١٠

بسم الله الرحمن الرحيم

دولـــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفترة الثالثة

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب ٧١٩ – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2983250 | هاتف +970-2-2983280

المحتويات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات المثلثية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١- التعرُّف إلى مفهوم الزوايا الموجّهة.

٢- التعرُّف إلى مفهوم قياسي الزاوية: الستيني والدائري.

٣- التحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري وبالعكس.

٤- التعرُّف إلى الوضع القياسي للزاوية، والزوايا المتكافئة.

٥- تمثيل منحنيات الاقترانات الدورية (المثلثية) بيانيّاً.

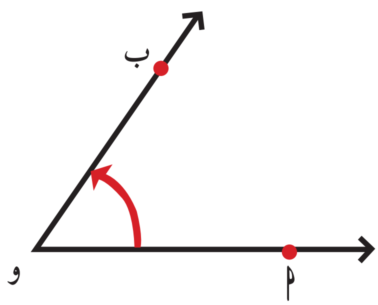
٦- إثبات متطابقاتٍ مثلثيّة.

٧- حلّ معادلاتٍ مثلثيّة.

(١) الزّاوية في الوضع القياسي
The Angle in Standard Position

نشاط ١

في الشكل المجاور

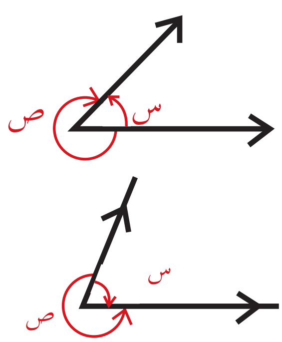


- ضلع الابتداء للزاوية أ و ب هو: ......
- ضلع الانتهاء لها هو: .... ، لماذا ؟ ....
- اتّجاه حركة ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء هو: ......
- تُسمّى زاوية أ و ب زاويةً موجّهة.

أتعلّم: الزاوية الموجّهة: هي زاويةٌ يتحدّد اتّجاهُها باتّجاه دوران ضلع الابتداء لينطبقَ على ضلع الانتهاء، وتكون الزاويةُ الموجّهة زاويةً موجبةً إذا كان اتّجاه الدوران عكس عقارب الساعة، وتكون الزاويةُ الموجّهة سالبةً إذا كان اتّجاه الدوران مع عقارب الساعة.

نشاط ٢

في الشكل المجاور:



∡س = ٦٠°،

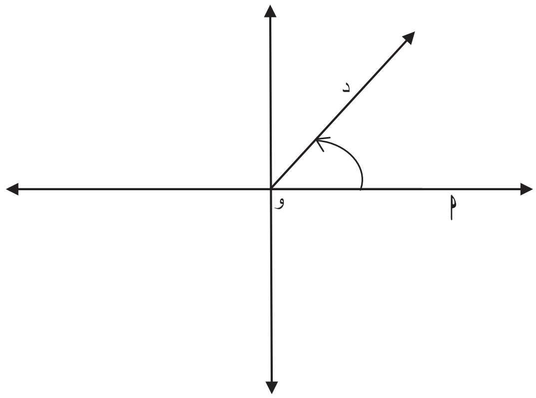
∡ص = ...

∡ص = ٢٨٠°، ∡س = ...

نشاط ٣

أُسمّي الزاوية الموجّهة في الشّكل ....

ضلع الابتداء لها هو و أ ، ضلع الانتهاء لها هو: ....، رأس الزاوية هو: ....

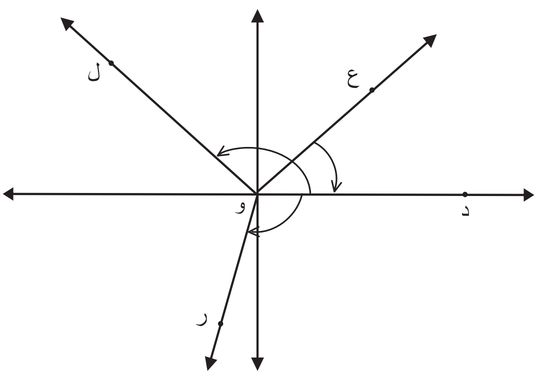


أتعلّم: تكون الزاويةُ في الوضع القياسي إذا كان رأسُها نقطةَ الأصل، وانطبق ضلعُ الابتداء على محور السّينات الموجب.

نشاط ٤

في الشكل المجاور: الزاوية الموجهة ع و د ليست في وضعٍ قياسيّ؛ لأنّ ....

- الزاوية الموجّهة .... في الوضع القياسي؛ لأنّ ....
- الزاوية الموجّهة د و ر في ....، لأنّ ....

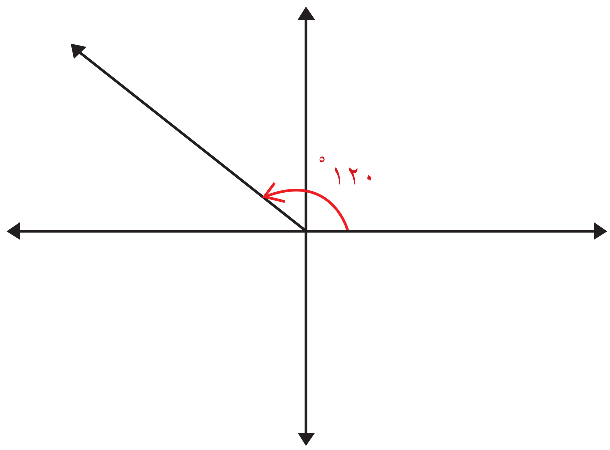


أستنتج أنّ:

- إذا كانت ∢هـ زاويةً في الوضع القياسيّ، وكان ٠° < ∢هـ < ٩٠°، فإنّ ضلع انتهائها يقع في الرّبع الأوّل.
- إذا كانت ∢هـ في الوضع القياسيّ، وكان ..... < ∢هـ < ......، فإنّ ضلعَ انتهائها يقع في الرّبع الثاني.

نشاط ٥

أرسمُ الزّوايا التي قياسها ١٢٠° ، ٢٢٥° ، -٣٠٠° ، -٦٠° في الوضع القياسي، ثم أحدّدُ الربع الذي تقع فيه:



تقع الزّاوية التي قياسها ١٢٠° في الربع ....

بينما تقع الزّاوية التي قياسها ٢٢٥° في الربع ....

تقع الزّاوية التي قياسها – ٣٠٠° في الربع ....

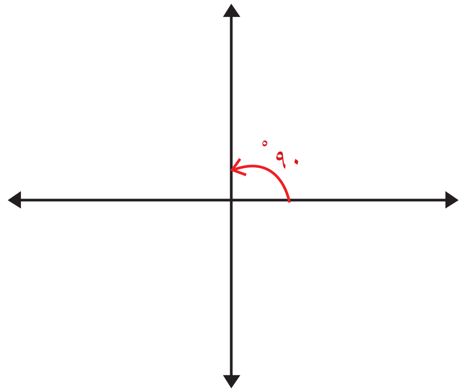
تقع الزّاوية -٦٠° في الربع ....

أتعلّم: عند رسم زاويةٍ في الوضع القياسي فإنّ ضلعَ انتهائها يحدّدُ موقعَها في المستوى الديكارتي.

نشاط ٦

أرسمُ الزّوايا التي قياسها:

٩٠°، ١٨٠°، -٩٠°.



ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ٩٠° على محور ....

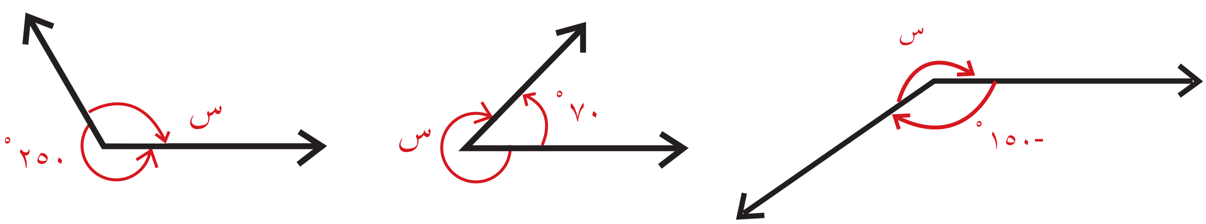
بينما ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ١٨٠° على ....، أما ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها -٩٠° فينطبق على ....

تُسمّى الزّاوية التي في الوضع القياسي، وينطبق ضلعُ انتهائها على أحد المحاور الإحداثيّة زاويةً رُبعيّةً.

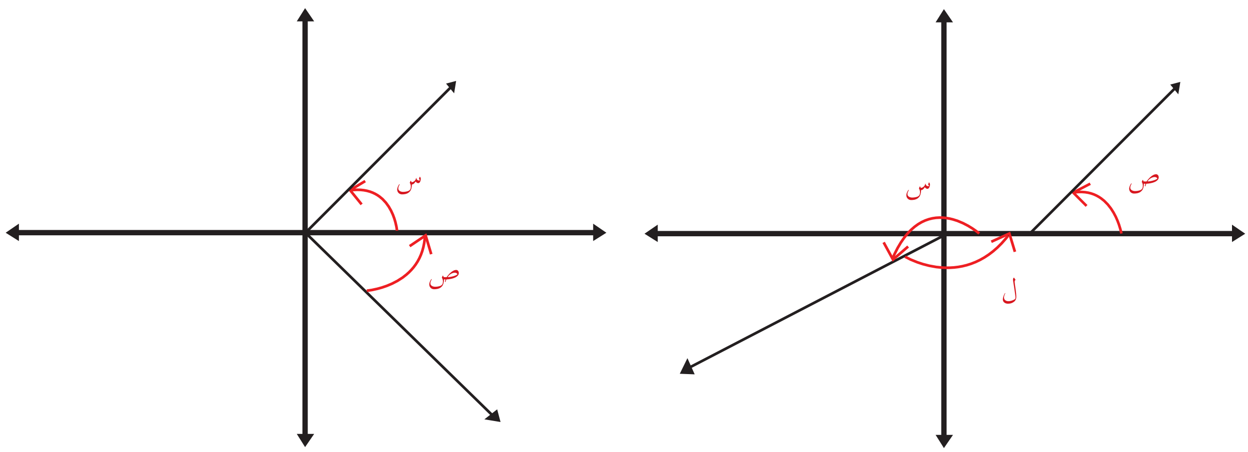
أعطِ ثلاثة أمثلة لزوايا ربعيّة: ....، ....، ....

تمارين ومسائل:

(١) ما قيمةُ س التي تُمثّل قياس الزاوية في كلٍّ من الأشكال الآتية:



(٢) أميّزُ الزّوايا التي في الوضع القياسي:



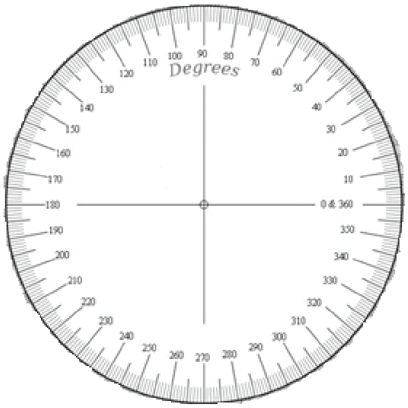
(٣) أُحدّدُ الرّبع من المستوى الذي تقع فيه الزّوايا الآتية:

-١٢٠° ، ١٣٠° ، -٢٥٠° ، ٣٢٠° ، ٤٥٠°

(٢) قياس الزوايا
Angles and their Measurements

نشاط ١

في الشّكل المجاور، تمّ تقسيمُ الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوياً في الطّول، فإنّ الزاوية المركزيّة التى تقابل كلُّ قوسٍ، قياسها ١°. والزاوية التي تقابل ٥٠ قوساً يكون قياسها ....°.



والدرجة الواحدة تقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الدقيقة،

وتُكتَبُ على الصورة: ١° = (...)´

والدقيقة الواحدة تُقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الثانية،

وتُكتَبُ على الصورة: ١´ = ٦٠´´

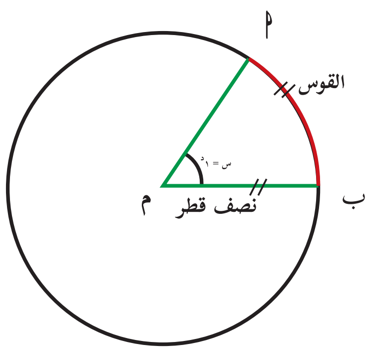
الزّاوية ٣٢,٦° = ٣٢° و ٠,٦ × ٦٠´ = (...)´ = ٣٦´ ٣٢°

يُسمى قياسُ الزّاوية بالدرجات والدقائق والثواني القياسَ الستيني للزّاوية.

أفكر: لماذا سُمِّي القياسُ الستيني بهذا الاسم؟

نشاط ٢

في الشكل المجاور، دائرةٌ مركزها م ونصفُ قطرِها وحدة واحدة.



طول القوس أ ب = طول نصف قطر الدائرة

طول القوس الذي يقابل الزاوية المركزية التي قياسها (س) في الشكل = ...

أتعلم: يكون قياس الزاوية س بالقياس الدائري = ١ راديان (Radian) ونرمز له بالرمز ١د

تعريف: الزّاوية النصف قطريّة: هي زاويةٌ مركزيّةٌ في دائرةٍ يقابلها قوسٌ طولُه يساوي طولَ نصفِ قطرِ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز (١د)، وهي وحدة قياس الزاوية بالقياس الدائري للزّوايا.

نشاط ٣

محيط الدائرة =٢ نق π ⟵ محيط دائرة الوحدة = ...

الدورة الكاملة = ٣٦٠° يقابلها ٢ π د

⟵ π د يقابلها .... درجة

باستخدام التقريب (π = ٣,١٤) نستنتج أنّ: ١ د = ٥٧,٣ °

أُكمل: ٣ د = ...° ، ١,٥ د = ...°

نشاط ٤

أوّلاً: أُحوّلُ قياس الزّوايا الآتية من درجات إلى زاوية نصف قطرية (راديان):

٩٠° ، ١٢٠° ، -٢٢٥ °

• ٩٠° :

للتحويل من درجات إلى دائري: π د يقابلها ١٨٠°

٩٠ درجة ⟵ هـ بالتقدير الدائري

$$هـ = \frac{٩٠°}{١٨٠°} \times \pi د = \frac{١}{٢} \pi د$$

• $١٢٠° = \frac{١٢٠°}{١٨٠°} \times \pi د =$ ....

• -٢٢٥° = ...

ثانياً: أُحوّل قياس الزّوايا من دائري إلى درجات:

$$\frac{٥}{٦} \pi د ، \frac{٣}{٤} \pi د ، - \frac{١٥}{١٨} \pi د$$

للتحويل من دائري إلى درجات: π د يقابلها ١٨٠°

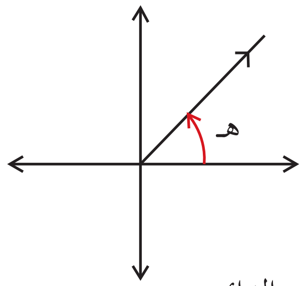
$\frac{٥}{٦} \pi$ د ⟵ س بالدرجات.

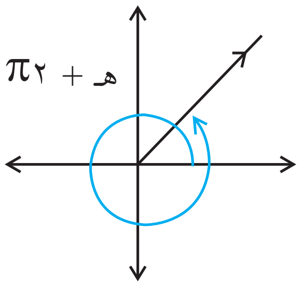
$$س = \frac{٥}{٦} \pi د \times \frac{١٨٠°}{\pi د} = ١٥٠°$$

أتعلم: يُقال لزاويتيْن أنّهما متكافئتان: إذا كان لهما ضلع الابتداء نفسه، وضلع الانتهاء نفسه.

في الشكل المجاور:

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٢π





وبشكلٍ عام:

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٢نπ ، ∈ هـ بالقياس الدائري.

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٣٦٠ن ، ∈ هـ بالقياس الستيني ، حيث ن عدد صحيح.

نشاط ٦

أجدُ ثلاث زوايا مكافئة لكلٍّ من الزوايا التي قياسها: ٦٠°، $\frac{\pi}{٤}$ د .

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° = ٤٢٠°، ن = ١

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × ٢ = ...، ن = ٢

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × -١ = ...، ن = ...

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د تكافئ .... عندما ن = ١

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د تكافئ $\frac{-٧\pi}{٤}$ د عندما ن =..............

تمارين ومسائل:

(١) أ) أحوّل القياسات الآتية من الدرجات إلى راديان:

٢٤٠° ، -٩٠° ، ٤٢٠° ، -١٣٥°

ب) أحوّل القياسات الآتية من راديان إلى درجات:

$\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{-١١\pi}{١٢}$ ، $\frac{-\pi}{٤}$ ، ٢,٥ د

(٢) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها ٥٠°.

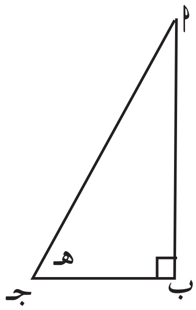
مهمة تقويمية:

- أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د

- أعطي زاويتين قياس احداهما موجب والآخر سالب مكافئتين لكل من الزوايا التي قياسها: - $\frac{\pi}{٣}$ د ، ١٢٠° .

الاقترانات المثلثية (٣)
Trigonometric Functions

نشاط ١



في المثلث القائم الزاوية أ ب جـ ، النسب المثلثية للزاوية الحادة التي قياسها هـ

جاهـ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ، جتاهـ = ... ، ظاهـ = ...

أفكر

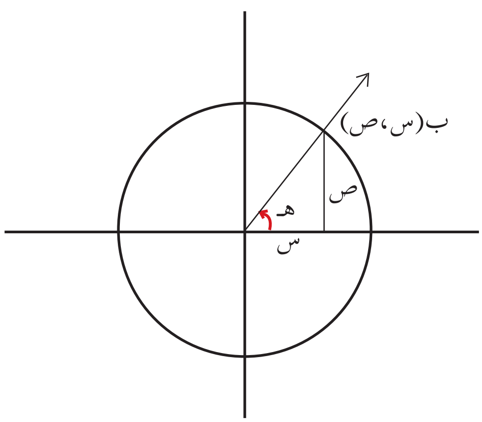
هل يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا التي قياسها أكبر من ٩٠°، أو قياسها سالب؟

أتعلّم: الدائرةُ التي مركزُها نقطةُ الأصل، وطولُ نصفِ قطرها وحدة واحدة، تُسمَّى دائرةَ الوحدة.

معادلة دائرة الوحدة: س^{٢} + ص^{٢} = ١

نشاط ٢

لتكنْ هـ زاوية في الوضع القياسي، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص). أجدُ النسب المثلثيّة الأساسيّة للزّاوية هـ.



جاهـ = $\frac{\text{ص}}{١}$ = ص ، جتاهـ = ... ،

ظاهـ = ...

بشكلٍ عام: إحداثيّات النقطة ب (جتاهـ ، جاهـ).

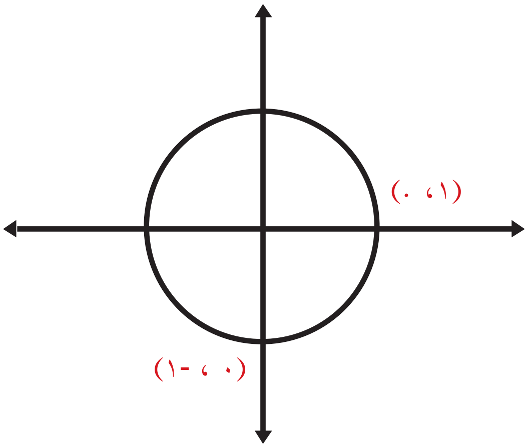
أتعلّم: إذا قطع ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ هـ في الوضع القياسي دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص)، فإنّه يمكن تعريفُ الاقترانات المثلثية جاهـ = ص ، جتاهـ = س، ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠ وتُسمّى هذه الاقترانات، الاقتراناتِ المثلثية الأساسيّة للزّاوية هـ.

ملاحظة: إذا كانت النقطة ب (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة،

فإن -١ ≤ س ≤ ١، و -١ ≤ ص ≤ ١ ، وعليه فإن -١ ≤ جتاهـ ≤ ١ و -١ ≤ جاهـ ≤ ١

نشاط ٣

أجدُ الاقترانات المثلثية للزّوايا الربعيّة:
٠°، ٩٠°، ٢٧٠° .



- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١،٠)، وينتج جا٠°= ....، جتا٠°=.......، ظا٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٩٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا٩٠°= .... ، جتا٩٠°=.......، ظا٩٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٢٧٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا٢٧٠°= .... ، جتا٢٧٠°=.......، ظا٢٧٠°= ....

- أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزّاوية الربعية (س°)	جاس	جتاس	ظاس
صفر	صفر		
٩٠°			
١٨٠°		-١	صفر
٢٧٠°			
٣٦٠°		١	٠

نشاط ٤

إذا قطع ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها هـْ دائرةَ الوحدة في النقطة أ ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$) فإنّ:

- جاهـ = $\frac{1}{2}$ ؛ لأن الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها هو ....

جتا هـ = ... ؛ لأنّ: ....

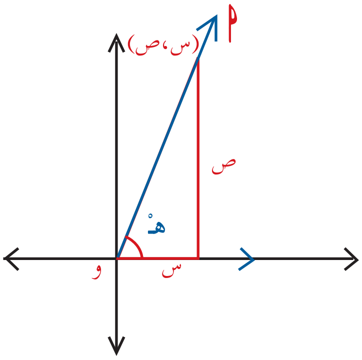
ظاهـ = ...

نشاط ٥

- أرسم دائرة الوحدة
- أرسم زاويةً قياسها هـْ في الوضع القياسي
- نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع الدائرة هي النقطة أ (س ، ص).
- تكون إشارةُ س موجبةً، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع .... من المستوى.
- تكون إشارةُ ص موجبة، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع ....من المستوى.

أتعلَّمُ: تتحدد إشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه.

إذا كانت هـ زاويةً في الوضع القياسي، النقطة أ (س ، ص) تقع على ضلع انتهائها، بعد النقطة أ (س ، ص) عن نقطة الاصل = ...



جاهـ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$

جتاهـ = $\frac{س}{ر}$

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ صفر

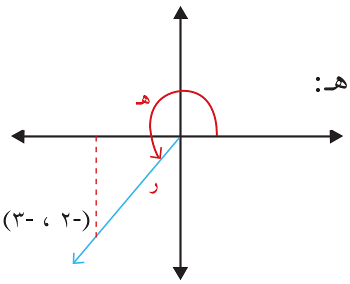
نشاط ٦

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقترانات المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:

ر = ...

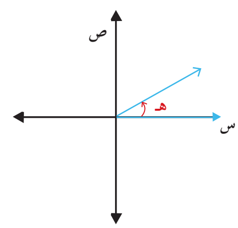
جاهـ = ... ، جتاهـ ....

ظاهـ = ...

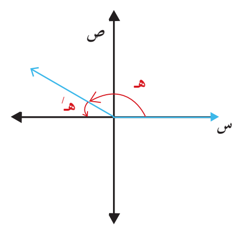


نشاط ٧

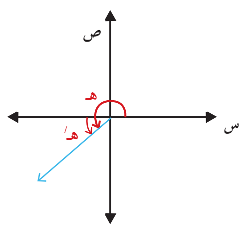
لكلِّ زاويةٍ قياسها هـ درجة في المستوى زاويةُ اسنادٍ قياسها هـَ درجة، أُكمل:



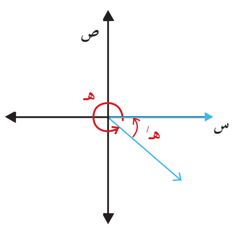
هـَ = هـ



هـَ = ...



هـَ = هـ − ١٨٠°



هـَ = ...

أتعلم: زاوية إسناد الزاوية (هـ): هي الزّاوية الحادّة (<هـَ) الناتجة من إتحاد ضلع انتهاء الزاوية (<هـ) ومحور السينات.

قيمُ الاقترانات المثلثيّة لزاويةِ الإسناد هي ذاتها قيمُ الاقترانات المثلثيّة للزّاوية الأساسيّة، بينما تحدّدُ إشارة تلك القيمة موضعَ ضلع انتهاء الزّاوية الاساسيّة.

نشاط ٨

أتذكّر قيمَ الاقترانات المثلثيّة للزّوايا الخاصّة، وأُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية (س)	جاس	جتاس	ظاس
٣٠°	٠,٥		
٤٥°			١
٦٠°			$\sqrt{٣}$

نشاط ٩

أوّلاً: أجد قيمة جا ١٢٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ١٢٠° تقع في الربع ....

إشارة جا١٢٠° موجب.

قياس زاوية الإسناد هـ = ١٨٠° – ١٢٠° = ...

جا١٢٠° = جا٦٠° =

ثانياً: أجد قيمة جتا ٢٤٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٤٠° تقع في الربع ....

إذن: إشارة جتا ٢٤٠°.................

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جتا٢٤٠° = - جتا.....° = ...

نشاط ١٠

أجدُ جا -٣٠°

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها -٣٠° تقع في الربع .... ،

إشارة جا -٣٠° هي: ......

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

جا -٣٠° = ... = ...

- أجد ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^ تقع في الربع .... ،

إشارة ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^ هي: ....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ... ، إذن: ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^ = ... = ...

نشاط ١١

أجد قيمة ٢جا ٣٠°جتا ٣٠° وأقارنه بقيمة جا ٦٠°

٢جا ٣٠°جتا ٣٠° = ٢ × ...... × ..... = ...

جا ٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

أجد:

- ٢جا ٤٥°جتا ٤٥° = ٢ × ..... × ..... = ...
- جا ٩٠° = ... ماذا تلاحظ؟ ماذا تلاحظ؟

أستنتج أن: جا٢هـ = ٢جاهـجتاهـ

نشاط ١٢

أجد قيمة جتا^{٢}٣٠° _ جا^{٢}٣٠° وأقارنه بقيمة جتا٦٠°

جتا^{٢}٣٠° _ جا^{٢}٣٠° = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ _ $(\ldots)^{٢}$

جتا٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

نشاط ١٣

أجد ناتج جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° دون استخدام الحاسبة

جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° = جتا..... = ...

أستنتج أن: جتا٢هـ = جتا^{٢}هـ _ جا^{٢}هـ ، جتا٢هـ = ٢جتا^{٢}هـ _ ١ ، جتا٢هـ = ١ _ ٢جا^{٢}هـ

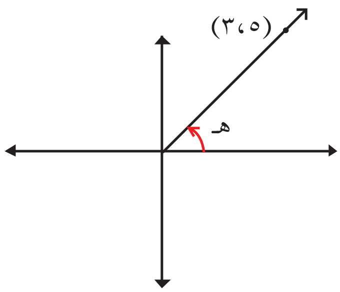
تمارين ومسائل:

(١) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة لقياسات الزّوايا الآتية:

-٩٠°، ٤٥٠°، ٥π^د

(٢) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة للزاوية هـ ، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة:

أ) $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}} \right)$ ، ب (-١ ، ٠) ، جـ) $\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} \right)$



(٣) ما قيمةُ جا هـ ، جتا هـ، ظا هـ في الشّكل المجاور؟

(٤) أحدّدُ إشارةَ ما يأتي:

جتا -١٣٥° ، ظا ٨٤٠° ، جتا $\frac{٢π}{٣}$^د ، ظا $\frac{٣π}{٤}$^د

(٥) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة ٢جتا^{٢} ٢٢,٥° – ١

مهمة تقويمية:

(١) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة

أ) ١ – ٢ جا^{٢} $\frac{π}{٦}$^د   ب) ٦جا $\frac{π}{١٢}$^د جتا $\frac{π}{١٢}$^د

(٢) أجدُ قياسَ زاوية الإسناد للزّوايا التي قياساتها ما يأتي:

٢٢٥° ، $\frac{٢π}{٣}$^د ، -١٥٠° ، $\frac{٣π}{٤}$^د ، ٢١٠°

(٧) أجدُ قيمة ما يأتي، دون استخدام الآلة الحاسبة:

جا ٣٣٠°، ، جا -٣٠٠°

تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيّاً
Graphing Trigonometric Functions

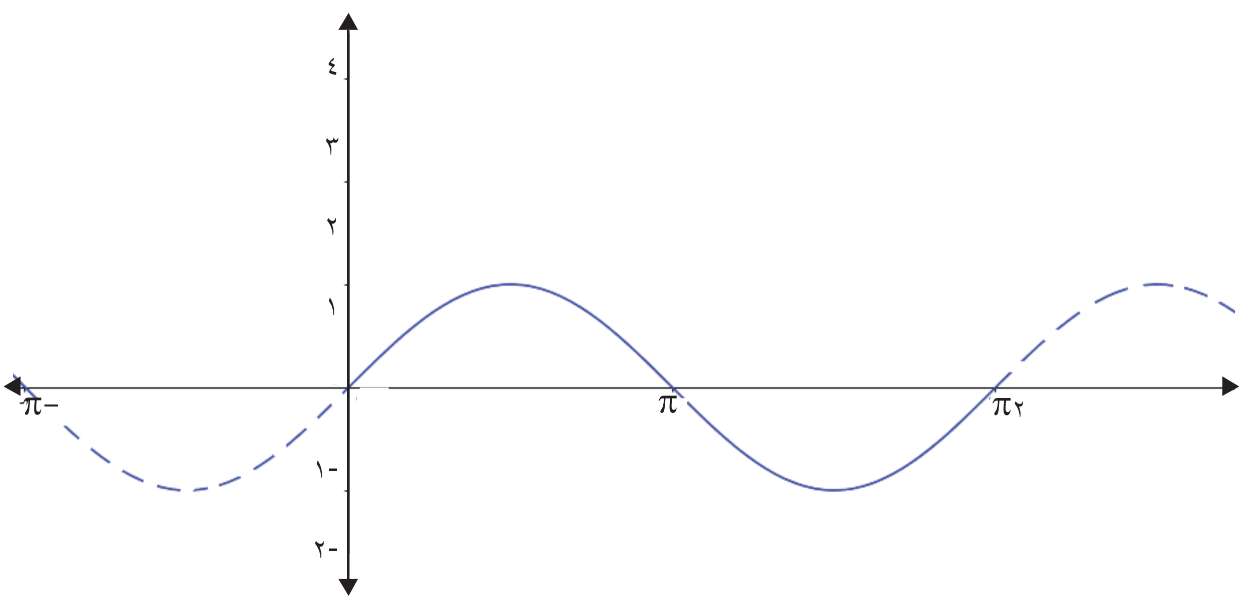
(٤)

نشاط ١

أُمثّلُ الاقتران ق(س)= جاس في المستوى الديكارتي، أكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جا س		١-	...	...	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	...	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	...	١-	...	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران:



أُلاحظ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه.

- بما أنّ الزّوايا المتكافئة لها النسبُ المثلثيّةُ المناظرة نفسها، فإنّ منحنى ق(س) =جا س يكرّرُ نفسه في فتراتٍ متساوية، طولُ كلٍّ منها ٢π. ومثل هذه الاقترانات تُسمّى اقتراناتٍ دوريّةً،

ومقدار دورة هذا الاقتران = ٢π

- مجال الاقتران ق(س) =جا س هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة ح، ومداه هو [-١، ١]
- أكبرُ قيمةِ للاقتران = ... وأصغر قيمةٍ له = ...
- مثل هذه الاقترانات لها سعةٌ، وتُعرف سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$

وعليه فإنّ: سعة الاقتران ق(س) = جا س = $\frac{١ - {}^{-}١}{٢}$ = ١

- منحنى ق(س)= جا س متماثل حول نقطة الأصل؛ لذلك فهو اقتران ....

نشاط ٢

أُمثّل الاقتران: ق(س) = جتاس في المستوى الديكارتي، س $\in$ ح .

أُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	π-	-$\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جتا س	١-	...	...	...	...	...	٠	-$\frac{١}{٢}$	١-	...	...	...	

أُعيّن النقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه:

- مجال الاقتران ق(س) = جتا س هو ....، ومداه ....
- أكبر قيمةٍ للاقتران = ...، وأصغر قيمةٍ له = ...
- الاقتران ق (س) = جتا س اقتران دوري، دورته = ...
- سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$ = ...
- ق(س)= جتاس اقتران زوجيّ؛ لأنّ منحناه متماثل حول محور ....

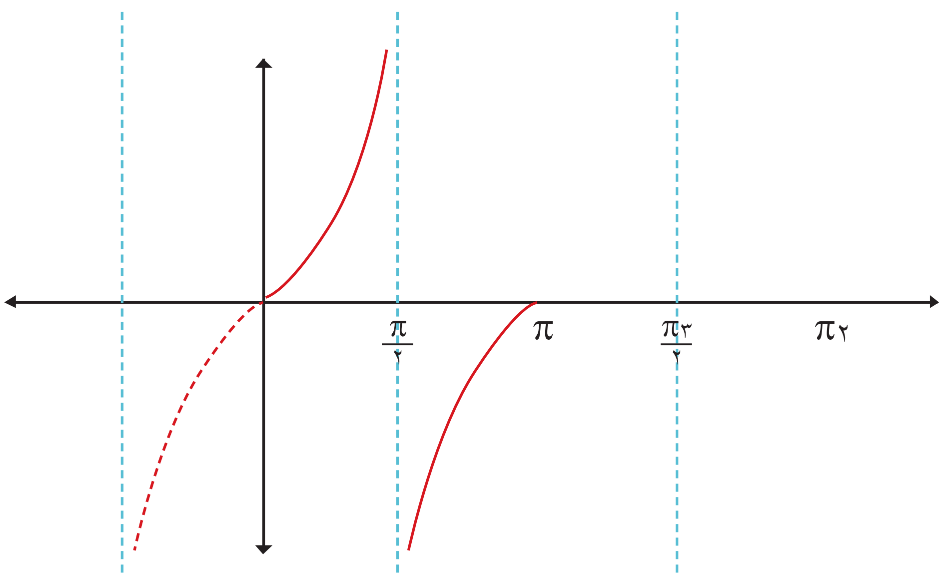
نشاط ٣

أمثل الاقتران ق(س) = ظاس في المستوى الديكارتي.

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق (س) = ظاس	...	...	صفر	...	١	...	...	...	...	$\sqrt{٣}$	...	$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأُكملُ رسم منحنى الاقتران.



ألاحظ شكل المنحنى، وأُدوّن خصائصه:

مجال ق(س) = ظاس هو مجموعةُ جميع الأعداد الحقيقيّة، ما عدا ....، ومداه هو: ح

دورته = ...

ق(س) = ظاس اقترانٌ فرديٌّ، أوضّحُ ذلك.

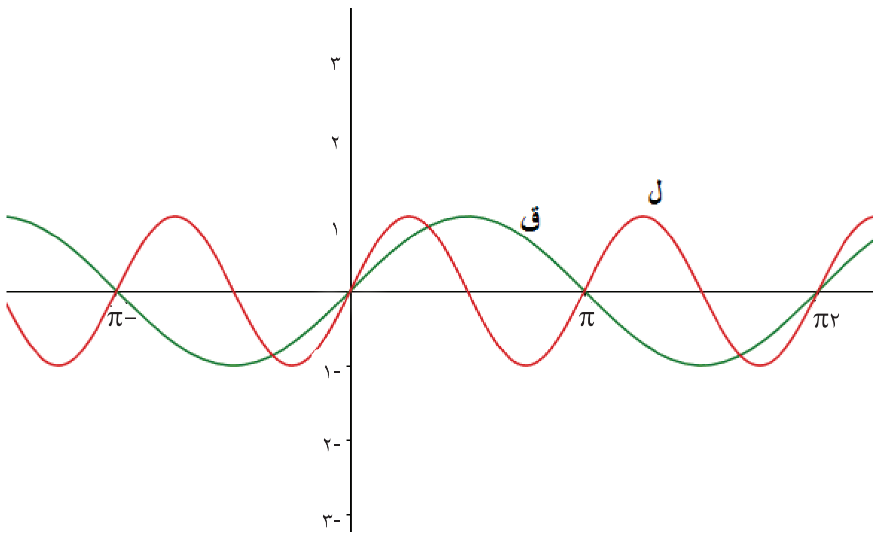
نشاط ٤

أُمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = حاس، ل(س) = جا٢س على المستوى البياني نفسه، ثم أجدُ السّعة والدورة لِلاقتران ل(س).

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ل (س)= جا٢س	...	صفر	...	...	...	...	$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	١	...	...	...

أُعيّنُ النّقاط في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ التمثيل البياني للمنحنى:



من التمثيل البياني لمنحنى ل(س)، ألاحظُ أنّ دورة الاقتران ل(س) هي: ....

بينما سعته =........................ ، مدى الاقتران ل =........................

أستنتج: الاقتران الدوري ق(س) = ﺃ جا (ب س) + جـ ، او الاقتران هـ(س) = ﺃجتا (ب س) + جـ

حيث: ﺃ ، ب ، جـ أعداد حقيقيّة ، ﺃ ، ب ≠ .

فتكون: دورة الاقتران = $\frac{\pi ٢}{|ب|}$

سعة الاقتران = | أ |

مدى الاقتران = [- | أ | + جـ ، | أ | + جـ]

نشاط ٥

لديك الاقتران ق(س) = ٢ جتا $\frac{\text{س}}{٢}$ – ٣، أجدُ دورته، سعته، ومداه، دون تمثيله بيانيّاً.

دورة الاقتران = $\frac{\pi ٢}{|ب|}$ = ... ، سعة الاقتران = ...

مجال الاقتران = ... ، مدى الاقتران = ...

تمارين ومسائل:

(١) أُمثّلُ منحنيات الاقترانات المثلثية الآتية:

- ق(س) = جا س + ٢ ، ل(س) = جتا ٢ س ـ ١ ، م(س) = جتا (-س)
- ع(س) = ظاس + ١ ، ك(س) = جا (س + π)

(٢) أجدُ: أكبرَ قيمة وأصغرَ قيمة (إن وجدت)، السعة، الدورة لكلٍّ من الاقترانات الواردة في السؤال الأوّل.

(٣) أجدُ: دورة، وسعة، ومدى الاقتران: ق(س) = -٣ جتا ($\frac{\text{س}}{٢}$)، دون تمثيله بيانيّاً.

مهمة تقويمية:

أ) أرسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جا (س + $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

ب) أرسمُ منحنى الاقتران ق(س) = جاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جتا (س – $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

(٥) المتطابقات والمعادلات المثلثيّة
(Trigonometric Identities and Equations)

معادلة دائرة الوحدة س^{٢} + ص^{٢} =١، النقطة ب تقع على الدائرة، إذن: تحقّقُ معادلتها وينتج أنّ:
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، مثل هذه العلاقة صحيحة لأيّة زاوية هـ، وتُسمّى متطابقة.
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

أتعلّم: المتطابقة المثلثيّة هي معادلة بمتغير تحتوي اقتراناً مثلثياً، وتكون صائبة لجميع قيم المتغيّر.

أستنتج أنّ: جا^{٢} هـ = ١ – جتا^{٢} هـ ، جتا^{٢} هـ = ١ – جا^{٢} هـ ، وضّح ذلك.

نشاط ١

زاويةٌ قياسها س درجة بحيث جا س = $\frac{٣}{٥}$ ، أجدُ جتا س، ظا س.

- جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١
- $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ + جتا^{٢} س = ١
- جتا^{٢} س = ١ – .... = ... ، جتا س = ...
- ظا س = ...

نشاط ٢

باستخدام المتطابقة جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، أثبت أنّ:

- ظا^{٢}هـ + ١ = قا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.

نقسم طرفيّ المتطابقة على جتا^{٢}هـ.
وينتج أنّ: ....، حيث إنّ جتاهـ ≠ ٠

- بنفس الطريقة اثبت أن ظتا^{٢}هـ + ١ = قتا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.

نشاط ٣

أثبتُ صحّة المتطابقة $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جتا س}}$ = ١ + جتا س ، جتا س ≠ ١

الطرف الأيمن = ...
أضربُ البسط والمقام في (١ + جتا س)
أستبدل (١ – جتا^{٢} س) بـ جا^{٢} س
أختصرُ البسط والمقام بالقسمة على جا^{٢} س
أقارنُ النتيجةَ بالطرف الأيسر من المتطابقة الأصليّة.

نشاط ٤

أثبتُ صحّة المتطابقة: جتا^{2}هـ – جا^{2}هـ = ١ – ٢جا^{2}هـ

الطرف الأيمن: من المتطابقة جا^{2} س + جتا^{2} س = ١، ينتج أنّ: جتا^{2} هـ = ١ – جا^{2} هـ

(١ – جا^{2} هـ) – جا^{2} هـ = ... = الطرف الأيسر / وهو المطلوب.

نشاط ٥

أثبت أنّ: $\frac{\text{١ + ظا}^{2}\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^{2}\text{هـ}}$ = ظا^{2}هـ

الطرف الأيمن: $\frac{\text{١ + ظا}^{2}\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^{2}\text{هـ}} = \frac{\text{قا}^{2}\text{هـ}}{\text{قتا}^{2}\text{هـ}}$ = ...

ملاحظة: لإثبات صحّة المتطابقة، يمكن البدءُ بأحد الطرفيْن، والوصول إلى الطرف الآخر، ويمكن البدءُ بكلا الطرفين، والوصول إلى مقداريْن متساوييْن.

تسمى الجملة المفتوحة التي تحتوي اقتراناً مثلثياً وتكون صائبة لبعض القيم الحقيقية معادلة مثلثية.

أتذكّر: إذا كان س ، ص قياسيْن لزاويتيْن متتامتيْن فإنّ: جاس = جتا ص.

نشاط ٦

أحلّ المعادلة المثلثيّة: جا (٢س + ٣٠) = جتا ٤س ، صفر $\leq$ س $\leq$ ٩٠°.

٢س + ٣٠ + ٤س = ...

٦س = ...، إذن س = ...°

مثال (١): أجدُ مجموعة حلّ المعادلة:

جتا^{2}س + ٢جتاس – ٣ = صفر ، صفر $\leq$ س $\leq$ ٢ π

جتا^{2}س + ٢جتاس – ٣ = صفر

(جتاس +٣) (جتا س – ١) = صفر

إذن: جتا س + ٣ = صفر $\longleftarrow$ جتا س = -٣ (تُرفض)، لماذا ؟

أو جتا س = ١ $\longleftarrow$ س = ٠ أو س = π $\longleftarrow$ مجموعة الحلّ = {٠، π}

نشاط ٧

أجدُ مجموعةَ حلّ المعادلة:

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢ π

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، ⟵ (جا س) (... − ...) = صفر

إذن: جا س = صفر، س زاوية ربعية، ⟵ س = صفر، ⟵ أو س =.... ، أو س = ...

جتاس − $\frac{١}{٢}$ = صفر ، جتا س = ...، زاوية الإسناد = ...

جتا س قيمة موجبة ⟵ تقع الزاوية في الربع ....، أو الربع ......

إذن: س = ...، أو س = ...

مجموعة الحل= ....

تمارين ومسائل:

(١) أثبتْ صحّةَ المتطابقات الآتية:

أ) (جا س + جتا س)^{٢} = ١ + جا٢س

ب) $\frac{\text{١ − جتاس}}{\text{١ + جتاس}} = \left(\frac{\text{١ − جتاس}}{\text{جا س}}\right)^{٢}$

جـ) $\frac{\text{١ − جتا٢هـ}}{\text{١ + جتا٢هـ}}$ = ظا^{٢}هـ

(٢) ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية، حيث:صفر ≤ س ≤ ٢ π ؟

أ) ٢ جتا^{٢} س − ١ = صفر

ب) ٢ جا^{٢} س + جا س = صفر

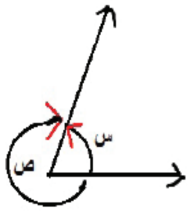
جـ) ظا^{٢} س + ١ = ٢

ورقة عمل

السؤال الأوّل:

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قيم س ، ص الممكنة في الشكل المجاور؟



أ) (٦٠° ، ٣٠٠°)   ب) (٦٠°، -٣٠٠°)   جـ) (-٦٠°، ٣٠٠°)   د) (-٦٠°، -٣٠٠°)

(٢) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاوية ربعيّة ؟

أ) ١٢٠°   ب) ١٩٠°   جـ) ٣٠٠°   د) ٣٦٠°

(٣) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاويةٍ مكافئةٍ للزاوية التي قياسها ١٣٥° ؟

أ) -٢٢٥°   ب) ٢٢٥°   جـ) -١٣٥°   د) ٤٥°

(٤) ما قياس زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها ٢٠٠°:

أ) ١٦٠°   ب) -٦٠°   جـ) ٢٠°   د) -٢٠°

(٥) زاوية قياسها $\left(\frac{٣\pi}{٥}\right)^{د}$ ، ما قيمة قياسها بالدرجات؟

أ) ٢١٦°   ب) ٥٤°   جـ) ١٠٨°   د) ٣٤,٤°

(٦) زاوية قياسها ٣١٥°، ما قياسها بالراديان؟

أ) $\frac{٧\pi}{٨}$ ب) $\frac{٧\pi}{٤}$ جـ) $\frac{٣١٥\pi}{٣٦٠}$ د) $\frac{٤\pi}{٧}$

(٧) إذا كان ظاس= $\frac{٦}{٨}$ ، فما قيمةُ جا س ؟

أ) ٦   ب) $\frac{٣}{٥}$ جـ) $\frac{٨}{١٠}$ د) ٨

(٨) ما سعة الاقتران: ق(س) = ٢جتا ٣س − ١ ؟

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ١- د) ١

(٩) ما دورة الاقتران: ل(س) = ٣جا ٢س + ١ ؟

أ) ٢π ب) π جـ) $(\frac{٢}{٣})\pi$ د) $(\frac{٣}{٢})\pi$

السؤال الثاني:

ما قيمة ما يأتي:

أ) جا -٢٤٠° ب) جتا - $\frac{٧\pi}{٤}$ جـ) ظا ٣٣٠° د) جا ٤٠٥° ؟

السؤال الثالث:

أُبيّنْ خطأَ كلٍّ من العبارات الآتية:

أ) جتا (س + ص) = جتا س + جتا ص

ب) جا ٢س = ٢ جاس

جـ) ظا $\frac{٢}{٣}$ س = $\frac{\text{ظا ٢س}}{٣}$

السؤال الرابع:

أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقتراناتِ الآتية:

أ) ق(س)= ٣جا ($\frac{٢}{٣}$ س)

ب) هـ(س)= ٢ − جتا (-س)

جـ) ل(س)= ظاس − ١

د) ك(س)= جتا (س − $\frac{\pi}{٢}$)

نموذج اختبار ذاتي

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) أي من الأزواج الآتية زوايا لها ضلع الانتهاء نفسه؟

أ) (٧٠°، -٢٩٠°) ب) (١٥٠°، ٢١٠°) ج) (١٠٠°، ٦١٠°) د) ($\frac{-\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$)

٢) المثلث الذهبي هو مثلث متساوي الساقين فيه نسبة طول أحد الساقين إلى طول القاعدة يساوي:

أ) $\frac{١+\sqrt{٥}}{٢}$ ب) $\frac{١-\sqrt{٥}}{٢}$ جـ) $\frac{١+\sqrt{٥}}{٣}$ د) $\frac{١-\sqrt{٥}}{٣}$

٣) زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٥}$ قيمة قياسها بالدرجات يساوي:

أ) ١٤٤° ب) ١٣٥° ج) ٧٢° د) ١٠٨°

٤) ضلع انتهاء الزاوية (-٦٠٠°) يقع في الربع:

أ) الأول. ب) الثاني. ج) الثالث. د) الرابع.

٥) زاوية الإسناد للزاوية ٢٢٠° يساوي:

أ) ٨٠° ب) ٤٠° ج) ٦٠° د) ١٤٠°

٦) جتاس=

أ) جاس + $\frac{\pi}{٢}$ ب) جا (س + $\frac{\pi}{٢}$) ج) جا (س - $\frac{\pi}{٢}$) د) جاس - $\frac{\pi}{٢}$

السؤال الثاني:

1) إذا كانت هـ في الوضع القياسي، ومر ضلع الانتهاء لها بالنقطة ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) في أي ربع تقع الزاوية هـ ؟ وما قياسها؟

ب) اكتب النسب المثلثية الأساسية للزاوية هـ .

السؤال الثالث:

١) جد مجموعة حل المعادلة الآتية علماً بأنّ: - $\pi \geq$ س ≥ ٠

٢ ظا^2 س - ظاس -١ =٠

٢) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

(١ - جا^{2}س) (١+ ظا^2 س) =١

٣) مثّل على خط الأعداد: ٢$\sqrt{٥}$ + ١

السؤال الرابع:

- جد القيمة الصغرى، والقيمة العظمى، والدورة، والسعة للإقتران ص=٥ جتا (٣س -٤)