١}$

(ج) $\frac{س٢ - ٥}{س - ٥}$

س٣: إذا كان $\frac{س}{س-٣} = ٩ - س$ ، فما قيمة الثابت ٩ .

س٤: إذا كان $\frac{س٢ - ٢س}{س٢ + ٨س - ٨} = ٢$ ، $س \neq ٢$ ، $س \neq ٤$ ، أجد $\frac{س}{س-٢}$.

نهاية الاقتران متعدد القاعدة: Limit of Multi Rules Function

قاعدة:



إذا كان $u(s)$ اقتراناً متعدد القاعدة، ويُغير من قاعدته عند $s = l$ ، وكانت $\lim_{s \rightarrow l^+} u(s) = \lim_{s \rightarrow l^-} u(s) = l$ فإن $\lim_{s \rightarrow l} u(s)$ موجودة وتساوي l .

مثال (١): إذا كان $u(s) = \begin{cases} s^2 + 1, & s < 2 \\ s^2 + 1, & s \geq 2 \end{cases}$ ، جد:

(١) $\lim_{s \rightarrow 4} u(s)$ (٢) $\lim_{s \rightarrow 1} u(s)$ (٣) $\lim_{s \rightarrow 2^+} u(s)$ (٤) $\lim_{s \rightarrow 2^-} u(s)$ (٥) $\lim_{s \rightarrow 2} u(s)$

الحل: (١) $\lim_{s \rightarrow 4} u(s) = \lim_{s \rightarrow 4} (s^2 + 1) = 17$

(٢) $\lim_{s \rightarrow 1} u(s) = \lim_{s \rightarrow 1} (s^2 + 1) = 2$

(٣) $\lim_{s \rightarrow 2^+} u(s) = \lim_{s \rightarrow 2^+} (s^2 + 1) = 5$

(٤) $\lim_{s \rightarrow 2^-} u(s) = \lim_{s \rightarrow 2^-} (s^2 + 1) = 5$

(٥) $\lim_{s \rightarrow 2} u(s) = 5$

مثال (٢):

إذا كان $u(s) = \begin{cases} s^2 - 5s + 4, & s \neq 4 \\ s - 1, & s = 4 \end{cases}$ فإن

(١) $\lim_{s \rightarrow 4} u(s) = \lim_{s \rightarrow 4} (s^2 - 5s + 4) = \lim_{s \rightarrow 4} \frac{(s-4)(s-1)}{s-4} = \lim_{s \rightarrow 4} (s-1) = 3$

$\lim_{s \rightarrow 4} u(s) = 3$

$3 =$

(ماذا تلاحظ؟)

(٢) $u(4) = 1$



س١: إذا كان $u(s)$ = $\left\{ \begin{array}{l} s - 2, \quad s > 0 \\ s^2 - 2, \quad s \leq 0 \end{array} \right.$ ، أجد $\lim_{s \rightarrow 1^-} u(s)$ ، $\lim_{s \rightarrow 1^+} u(s)$ ، $\lim_{s \rightarrow 1} u(s)$ ، إن وُجدت.

س٢: إذا كان $u(s)$ = $\left\{ \begin{array}{l} \frac{s^2 - 9}{s - 1}, \quad s \geq 1 \\ \frac{s - 1}{s - 1}, \quad s < 1 \end{array} \right.$ ، أجد قيمة u إذا علمت أن $\lim_{s \rightarrow 1^-} u(s)$ موجودة.

س٣: إذا كان $u(s)$ = $\left\{ \begin{array}{l} \frac{s^2 - 16}{s + 4}, \quad s \neq -4 \\ b, \quad s = -4 \end{array} \right.$ ، أجد قيمة b إذا علمت أن $\lim_{s \rightarrow -4^-} u(s) = u(-4)$.

س٤: إذا علمت أن $\lim_{s \rightarrow p^-} u = \frac{s^2 - p^2}{p - s} = \lim_{s \rightarrow p^+} u(s)$ ، $s \neq p$ ، أجد قيمة/قيم p .

س٥: إذا كان $u(s)$ = $\left\{ \begin{array}{l} s^2 + 2, \quad s \geq 1 \\ s^4 - 1, \quad s < 1 \end{array} \right.$ ، أجد $\lim_{s \rightarrow 0^-} u(s)$ ، $\lim_{s \rightarrow 1^-} u(s)$ ، $\lim_{s \rightarrow 0^+} u(s)$.

نهاية الاقتران عندما $s \rightarrow \infty$ Limit of a function at Infinity ∞

قاعدة (١):



إذا كان p ، q عددين حقيقيين، n عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

(١) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$ $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$

(٢) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$

قاعدة (٢):



الصور غير المعينة: $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

$\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$

$\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$

$\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$

$\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$ ، $\pm \infty = \pm \infty$

مثال (١): أجد $\lim_{s \rightarrow \infty} (3s^2 - 5s + 1)$

الحل:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (3s^2 - 5s + 1)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} (3s^2 - 5s + 1) \quad (\text{لماذا؟})$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} (3s^2 - 5s + 1) = \lim_{s \rightarrow \infty} (3s^2 - 5s + 1)$$

$$= \infty$$

❖ مثال (٢): أجد نها $\left(\frac{٥س - ٢س^٢ + ١}{٢س^٣ + ٢} \right)_{س \rightarrow \infty}$

الحل:

نها $\left(\frac{٥س - ٢س^٢ + ١}{٢س^٣ + ٢} \right)_{س \rightarrow \infty}$

= نها $\frac{س^٢ \left(\frac{٥}{س} - ٢ + \frac{١}{س^٢} \right)}{س^٢ \left(\frac{٢}{س} + ٣ \right)}_{س \rightarrow \infty}$ (لماذا؟)

= $\frac{٢-}{٣}$ (لماذا؟)

❖ مثال (٣): أجد نها $\left(\frac{٥س + ١}{س^٢ + ٤} \right)_{س \rightarrow \infty}$

الحل: نها $\left(\frac{٥س + ١}{س^٢ + ٤} \right)_{س \rightarrow \infty}$

= نها $\frac{س \left(\frac{٥}{س} + ١ \right)}{س^٢ \left(\frac{٤}{س^٢} + ١ \right)}_{س \rightarrow \infty}$

= صفر (لماذا؟)

ملاحظة:



إذا كان ٧ ، $٣ \exists$ ط، $٧ \neq ٠$ ، $٧ \neq ٠$ فإن نها $\frac{٧س^٧ + ٧س^٦ + \dots + ٧}{٧س^٧ + ٧س^٦ + \dots + ٧}$

١. $\frac{٧}{٧}$ إذا كان $٧ = ٣$

٢. صفر إذا كان $٧ > ٣$

٣. $\infty \pm$ إذا كان $٧ < ٣$

تمارين ومسائل (٤-٢)



س١: أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 - 5s + 2)$

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^4 + s^2 - 1}{s^5 + s^3 + 1} \right)$

ج) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s+3)(s+2)}{(s+3)(s+1)}$

س٢: إذا كان $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^5 + 1}{s^3 + 1} = \frac{1}{3}$ جد قيمة $\frac{1}{3}$.

س٣: إذا علمت أن $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^3 + 3) = 3$ ، وأن $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^4 - 2s^2 + 1}{s - 3} = 4$ ، وكان $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 - 5s + 2) = 2$ ، جد قيمة $\frac{1}{3}$.

س٤: أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^2}{1+s} - \frac{s^5}{1-s} \right)$

ب) $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^2 + s^3 - 1}{s^2 + 6} \right)$

الاتصال Continuity



تعريف: الاتصال عند نقطة

يكون الاقتران u (س) متصلاً عند $s = p$ ، إذا تحققت الشروط الآتية:

١. $u(p)$ موجودة ومعرفة كعدد حقيقي.

٢. $\lim_{s \rightarrow p^-} u(s)$ موجودة.

٣. $\lim_{s \rightarrow p^+} u(s) = u(p)$.



نشاط (١):

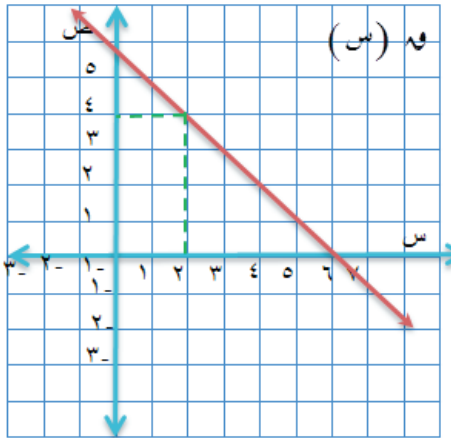
في الشكل المجاور:

$$u(2) = 4$$

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} u(s) = 4$$

$$\lim_{s \rightarrow 2^+} u(s) = u(2) = 4$$

نلاحظ أن الشكل يمثل منحنى الاقتران كثير الحدود $v = 6 - s$ وهو متصل دائماً.



قاعدة:



الاقترانات كثيرة الحدود هي اقترانات متصلة في مجالها.

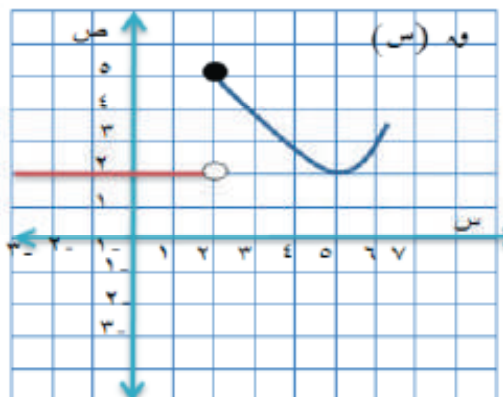
نشاط (٢):



في الشكل المجاور:

هل $f(2) = \dots$ ، $f'(2) = \dots$ لأن $\dots$

هل $f(2)$ متصل عند $s = 2$ ؟



نشاط (٣):



إذا كان $f(3) = 1 + s$ ، $f'(3) = s^2$.

يكون الاقتران $f(s)$ متصلاً عند $s = 2$ لأنه اقتران كثير حدود.

يكون الاقتران $f(s)$ متصلاً عند $s = 2$ لأن $\dots$

$(f + g)(s)$ متصل عند $s = 2$ لأن مجموع اقترانين كثيري حدود يساوي اقتراناً كثير حدود.

$(f - g)(s)$ متصل عند $s = 2$ لأن $\dots$

$(f \times g)(s)$ متصل عند $s = 2$ لأن $\dots$

ناقش: هل $\left(\frac{f}{g}\right)(s)$ متصلاً عند $s = 2$ ، حيث $f(s) \neq 0$.



إذا كان $\neg$ (س)، هـ (س) اقترانين متصلين عند $P = 1$ فإن:

١. $(\neg \pm \text{هـ})$ (س) يكون متصلاً عند $P = 1$.
٢. $(\neg \times \text{هـ})$ (س) يكون متصلاً عند $P = 1$.
٣. $(\frac{\neg}{\text{هـ}})$ (س) يكون متصلاً عند $P = 1$ ، حيث $\text{هـ} (P) \neq 0$.

❖ **مثال (٢):** إذا كان $\neg$ (س) = $\left. \begin{array}{l} 2^2 - 2, \text{ س} > 0 \\ 2 - \text{س}, \text{ س} \leq 0 \end{array} \right\}$ ، ابحث اتصال الاقتران $\neg$ (س) عند $\text{س} = \text{صفر}$.

الحل: أبحث شروط الاتصال عند $\text{س} = \text{صفر}$ لأن الاقتران $\neg$ (س) يغير قاعدته عندها.

$$(1) \neg (0) = 2 - 0 = 2^-$$

$$(2) \text{نهان (س)} = 2^- \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{نهان (س)} = 2^- \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{نهان (س)} = \text{نهان (س)} = 2^-$$

$$\therefore \text{نهان (س)} = 2^-$$

$$(3) \neg (0) = \text{نهان (س)} = 2^-$$

❖ **مثال (٣):** إذا كان $\neg$ (س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{1 - 2^2}{1 - \text{س}}, \text{ س} \neq 1 \\ 1 = \text{س}, 4 \end{array} \right\}$ ، ابحث اتصال الاقتران $\neg$ (س) عند $\text{س} = 1$.

ابحث اتصال الاقتران $\neg$ (س) عند $\text{س} = 1$.

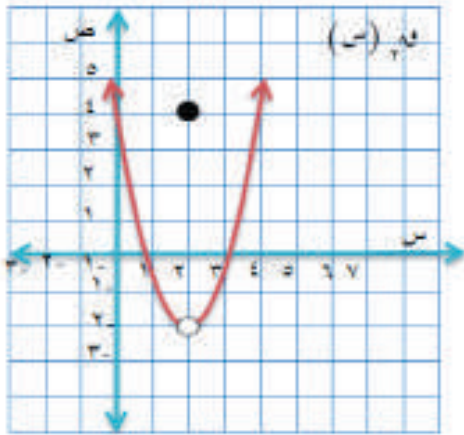
الحل:

$$(1) \neg (1) = 4 \quad (2) \text{نهان (س)} = 2 \quad (\text{لماذا؟}) \quad (3) \text{نهان (س)} \neq \neg (1)$$

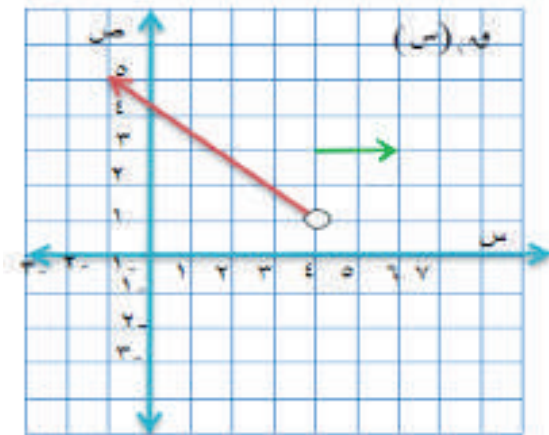
$\therefore \neg$ (س) غير متصل عند $\text{س} = 1$.



س١: أبين سبب عدم اتصال الاقترانات الآتية، عند النقطة المبينة إزاء كل منها.



عند $s = 2$



عند $s = 4$

س٢: ابحث اتصال الاقترانات الآتية، عند قيم س المشار إليها في كل حالة مما يأتي:

أ) $f(s) = 3s - 6$ عند $s = 1$.

ب) $f(s) = \begin{cases} \frac{s^2 - 2}{s - 2}, & s \neq 2 \\ 2, & s = 2 \end{cases}$

س٣: إذا كان $f(s) = \begin{cases} s - 3, & s > 1 \\ s^2 + 1, & s \leq 1 \end{cases}$ ابحث اتصال الاقتران $f(s)$ ، عند $s = 1$.

س٤: إذا كان $f(s) = \begin{cases} s^2 - 1, & s \geq 2 \\ s^3 - 5, & s < 2 \end{cases}$ متصلاً عند $s = 2$ ، أجد قيمة الثابت p .

ورقة عمل

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^{-} > 1^{-} , \quad \text{س}^{-} + 1 \\ \text{س}^{-} \leq 1^{-} , \quad \text{س}^{-} + 2 \end{array} \right\} = \text{س}^{-} \text{ إذا كان } \text{س}^{-} \text{ متصلاً عند } \text{س}^{-} = 1^{-} , \text{ أجد قيمة الثابت } 1^{-} .$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^{-} \neq 3 , \quad \frac{\text{س}^{-} - 2}{\text{س}^{-} - 3} \\ \text{س}^{-} = 3 , \quad 0 \end{array} \right\} = \text{س}^{-} \text{ إذا كان } \text{س}^{-} \text{ متصلاً عند } \text{س}^{-} = 3 .$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^{-} > 0 , \quad \text{س}^{-} + 1 \\ \text{س}^{-} < 0 , \quad \text{س}^{-} - 5 \\ \text{س}^{-} = 0 , \quad 0 \end{array} \right\} = \text{س}^{-} \text{ إذا كان } \text{س}^{-} \text{ متصلاً عند } \text{س}^{-} = 0 , \text{ أجد:}$$

$$\text{أ) نهاية } \text{س}^{-} \text{ (س)} \quad \text{ب) نهاية } \text{س}^{-} \text{ (س)}$$

$$\text{ج) نهاية } \text{س}^{-} \text{ (س)} \quad \text{د) هل } \text{س}^{-} \text{ متصل عند } \text{س}^{-} = 0 ?$$

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(١) ما قيمتا الوسط الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

(أ) $\mu = 1, \sigma = 1$ (ب) $\mu = 0, \sigma = 0$ (ج) $\mu = 0, \sigma = 1$ (د) $\mu = 1, \sigma = 0$

(٢) ما نسبة المساحة تحت (ع = ٢,٨٥)؟

(أ) ٠,٩٩٧٨ (ب) ٠,٠٠٢٢ (ج) ٠,٠٣٢٢ (د) ٠,٩٧٨٨

(٣) ما نسبة المساحة بحيث (٠,٩٦ > ع > ١,٦٥) :

(أ) ٠,٠٩٩١ (ب) ٠,١١٩٠ (ج) ٠,٦٩٠٠ (د) ٠,٨٨٠٩

(٤) ما مجموع جميع العلامات المعيارية لتوزيع طبيعي؟

(أ) ١ (ب) ٠ (ج) ١- (د) ٠,٥٠٠٠

(٥) ما نسبة المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والواقعة فوق (ع = ٠,٧٥)

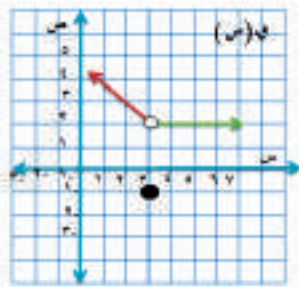
(أ) ٠,٢٢٦٦ (ب) ٠,٢٧٣٤ (ج) ٠,٧٧٣٤ (د) ٠,٥٧٢١

(٦) ما قيمة نها $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right)$ ؟

(أ) ٦- (ب) ١٠ (ج) ٨ (د) ٦

(٧) إذا كان نها $\left(\frac{1}{x^3} \right) = ٣$ ، نها $\left(\frac{1}{x^2} \right) = ٢$ ، ما قيمة نها $\left(\frac{1}{x} \right) + نها \left(\frac{1}{x^4} \right)$ ؟

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨



(٨) في الشكل المجاور ما قيمة نها $\left(\frac{1}{x^3} \right)$ ؟

(أ) ٢ (ب) غير موجودة (ج) صفر (د) ٣

(٩) إذا كان نها $\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} \right) = ٢$ ما قيمتا الثابت ؟

(أ) ١, ٢ (ب) ١, ٢- (ج) ١, ٢- (د) ١-, ٢

س٢: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ٧١ ، ٥٣ هما ٢ ، ١- على الترتيب، أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام لطلبة الصف.

س٣: نادي رياضي مكون من ٤٠٠ عضو تتبع أعمارهم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٤٠ سنة وانحراف معياري ٥ ، أجد:

(أ) عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم على ٥٠ سنة.

(ب) عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥ سنة إلى ٤٥ سنة.

س٤: أجد النهايات الآتية:

$$(أ) \lim_{s \rightarrow 4^-} \left(\frac{s^2}{s^2 - 4} - \frac{s^2}{s^2 - 4} \right)$$

$$(ب) \lim_{s \rightarrow 7} \frac{s}{s^2 - 7}$$

$$(ج) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^3 - 27}{s^2 - 5s + 6}$$

$$(د) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{\sqrt{s-2}}{s-4}$$

$$س٥: إذا كان \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 + 2s^2 + 1}{s^4 + 1} = 1 ، أجد قيمة الثابت ب .$$