١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيـــــات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الرابعة

دولــة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

الوحدة

٤

النتاجات

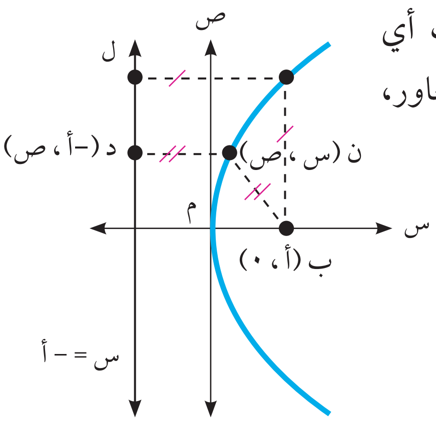
يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف القطوع المخروطية ومبادئ التفاضل في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. التعرف على القطع المكافئ، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرته، ودليله، ومحور تماثله.
٢. التعرف على القطع الناقص، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومحوريه الأكبر والأصغر، وطوليهما، واختلافه المركزي.
٣. التعرف على القطع الزائد، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومعادلتي محوريه، والقاطع والمرافق وطوليهما، واختلافه المركزي.
٤. تمثيل القطوع المخروطية بيانياً في الوضع القياسي.
٥. حل مسائل تطبيقية على القطوع المخروطية.
٦. التعرف على النهاية من جهة اليسار، والنهاية من جهة اليمين.
٧. إيجاد نهايات الاقتران متعدد القاعدة عند نقاط التحول.
٨. إيجاد نهايات الاقترانات الكسرية .
٩. التعرف على نهايات الاقترانات الدائرية.
١٠. التعرف على اتصال اقتران عند نقطة ، البحث في اتصال اقتران على مجاله.
١١. تطبيق نظريات الاتصال على اقترانات مختلفة.

٤ – ١ القطع المكافئ Parabola

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك في المستوى بشرط أن يكون بُعْدها عن نقطة ثابتة ب يساوي بعدها عن مستقيم معلوم ل. تسمى النقطة الثابتة ب البؤرة، ويسمى المستقيم المعلوم ل الدليل.

الحالة الأولى: القطع المكافئ مفتوح لليمين



الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء الموجب لمحور السينات أي أن إحداثيات البؤرة ب (أ ، ٠)، أ > ٠ وبالاستعانة بالشكل المجاور، وحسب تعريف القطع المكافئ فإن:

ن ب = ن د

أي أن: $\sqrt{(س - أ)^{٢} + (ص - ٠)^{٢}} = \sqrt{(س + أ)^{٢} + (٠)^{٢}}$

إذن معادلة هذا القطع المكافئ : ص^{٢} = ٤أ س (لماذا؟)

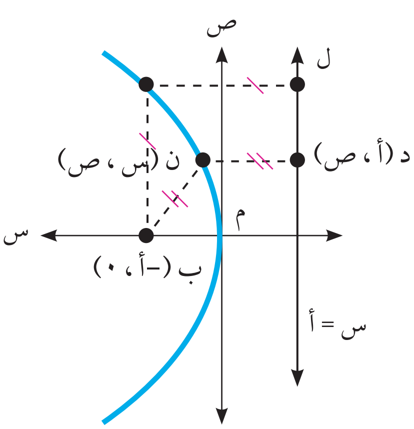
مثال ١ : أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي بؤرته (٣، ٠) ، ثم أجد معادلة دليله.

الحل : بما أن البؤرة (٣ ، ٠) فإن القطع مفتوح لليمين. إذن معادلته ص^{٢} = ٤أ س

وكذلك بما أن البؤرة (٣ ، ٠) فإن أ = ٣

أي أن معادلته هي ص^{٢} = ١٢س معادلة دليله هي س = –٣

الحالة الثانية: القطع المكافئ مفتوح لليسار



الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء السالب من محور السينات أي أن: ب (– أ ، ٠) ، أ > ٠

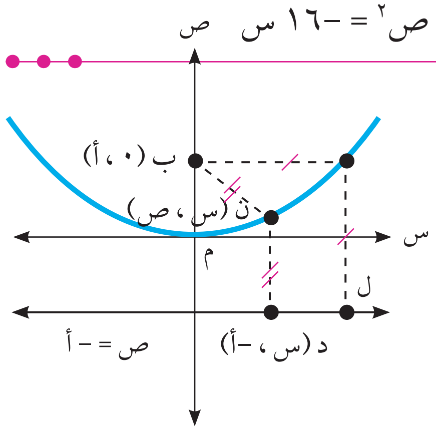
والمعادلة في هذه الحالة هي: ص^{٢} = –٤أ س (لماذا؟)

مثال ٢ : أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي معادلة دليله س = ٤ .

الحل : بما أن القطع المكافئ بالصورة القياسية، إذن رأسه نقطة الأصل.

وبما أن معادلة دليله س = ٤ إذن القطع المكافئ مفتوح لليسار، أ = ٤

إذن معادلة القطع المكافئ هي : ص^{٢} = −٤ أ س إذن ص^{٢} = −١٦ س



الحالة الثالثة: القطع المكافئ مفتوح للأعلى

الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء الموجب من محور الصادات

أي أن ب (٠ ، أ) ، أ > ٠

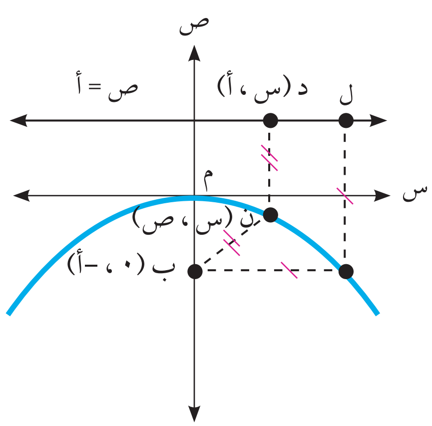
والمعادلة في هذه الحالة هي: س^{٢} = ٤ أ ص (لماذ؟)

مثال ٣ : ما إحداثيات البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافىء الذي معادلته: س^{٢} = ٢٠ ص

الحل : س^{٢} = ٢٠ ص هي معادلة قطع مكافىء مفتوح للأعلى

٤أ = ٢٠ ومنها أ = ٥ ومنها البؤرة (٠ ، ٥)، ومعادلة الدليل ص = −٥

الحالة الرابعة: القطع المكافئ مفتوح للأسفل



الرأس (٠ ، ٠) و تقع البؤرة على الجزء السالب من محور الصادات

أي أن: ب (٠ ، − أ) ، أ > ٠

والمعادلة في هذه الحالة هي: س^{٢} = −٤أ ص

مثال ٤ : قطع مكافئ رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، −٣)

أجد معادلته، ومعادلة دليله.

الحل : بما أن البؤرة (٠ ، −٣)

إذن معادلته هي: س^{٢} = −٤أ ص ، أ > ٠

و بما أن أ = ٣ فإن س^{٢} = −١٢ ص، ومعادلة دليله هي ص = ٣

تمارين ٤ - ١

١ أجد كلاً من: الرأس، و البؤرة، ومعادلة الدليل، ومعادلة محور التماثل، لكل من القطوع المكافئة الآتية:

أ $ص^2 = -٤ س$

ب $س^2 = -٨ ص$

٢ أجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) ويمر بالنقطة (-٣ ، ٦) ومحور تماثله محور السينات.

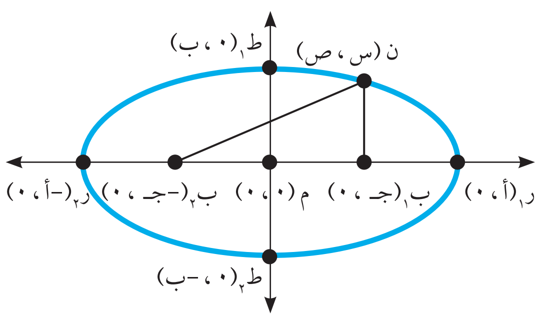
٣ قطع مكافئ رأسه (٠ ، ٠) ومفتوح لجهة اليمين، فإذا كانت النقطة ($س_1$ ، ٦) الواقعة عليه تبعد عن بؤرته ١٠ وحدات، أجد معادلة هذا القطع؟

٤ - ٢ القطع الناقص The Ellipse

تعريف: القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أكبر من البعد بينهما، تسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.

سنقتصر في هذا البند على الوضع القياسي للقطع الناقص وهو الوضع الذي يكون فيه المركز نقطة الأصل (٠ ، ٠)، ومحوراه ينطبقان على محوري الإحداثيات. وهناك حالتان للقطع الناقص:

الحالة الأولى: القطع الناقص السيني:



الشكل المجاور يمثل قطعاً ناقصاً سينياً، فيه:

١ البؤرتان : النقطتان ب$_1$(جـ ، ٠) ، ب$_2$(-جـ ، ٠)

٢ الرأسان: النقطتان ر$_1$ (أ ، ٠) ، ر$_2$(-أ ، ٠)

٣ المحور الأكبر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين ر$_1$ ، ر$_2$ وطوله ن ب$_1$ + ن ب$_2$ = ٢أ ، أ > ٠

٤ المحور الأصغر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين ط$_1$ (٠ ، ب) و ط$_2$(٠ ، -ب) وطوله = ٢ب ، ب > ٠

٥ المركز وهي النقطة م (٠ ، ٠) والتي تقع في منتصف المسافة بين البؤرتين.

٦ البعد البؤري وهو البعد بين البؤرتين ويساوي ٢جـ (جـ > ٠)

٧ الاختلاف المركزي هـ وهو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ > ١ (لماذا؟) ويبين مدى تفلطح الشكل البيضاوي (الإهليليجي).

٨ معادلة هذا القطع هي: $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$

حيث أ^2 > ب^2 ، جـ^2 = أ^2 - ب^2

مثال ١ : تتحرك النقطة و(س ، ص) في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين (∓٨ ، ٠) يساوي ٢٠ وحدة.

١ أكتب معادلة هذا المحل الهندسي. ٢ أجد طول كل من محوريه واختلافه المركزي.

الحل : ١ المحل الهندسي يمثل قطعاً ناقصاً سينياً لأن النقطتين الثابتتين تقعان على محور السينات، فيه:

البؤرتان (∓ جـ ، ٠) = (∓ ٨ ، ٠) ومنها جـ = ٨ ، ٢أ = ٢٠ ومنها أ = ١٠ نجد قيمة ب:

$\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}$ ، $\text{ب}^{٢} = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦$ ، اذن ب = ٦.

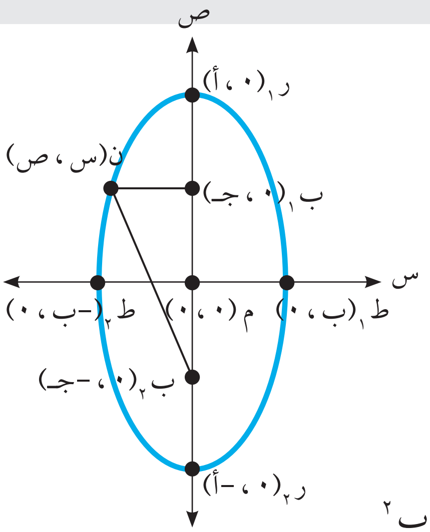
معادلة هذا القطع هي: $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$ ، $\frac{\text{س}^{٢}}{١٠٠} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦} = ١$

٢ طول المحور الاكبر = ٢أ = ٢٠

طول المحور الأصغر = ٢ب = ١٢

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٨}{١٠}$

الحالة الثانية: القطع الناقص الصادي:



نشاط ١: الشكل المقابل يمثل قطعاً ناقصاً صادياً:

١ مركزه هو ....

٢ رأساه هما ....

٣ بؤرتاه هما (٠ ، ∓ جـ)

٤ البعد البؤري = ...

٥ معادلة محوره الأكبر س = ٠ ، وطوله = ...

٦ معادلة محوره الأصغر .... ، وطوله = ...

٦ الاختلاف المركزي هـ = ...

٨ معادلة هذا القطع هي: $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$ ، $\text{أ}^{٢} > \text{ب}^{٢}$

مثال ٢ : جد معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات رأسيه (٠ ، ± ١٠) وإحداثيات بؤرتيه (٠ ، ± ٨).

الحل : القطع الناقص هو صادي لأن البؤرتين تقعان على محور الصادات

أ = ١٠ ، جـ = ٨ ، $\text{ب}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{جـ}^{٢}$ ومنها $\text{ب}^{٢} = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦$ ، ب = ٦

المعادلة هي $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$ اذن $\frac{\text{ص}^{٢}}{١٠٠} + \frac{\text{س}^{٢}}{٣٦} = ١$

مثال ٣ : قطع مخروطي معادلته $١٤٤ - ١٦\text{س}^{٢} - ٩\text{ص}^{٢} = ٠$

١ أحدد نوع هذا القطع ٢ أجد طولي محوريه. ٣ أجد إحداثيات بؤرتيه.

الحل :

١ $١٤٤ - ١٦س^٢ - ٩ص^٢ = ٠$ ، ومنها $١٤٤ = ١٦س^٢ + ٩ص^٢$ بالقسمة على ١٤٤

$\frac{ص^٢}{١٦} + \frac{س^٢}{٩} = ١$، هذه معادلة قطع ناقص صادي ..... لماذا؟

٢ $أ^٢ = ١٦ \Leftarrow أ = ٤$ ، $ب^٢ = ٩ \Leftarrow ب = ٣$

طول المحور الاكبر $= ٢أ = ٨$ ، طول المحور الأصغر $= ٢ب = ٦$

٣ $جـ^٢ = ١٦ - ٩ = ٧ \Leftarrow جـ = \sqrt{٧}$ ، البؤرتان $(٠، \pm\sqrt{٧})$ ، الرأسان $(٠ ، \pm ٤)$

تمارين ٤ - ٢

١ أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ قطع ناقص معادلته $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$، ما طول المحور الأكبر؟

أ) ٨ ب) ٥ جـ) ١٠ د) ١٦

٢ قطع ناقص سيني مركزه (٠ ، ٠) وطول محوره الأكبر = ١٠ وحدات

وطول محوره الأصغر = ٦ وحدات ما معادلته؟

أ) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ب) $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

جـ) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ د) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

٢ قطع مخروطي معادلته $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ١$، أحدد نوع القطع، وأجد الرأسين والبؤرتين وجد طولي المحورين ومعادلتيهما.

٣ قطع ناقص صادي البعد بين إحدى بؤرتيه والرأس القريب منها يساوي ٢ وحدة طول، والبعد بينها وبين الرأس البعيد منها يساوي ٨. أجد معادلة هذا القطع.

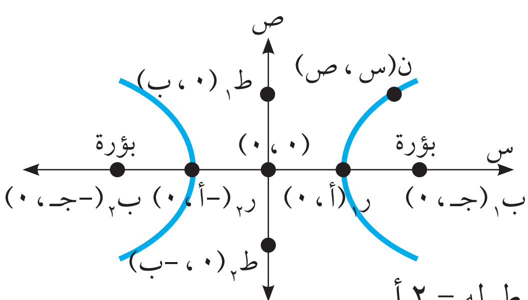
٤ النقطة و(س ، ص) تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (± ٥ ، ٠) يساوي ١٢ وحدة ما المحل الهندسي للنقطة وما معادلته؟

٤ - ٣ القطع الزائد The Hyperbola

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) التي تتحرك في المستوي بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أصغر من البعد بينهما، وتسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.

وسنقتصر في دراستنا هذه الدرس على الوضع القياسي للقطع الزائد وهناك حالتان:

الحالة الاولى: القطع الزائد السيني



يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً سينياً فيه:

البؤرتان ب$_1$ (جـ ، ٠) ، ب$_2$ (− جـ ، ٠)، والبعد بينهما يسمى البعد البؤري للقطع الزائد = ٢ جـ ،

النقطة م (٠ ، ٠) المركز.

الرأسان ر$_1$(أ ، ٠) ، ر$_2$(−أ ، ٠)، وهما طرفا المحور القاطع وطوله = ٢ أ

النقطتان ط$_1$(٠ ، ب) ، ط$_2$(٠، −ب) ، وهما طرفا المحور المرافق وطوله = ٢ب.

ويشكل محورا القطع الزائد (القاطع والمرافق) محوري تماثل له.

معادلة هذا القطع هي $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ ، حيث يكون معامل س^2 موجباً.

الاختلاف المركزي للقطع الزائد = هـ = $\frac{جـ}{أ} > ١$ ، جـ^2 = أ^2 + ب^2

|ن ب$_1$ − ن ب$_2$| = ٢أ لأي نقطة مثل ن.

مثال ١ : تتحرك النقطة ن(س ، ص) في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين الثابتتين (∓ ١٠ ، ٠) يساوي ١٦ . أجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن.

الحل : ١ هذا المحل يمثل قطعاً زائداً سينياً فيه: م (٠، ٠) ، ٢أ = ١٦ ومنها أ = ٨ ،

بؤرتاه (∓ جـ ، ٠) = (∓ ١٠ ، ٠)

⇐ جـ = ١٠ ، جـ^2 = أ^2 + ب^2 ، ومنها ب = ٦ معادلته :

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١ \Leftarrow \frac{س^2}{٦٤} - \frac{ص^2}{٣٦} = ١$$

مثال ٢ : قطع مخروطي معادلته (٢س − ٣ص) (٢س + ٣ص) − ٣٦ = ٠

١ أحدد نوع هذا القطع . ٢ أكتب عناصره.

الحل : ١ (٢س − ٣ص) (٢س + ٣ص) − ٣٦ = ٠، ومنها ٤س^{٢} − ٩ص^{٢} = ٣٦،

وبالقسمة على ٣٦ ينتج ان: $\frac{س^{٢}}{٩} - \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$

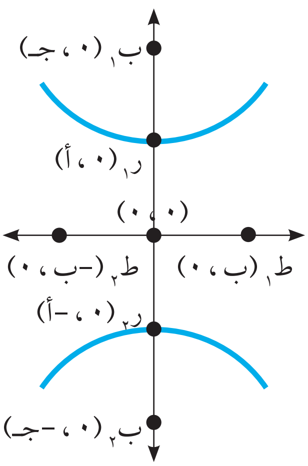
وهذه معادلة قطع زائد سيني (إشارة س^{٢} موجبة) فيه :

٢ أ = ٣ ، ب = ٢ ، جـ = $\sqrt{١٣}$ ، م (٠ ، ٠)، بؤرتاه (∓ جـ ، ٠) = (∓ $\sqrt{١٣}$ ، ٠)

الرأسان (∓ أ ، ٠) = (∓ ٣ ، ٠).طول المحور القاطع = ٢أ = ٦ .

طول المحور المرافق = ٢ب = ٤ . الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ > ١

الحالة الثانية:- القطع الزائد الصادي



يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً صادياً فيه:

البؤرتان ب$_{١}$ (٠، جـ) ، ب$_{٢}$ (٠، −جـ)

والبعد بينهما يسمى البعد البؤري وطوله = ٢ جـ

النقطة م (٠ ، ٠) المركز.

الرأسان ر$_{١}$(٠، أ) ، ر$_{٢}$(٠ ، −أ)

وهما طرفا المحور القاطع وطوله = ٢ أ.

النقطتان ط$_{١}$(ب ، ٠) ، ط$_{٢}$(− ب ، ٠)

وهما طرفا المحور المرافق وطوله = ٢ب.

معادلة هذا القطع هي $\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

نشاط ١: قطع مخروطي في وضع قياسي رأساه (٠ ، ∓ ٦) ، واختلافه المركزي = $\frac{٥}{٣}$ ،

١ أكتب معادلته. ٢ أجد احداثيات بؤرتيه.

الرأسان (٠ ، ∓ ٦)، هـ > ١ اذن هذا قطع .... لماذا؟

فيه أ = ٦، هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٥}{٣}$

إذن جـ = ١٠ ، ب = ٨ .... لماذا؟

١ معادلته هي : ....

٢ احداثيات بؤرتيه هما ....

تمارين ٤ - ٣

١ أجد إحداثيات البؤرتين و الرأسين وطولي المحورين والاختلاف المركزي لكل من القطوع المخروطية التالية ثم أرسم منحنى تقريباً في كل حالة:

أ ٩س^{٢} − ص^{٢} = ٣٦ ب ٦ص^{٢} −٢س^{٢} = ٣ جـ ٩س^{٢} − ١٦ص^{٢} = ١

٢ قطع مخروطي معادلته ١٦س^{٢} − ٩ص^{٢} − ١٤٤ = صفر، أجد الفرق المطلق للبعد بين النقطة ($\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$ ، ٢) و بؤرتي القطع .

٣ أجد معادلة القطع الزائد القياسي الذي طول محوره القاطع يساوي ٨ وحدات، واختلافه المركزي هـ = $\frac{٥}{٤}$ (أكتب جميع الحلول الممكنة).

٤ – ٤ نهاية الاقتران عند نقطة ونظريات في النهايات

تعريف: إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً بجوار العدد أ*، وكانت قيم ق(س) تقترب من العدد ل كلما اقتربت قيم س من العدد أ من جهة اليسار ومن جهة اليمين، فإن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تقترب من العدد أ تساوي ل. ويعبر عن ذلك رياضياً على النحو الآتي: $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = ل.

أتعلم:

١ $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) تعني أن س ≠ أ وإنما س عدد إما أن يكون أقل من العدد أ بمقدار صغير جداً وتسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليسار، وتكتب رياضياً على النحو: $\underset{س \leftarrow أ^-}{نهـا}$ ق(س).
أو أن يكون أكبر من العدد أ بمقدار صغير جداً، تسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليمين، وتكتب رياضياً على النحو: $\underset{س \leftarrow أ^+}{نهـا}$ ق(س)

٢ حتى تكون $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) موجودة يجب أن تكون $\underset{س \leftarrow أ^-}{نهـا}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow أ^+}{نهـا}$ ق(س)

٣ لإيجاد $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) ليس من الضروري أن يكون ق(س) معرفاً عند س = أ وإنما يجب أن يكون ق(س) معرفاً بجوار العدد أ.

نظرية (١):

- إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = ق(أ)
- إذا كان ق(س) = $\frac{ك(س)}{هـ(س)}$ اقتراناً نسبياً فإن $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ ق(س) = $\frac{ك(أ)}{هـ(أ)}$ ، هـ(أ) ≠ ٠

مثال ١ : أجد نهاية كل مما يأتي:

١ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ (س^{٣} – ٢س + ٥)

٢ $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا}$ $\frac{س^{٣} - س + ٤}{س + ٣}$

الحل :

١ $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا}$ (س^{٣} – ٢س + ٥) = ٨ – ٤ + ٥ = ٩

٢ $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا}$ $\frac{س^{٣} - س + ٤}{س + ٣}$ = $\frac{١٢٥ - ٥ + ٤}{٨}$ = $\frac{٣١}{٢}$

نشاط ١ : إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ (أس + ٣أ) = ١٠ ، أجد قيمة / قيم أ.

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا}$ (أس + ٣أ) = ... = ١٠

إذن أ^{٢} + ٣أ – ١٠ = ٠ ، ومنها أ = ...

نظرية (٢): إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل ، $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = م ، ل ، م $\in$ ح فإن:

- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ (ق ± هـ)(س) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ل ± م
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ك ق(س) = ك $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ك ل ، حيث ك $\in$ ح
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ (ق × هـ)(س) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) × $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ل × م
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}} = \dfrac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}\text{ق(س)}}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}\text{هـ(س)}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، م $\neq$ ٠
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ (ق(س))^{ن} = ($\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س))^{ن} = ل^{ن} ، حيث ن عدد صحيح موجب
- $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ (ق(س))$^{\frac{1}{ن}}$ = ($\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س))$^{\frac{1}{ن}}$ = (ل)$^{\frac{1}{ن}}$ بشرط أن ل > ٠ عندما ن عدد زوجي

مثال ٢ : إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٣ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = $^{-}$٢ أجد قيمة ما يأتي:

١ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (٣ق + ٥هـ)(س)

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}\right)$

٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (٢ق(س) − هـ^{٣}(س) + س^{٢})

٤ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{ق(س)} + ٦}$

الحل :

١ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (٣ق + ٥هـ)(س) = ٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) + ٥ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ هـ(س) = ٩ − ١٠ = $^{-}$١

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}\right) = \dfrac{٣}{^{-}٢}$ (لماذا؟)

٣ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (٢ق(س) − هـ^{٣}(س) + س^{٢})

= ٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) − $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ هـ^{٣}(س) + $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ س^{٢} = ١٨

٤ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{ق(س)} + ٦} = \sqrt{٣ + ٦}$ = ٣ (لماذا؟)

مثال ٣ : أجد قيمة ما يأتي:

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (س^{٢} − س − ٣)^{٥}

الحل :

١ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س}} = \sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}(\text{س}^{٢} - \text{س})} = \sqrt{٣^{٢} - ٣} = \sqrt{٦}$

٢ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (س^{٢} − س − ٣)^{٥} = ($\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ (س^{٢} − س − ٣))^{٥} = $^{-}$١

أتعلم: نقاط التحول: وهي النقاط التي تتغير قاعدة الاقتران في جوارها، وفي هذه الحالة نجد النهاية من اليمين ومن اليسار.

نشاط ٢: إذا كان ق(س) = $[-\frac{١}{٢}$ س + ٢]، س ∈ [-٢ ، ٤]، أجد:

١ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) ٢ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ق(س) ٣ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س)

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} ٣ &، \text{س} = -٢ \\ ٢ &، -٢ < \text{س} \leq ٠ \\ ١ &، ٠ < \text{س} \leq ٢ \\ ٠ &، ٢ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$$

١ لإيجاد $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) ألاحظ أن ق(س) يغير قاعدته في جوار س = ٢ (نقطة تحول) لذلك أجد النهاية من اليسار واليمين: $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ، بينما $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ...

بما أن $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) ≠ $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) ، إذن $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) =..................

٢ $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ .... = ... (ألاحظ أن س = -١ هي نقطة داخلية، وليست نقطة تحول)

٣ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ... (ألاحظ أن س = ٤ هي نقطة طرفية)

أتعلم: إذا كان ق(س) = جاس = جاس ، فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = جا أ

إذا كان ق(س) = جتاس ، فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ق(س) = جتا أ

نشاط ٣: أجد قيمة ما يأتي:

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (٥ جتاس + ٢ جا٢س) ٢ $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}}$ (جا^{٢} س − جتا٤س)

الحل :

١ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (٥ جتاس + ٢ جا٢س) = ٥ جتا ٠ + ٢ جا(٢ × ٠) = ...

٢ $\underset{س \leftarrow \pi}{\text{نهـا}}$ (جا^{٢} س − جتا٤س) = ...

تمارين ومسائل ٤ - ٤

١ إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ١$ أجد قيمة ما يأتي:

أ $\lim_{س \to ١} \dfrac{س\, ق(س)}{٢\, هـ(س)}$

ب $\lim_{س \to ١} (ق(س) + ٢س)^{٥}$

جـ $\lim_{س \to ١} \sqrt{٣ق(س) + ١٠}$

٢ أجد قيمة ما يأتي:

أ $\lim_{س \to -٢} \dfrac{س^{٢} + س}{٢س^{٢} + ٣}$

ب $\lim_{ص \to -١} \dfrac{\sqrt{ص^{٢} + ٣}}{٢ص^{٢} - ١}$

جـ $\lim_{ع \to ١} (ع\, جتا\, \pi ع + ٢\, جا\, \pi ع)$

د $\lim_{س \to ٥} |س^{٢} - ٦س + ٥|$

٣ إذا كان $ق(س) = [\frac{١}{٣} س + ١]$ أجد ما يأتي:

أ $\lim_{س \to -٢} ق(س)$

ب $\lim_{س \to ٣} (ق(س) + ٢س)$

٥ إذا كان $ق(س) = أس^{٢} + ٣س - ٢أ$ ، $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ١٠$ ، أجد $\lim_{س \to ١} (ق(س) + ٣)$.

٦ إذا كان
$$ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ٢س + ٣ & ،\ س \le ٢ \\ ٢س + ١٠أ & ،\ س > ٢ \end{cases}$$

أجد قيمة أ علماً بأن $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة.

٤ - ٥ النهايات والصورة غير المعينة Limits and Indeterminate Forms

للبحث في نهاية الاقتران ق(س)= $\frac{\text{ك(س)}}{\text{هـ(س)}}$ عندما س تقترب من أ ، والذي يعطي بالتعويض المباشر الصورة غير المعينة $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ ، أبسط الاقتران بعدة طرق منها التحليل إلى العوامل أو الضرب بالمرافق، أو توحيد المقامات، ومن ثم أجد قيمة النهاية المطلوبة.

مثال ١ : أجد $\underset{\text{س}\to\text{-٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤}}{\text{س}+\text{٢}}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية:

$$\underset{\text{س}\to\text{-٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٤}}{\text{س}+\text{٢}} = \underset{\text{س}\to\text{-٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}-\text{٢})(\text{س}+\text{٢})}{\text{س}+\text{٢}} = \underset{\text{س}\to\text{-٢}}{\text{نهـا}}\ (\text{س}-\text{٢}) = \text{-٤}$$

نشاط ١: أجد:

١ $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٣س}}{\text{س}-\text{٣}}$

٢ $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}-\text{٢}}{\text{١}-\text{س}}$

٣ $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٣}}-\text{٨}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٨}}$

٤ $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٤}}-\text{٨١}}{\text{س}-\text{٣}}$

١ التعويض المباشر يعطي ....

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}-\text{٣س}}{\text{س}-\text{٣}} = \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ .... = ...$$

٢ $$\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}-\text{٢}}{\text{١}-\text{س}} = \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}-\text{١})(\text{س}+\text{٢})}{\text{١}-\text{س}} = ... = \text{-٣}\ \text{(لماذا؟)}$$

٣ $$\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٣}}-\text{٨}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٨}} = \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}-\text{٢})(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٢س}+\text{٤})}{\text{٢}(\text{س}-\text{٢})(\text{س}+\text{٢})} = ...$$

٤ $$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٤}}-\text{٨١}}{\text{س}-\text{٣}} = \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س}^{\text{٢}}-\text{٩})(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٩})}{\text{س}-\text{٣}} = ...$$

نشاط ٢: أجد $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٤}}-\text{أ}^{\text{٤}}}{\text{س}-\text{أ}}$

$$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{\text{٤}}-\text{أ}^{\text{٤}}}{\text{س}-\text{أ}} = ... = \text{٤أ}^{\text{٣}}$$

مثال ٢ : أجد قيمة $\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٣}{س - ٧}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية من خلال الضرب بمرافق البسط

$$\underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٣}{س - ٧} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٣}{\sqrt{س + ٢} + ٣}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{س + ٢ - ٩}{س - ٧} \times \frac{١}{\sqrt{س + ٢} + ٣} \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$$

أتعلم: الضرب بالمرافق التربيعي، يعني جعل المقدار الجبري على صورة فرق بين مربعين.

نشاط ٣: أجد قيمة $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٢}{س - ١}$

مرافق $\sqrt{٢س + ٢} - ٢$ هو.....................

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٢}{س - ١} \times \text{............} = \text{............}$$

إذن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢س + ٢} - ٢}{س - ١} =$ .... (هل هناك طرق أخرى للحل؟)

مثال ٣ : أجد قيمة: $\lim_{س \to ٣} \frac{\left(\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٥}\right)}{س - ٣}$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{٠}{٠}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية.

ألاحظ أن البسط يحتوي على كسر لذلك أوحد المقامات:

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\left(\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٥}\right)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{٥ - س - ٢}{(س - ٣)(س + ٢)(٥)} = \lim_{س \to ٣} \frac{٣ - س}{(س - ٣)(س + ٢)(٥)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{(س + ٢)(٥)} = \frac{-١}{(٥)(٥)} = \frac{-١}{٢٥}$$

تمارين ومسائل ٤ - ٥

١ أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤}$

ب $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٧س + ١٠}{٥ - س}$

جـ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٥س^٢ + ٦س}{س - ٣}$

د $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٢س + ٦} - ٤}{٢س - ١٠}$

٢ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٨}{س - ٢} & ، \quad س > ٢ \\ \frac{أس^٢ + س - ٤}{س^٢ + ١} & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

أجد قيمة أ التي تجعل $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة.

نظرية: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$ ، $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$. (حيث س بالتقدير الدائري)

أتعلم: ① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا أ س}{س} = أ$ ② $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا أ س}{س} = أ$ (حيث س بالتقدير الدائري)

مثال ١ : أجد قيمة ما يأتي:

① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{٧س}$ ② $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س قتا ٥س}$ ③ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س ظا ٥ س}{س^{٣}}$

الحل :

١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{٧س} = \frac{١}{٧} \lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{س} = \frac{٥}{٧}$

٢ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س قتا ٥س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٥ س}{س} = ٥$

٣ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} ٣س ظا ٥ س}{س^{٣}} = \lim\limits_{س \to ٠} (\frac{جا ٣س}{س})^{٢} \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{س} = ٩ \times ٥ = ٤٥$

نشاط ١ : أجد ما يأتي:

① $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{-٣س}{٥ ظا ٣س}$ ② $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س جا ٣س + ظا^{٢} س}{جا^{٢} س + ظا^{٢} ٣س}$

١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{-٣س}{٥ ظا ٣س}$ ، أقسم كلاً من البسط والمقام على ....

تصبح النهاية على الصورة .... = ... = $-\frac{١}{٥}$

٢ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س جا ٣س + ظا^{٢} س}{جا^{٢} س + ظا^{٢} ٣س}$ ، بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

تصبح النهاية على الصورة .... = $\frac{٤}{١٠}$

مثال ٢ : أجد ما يأتي: ١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٥ س}{س^٢}$

الحل : ١ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٥ س}{س^٢}$، أضرب كلاً من البسط والمقام بمرافق البسط (١+جتا٥س)

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^٢ ٥ س}{س^٢} \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{١ + جتا ٥ س}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٥ س}{س^٢} \times \frac{١}{٢} = ٢٥ \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٥ س}{٢٥ س^٢} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٢٥ \left(\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا ٥ س}{٥ س}\right)^٢ \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٢٥ \times \frac{١}{٢} = \frac{٢٥}{٢}$$

تمارين ومسائل ٤ - ٦

١ أجد ما يأتي، وأتحقق:

أ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا^٢ ٣ س}{جا^٢ ٧س}$

ب $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢ ظتا^٢ \pi س}$

جـ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا س جا ٥ س}{٣س}$

د $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{-٣ جا س}{٥ ظتا ٣س}$

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{\sqrt{جا^٢ س}}{س}$، أجد $\lim\limits_{س \to ٠}$ ق(س).

٣ إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{أ - جتا ب س}{س^٢} = \frac{٩}{٢}$، أجد قيم أ ، ب .

٤ – ٧ نهاية الاقتران عندما س ← ± ∞ : Limits at Infinity

نظرية: ١ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ فإن $\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٠$

٢ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ فإن $\underset{\text{س}\to\pm\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$

مثال ١ : أجد ما يأتي:

١ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{-٥}{\text{س}^{٣}}$ ٢ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ ٧$

الحل :

١ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{-٥}{\text{س}^{٣}} = ٠$ ٢ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ ٧ = ٧$

مثال ٢ : أجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ٥)$

الحل :

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ (\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ٥) = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٣}\left(١ - \frac{٢}{\text{س}^{٢}} + \frac{٥}{\text{س}^{٣}}\right) = \infty(١ - ٠ + ٠) = \infty$$

مثال ٣ : أجد ما يأتي:

١ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} + ٣}$ ٢ $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢}{١ - \text{س}^{٢}}$

٣ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٨}{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ٥}$

الحل :

١ $$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} + ٣} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢}\left(٥ + \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^{٢}}\right)}{\text{س}^{٢}\left(١ + \frac{٣}{\text{س}^{٢}}\right)} = \frac{(٥ + ٠ + ٠)}{(١ + ٠)} = ٥$$

٢ $$\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٢}{١ - \text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٣}\left(١ + \frac{١}{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right)}{\text{س}^{٢}\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١\right)} = \infty \ \text{(لماذا؟)}$$

٣ $$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٨}{\text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ٥} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢}\left(١ + \frac{١}{\text{س}} - \frac{٨}{\text{س}^{٢}}\right)}{\text{س}^{٣}\left(١ + \frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٥}{\text{س}^{٣}}\right)} = \text{صفر}$$

تمارين ومسائل ٤ - ٧

١ أجد ما يأتي :

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٤} - ٧١\text{س} + ١٥)$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^{٢} + ٣)(\text{س} + ٥)}{(٣\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س} - ١} - \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ١}\right)$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢}{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٥}\right)^{٥}$

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{|٣\text{س}^{٢} - ٥|}{٣\text{س}^{٢} + ٣}\right)$

٢ إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{(\text{أ} - ٢)\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١}{\text{ب}\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٣}\right) = -١$ ، أجد قيم أ ، ب .

تعريف: إذا كان ق(س) اقتراناً ، أ عدداً حقيقياً ينتمي لمجال ق(س)، فإن ق(س) اقتران متصل عند س = أ إذا كان:

١. ق(س) معرفاً عند س = أ
٢. $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ ق(س) موجودة كعدد حقيقي.
٣. $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ ق(س) = ق(أ)

مثال ١ : إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^2 + ٣\text{س} - ٤}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١، أبحث في اتصال ق(س) عند س = ٣ ، س = ١

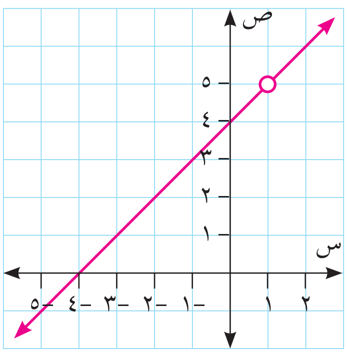
الحل : عندما س = ٣، ق(٣) = $\frac{(٣)^2 + ٣(٣) - ٤}{٣ - ١}$ = ٧ ، $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣}$ ق(س) = $\frac{(٣)^2 + ٣(٣) - ٤}{٣ - ١}$ = ٧

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣}$ ق(س) = ق(٣) ، إذن ق(س) متصل عند س = ٣

ق(س) غير معرف عند س = ١

إذن ق(س) غير متصل عند س = ١

(ألاحظ أن $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١}$ ق(س) موجودة).



مثال ٢ : إذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} \text{س}^2 + \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} < ١ \\ \sqrt{\text{س}^3 - \text{س} + ١} & ، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٣ \\ ٥ & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$$

أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ .

الحل :

١. عندما س = ٠ ، ق(٠) = ٠ + ٠ − ٣ = −٣ ،
$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠}$ ق(س) = $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠}$ (س² + س − ٣) = −٣
ق(٠) = $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠}$ ق(س) ، إذن ق(س) متصل عند س = ٠

٢. عندما س = ١ (ألاحظ أن س = ١ نقطة تحول)،

$ق(١) = \sqrt{١^{٣} - ١ + ١} = ١$

$\lim\limits_{س \leftarrow ١^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ١^{-}} (س^{٢} + س - ٣) = -١$

$\lim\limits_{س \leftarrow ١^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ١^{+}} \sqrt{س^{٣} - س + ١} = ١$

$\lim\limits_{س \leftarrow ١^{-}} ق(س) \neq \lim\limits_{س \leftarrow ١^{+}} ق(س)$

$\lim\limits_{س \leftarrow ١} ق(س)$ غير موجودة ، إذن ق(س) منفصل عند س = ١

٣ عند س = ٢

$ق(٢) = \sqrt{٢^{٣} - ٢ + ١} = \sqrt{٧}$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٢} \sqrt{٢^{٣} - ٢ + ١} = \sqrt{٧}$

$ق(٢) = \lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$ ، إذن ق(س) متصل عند س = ٢

٤ عند س = ٣ (ألاحظ أنه عند س = ٣ يوجد نقطة تحول)

$ق(٣) = \sqrt{٣^{٣} - ٣ + ١} = ٥$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٣^{-}} \sqrt{س^{٣} - س + ١} = ٥$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٣^{+}} ٥ = ٥$ ، إذن $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} ق(س) = ٥$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣} ق(س) = ق(٣)$ ، إذن ق(س) متصل عند س = ٣

٥ عندما س = ٥

$ق(٥) = ٥$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٥} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow ٥} ٥ = ٥$

$ق(٥) = \lim\limits_{س \leftarrow ٥} ق(س)$ إذن ق(س) متصل عند س = ٥

أتعلم: **إذا كان ق(س) اقتراناً متعدد القاعدة، ويغير قاعدته عند س = أ**
فإن ق(س) متصل عند س = أ ، إذا كان $\lim\limits_{س \leftarrow أ^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \leftarrow أ^{+}} ق(س) = ق(أ)$

نشاط ١: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س^{٢} - س - ٢|}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ٣ &، س = ٢ \end{cases}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٢

أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

ق(س) = ...

ق(٢) = ...

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = ... ، $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = ... ، إذن $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ....

ق(٢) .... $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) ، ومنها ....

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = س + $[\frac{س}{٢}]$ ، س ∈ [−٢، ٤[أبحث في اتصال ق(س) عند س = −١ ، ٢.

الحل : أعيد تعريف ق(س)، وأكتب ق(س) على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$ق(س) = \begin{cases} س - ١ & ، \quad -٢ \leq س < ٠ \\ س & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ س + ١ & ، \quad ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$$

١ عندما س = −١

ق(−١) = −١ − ١ = −٢ ، $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ (س − ١) = −٢

ق(−١) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ ق(س) ، إذن ق(س) متصل عند س = −١

٢ عندما س = ٢ (ألاحظ أن س = ٢ نقطة تحول)

ق(٢) = ٢ + ١ = ٣

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ س = ٢ ، إذن ق(س) منفصل عند س = ٢ (لماذا؟)

ماذا ألاحظ في سلوك الإقتران عند س = ٢ ؟

نظرية: إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ ، فإن كلاً من الاقترانات الآتية: متصلة عند س = أ :

١ (ق ± هـ)(س) **٢ (ق × هـ)(س)**

٣ ك × ق(س) ، حيث ك عدد ثابت. **٤ $(\frac{ق}{هـ})$(س) ، بشرط أن هـ(أ) ≠ ٠**

٥ $\sqrt[ن]{ق(س)}$: بشرط أن ق(أ) > ٠ ، إذا كانت ن زوجية (لماذا؟)

أتعلم:
١ إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.
٢ إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح − {أصفار المقام} .
٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً ∀ س ∈ ح فإن $ق^{ن}$(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح ، ن عدد صحيح موجب.
٤ إذا كان ق(س) = جاس فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.
٥ إذا كان ق(س) = جتاس فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح.
٦ إذا كان ق(س) = |هـ(س)|، فإن ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ ح ، عندما هـ(س) متصل .

مثال ٤ : أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية:

١ ق(س) = $س^{٢}$جتاس − ($\frac{س + ٣}{س^{٢} + ٤}$)

٢ ك(س) = ٥ + |$س^{٢}$− س − ١٢|

الحل :

١ ق(س)= $س^{٢}$جتاس − ($\frac{س + ٣}{س^{٢} + ٤}$) متصل ∀ س ∈ ح لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين.
($س^{٢}$ اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه كثير حدود، جتاس اقتران متصل ∀ س ∈ ح، $س^{٢}$جتاس متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين، ($\frac{س + ٣}{س^{٢} + ٤}$) متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران نسبي والمقام لا يساوي صفراً).

٢ ك(س) = ٥ + |$س^{٢}$− س − ١٢| متصل ∀ س ∈ ح لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين.
(٥ اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران ثابت، |$س^{٢}$− س − ١٢| اقتران متصل ∀ س ∈ ح لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران كثير حدود متصل ∀ س ∈ ح)

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على [أ، ب] فإن:
ق(س) اقتران متصل ∀ س ∈ [أ ، ب] إذا كان:
- ق(س) اقتراناً متصلاً عند كل نقطة في] أ ، ب[
- ق(س) متصلاً عند س= أ من جهة اليمين.
- ق(س) متصلاً عند س = ب من جهة اليسار.

مثال ٥ : إذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ جتا(٢\pi س) & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ ١٠ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$$

أبحث في اتصال ق(س) في [−١ ، ٢]

الحل : ١ عندما $-١ \le \text{س} < ٠$ ، $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ١$ متصل لأنه كثير حدود.

$٠ < \text{س} < ٢$ ، $\text{ق(س)} = \text{جتا}(٢\pi\text{س})$ متصل لأنه اقتران جتا س.

٢ عندما س = ٢، (نقطة طرفية) : $\text{ق}(٢) = ١٠$

$\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = ١$، ومنها $\text{ق}(٢) \ne \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$

ومنها ق(س) منفصل عند س = ٢ من جهة اليسار.

٣ عندما س = ٠، (نقطة تحول) : $\text{ق}(٠) = ١$ ، $\underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \text{جتا}(٢\pi\text{س}) = ١$

$\underset{\text{س} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ١) = -١$، ومنها ق(س) منفصل عند س = صفر

إذن ق(س) متصل $\forall$ س $\in [-١ ، ٢] - \{\text{صفر}\}$ (ق(س) غير متصل على $[-١ ، ٢]$)

تمارين ومسائل ٤ – ٨

١ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية عند النقطة المطلوبة:

أ) $\text{ق(س)} = |\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٨| + ٢\text{س}$ ، عندما س = ٢

ب) $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} \times [\text{س} - ٠,٢]$ ، عندما س = $-٠,٨$

٢ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{٥\text{س} + ١} - ٤}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} \ne ٣ \\ ٢ & ، \text{س} = ٣ \end{cases}$ ، أبحث في اتصال ق(س) عندما س = ٣.

٣ أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية على مجالها:

أ) $\text{ق(س)} = \text{جا}٢\text{س} + |٣\text{س} - ٣|$ ، س $\in$ ح.

ب) $\text{ق(س)} = [١ - \dfrac{\text{س}}{٣}]$ ، س $\in [-٣ ، ٥]$.

٤ إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٣ & ، -١ \le \text{س} < ١ \\ \text{أس} + ٢ & ، ١ \le \text{س} < ٣ \\ \dfrac{\text{ب س} + ٢}{\text{س} + ١} & ، ٣ \le \text{س} < ٥ \end{cases}$

أجد قيم أ ، ب التي تجعل ق(س) متصلاً على مجاله.

تمارين عامة:

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، −٢)؟

أ) س^٢ = ٨ ص ب) س^٢ = −٨ ص جـ) ص^٢ = ٨ س د) ص^٢ = −٨ س

٢ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله س =٥ , ٢ ؟

أ) س^٢ = ١٠ ص ب) س^٢ = $^-$١٠ ص

جـ) ص^٢ = ١٠ س د) ص^٢ = − ١٠ س

٣ اذا كان القطع المكافئ ص^٢ = ٤أ س يمر بالنقطة (١ ، ٢) فما معادلة دليل هذا القطع؟

أ) س = −١ ب) س = ١ جـ) ص = −١ د) ص = ١

٤ ما نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$ ؟

أ) قطع ناقص صادي ب) قطع ناقص سيني

جـ) قطع زائد سيني د) قطع زائد صادي

٥ ما البعد البؤري للقطع ٣٦ س^٢ + ١٠٠ ص^٢ = ٣٦٠٠؟

أ) ١٢ وحدة ب) ٢ $\sqrt{١٣٦}$ وحدة جـ) ٨ وحدات د) ١٦ وحدة

٦ إذا كانت $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (٣ق(س) − ٢ س) = ٢، ما قيمة $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)؟

أ) −٢ ب) −١ جـ) ١ د) ٢

٧ إذا كان ق(−٢) = ٣ ، $\lim_{س \leftarrow -٢}$ ق(س) = −٥ ، ما قيمة $\lim_{س \leftarrow ١}$ ٣ق(س − ٣)؟

أ) −١٥ ب) −٦ جـ) ٣ د) ٩

٨ إذا كان ق(س) = س^٢− ١ ، هـ(س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، ما قيمة $\lim_{س \leftarrow ١}$ (ق × هـ)(س)؟

أ) كمية غير معرفة ب) −١ جـ) ٢ د) ٥

٩ ما قيمة $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا \frac{\pi}{٢}}{\pi}$ ؟

أ) −١ ب) π جـ) $\frac{١}{\pi}$ د) ١

١٠ ما قيمة $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} \frac{٣س^٣ - ٥}{س^٣ + ٣}$ ؟

أ) $-\infty$ ب) ٣

جـ) ٥   د) ∞

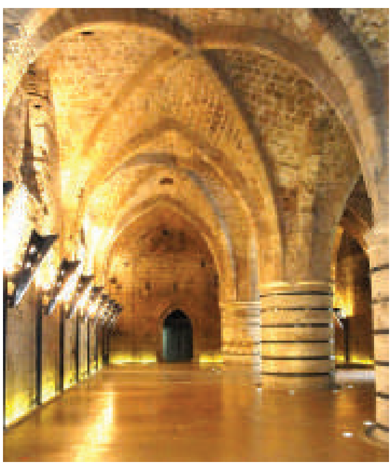
٢ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - (٣ - ٢ب) س - ٦ب}{س - ٣} &، س \neq ٣ \\ ١١ &، س = ٣ \end{cases}$

اقتراناً متصلاً على ح أجد قيمة/ قيم ب.

٣ إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} \frac{(س^٢ + ١)^٢}{أ س^٢ (س + ١)^ن} = -٢$ ، أجد قيم كل من أ ، ن .

٤ المعادلتان س = ٢ن^٢ ، ص = ٦ن حيث ن ≥ ٠، تحددان موقع جسم على منحنى في اللحظة ن، أكتب معادلة المنحنى الذي يتحرك عليه الجسم على صورة س = ق(ص)، وأعين نوع المنحنى.

٥ تشتهر المباني الفلسطينية القديمة بأقواسها، إذا كان طول قاعدة أحد الأقواس في سجن عكا على شكل قطع مكافئ يساوي ٨م، وبعد أعلى نقطة في القوس عن قاعدته يساوي ٣م، أكتب معادلة هذا القوس (علماً أنه في الوضع القياسي).



ورقة عمل (٤)

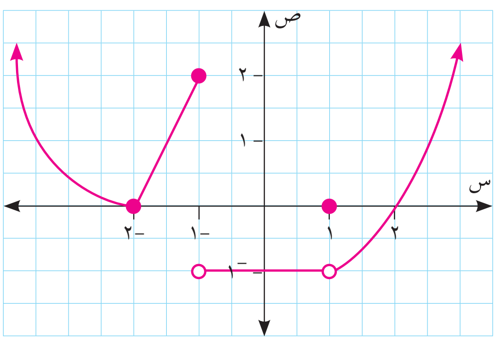
١ قطع مكافئ قياسي يمر بالنقطة (٢ ، ٨). أكتب معادلته (أكتب جميع الحالات الممكنة).

٢ أجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه نقطة الاصل ومحوره القاطع ينطبق على محور الصادات ويمر بالنقطتين (٤ ، ٦) ، (١ ، −٣) ؟

٣ أجد بؤرتي القطع الزائد $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥ - \text{د}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{د} - ١٦} = ١$

٤ جسر على شكل نصف قطع ناقص، محوره الأكبر أفقي، إذا كان طول قاعدة القوس ٢٤م، وتبعد أعلى نقطة في القوس فوق الطريق الأفقية ٦م، أجد ارتفاع القوس على بعد ٤م من مركز القاعدة.

٥ إذا كانت $\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}{\text{أ س}^{٢} (\text{س} + ١)^{\text{ن}}} = -٢$ ، أجد قيم كل من أ ، ن .



٦ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق(س) المعرف على ح، بالاعتماد عليه أجيب عن الأسئلة الآتية:

أ أجد الإحداثيات السينية لنقاط انفصال ق(س).

ب هل ق(س) متصل على [−٢ ، −١] ، ولماذا؟

جـ هل ق(س) متصل [−١ ، ∞[، ولماذا؟

د هل ق(س) متصل]−∞ ، −٢] ، ولماذا؟

هـ هل ق(س) متصل على مجاله، ولماذا؟

٧ أجد ما يأتي:

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا س} - \text{جتا ٣ س}}{١ - \text{جتا ٧س}}$

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا ٥ س}}{\text{س جا ٥ س}}$

نموذج امتحان الفصل الثاني

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ . معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، −٥) هي:

أ) ص٢ = −٢٠س.   ب) ص٢ = ٢٠س.   جـ) س٢ = ٢٠ص.   د) س٢ = −٢٠ص.

٢ . المعادلة $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢} - \text{ك}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}} = \text{١}$ ، ك > ٥ تمثل معادلة قطع:

أ) زائد سيني.   ب) زائد صادي.   جـ) ناقص سيني.   د) ناقص صادي.

٣ . إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ح، وكانت $\underset{\text{س} \leftarrow \text{١}}{\text{نها}}$ (٥ق(س+٢) −٢س) = ٨١ فإن ق(٣) تساوي:

أ) ٨ , ٤.   ب) ٢٠.   جـ) ٤.   د) ٢ , ٣.

٤ . الاقتران ق(س) = [س+٠ , ٤] متصل عند س تساوي:

أ) صفر.   ب) ٦ , ٠.   جـ) ٦ , ١.   د) −٤ , ٠.

٥ . $\underset{\text{س} \leftarrow -\infty}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^{٢} - \text{٢})(\text{٢س} + \text{٣})}{\text{س}^{٢} - \text{٤س}^{٣}}$ يساوي:

أ) −٥ , ٠.   ب) ٥ , ٠.   جـ) ∞ .   د) صفر

٦ . $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٣}^{-}}{\text{نها}} \frac{|\text{س}^{٢} - \text{٩}|}{\text{س} - \text{٣}}$:

أ) ٦.   ب) −٦.   جـ) صفر.   د) غير موجودة.

٧ . $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نها}} \frac{\text{س جاس} - \text{ظا٣س}}{\text{جا٤س} - \text{٢س}}$ تساوي :

أ) −١.   ب) ١.   جـ) $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$.   د) $-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$.

٨ . قطع ناقص معادلته ٨س٢ + ٩ص٢ = ٧٢ ، ما طول محوره الأكبر ؟

أ) ٦.   ب) ٣.   جـ) ٤ $\sqrt{\text{٢}}$.   د) ٢

س٢: أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية على مجالها:

أ. $ق(س) = جا٢س + |٣س - ٣|$ ، $س \in ح$.

ب. $ق(س) = [١ - \frac{س}{٣}]$ ، $س \in [-٣ ، ٥]$.

س٣: أ) جد معادلة منحنى القطع الزائد الذي مركزه (٠ ، ٠)، والبعد بين بؤرتيه ١٠، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$، ومحوره القاطع ينطبق على محور السينات، ثم ارسم منحناه.

ب) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١} & ، س > ١ \\ أ & ، س = ١ \\ س^٢ + ب & ، س < ١ \end{cases}$ ، متصلاً على ح، جد قيم الثابتين أ، ب.

س٤: أ) جد: ١- $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \frac{(س + ١)^٦ - ٦٤}{س^٢ - س}$ ٢- $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جتا٤س - جتا٢س}{س^٢}$

ب) تتحرك النقطة ن (س، ص) في المستوى، بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (٠، ٤) ، (٠، -٤) يساوي ١٠ وحدات دائماً.

أوجد معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة.

ملحق قوانين رياضية:

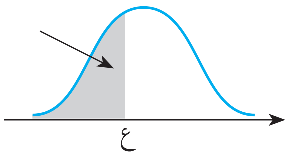
١
- جا^{٢} س + جتا^{٢}س = ١
- ظا^{٢}س + ١ = قا^{٢}س
- ١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢} س

٢
- جا(π − س) = جاس
- جا(π + س) = − جاس
- جا(− س) = − جاس

٣
- جتا(π − س) = − جتاس
- جتا(π + س) = − جتاس
- جتا(− س) = جتاس

٤
- ظا(π − س) = − ظاس
- ظا(π + س) = ظاس
- ظا(− س) = − ظاس

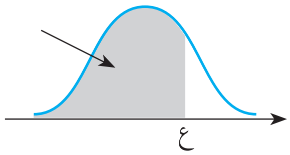
٥
- جا(٢س) = ٢ جاس جتاس
- جتا(٢س) =
  - جتا^{٢}س − جا^{٢}س
  - ١ − ٢جتا^{٢}س
  - ٢ جا^{٢}س − ١



ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
-٣,٧	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٦	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٥	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢
-٣,٤	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
-٣,٣	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
-٣,٢	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
-٣,١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
-٣,٠	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
-٢,٩	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
-٢,٨	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
-٢,٧	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
-٢,٦	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
-٢,٥	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
-٢,٤	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
-٢,٣	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
-٢,٢	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
-٢,١	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
-٢,٠	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
-١,٩	٠,٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
-١,٨	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
-١,٧	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
-١,٦	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
-١,٥	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
-١,٤	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
-١,٣	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
-١,٢	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
-١,١	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
-١,٠	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
-٠,٩	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
-٠,٨	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
-٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
-٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
-٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
-٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
-٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
-٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
-٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١

تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي



ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩