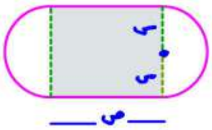
مثال (هام - كتاب مدرسي)

مضمار سباق طوله ٤٠٠ متر يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟



الحل

مساحة المستطيل $م = ٢س \times ص$ —① (اقتران الهدف)

طول المضمار $= ٤٠٠ \Leftarrow ٢\pi س + ٢ص = ٤٠٠$ (علاقة مساعدة)

$٢ص = ٤٠٠ - ٢\pi س$ ومنه $ص = ٢٠٠ - \pi س$ —②

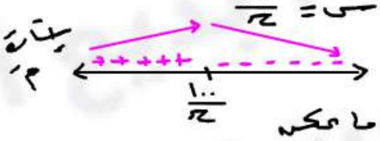
بالتعويض عن ص في ① $\Leftarrow م = ٢س (٢٠٠ - \pi س)$

$م = ٤٠٠س - ٢\pi س^{٢}$

$م' = ٤٠٠ - ٤\pi س = ٠$

$\Leftarrow ٤\pi س = ٤٠٠ \Leftarrow س = \frac{١٠٠}{\pi}$

من إشارة م' نلاحظ



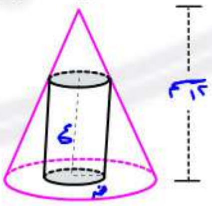
أن المساحة تكون أكبر ما يمكن

عندما $س = \boxed{\frac{١٠٠}{\pi}}$

من ② $\Leftarrow ص = ٢٠٠ - \cancel{\pi} \times \frac{١٠٠}{\cancel{\pi}} = \boxed{١٠٠}$

مثال (مهم كتاب مدرسي)

جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢سم ونصف قطر قاعدته ٤سم.



الحل نفرض ارتفاع الأسطوانة = ع

ونصف قطرها = نق

حجم الأسطوانة $ح = \pi نق^{٢} \times ع$ —① اقتران الهدف

من تشابه المثلثين: $\frac{نق}{٤} = \frac{١٢ - ع}{١٢}$ علاقة مساعدة

$\Leftarrow ٣نق = ١٢ - ع \Leftarrow ع = ١٢ - ٣نق$ —②

بالتعويض عن ع في ①

$ح = \pi نق^{٢} (١٢ - ٣نق)$

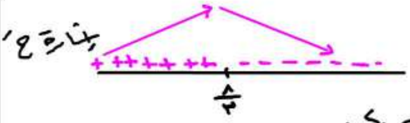
$ح = ١٢\pi نق^{٢} - ٣\pi نق^{٣}$

$ح' = ٢٤\pi نق - ٩\pi نق^{٢} = ٠$

$\Leftarrow ٣\pi نق (٨ - ٣نق) = ٠$

إما $نق = ٠$ مرفوض أو $٨ - ٣نق = ٠ \Leftarrow نق = \frac{٨}{٣}$

من إشارة ح'



نلاحظ أن حجم الأسطوانة يكون أكبر ما يمكن عندما $نق = \frac{٨}{٣}$ سم

$\Leftarrow ح = \pi (\frac{٨}{٣})^{٢} (١٢ - ٣ \times \frac{٨}{٣}) = \frac{٢٥٦}{٩}\pi$ سم^{٣}

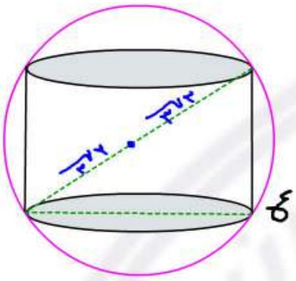
مثال جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية ذات أكبر حجم ممكن التي يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها $٣\sqrt{٣}$

الحل

حجم الأسطوانة $ح = \pi نق^{٢} \times ع$ —① اقتران الهدف

من فيثاغورس:-

$(٢نق)^{٢} + ع^{٢} = (٦\sqrt{٣})^{٢}$ قاعدة مساعدة



$٤نق^{٢} + ع^{٢} = ١٠٨$

$نق^{٢} = \frac{١٠٨ - ع^{٢}}{٤}$

بالتعويض في ①

$\Leftarrow ح = \pi (\frac{١٠٨ - ع^{٢}}{٤}) \times ع$

$ح = \frac{\pi}{٤} (١٠٨ع - ع^{٣})$

$ح' = \frac{\pi}{٤} (١٠٨ - ٣ع^{٢})$

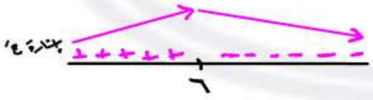
$\frac{\pi}{٤} (١٠٨ - ٣ع^{٢}) = ٠$

$\Leftarrow ١٠٨ - ٣ع^{٢} = ٠$

$\Leftarrow ٣ع^{٢} = ١٠٨$

$\Leftarrow ع^{٢} = ٣٦ \Leftarrow ع = \pm ٦$ نأخذ فقط ٦

من إشارة ع'



نلاحظ أن الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما ع = ٦

*ملاحظة:- لو طلب أكبر حجم نعوض في معادلة الحجم عن ع=٦

مثال : جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها $٥\sqrt{٢}$

الحل :

نفرض أبعاد المستطيل س ، ص

مساحة المستطيل :

$م = س \times ص$ ——— ① إقتران الهدف

من فيثاغورث $س^٢ + ص^٢ = (١٠\sqrt{٢})^٢$ علاقة مساعدة

$س^٢ + ص^٢ = ٢٠٠$

$ص^٢ = ٢٠٠ - س^٢ \Rightarrow ص = \sqrt{٢٠٠ - س^٢}$

بالتعويض عن ص في ①

$م = س\sqrt{٢٠٠ - س^٢}$

$م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٢٠٠ - س^٢}} + \sqrt{٢٠٠ - س^٢}$

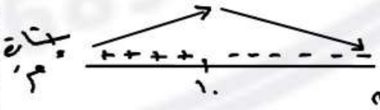
$م' = \frac{-س^٢}{\sqrt{٢٠٠ - س^٢}} + \sqrt{٢٠٠ - س^٢}$

$م' = ٠$

$\Rightarrow \frac{س^٢}{\sqrt{٢٠٠ - س^٢}} = \sqrt{٢٠٠ - س^٢}$

$\Rightarrow س^٢ = ٢٠٠ - س^٢ \Rightarrow ٢س^٢ = ٢٠٠$

$\Rightarrow س^٢ = ١٠٠$ ومنه $س = \pm ١٠$ نأخذ الموجب فقط



من إشارة م' نلاحظ أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما $س = \boxed{١٠ سم}$

من ② $ص = \sqrt{٢٠٠ - ١٠٠} = \sqrt{١٠٠} = \boxed{١٠ سم}$

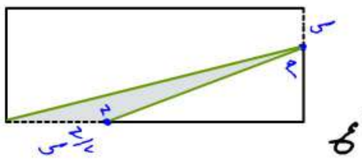
مثال :- (مهم - كتاب مدرسي)

أ ب جـ د مستطيل عرضه أ ب = ٨ سم وطوله ب جـ = ١٠ سم

م تقع على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم ، ن تقع على الضلع ب جـ بحيث $ن جـ = \frac{٣}{٢} س$ سم ، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن جـ أكبر ما يمكن

تابع ← الحل

الحل



مساحة المثلث م ن جـ

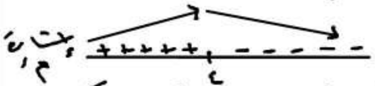
$م = \frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} س \times (٨ - س)$ إقتران الهدف

$= ٦س - \frac{٣}{٤} س^٢$

$م' = ٦ - \frac{٣}{٢} س = ٠ \Rightarrow \frac{٣}{٢} س = ٦$

$\Rightarrow س = \boxed{٤}$



من إشارة م' نلاحظ أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما س = ٤

مثال : معلبة على شكل أسطوانة دائرية مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢π سم³ ، فإذا علمت أن سعر كل ١ سم² من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة يعادل ٣ أمثال سعر ١ سم² من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب جد أبعاد المعلبة ذات الأقل تكلفة .

الحل :

تكلفة الجوانب = سعر ١ سم² × المساحة

$= ١ \times ٢\pi نق \times ع = ٢\pi نق ع$

تكلفة القاعدة = سعر ١ سم² × المساحة

$= ٣ \times \pi نق^٢$

التكلفة الكلية ت = تكلفة الجوانب + تكلفة القاعدة

$ت = ٢\pi نق ع + ٣\pi نق^٢$ ——— ① إقتران الهدف

$الحجم = \pi نق^٢ \times ع = ١٩٢\pi$ القاعدة المساعدة

$\Rightarrow ع = \frac{١٩٢\pi}{\pi نق^٢} = \frac{١٩٢}{نق^٢}$ ——— ②

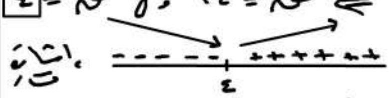
بالتعويض في ①

$\Rightarrow ت = ٢\pi نق \times \frac{١٩٢}{نق^٢} + ٣\pi نق^٢$

$ت = \frac{٣٨٤\pi}{نق} + ٣\pi نق^٢$

$ت' = -\frac{٣٨٤\pi}{نق^٢} + ٦\pi نق = ٠$

$\Rightarrow \frac{٣٨٤\pi}{نق^٢} = ٦\pi نق \Rightarrow نق^٣ = ٦٤$ ومنه $نق = \boxed{٤}$



من إشارة ت' نلاحظ أن أقل تكلفة تكون عندما نق = ٤ سم

بالتعويض في ② $\Rightarrow ع = \frac{١٩٢}{١٦} = \boxed{١٢ سم}$

مثال : (كتاب مدرسي منهاج قديم)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ومتساوي الساقين فيه أ ب = ٦ سم جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر أ ب ويقع الرأسان الآخران على ضلعي القائمة .

الحل : مساحة المستطيل

م = س ص ——— ① إقتران الهدف

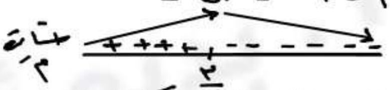
من الشكل المجاور ٢ص + س = ٦ قاعدة مساعدة

س = ٦ - ٢ص ——— ②

بالتعويض في ① ⇐ م = (٦ - ٢ص) × ص

م = ٦ ص - $٢ص^{٢}$ ⇐ م' = ٦ - ٤ ص = ٠

⇐ ص = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$



من إشارة م' نلاحظ أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما ص = $\frac{٣}{٢}$ سم

من ② س = ٦ - ٢ × $\frac{٣}{٢}$ = ٣ سم

من ① ⇐ أكبر مساحة م = س × ص = ٣ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ $سم^{٢}$

مثال : (٢٠١٢ وزارة)

جد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة $ص^{٢}$ - ٢ص + ٤س = ٢٣ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (٣ ، ١) .

الحل

نفرض النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى

المسافة بين النقطة (س ، ص) ، (٣ ، ١)

ف = $\sqrt{(س - ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢}}$ ——— ① إقتران الهدف

ف = $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩ + ص^{٢} - ٢ص + ١}$

بما أن : $ص^{٢}$ - ٢ص + ٤س = ٢٣ العلاقة المساعدة

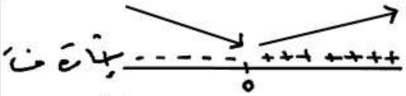
نلاحظ أن $ص^{٢}$ - ٢ص = ٢٣ - ٤س

⇐ ف = $\sqrt{س^{٢} - ٦ س + ٩ + ٢٣ - ٤س + ١}$

⇐ ف = $\sqrt{س^{٢} - ١٠س + ١١}$

ف' = $\frac{٢س - ١٠}{٢\sqrt{س^{٢} - ١٠س + ١١}}$ = ٠ ⇐ ٢س - ١٠ = ٠

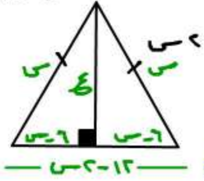
ومنها س = ٥



من إشارة ف' نلاحظ أن المسافة تكون أقل ما يمكن عندما الإحداثي السيني س = ٥

مثال :- (هام)

سلك معدني طوله ١٢ سم ثني ليكون مثلث متساوي الساقين ما أطوال أضلاع المثلث بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن؟



الحل : نفرض س أحد الساقين فيكون الثالث = ١٢ - ٢س

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الإرتفاع

م = (٦ - س) × ع ——— ① إقتران الهدف

من فيثاغورث : $ع^{٢}$ + $(٦ - س)^{٢}$ = $س^{٢}$ علاقة مساعدة

$ع^{٢}$ + ٣٦ - ١٢ س + $س^{٢}$ = $س^{٢}$

⇐ $ع^{٢}$ = ١٢س - ٣٦ ⇐ ع = $\sqrt{١٢س - ٣٦}$ ——— ②

بالتعويض عن ع في ①

⇐ م = (٦ - س) × $\sqrt{١٢س - ٣٦}$

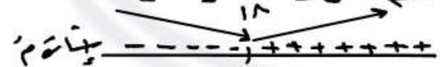
م' = -١ × $\sqrt{١٢س - ٣٦}$ + (٦ - س) × $\frac{\cancel{١٢}\ ٦}{\cancel{٢}\sqrt{١٢س - ٣٦}}$

⇐ م' = - $\sqrt{١٢س - ٣٦}$ + $\frac{٣٦ - ٦س}{\sqrt{١٢س - ٣٦}}$

م' = ٠ ⇐ $\frac{٣٦ - ٦س}{\sqrt{١٢س - ٣٦}}$ $\cancel{=}$ $\sqrt{١٢س - ٣٦}$

⇐ ٣٦ - ٦س = ١٢س - ٣٦

⇐ ١٨س = ٧٢ ⇐ س = $\frac{٧٢}{١٨}$ = ٤



من إشارة م'

نلاحظ أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما س = ٤سم

الضلع الثالث = ١٢ - ٢س = ١٢ - ٢(٤) = ١٢ - ٨ = ٤سم

إذن أطوال أضلاع المثلث هي ٤سم ، ٤سم ، ٤سم

مثال: (كتاب مدرسي)

جد النقطة / النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) = س + $\frac{١}{س}$ يوازي القاطع الواصل بين النقطتين (١، ٢)، (٢، $\frac{٥}{٢}$) .

الحل: نفرض نقطة التماس (س، ص)

ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص)

= ق'(س) = ١ − $\frac{١}{س^٢}$

∵ ميل المماس يوازي ميل القاطع المار بالنقطتين (١، ٢)، (٢، $\frac{٥}{٢}$)

⇐ ١ − $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{\frac{٥}{٢} - ٢}{٢ - ١}$

١ − $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ $\frac{١}{س^٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ س² = ٢

⇐ س = ± √٢ (يوجد نقطتي تماس)

س = √٢ ⇐ ص = ق(√٢) = √٢ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$

س = −√٢ ⇐ ص = ق(−√٢) = −√٢ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $-\frac{٣}{\sqrt{٢}}$

إذن النقاط هي (√٢، $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$)، (−√٢، $-\frac{٣}{\sqrt{٢}}$)

مثال: (كتاب مدرسي)

إذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢، −١) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤}$

أ) −١   ب) −$\frac{١}{٢}$ ج) −١   د) −٢

الحل: ق'(٢) = ظا ١٣٥ = −١ —— ①

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{٢س - ٤} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال = $\lim_{س \to ٢} \frac{ق'(س)}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ق'(٢)

من ① = $\frac{١}{٢}$ × −١ = −$\frac{١}{٢}$ الجواب (ب)

مثال: (٢٠٠٧ إكمال)

إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٣، ٠) هي ٢س − ٣ص = ٦ فإن ق'(٣)

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ ج) −$\frac{٣}{٢}$ د) −$\frac{٢}{٣}$

الحل: ص = $\frac{٢س - ٦}{٣}$ ⇐ ميل العمودي = $\frac{٢}{٣}$

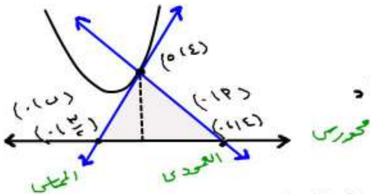
⇐ ميل المماس عند النقطة (٣، ٠)

⇐ ق'(٣) = −$\frac{٣}{٢}$ الإجابة (ج)

مثال: (كتاب مدرسي منهاج قديم - محم)

جد مساحة المنطقة المثلثية المحصورة بين محور السينات والمماس والعمودي على منحنى ق(س) = س² − ٦س + ١٣ عند النقطة (٤، ٥) الواقعة عليه

الحل:



فكرة الحل تعتمد على إيجاد نقاط تقاطع المماس وكذلك العمودي مع محور السينات لإيجاد طول قاعدة المثلث ثم نطبق قاعدة مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع حيث الارتفاع = ٥

ق'(س) = ٢س − ٦

ميل المماس م = ق'(٤) = ٨ − ٦ = ٢

إذن نقطة التماس (٤، ٥) والميل م = ٢

فتكون معادلة المماس ص − ٥ = ٢(س − ٤)

ص − ٥ = ٢س − ٨ ⇐ ص = ٢س − ٣

نقطة تقاطع المماس مع السينات عندما ص = ٠

⇐ ٢س − ٣ = ٠ ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$

إذن يتقاطع المماس مع السينات في ($\frac{٣}{٢}$، ٠)

نفس الفرضية ميل المماس = ٢ ⇐ ميل العمودي = −$\frac{١}{٢}$

⇐ معادلة العمودي هي ص − ٥ = −$\frac{١}{٢}$(س − ٤)

ص − ٥ = −$\frac{١}{٢}$ س + ٢ ⇐ ص = −$\frac{١}{٢}$س + ٧

يتقاطع العمودي مع السينات عندما ص = ٠

⇐ ٠ = −$\frac{١}{٢}$س + ٧ ⇐ س = ١٤

نقطة تقاطع العمودي مع السينات هي (١٤، ٠)

⇐ طول قاعدة المثلث = ١٤ − $\frac{٣}{٢}$ = ١٢,٥

إذن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢,٥ × ٥ = ٣١,٢٥ وحدة مربعة

حل آخر للسؤال (على نفس الرسم)

ق'(س) = ٢س − ٦

ميل المماس م = ق'(٤) = ٢

نفرض (ب، ٠) نقطة تقاطع المماس مع السينات

المماس يمر بالنقطتين (٤، ٥)، (ب، ٠)

الميل من التفاضل = الميل من التحليلية

= ٢ = $\frac{٥ - ٠}{٤ - ب}$ ⇐ ٨ - ٢ب = ٥ ⇐ ٢ب = ٣

⇐ ب = $\frac{٣}{٢}$ ⇐ نقطة تقاطع المماس مع السينات ($\frac{٣}{٢}$، ٠)

نفرض أن (أ، ٠) نقطة تقاطع العمودي مع السينات

ميل العمودي = - $\frac{١}{٢}$

الميل من التفاضل = الميل من التحليلية

⇐ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥ - ٠}{٤ - أ}$ ⇐ ٤ - أ = ١٠ ⇐ أ = ١٤

⇐ نقطة تقاطع العمودي مع السينات (١٤، ٠)

⇐ طول قاعدة المثلث = ١٤ - $\frac{٣}{٢}$ = ١٢,٥

⇐ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٢,٥ × ٥

= ٣١,٢٥ وحدة مربعة

مثال: (كتاب مدرسي قديم)

إذا كان المستقيم س = أ - ٦ص يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٣س}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ جد قيم أ .

الحل:

المستقيم س = أ - ٦ص ⇐ ص = $\frac{أ - س}{٦}$

إذن ميل المستقيم = - $\frac{١}{٦}$

نفرض نقطة التماس (س، ص)

ميل المماس = ق'(س) = $\frac{(س - ٢) × ٣ - ١ × ٣س}{(س - ٢)^٢}$

⇐ ق'(س) = $\frac{-٦}{(س - ٢)^٢}$

ميل المماس = ميل المستقيم ⇐ $\frac{-٦}{(س - ٢)^٢}$ = - $\frac{١}{٦}$

⇐ (س - ٢)^٢ = ٣٦ ⇐ س - ٢ = ±٦

س - ٢ = ٦ ⇐ س = ٨

(س - ٢) = - ٦ ⇐ س = -٤

يوجد نقطتا تماس هما

(٨، ق(٨)) = (٨، ٤) ، (-٤، ق(-٤)) = (-٤، ٢)

(٨، ٤) تقع على المستقيم ⇐ تحقق معادلته وبالتعويض فيها

⇐ ٨ = أ - ٦ × ٤ ⇐ ٨ + ٢٤ = أ ⇐ أ = $\boxed{٣٢}$

كذلك بالنسبة للنقطة (-٤، ٢)

٨ = أ - ٦ × -٢ ⇐ ٨ - ١٢ = أ ⇐ أ = $\boxed{٤}$

مثال: (فلسطين ٢٠١٢)

إذا كان ق(س) = $\frac{س^٢ + ١}{ك(س)}$ ، ك(س) ≠ ٠ وكان لمنحنى ك(س) مماساً أفقياً عند النقطة (١، ٢) جد ق'(١) .

الحل

ق'(س) = $\frac{ك(س) × ٢س - ك'(س)(س^٢ + ١)}{(ك(س))^٢}$

ق'(١) = $\frac{ك(١) × ٢ - ك'(١) × (٢)}{(ك(١))^٢}$ ⟵ ①

ك(س) له مماس أفقي عند (١، ٢) ⇐ ك'(١) = ٠

(١، ٢) تقع على منحنى ك(س) ⇐ ك(١) = ٢

بالتعويض في ①

ق'(١) = $\frac{٢ × ٢ - ٠ × ٢}{٢^٢}$ = $\frac{٤}{٤}$ = ١

مثال:

معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س + $\frac{٤}{س^٢}$ والذي يوازي محور السينات هي:

أ) ص = ٠ ب) ص = ١ ج) ص = ٣ د) ص = -٤

الحل:

لإيجاد المعادلة نحتاج الميل م ونقطة التماس

ميل المماس م = ٠ لأنه يوازي محور السينات

نفرض نقطة التماس هي (س، ص)

ميل المماس م = ق'(س) = ١ + $\frac{٤ × -٢س}{س^٤}$

م = ١ - $\frac{٨}{س^٣}$

ميل المماس = ٠ ⇐ ١ - $\frac{٨}{س^٣}$ = ٠

$\frac{٨}{س^٣}$ = ١ ⇐ س^٣ = ٨ ⇐ س = ٢

ص = ق(٢) = ٢ + $\frac{٤}{٢^٢}$ = ٣

إذن نقطة التماس (س، ص) = (٢، ٣)

معادلة المماس ص - ٣ = م(س - ٢)

ص - ٣ = ٠(س - ٢) ⇐ ص = ٣

الإجابة ج

مثال :

إذا كانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى $هـ(س)$ عند النقطة الواقعة عليه والتي إحداثيها السيني $= ١$ هي $٢س + ص - ٥ = ٠$. وكان $ل(س) = س^{٣} \times هـ(س)$

جد $ل'(١)$.

الحل : $ل'(س) = س^{٣} \times هـ'(س) + ٣س^{٢} \times هـ(س)$

$ل'(١) = هـ'(١) + ٣هـ(١)$

معادلة المماس هي $ص = ٥ - ٢س$

$\Leftarrow$ ميل المماس $= -٢ \Leftarrow هـ'(١) = -٢$

نقطة التماس هي $(\underset{س}{١} ، \underset{ص}{هـ(١)})$ تقع على المماس

إذن تحقق معادلته

$ص = ٥ - ٢س \Rightarrow ص = ٥ - ٢(١) = ٣ = هـ(١)$

$\Leftarrow ل'(١) = هـ'(١) + ٣هـ(١) = -٢ + ٣(٣) = ٧$

مثال : (كتاب مدرسي)

جد معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = ٣ - ظا^{٢}س$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$.

الحل : نقطة التماس هي $(\frac{\pi}{٤} ، ق(\frac{\pi}{٤}))$

$ق(\frac{\pi}{٤}) = ٣ - ظا^{٢}\frac{\pi}{٤} = ٣ - (١)^{٢} = ٢$

$\Leftarrow$ نقطة التماس $= (\frac{\pi}{٤} ، ٢)$

ميل المماس عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٢) = ق'(\frac{\pi}{٤})$

$ق'(س) = -٢ ظاس \times قا^{٢}س$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = -٢ ظا\frac{\pi}{٤} \times قا^{٢}\frac{\pi}{٤}$

$= -٢ \times ١ \times (\sqrt{٢})^{٢} = -٤$

إذن معادلة المماس $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٢ = -٤(س - \frac{\pi}{٤})$

$ص - ٢ = -٤س + \pi$

$ص = -٤س + (\pi + ٢)$

مثال :

إذا تحرك جسم وفق العلاقة $ف = ن^{٢} - ٦ن$ فإن سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عددياً عند $ن =$

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٦ د) صفر

الحل: السرعة والتسارع يتساويان عند $ع = ت$

$ع = ف' = ٢ن - ٦$

$ت = ع' = ٢$

$\Leftarrow ٢ن - ٦ = ٢ \Leftarrow ٢ن = ٨ \Leftarrow ن = ٤$

الإجابة (ب)

مثال : إذا تحرك جسم وفق العلاقة $ف = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ١١$ فإن سرعة هذا الجسم عندما ينعدم تسارعه

أ) ٣م/ث ب) −٣م/ث جـ) ١١م/ث د) صفر

الحل : ينعدم التسارع عندما $ت = ٠$

$ع = ف' = ٣ن^{٢} - ٦ن$

$ت = ع' = ٦ن - ٦$

$ت = ٠ \Leftarrow ٦ن - ٦ = ٠ \Leftarrow ن = ١$

المطلوب $ع(١) = ٣(١)^{٢} - ٦(١) = ٣ - ٦ = -٣$م/ث

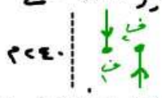
الجواب (ب)

مثال : إذا تحرك جسم في خط مستقيم حيث $ف(ن)$ الإزاحة بعد ن ثانية فإن السرعة اللحظية

أ) $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ ب) $\frac{\Delta ع}{\Delta ن}$ جـ) $\frac{دع}{دن}$ د) $\frac{دف}{دن}$

الحل : السرعة اللحظية $= \frac{دف}{دن}$ الإجابة (د)

مثال : سقط جسم من إرتفاع ٢٤٠ متر حسب العلاقة $ف_{١}(ن) = ٥ن^{٢}$ وقذف جسم من الأرض حسب العلاقة $ف_{٢}(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$ جد سرعة الجسمين عندما يكونان على نفس الإرتفاع



الحل : الجسمان على نفس الارتفاع عندما $ف_{١}(ن) + ف_{٢}(ن) = ٢٤٠$

$٥ن^{٢} + ٦٠ن - ٥ن^{٢} = ٢٤٠ \Leftarrow ٦٠ن = ٢٤٠ \Leftarrow ن = ٤$

سرعة الجسم الأول $= ع_{١}(١)$

$ع_{١}(ن) = ١٠ن$

$ع_{١}(٤) = ١٠ \times ٤ = ٤٠$م/ث

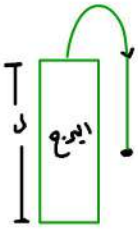
سرعة الجسم الثاني $= ع_{٢}(١)$

$ع_{٢}(ن) = ٦٠ - ١٠ن$

$ع_{٢}(٤) = ٦٠ - ١٠ \times ٤ = ٢٠$م/ث

هام

مثال: من قمة برج أطلق جسم رأسياً لأعلى وفق العلاقة $ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢}$ حيث المسافة بالأمتار والزمن بالثواني، فإذا وصل الجسم إلى الأرض بسرعة ٥٠ م/ث جد ارتفاع البرج



الحل: الجسم هابط ⇐ $ع = -٥٠$ م/ث

$ع = ف' = ٤٠ - ١٠ن$

$٤٠ - ١٠ن = -٥٠$

$١٠ن = ٩٠ \Leftarrow ن = ٩$

أي أن الجسم يصل الأرض بعد ٩ ثوان

وعندما يصل الجسم إلى الأرض يكون $ف(٩) = -ل$

حيث ل = طول البرج (الإشارة − لأن الجسم هابط)

$ف(٩) = ٤٠ \times ٩ - ٥ \times ٩^{٢} = ٣٦٠ - ٤٠٥ = -٤٥$

⇐ $-ل = -٤٥$ ⇐ طول البرج $ل = ٤٥$ متر

مثال: (هام - فلسطين ٢٠١٤)

قذف جسم رأسياً لأعلى وكان ارتفاعه ف بالأمتار عن نقطة القذف يعطى بالعلاقة $ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن^{٢}$ جد سرعة الجسم عندما يكون قطع مسافة ٢٧٢ متر.

الحل: أقصى ارتفاع للجسم عندما $ع(ن) = ٠$:

⇐ $ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن = ٠$

⇐ $٣٢ن = ١٢٨ \Leftarrow ن = ٤$

أقصى ارتفاع = $ف(٤) = ١٢٨ \times ٤ - ٦٤ \times ١٦ = ٢٥٦$م

إذن عندما يقطع الجسم مسافة ٢٧٢ متر يكون هابط

⇐ $ف(ن) = ٢ \times$ أقصى ارتفاع − المسافة الكلية

⇐ $ف(ن) = ٢ \times ٢٥٦ - ٢٧٢ = ٢٤٠$

⇐ $١٢٨ن - ١٦ن^{٢} = ٢٤٠$

⇐ $١٦ن^{٢} - ١٢٨ن + ٢٤٠ = ٠$ بالقسمة على ١٦

⇐ $ن^{٢} - ٨ن + ١٥ = ٠ \Leftarrow (ن - ٣)(ن - ٥) = ٠$

⇐ $ن = ٣$ مرفوض ، $ن = ٥$ مقبول لأن الجسم هابط

إذن الجسم يقطع مسافة ٢٧٢ متر عندما $ن = ٥$

وتكون السرعة = $ع(٥)$

$= ١٢٨ - (٣٢ \times ٥) = ١٢٨ - ١٦٠ = -٣٢$ م/ث

مثال: سقط جسم من سطح برج بحيث كانت المسافة المقطوعة $ف_{١} = ١٦ن^{٢}$ وفي نفس اللحظة سقط جسم آخر حسب العلاقة $ف_{٢} = ٤٠ن + ١٦ن^{٢}$ فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد ثانية واحدة من وصول الجسم الثاني جد:

① ارتفاع البرج

② سرعة ارتطام كلاً من الجسمين بالأرض

الحل:

① زمن وصول الجسم الثاني = زمن وصول الجسم الأول +1

نفرض زمن وصول الجسم الثاني $ن_{١} = ن$

⇐ زمن وصول الجسم الأول $ن_{٢} = ن + ١$

المسافة التي يقطعها الجسمان متساوية وهي تساوي طول البرج (ل)

$ف_{١}(ن_{١}) = ف_{٢}(ن_{٢})$

$ف_{١}(ن + ١) = ف_{٢}(ن)$

$١٦(ن + ١)^{٢} = ٤٠ن + ١٦ن^{٢}$

$١٦(ن^{٢} + ٢ن + ١) = ٤٠ن + ١٦ن^{٢}$

$١٦ن^{٢} + ٣٢ن + ١٦ = ٤٠ن + ١٦ن^{٢}$

ومنه $٣٢ن - ٤٠ن = -١٦$

⇐ $-٨ن = -١٦ \Leftarrow ن = ٢$

طول البرج $ل = ف_{١}(ن + ١)$ أو $ف_{٢}(ن)$

$= ف_{١}(٣)$ أو $ف_{٢}(٢)$ (خذ واحدة منهم لأنهم متساويات)

$ل = ف_{١}(٣) = ١٦(٣)^{٢} = ١٦ \times ٩ = ١٤٤$ متر

② سرعة الجسم الأول = $ع_{١}(٣)$

$ع_{١}(ن) = ف_{١}'(ن) = ٣٢ن$

⇐ $ع_{١}(٣) = ٣٢ \times ٣ = ٩٦$ متر/ثانية

سرعة الجسم الثاني = $ع_{٢}(٢)$

$ع_{٢}(ن) = ف_{٢}'(ن) = ٤٠ + ٣٢ن$

⇐ $ع_{٢}(٢) = ٤٠ + ٦٤ = ١٠٤$ متر/ث

مثال: يتحرك جسم وفق العلاقة $ع = ٦\sqrt{ف}$ حيث ع، ف السرعة والإزاحة فإن تسارع الجسم =

أ) ٣٦ ب) ١٨ جـ) ٩ د) ٦

الحل: $ع = ٦\sqrt{ف}$ بتربيع الطرفين $\Leftarrow ع^{٢} = ٣٦ف$

بالإشتقاق ضمنياً بالنسبة للزمن

$$٢ع \frac{دع}{دن} = ٣٦ \frac{دف}{دن}$$

$$٢ع\,ت = ٣٦\,ع$$

$٢ت = ٣٦ \Leftarrow ت = ١٨$ الإجابة (ب)

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة $ف = ن^{جـ}$ ، $جـ > ٠$. فإذا كان سرعة الجسم عند ن = ١٠ تساوي ضعف سرعته عندما ن = ٥ فإن قيمة الثابت جـ

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٣ د) ٥

الحل: $ع(١٠) = ٢ع(٥)$ ، $ع(ن) = جـ(ن)^{جـ-١}$

$\Leftarrow جـ(١٠)^{جـ-١} = ٢جـ(٥)^{جـ-١} \Leftarrow ١٠^{جـ-١} = ٢(٥)^{جـ-١}$

$\Leftarrow ٢^{جـ-١} \times ٥^{جـ-١} = ٢ \times ٥^{جـ-١} \Leftarrow ٢^{جـ-١} = ٢ = ٢^{١}$

ومنه $جـ - ١ = ١ \Leftarrow جـ = ٢$ الإجابة (أ)

مثال: إذا كان $ع^{٢} = ف^{٣}$ حيث ع سرعة جسم وف الإزاحة بالأمتار فإن قيمة التسارع عند ع = ٨

أ) ٣٢ م/ث² ب) ٢٤ م/ث² جـ) ٤٢ م/ث² د) ٢٣ م/ث²

الحل: بالإشتقاق ضمنياً بالنسبة للزمن

$$٢ع \times \frac{دع}{دن} = ٣ف^{٢} \times \frac{دف}{دن}$$

$$٢ع \times ت = ٣ف^{٢} \times ع$$

$\Leftarrow ٢ت = ٣ف^{٢}$ ——①

من المعادلة $ع^{٢} = ف^{٣}$ عندما ع = ٨

$\Leftarrow ٦٤ = ف^{٣} \Leftarrow ف = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

بالتعويض في معادلة ① عن قيمة ف = ٤

$\Leftarrow$ عندما ع = ٨

$٢ت = ٣(٤)^{٢} = ٤٨$

$ت = \frac{٤٨}{٢} = ٢٤$ م/ث² الإجابة (ب)

مثال: (كتاب مدرسي - مهم)

يقف أحمد ونزار على سطح بناية أفلت أحمد كرة من السكون وفق العلاقة $ف_{١}(ن) = ٥ن^{٢}$ وفي اللحظة نفسها رمى نزار كرة أخرى عمودياً إلى أسفل وفق العلاقة $ف_{٢}(ن) = ١٥ن + ٥ن^{٢}$ فإذا ارتطمت كرة أحمد في الأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار ما سرعة ارتطام كرة نزار بالأرض

الحل: نفرض أن

زمن ارتطام كرة نزار

بالأرض ن فيكون زمن

ارتطام كرة أحمد = ن + ١

(لأن كرة نزار قبل أحمد)

والمطلوب $ع_{٢}(ن)$

عند ارتطام الكرتان بالأرض يكون:

$ف_{١}(ن+١) = ف_{٢}(ن)$

$\Leftarrow ٥(ن+١)^{٢} = ١٥ن + ٥ن^{٢}$

$\Leftarrow ٥(ن^{٢} + ٢ن + ١) = ١٥ن + ٥ن^{٢}$

$٥ن^{٢} + ١٠ن + ٥ = ١٥ن + ٥ن^{٢}$

$١٥ن - ١٠ن = ٥ \Leftarrow ٥ن = ٥$ ومنه $ن = ١$

فيكون سرعة ارتطام كرة نزار في الأرض

$= ع_{٢}(ن) = ع_{٢}(١)$

$ع_{٢}(ن) = ف_{٢}'(ن) = ١٥ + ١٠ن$

$ع_{٢}(١) = ١٥ + ١٠ \times ١ = ٢٥$ م/ث

مثال: (كتاب مدرسي)

يتحرك جسم وفق العلاقة $ف = ٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن})$ بين أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي عددياً ٤ف

الحل: $ع = ف' = ٢(٢هـ^{٢ن} + ٢هـ^{-٢ن})$

$= ٤(هـ^{٢ن} + هـ^{-٢ن})$

$ت = ع' = ٤(٢هـ^{٢ن} - ٢هـ^{-٢ن})$

$= ٤ \times \underbrace{٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن})}_{لاحظ = ف} = ٤ف$

مثال: (كتاب مدرسي)

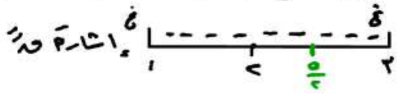
إذا كان ق(س) متصل ع [١، ٣] وكان قً(س) > ٠ لجميع قيم س ∋]١، ٣[، ق(س) له ٣ نقط حرجة فقط ع [١، ٣] وكان قَ(٢) = ٠ فما العبارة الصحيحة فيما يلي

أ) ق(٥/٢) > ٠   ب) ق(٥/٢) < ق(٣)

جـ) ق(٥/٢) = ق(١)   د) ق(٥/٢) < ق(٢)

الحل: الثلاث نقاط الحرجة هي أطراف الفترة ، س = ٢

∵ قَ(٢) = ٠



، قً(٢) < ٠

إذن حسب اختبار المشتقة الثانية ق(٢) قيمة عظمى محلية ⇐ ق(٥/٢) < ق(٢) الإجابة {د}

مثال: ق(س) ، هـ(س) اقترانان كثيرا حدود متزايدان على ح فإن الاقتران (ق∘هـ)(س) يكون :

أ) متزايد على ح   ب) متناقص على ح

جـ) له قيمة عظمى محلية عند س = ٠ .   د) له قيمة عظمى مطلقة

الحل: مشتقة الاقتران = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= + × + = +   لأن ق ، هـ متزايدان على ح

الإجابة {أ}

مثال: إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً بحيث قَ(س) متزايد على [-١، ٠] ، قَ(س) متناقص على [٠، ١] فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة :-

أ) ق(س) متناقص في الفترة [٠، ١]

ب) ق(س) متزايد في الفترة [٠، ١]

جـ) س = ٠ نقطة حرجة للاقتران ق(س)

د) (٠، ق(٠)) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)

الحل: قَ(س) متزايد في [-١، ٠] ⇐ قً(س) > ٠

⇐ ق(س) مقعر لأعلى

قَ(س) متناقص في [٠، ١] ⇐ قً(س) < ٠

⇐ ق(س) مقعر لأسفل

ق(س) متصل ويغير اتجاه تقعره حول س = ٠ ⇐ (٠، ق(٠)) نقطة انعطاف {د} الإجابة

(مثال مهم وشامل)

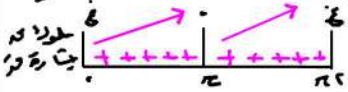
مثال: للاقتران ق(س) = س + جاس ع الفترة [٠، ٢π]

جد: ① فترات التزايد والتناقص ② القيم القصوى وبيّن نوعها
③ فترات التقعر ④ نقاط الانعطاف ⑤ زاوية الانعطاف

الحل: ① ق(س) متصل ع [٠، ٢π] لأنه مجموع متصلين

ق(س) قابل للاشتقاق ع]٠، ٢π[لأنه مجموع مشتقين

قَ(س) = ١ + جتاس = ٠



⇐ جتاس = -١ ⇐ س = π

النقاط الحرجة ٠، π، ٢π

ق(س) متزايد ع [٠، π] وكذلك ع [π، ٢π]

② ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية وهي مطلقة

ق(π) = π قيمة حرجة

ق(٢π) = ٢π قيمة عظمى محلية وهي مطلقة

③ قً(س) = -جاس = ٠

⇐ س = ٠ مرفوض ، س = π مقبول ، س = ٢π مرفوض

(المرفوض لأن قً(س) عندهم غير موجودة لأنهم أطراف فترة)

ق(س) مقعر لأعلى ع [٠، π]

ق(س) مقعر لأسفل ع [π، ٢π]

④ ق(س) متصل عند س = π

، قً(π) = ٠

، ق(س) يغير اتجاه تقعره حول س = π

إذن (π، ق(π)) نقطة انعطاف = (π، π)

⑤ س = π نقطة انعطاف ⇐ قَ(π) = ظاهـ

حيث هـ زاوية الانعطاف ⇐ قَ(π) = ١ - ١ = ٠

انتبه التعويض ع قَ

⇐ ظاهـ = ٠ ⇐ هـ = ٠ هذا يعني ميل الانعطاف أفقي

مثال: (كتاب مدرسي)

إذا كان قَ(س) = (س^{٢} - ١)^{٣} (س - ٢)^{٤} فما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً ؟

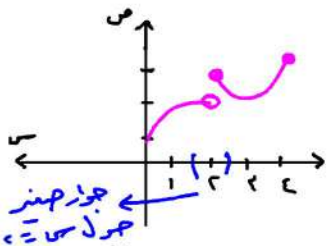
أ)]-∞، -١]   ب) [-١، ١]   جـ) [١، ٢]   د) [٢، ∞[

الحل: قَ(س) = ٠ إما س^{٢} - ١ = ٠ أو س - ٢ = ٠

⇐ س = ±١ أو ٢ (نقاط حرجة)

ومن إشارة قَ(س) ⇐ ق(س) متناقص ع [-١، ١]

مثال: الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على الفترة [٠، ٤] فإن النقطة (٢، ق(٢)) هي:-



أ) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س)　ب) نقطة قيمة عظمى محلية

ج) نقطة قيمة صغرى مطلقة　د) نقطة قيمة صغرى محلية

الحل: ق(س) غير متصل عند س = ٢ ⇐ قَ(٢) غير موجودة

⇐ عند س = ٢ قيمة حرجة

من الرسم ق(٢) أكبر قيمة في جوار صغير حولها

⇐ (٢، ق(٢)) قيمة عظمى محلية

أو ممكن باستخدام النهايات حيث نلاحظ من الرسم أن النهاية اليسرى للاقتران أصغر من ق(٢)

الجواب (ب)

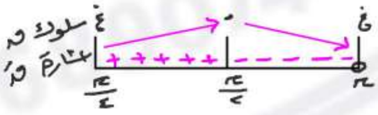
مثال: (كتاب مدرسي)

إذا كان ق(س) = لوهـ جاس، س ∈ [$\frac{\pi}{٤}$، π[فإن ق(س) يكون متزايد في الفترة:

أ) [$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$]　ب) [$\frac{\pi}{٤}$، π]　ج)]$\frac{\pi}{٢}$، π[　د) [$\frac{\pi}{٢}$، π]

الحل: قَ(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = ٠ ⇐ جتاس = ٠

⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$



النقاط الحرجة $\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$

ق(س) متزايد في الفترة [$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$]

مثال: إذا كان الاقتران ق(س) = جتا^{٢}س - جا^{٢}س، س ∈ [٠، π] فإن س = $\frac{\pi}{٢}$:

أ) قيمة عظمى محلية　ب) قيمة صغرى محلية

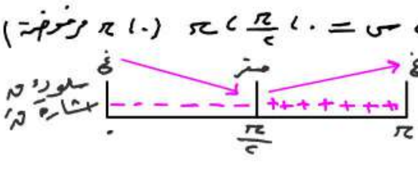
ج) نقطة إنعطاف　د) قيمة عظمى مطلقة

الحل: قَ(س) = ٢جتاس × -جاس - ٢جاس × جتاس

= -٢جاس جتاس - ٢جاس جتاس = -جا٢س - جا٢س

= -٢جا٢س = ٠ ⇐ جا٢س = ٠

٢س = ٠، π، ٢π ⇐ س = ٠، $\frac{\pi}{٢}$، π　(٠، π مرفوضة)



ق(٠) = ١ عظمى محلية

ق($\frac{\pi}{٢}$) = -١ صغرى محلية

ق(π) = ١ عظمى محلية

مثال: (كتاب مدرسي)

إذا كان ق(س) = جتاس - هـ(س) + ٣س حيث س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$]، هـ(س) قابل للاشتقاق فإن (ق + هـ)(س) في الفترة [٠، $\frac{\pi}{٢}$] يكون:

أ) متزايد　ب) متناقص　ج) مقعر لأعلى　د) مقعر لأسفل

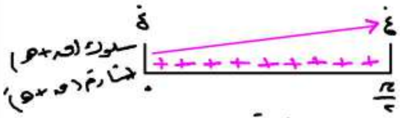
الحل: ق(س) = جتاس - هـ(س) + ٣س

(ق + هـ)(س) = ق(س) + هـ(س) = جتاس + ٣س

(ق + هـ)َ(س) = - جاس + ٣ = ٠

جاس = ٣ مرفوض

النقاط الحرجة ٠، $\frac{\pi}{٢}$



(ق + هـ)(س) متزايد في الفترة [٠، $\frac{\pi}{٢}$]

الإجابة (أ)

مثال: (كتاب مدرسي)

إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة جد قاعدة الاقتران ق(س) إذا علمت أن (٢، -١) هي نقطة قيمة صغرى محلية والنقطة (٠، ٣) هي نقطة إنعطاف للاقتران ق(س).

الحل: ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

قَ(س) = ٣أس^{٢} + ٢ب س + جـ

قً(س) = ٦أس + ٢ب

(٠، ٣) نقطة إنعطاف ⇐ ق(٠) = ٣ ، قً(٠) = ٠

ق(٠) = ٣ ⇐ د = ٣

قً(٠) = ٠ ⇐ ٢ب = ٠ ⇐ ب = ٠

(٢، -١) قيمة صغرى محلية إذن

ق(٢) = -١ ⇐ ٨أ + ٢جـ + ٣ = -١

ومنه ٨أ + ٢جـ = -٤ ——— ①

قَ(٢) = ٠ ⇐ ١٢أ + ٤ب + جـ = ٠

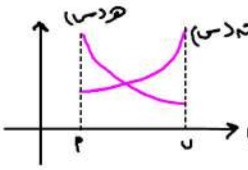
ومنه ١٢أ + جـ = ٠ ——— ②

×٢ ② ⇐ ٢٤أ + ٢جـ = ٠ ——— ③

③ - ① ⇐ ١٦أ = ٤ ⇐ أ = $\frac{١}{٤}$

من ② ١٢ × $\frac{١}{٤}$ + جـ = ٠ ⇐ جـ = -٣

⇐ قاعدة الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٤}$س^{٣} - ٣س + ٣



مثال :- (كتاب مدرسي)

الشكل المجاور يبين منحنيي الإقترانين ق ، هـ المعرفين على [أ ، ب] بين أن الإقتران ل(س) = $\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$ متزايد على]أ ، ب[

الحل :

بالإشتقاق ل′(س) = $\frac{\text{هـ}(\text{س}) \times \text{ق}''(\text{س}) - \text{هـ}'(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{س})}{(\text{هـ}(\text{س}))^2}$

هـ(س) + فوق محور السينات

ق″(س) + لأن ق(س) مقعر للأعلى

هـ′(س) − ميل منحنى هـ(س) سالب من الرسم

ق′(س) + ميل منحنى ق(س) موجب من الرسم

⇐ إشارة ل′(س) = $\frac{(+\times+)-(-\times+)}{+}$

= $\frac{+-(-)}{+}$ = $\frac{+}{+}$ = + ⇐ ل(س) متزايد في [أ ، ب]

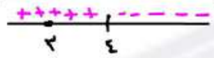
مثال : (كتاب مدرسي)

إذا كان ق(س) كثير حدود و كان ق″(س) > ٠ عندما س < ٤ ، ق″(س) < ٠ عندما س > ٤ و كان ق′(٣) = ٠ فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يلي :-

أ) ق″(٣) = ٠ ب) ق′(٤) = ٠

ج) ق(٢) قيمة عظمى محلية د) ق(٣) قيمة صغرى محلية

الحل : ق(س) متصل عند س = ٣



ق′(٣) = ٠ ومن الرسم ق″(٣) > ٠

إذن حسب إختبار المشتقة الثانية ق(٣) قيمة صغرى محلية

الإجابة {د}

مثال : (كتاب مدرسي)

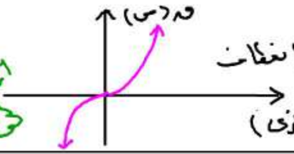
إذا كان ق(س) = س |س| فما العبارة الصحيحة فيما يلي

أ) ق′(٠) غير موجودة ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية

ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية د) (٠ ، ق(٠)) نقطة إنعطاف

الحل : بإعادة التعريف ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 & ، \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}^2 & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

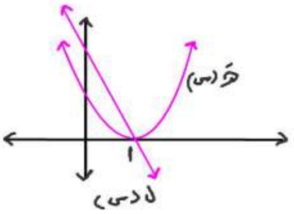
ومن إعادة رسم الإقتران نلاحظ أن (٠ ، ق(٠)) نقطة إنعطاف



(الرسم هو سؤالنا هنا أوضح من الفروع الأخرى)

الإجابة {د}

مثال : إذا كان ق(س) إقتران متصل على ح بحيث ق′(س) = هـ′(س) × ل(س) بالإعتماد على الشكل المجاور بين أن منحنى ق(س) مقعر للأسفل في الفترة]١ ، ∞[



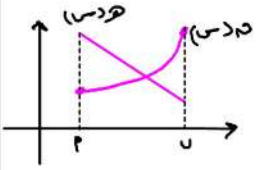
الحل : هـ′(س) + في]١ ، ∞[لأنه فوق محور س

ل(س) − في]١ ، ∞[لأنه تحت محور س

إذن إشارة ق′(س) = + × − = − في]١ ، ∞[

إذن ق″(س) < ٠ ⇐ ق(س) مقعر للأسفل

مثال : الشكل المجاور يبين منحنى الإقترانين ق(س) ، هـ(س) المعرفين على [أ ، ب] أثبت أن (ق′ ∘ هـ)(س) إقتران تناقصي في [أ ، ب]



الحل : مشتقة الإقتران (ق′ ∘ هـ)(س) لمعرفة الإشارة

المشتقة الأولى = ق″(هـ(س)) × هـ′(س)

ق″(س) + في [أ ، ب] لأن ق(س) مقعر للأعلى

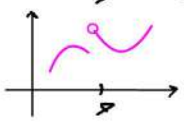
هـ′(س) − في [أ ، ب] لأن ميل هـ(س) سالب

فيكون ق″(هـ(س)) × هـ′(س) = + × − = −

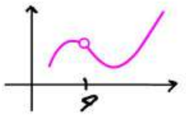
إشارة المشتقة الأولى سالبة إذن ق(س) تناقصي في الفترة [أ ، ب]

مثال : أحد الإقترانات الآتية له نقطة إنعطاف عند س = جـ

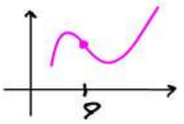
أ)



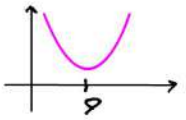
ب)



ج)



د)



الحل : يجب أن يكون الإقتران متصل ويغير إتجاه تقعره حول جـ وهذا متوفر فقط في الخيار جـ

الإجابة {جـ}

مثال

فلسطين : ٢٠١٧

إذا علمت أن متوسط التغير للإقتران ق(س) في الفترة [٢ ، ١٧] يساوي ٩ فإن متوسط تغير الإقتران هـ (س) = ق($\text{س}^{٢}$ + ١) في الفترة [١ ، ٤] = :

(أ) ٣ (ب) ٤٩ (ج) ١٥ (د) ٤٥

الحـــل

$\frac{\Delta \text{ق(س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق(١٧) − ق(٢)}}{\text{١٥}} = ٩$ ⇐ ق(١٧) − ق(٢) = ١٣٥ .... ①

$\frac{\Delta \text{هـ (س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ (٤) − هـ (١)}}{\text{٤ − ١}} = \frac{\text{ق(٤}^{٢}\text{ + ١) − ق(١}^{٢}\text{ + ١)}}{\text{٤ − ١}} = \frac{\text{ق(١٧) − ق(٢)}}{\text{٣}}$

من ① ينتج أن : متوسط تغير الإقتران هـ (س) في الفترة [١ ، ٤] = ٤٥ (الإجابة الفرع (د))

مثال

إذا كان متوسط تغير ق(س) يساوي $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ في الفترة [١ ، ٤] فإن زاوية ميل القاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٤ ، ق(٤)) تساوي :

(أ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (ج) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

الحـــل

ظا هـ = ميل القاطع (متوسط التغير) ⇐ ظا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٦}$ (الإجابة الفرع (د))

مثال

إذا كان هـ (س) = ٤ ق(س) − $\frac{\text{أ}}{\text{س + ١}}$ وكان متوسط التغير للإقتران هـ (س) في الفترة [٠ ، ٢] يساوي ٨ والتغير في ق(س) في نفس الفترة يساوي ٣ ، فما قيمة أ ؟

الحـــل

التغير في ق(س) = ق(٢) − ق(٠) = ٣ .... ①

$\frac{\Delta \text{هـ (س)}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{هـ (٢) − هـ (٠)}}{\text{٢}} = \frac{\left(\text{٤ ق(٢) − } \frac{\text{أ}}{\text{٢ + ١}} \right) - \left(\text{٤ ق(٠) − } \frac{\text{أ}}{\text{٠ + ١}} \right)}{\text{٢}} = ٨$

⇐ (٤ ق(٢) − $\frac{\text{أ}}{\text{٣}}$) − (٤ ق(٠) − أ) = ١٦ ⇐ ٤ ق(٢) − $\frac{\text{أ}}{\text{٣}}$ − ٤ ق(٠) + أ = ١٦

⇐ ٤ (ق(٢) − ق(٠)) + $\frac{\text{٢ أ}}{\text{٣}}$ = ١٦ من ① ⇐ ٤ (٣) + $\frac{\text{٢ أ}}{\text{٣}}$ = ١٦ ⇐ $\frac{\text{٢ أ}}{\text{٣}}$ = ٤ ومنها أ = ٦

مثال

ليكن متوسط تغير ق(س) على الفترة [١ ، ٣] = ٣ ، جد متوسط تغير هـ (س) = ٣س^{٢} ق(س) – س على نفس الفترة إذا علمت أن منحنى هـ (س) يمر بالنقطة (١ ، ١١)

الحل

هـ (س) يمر بالنقطة (١ ، ١١) ⇐ هـ (١) = ١١ ⇐ ٣ ق(١) – ١ = ١١ ومنها ق(١) = ٤

متوسط تغير ق(س) = ٣ ⇐ $\frac{\text{ق(٣) – ق(١)}}{٢}$ = ٣ ⇐ ق(٣) – ق(١) = ٦

⇐ ق(٣) – ٤ = ٦ ومنها ق(٣) = ١٠ ، ∵ متوسط تغير هـ (س) = $\frac{\text{هـ (٣) – هـ (١)}}{٢}$

= $\frac{\text{هـ (٣) – ١١}}{٢}$ = $\frac{\text{(٢٧ ق(٣) – ٣) – ١١}}{٢}$ وبالتعويض عن ق(٣) = $\frac{\text{((٢٧ × ١٠) – ٣) – ١١}}{٢}$ =

$\frac{\text{(٢٦٧) – (١١)}}{٢}$ = $\frac{٢٥٦}{٢}$ = ١٢٨

مثال

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا زاد طول ضلعها من ٥ سم إلى ٥,١ سم فإن متوسط التغير في مساحتها يساوي :

Ⓐ ١٠ ،١ وحدة مربعة Ⓑ ١ ،١ وحدة مربعة Ⓒ ٢٦,٠١ وحدة مربعة Ⓓ ٢٦٠,١ وحدة مربعة

الحل

نفرض أن طول ضلع الصفيحة = س ⇐ مساحة الصفيحة م (س) = س^{٢}

$\frac{\text{Δ م (س)}}{\text{Δ س}}$ = $\frac{\text{م (٥،١) – م (٥)}}{\text{٥،١ – ٥}}$ = $\frac{\text{٥،١}^{٢}\text{ – ٥}^{٢}}{\text{٠،١}}$ = ١٠,١ وحدة مربعة (الإجابة الفرع Ⓐ)

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران ق(س) = هـ$^{\text{س}}$ عندما تغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + ١ يساوي هـ^{٣} – هـ^{٢} ، فإن قيمة س$_{١}$

Ⓐ هـ Ⓑ هـ^{٢} Ⓒ ٢ Ⓓ هـ + ٢

الحل

متوسط تغير الإقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + ١ = $\frac{\text{ق(س}_{١}\text{ + ١) – ق(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{١}\text{ + ١ – س}_{١}}$

= ق(س$_{١}$ + ١) – ق(س$_{١}$) = هـ^{٣} – هـ^{٢}

⇐ هـ$^{\text{س}_{١}\text{+١}}$ – هـ$^{\text{س}_{١}}$ = هـ^{٣} – هـ^{٢}

⇐ هـ$^{\text{س}_{١}}$(هـ – ١) = هـ^{٢}(هـ – ١) ⇐ هـ$^{\text{س}_{١}}$ = هـ^{٢} ⇐ س$_{١}$ = ٢ (الإجابة الفرع Ⓒ)

مثال

فلسطين : ٢٠٠٩

إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى ق(س) في النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ٥) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب ، إحسب متوسط التغير للإقتران هـ(س) = $\frac{\text{٢}}{\text{ق(س)}}$ في الفترة [١ ، ٣]

الحـــــل

ظا هـ = ميل القاطع (متوسط التغير) ⇐ ظا ١٣٥ = $\frac{\text{ق(٣) − ق(١)}}{\text{٣ − ١}} = \frac{\text{٥ − ق(١)}}{\text{٢}}$

⇐ −١ = $\frac{\text{٥ − ق(١)}}{\text{٢}}$ ⇐ −٢ = ٥ − ق(١) ومنها ق(١) = ٧

$\frac{\text{Δ هـ(س)}}{\text{Δ س}} = \frac{\text{هـ(٣) − هـ(١)}}{\text{٣ − ١}} = \frac{\frac{\text{٢}}{\text{ق(٣)}} - \frac{\text{٢}}{\text{ق(١)}}}{\text{٢}}$ لكن ق(١) = ٧ ، ق(٣) = ٥

⇐ متوسط تغير الإقتران هـ(س) = $\frac{\frac{\text{٢}}{\text{٥}} - \frac{\text{٢}}{\text{٧}}}{\text{٢}} = \frac{\frac{\text{٤}}{\text{٣٥}}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣٥}}$

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران ق(س) على الفترة [٢ ، ٥] يساوي −٦ وكان ق(٢) + ق(٥) = ٤

جد متوسط التغير للإقتران هـ(س) = ٧س + $\text{ق}^{\text{٢}}$(س) على نفس الفترة

الحـــــل

$\frac{\text{Δ هـ(س)}}{\text{Δ س}} = \frac{\text{هـ(٥) − هـ(٢)}}{\text{٣}} = \frac{\text{((٧ × ٥) + ق}^{\text{٢}}\text{(٥)) − ((٧ × ٢) + ق}^{\text{٢}}\text{(٢))}}{\text{٣}}$

$= \frac{\text{٣٥ + ق}^{\text{٢}}\text{(٥) − ١٤ − ق}^{\text{٢}}\text{(٢)}}{\text{٣}} = \frac{\text{٢١ + ق}^{\text{٢}}\text{(٥) − ق}^{\text{٢}}\text{(٢)}}{\text{٣}}$ (ق$^{\text{٢}}$(٥) − ق$^{\text{٢}}$(٢) فرق بين مربعين)

$= \frac{\text{٢١ + (ق(٥) + ق(٢)) (ق(٥) − ق(٢))}}{\text{٣}}$ .... ①

∵ $\frac{\text{Δ ق(س)}}{\text{Δ س}}$ = −٦ ⇐ $\frac{\text{ق(٥) − ق(٢)}}{\text{٣}}$ = −٦ ⇐ ق(٥) − ق(٢) = −١٨

بالتعويض في ① ⇐ $\frac{\text{Δ هـ(س)}}{\text{Δ س}} = \frac{\text{٢١ + (٤ × −١٨)}}{\text{٣}} = \frac{\text{−٥١}}{\text{٣}}$ = −١٧ (ق(٥) + ق(٢) = ٤ معطى)

مثال

إذا كان هـ(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ق(س) وكان متوسط التغير للإقتران هـ(س) في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٧ ، ق(١) = ٥ فما قيمة ق(٤) ؟

أ) ١٣

ب) ٢٦

ج) ١٩

د) ٣٨

الحـــــل

$$\frac{\Delta\, ه(س)}{\Delta\, س} = \frac{ه(٤) - ه(١)}{٣} = ٧ \Rightarrow ه(٤) - ه(١) = ٢١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

$$\Rightarrow \sqrt{٤}\, ق(٤) - \sqrt{١}\, ق(١) = ٢١ \Rightarrow ٢\,ق(٤) - ٥ = ٢١ \Rightarrow ق(٤) = ١٣$$ (الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان متوسط التغير للإقتران ه (س) في الفترة [٢ ، ٥] يساوي ٦ حيث

$ق(س + ١) = ه(س + ١) + س^{٢} + ٦$ جد متوسط التغير للإقتران ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]

الحـــــل

$$\frac{\Delta\, ه(س)}{\Delta\, س} = ٦ \Rightarrow \frac{ه(٥) - ه(٢)}{٣} \Rightarrow ه(٥) - ه(٢) = ١٨ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots ①$$

$$\frac{\Delta\, ق(س)}{\Delta\, س} = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٣}$$

عندما $س + ١ = ٥ \Rightarrow س = ٤ \Rightarrow ق(٥) = ه(٥) + ٤^{٢} + ٦ = ه(٥) + ٢٢$

عندما $س + ١ = ٢ \Rightarrow س = ١ \Rightarrow ق(٢) = ه(٢) + ١^{٢} + ٦ = ه(٢) + ٧$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\, ق(س)}{\Delta\, س} = \frac{(ه(٥) + ٢٢) - (ه(٢) + ٧)}{٣} = \frac{ه(٥) - ه(٢) + ١٥}{٣}$$

من ① $\Rightarrow \dfrac{\Delta\, ق(س)}{\Delta\, س} = \dfrac{١٨ + ١٥}{٣} = \dfrac{٣٣}{٣} = ١١$

مثال

إذا كان $ق(س) = |\,٢س\,| + |\,[\,س - ٧\,]\,|$ وكان $\Delta س = \frac{١١}{٢}$ ، $س_{١} = \frac{٣}{٢}$ فإن متوسط التغير للإقتران ق(س)

(أ) ٢ (ب) ٧ (ج) $\frac{١٠}{١١}$ (د) $\frac{١٤}{١١}$

الحـــــل

$س_{٢} = \Delta س + س_{١} \Rightarrow س_{٢} = \frac{١١}{٢} + \frac{٣}{٢} \Rightarrow س_{٢} = ٧$ ، متوسط التغير = $\dfrac{\Delta\, ق(س)}{\Delta\, س}$

$$= \frac{ق(٧) - ق(\frac{٣}{٢})}{\frac{١١}{٢}} = \frac{(|\,١٤\,| + |\,[\,٧ - ٧\,]\,|) - (|\,٣\,| + |\,[\,\frac{٣}{٢} - ٧\,]\,|)}{\frac{١١}{٢}}$$

$$= ٢ \times \frac{١٤ - ٩}{١١} = \frac{١٠}{١١}$$ (الإجابة الفرع (ج))

مثال

أثبت أن متوسط تغير الإقتران الخطي $ق(س) = أ\,س + ب$ على أي فترة $[س_{١} ، س_{٢}]$ يساوي أ (معامل س)

الحل

$$\text{متوسط تغير ق(س)} = \frac{\Delta\,\text{ق(س)}}{\Delta\,\text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{(\text{أ س}_2 + \text{ب}) - (\text{أ س}_1 + \text{ب})}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$= \frac{\text{أ س}_2 - \text{أ س}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{أ}(\text{س}_2 - \text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \text{أ}$$

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = [\text{س} + ٧] - [\text{س}] + |٢\text{س}|$ ، $\text{س} \in]-٥ ، -١[$ فإن $\text{ق}'(-٣) =$

أ) ٢ ب) غير موجودة ج) ١٣ د) −٢

الحل

$\text{ق(س)} = [\text{س} + ٧] - [\text{س}] + |٢\text{س}| = \text{ق(س)} = [\text{س}] + ٧ - [\text{س}] + |٢\text{س}|$

$= ٧ + |٢\text{س}| = ٧ - ٢\text{س}$ (لأن $\text{س} \in]-٥ ، -١[$ فإن $|٢\text{س}| = -٢\text{س}$)

$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -٢ \Leftarrow \text{ق}'(٣) = -٢$ (الإجابة الفرع د)

مثال

معدل تغير مساحة المربع بالنسبة إلى محيطه عندما يكون محيطه = ٣٢ سم هو :

أ) ٣ ب) ٨ ج) ٤ د) ٦

الحل

نفرض أن طول ضلع المربع س ، مساحته م ومحيطه ح $\Leftarrow \text{م} = \text{س}^2$ ، $\text{ح} = ٤\text{س}$ المطلوب $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ح}}\right|_{\text{ح}=٣٢}$

$\because \text{ح} = ٤\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{ح}}{٤}$ ومنها $\text{س}^2 = \frac{\text{ح}^2}{١٦} \Leftarrow \text{م} = \frac{\text{ح}^2}{١٦}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ح}} = \frac{١}{١٦} \times ٢\text{ح} = \frac{١}{٨}\text{ح} \Leftarrow \left.\frac{\text{د م}}{\text{د ح}}\right|_{\text{ح}=٣٢} = \frac{١}{٨} \times ٣٢ = ٤$ (الإجابة الفرع ج)

مثال

إذا كان $\text{ق(س)} = \text{س}^5 - ٢\,\text{أ}\,\text{س}^2 + ٨\text{س}$ وكان $\text{ق}''(-١) = \text{أ}$ فإن قيمة أ تساوي :

أ) $\frac{٢٠}{٣}$ ب) −٤ ج) $-\frac{٢٠}{٣}$ د) ٤

الحل

$\text{ق(س)} = \text{س}^5 - ٢\,\text{أ}\,\text{س}^2 + ٨\text{س}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = ٥\text{س}^4 - ٤\,\text{أ}\,\text{س} + ٨$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = ٢٠\text{س}^3 - ٤\,\text{أ}$

$\because \text{ق}''(-١) = \text{أ} \Leftarrow -٢٠ - ٤\,\text{أ} = \text{أ} \Leftarrow ٥\,\text{أ} = -٢٠$ ومنها $\text{أ} = -٤$ (الإجابة الفرع ب)

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ يساوي $\frac{\text{٣هـ}^{٢} - \text{٤هـ}}{\text{٢هـ}}$ فإن ق'(٢) تساوي :

(أ) -٢ (ب) ١ (ج) -١ (د) ٢

الحـــــل

$$\text{ق}'(\text{٢}) = \underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{٣هـ}^{٢} - \text{٤هـ}}{\text{٢هـ}} = \underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{هـ}(\text{٣هـ} - \text{٤})}{\text{٢هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{نهــا}} \frac{\text{٣هـ} - \text{٤}}{\text{٢}} = \frac{-\text{٤}}{\text{٢}} = -\text{٢}$$

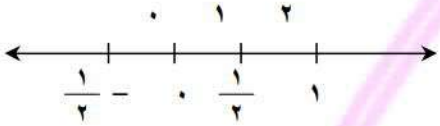
(الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان هـ(س) = $\frac{[\text{٢س} + \text{١}]}{\text{ل}(\text{س})}$ وكان هـ($\frac{١}{٣}$) = ٢ ، هـ'($\frac{١}{٣}$) = -١ فإن قيمة ل'($\frac{١}{٣}$) تساوي :

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٩}$ (د) $-\frac{١}{٩}$

الحـــــل



$\text{٢س} + \text{١} = \text{٠} \Leftarrow \text{س} = -\frac{١}{٢}$

باعادة تعريف الإقتران [٢س + ١] جوار العدد $\frac{١}{٣}$ نلاحظ أن : [٢س + ١] = ١

$$\Leftarrow \text{هـ}(\text{س}) = \frac{[\text{٢س} + \text{١}]}{\text{ل}(\text{س})} = \frac{١}{\text{ل}(\text{س})} \Leftarrow \text{هـ}'(\text{س}) = -\frac{\text{ل}'(\text{س})}{(\text{ل}(\text{س}))^{٢}}$$

$$\Leftarrow \text{هـ}'\left(\frac{١}{٣}\right) = -\frac{\text{ل}'\left(\frac{١}{٣}\right)}{\left(\text{ل}\left(\frac{١}{٣}\right)\right)^{٢}} \Leftarrow -\text{١} = -\frac{\text{ل}'\left(\frac{١}{٣}\right)}{\left(\text{ل}\left(\frac{١}{٣}\right)\right)^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{①}$$

$$\because \text{هـ}(\text{س}) = \frac{١}{\text{ل}(\text{س})} \Leftarrow \text{ل}(\text{س}) = \frac{١}{\text{هـ}(\text{س})} \Leftarrow \text{ل}\left(\frac{١}{٣}\right) = \frac{١}{٢} \quad \text{لأن} \quad \text{هـ}\left(\frac{١}{٣}\right) = \text{٢}$$

$$\text{من ① إذن} \quad -\text{١} = -\frac{\text{ل}'\left(\frac{١}{٣}\right)}{\frac{١}{٤}} \Leftarrow \text{ل}'\left(\frac{١}{٣}\right) = \frac{١}{٤}$$

(الإجابة الفرع (أ))

مثال

تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٢} + ٤ن حيث المسافة بالأمتار والزمن بالدقائق ، فإن التسارع المتوسط لهذا الجسم في الفترة [١ ، ٥] = :

(أ) ٢م / د^{٢} (ب) ٨م / د^{٢} (ج) ١٠م / د^{٢} (د) ٤٠م / د^{٢}

الحـــــل

التسارع المتوسط ت (ن) = $\frac{\Delta \text{ع}(\text{ن})}{\Delta \text{ن}}$ لكن ع (ن) = ف َ(ن) = ٢ ن + ٤

⇐ ت (ن) = $\frac{\text{ع}(٥) - \text{ع}(١)}{٤}$ = $\frac{١٤ - ٦}{٤}$ = ٢م / $\text{د}^{٢}$ (الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان ق(س) = $\frac{٥}{\text{هـ}(\text{س})}$ وكان ق(٣) = ١ ، هـ َ(٣) = ٤ فإن قيمة ق َ(٣) تساوي :

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٣}{٥}$ (ج) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

الحـــــل

ق(س) × هـ (س) = ٥ وباشتقاق الطرفين ⇐ ق(س) × هـ َ(س) + هـ (س) × ق َ(س) = ٠

⇐ ق(٣) × هـ َ(٣) + هـ (٣) × ق َ(٣) = ٠ وبما أن : هـ (٣) = $\frac{٥}{\text{ق}(٣)}$ ⇐ هـ (٣) = ٥

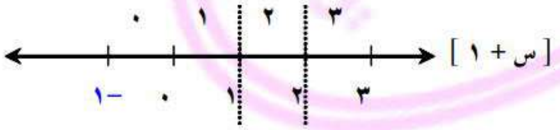
⇐ ١ × ٤ + ٥ × ق َ(٣) = ٠ ⇐ ٤ + ٥ق َ(٣) = ٠ ⇐ ٥ ق َ(٣) = −٤

⇐ ق َ(٣) = $-\frac{٤}{٥}$ (الإجابة الفرع (ج))

مثال

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [\text{س} + ١] & ،\ ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ \frac{|\text{س}|}{\text{س}} + ٤ & ،\ ٢ < \text{س} < ٥ \end{cases}$ ، جد ق َ(٢)

الحـــــل



باعادة تعريف الإقتران [س + ١] على الفترة ١ ⩽ س ⩽ ٢

فإن [س + ١] = ٢

وبما أن س موجب في الفترة ٢ < س < ٥ ⇐ $\frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$ إذن ق(س) = $\begin{cases} ٢ & ،\ ١ \leqslant \text{س} < ٢ \\ ٣ & ،\ \text{س} = ٢ \\ ٥ & ،\ ٢ < \text{س} < ٥ \end{cases}$

عندما س = ٢ ق(٢) = ٣ ، $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} ٢ = ٢$ ، $\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} ٥ = ٥$

إذن ق(س) غير متصل عند س = ٢ إذن ق َ(٢) غير موجودة

مثال

إذا كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{س \times هـ(س)}$ وكان $ق'(٢) = ل(٢) = -٣$ ، $ل'(٢) = هـ(٢) = ١$ أوجد $هـ'(٢)$

الحـــــل

$$ق'(س) = \frac{س \times هـ(س)\,(ل'(س)) - ل(س)\,(س \times هـ'(س) + هـ(س) \times ١)}{(س \times هـ(س))^٢}$$

$$\Leftarrow ق'(٢) = \frac{٢ هـ(٢)\,(ل'(٢)) - ل(٢)\,(٢ هـ'(٢) + هـ(٢))}{(٢ هـ(٢))^٢}$$

$$\Leftarrow -٣ = \frac{٢ + ٣(٢ هـ'(٢) + ١)}{(٢)^٢} \qquad \Leftarrow -٣ = \frac{٢ + (٦ هـ'(٢) + ٣)}{٤}$$

$\Leftarrow -١٢ = ٢ + (٦ هـ'(٢) + ٣) \Leftarrow -١٢ = ٦ هـ'(٢) + ٥$ ومنها $هـ'(٢) = -\frac{١٧}{٦}$

مثال

إذا كان $ق(س) = (١ - س)(١ + س)(١ + س^٢)(١ + س^٤)(١ + س^٨)$ ، جد $ق'(١)$

الحـــــل

$(١ - س)(١ + س) = (١ - س^٢)$ (تحليل فرق بين مربعين)

$\Leftarrow ق(س) = (١ - س^٢)(١ + س^٢)(١ + س^٤)(١ + س^٨)$

أيضاً $(١ - س^٢)(١ + س^٢) = (١ - س^٤)$ (تحليل فرق بين مربعين)

$\Leftarrow ق(س) = (١ - س^٤)(١ + س^٤)(١ + س^٨) \Leftarrow ق(س) = (١ - س^٨)(١ + س^٨) = (١ - س^{١٦})$

$\Leftarrow ق'(س) = -١٦ س^{١٥}$ ومنها $ق'(١) = -١٦ \times ١ = -١٦$

مثال

إذا كان $ق(س) = \frac{٢ ق(س) - س^٢}{٣س}$ جد $ق'(١)$

الحـــــل

بداية نجعل ق(س) موضع القانون

$ق(س) = \frac{٢ ق(س) - س^٢}{٣س} \Leftarrow ٣س ق(س) = ٢ ق(س) - س^٢ \Leftarrow ٣س ق(س) - ٢ ق(س)$

$= -\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{ق}(\text{س})\,(٣\text{س} - ٢) = -\text{س}^{٢}$ ومنها $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{-\text{س}^{٢}}{٣\text{س} - ٢}$

$$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{(٣\text{س} - ٢) \times (-٢\text{س}) - (-\text{س}^{٢}) \times (٣)}{(٣\text{س} - ٢)^{٢}}$$

$$\Leftarrow \text{ق}'(١) = \dfrac{(٣ - ٢) \times (-٢) - (-١) \times (٣)}{(١)^{٢}} = -٢ - (-٣) = ١$$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ وكان $\text{ق}^{(٣)}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}$ جد قيمة أ

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ ، $\text{ق}''(\text{س}) = \text{ن}(\text{ن} - ١)\,\text{س}^{\text{ن}-٢}$

$\text{ق}^{(٣)}(\text{س}) = \text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)\,\text{س}^{\text{ن}-٣}$ لكن $\text{ق}^{(٣)}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}$

$\Leftarrow \text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)\,\text{س}^{\text{ن}-٣} = \text{أ}\text{س}$

من تساوي الأسس ينتج أن : $\text{ن} - ٣ = ١$ ومنها $\text{ن} = ٤$

ومن تساوي المعاملات ينتج أن : $\text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢) = \text{أ} \Leftarrow ٤ \times ٣ \times ٢ = \text{أ}$ ومنها $\text{أ} = ٢٤$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س} + \dfrac{\text{ب}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ وكان متوسط التغير للإقتران $\text{ق}(\text{س})$ في الفترة $[١ ، ٥] = ٢$ ، $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{ق}(١ + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}} = -٤$ ، جد قيمة أ ، ب

الحل

$\because \dfrac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = ٢ \Leftarrow \dfrac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(١)}{٤} = ٢ \Leftarrow \text{ق}(٥) - \text{ق}(١) = ٨$

$\Leftarrow \left(٥\text{أ} + \dfrac{\text{ب}}{٥}\right) - (\text{أ} + \text{ب}) = ٨ \Leftarrow ٥\text{أ} - \text{أ} + \dfrac{\text{ب}}{٥} - \text{ب} = ٨$

$\Leftarrow ٤\text{أ} - \dfrac{٤\text{ب}}{٥} = ٨ \Leftarrow \text{أ} - \dfrac{\text{ب}}{٥} = ٢$ .... ①

$\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{ق}(١ + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}} = -٤ \Leftarrow ٢\,\text{ق}'(١) = -٤ \Leftarrow \text{ق}'(١) = -٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{أ} - \dfrac{\text{ب}}{\text{س}^{٢}} \Leftarrow \text{ق}'(١) = \text{أ} - \text{ب} \Leftarrow \text{أ} - \text{ب} = -٢$ .... ②

① − ② $\Leftarrow \dfrac{٤\text{ب}}{٥} = ٤ \Leftarrow \text{ب} = ٥$ و بالتعويض في ② $\Leftarrow \text{أ} = ٣$

مثال

جد قيمة الثابت ب التي تجعل الإقتران ٯ (س) = | ٤س^{٢} + ب س + ١ | قابلاً للإشتقاق على ح

الحـــــل

يكون الإقتران ٯ (س) قابلاً للإشتقاق على ح إذا كان المميز ب^{٢} – ٤ ﻫ ج سالب أو يساوي صفر

⇐ ب^{٢} – ١٦ ⩽ ٠ (نحل هذه المتباينة بأي طريقة مناسبة بحث إشارة أو خصائص القيمة المطلقة)

ب^{٢} – ١٦ ⩽ ٠ ⇐ ب^{٢} ⩽ ١٦ ⇐ | ب | ⩽ ٤ (باستخدام خصائص القيمة المطلقة)

⇐ –٤ ⩽ ب ⩽ ٤ ⇐ ب ∈ [–٤ ، ٤]

مثال فلسطين : ٢٠١٢

إذا كان ص = قاس + ظاس فإن $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ تساوي :

ⓐ قاس ⓑ قتاس ⓒ – قاس ⓓ – قتاس

الحـــــل

ص' = قاس ظاس + قا^{٢}س = قاس (ظاس + قاس) = قاس (ص) وبقسمة الطرفين على ص

⇐ $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = قاس (الإجابة الفرع ⓐ)

مثال

إذا كان ص = ﻫ جاس + ب جتاس فإن ص'' + ص تساوي :

ⓐ ٢ (ﻫ جاس + ب جتاس) ⓑ ٢ ⓒ صفر ⓓ ﻫ جاس – ب جتاس

الحـــــل

ص' = ﻫ جتاس – ب جاس ، ص'' = – ﻫ جاس – ب جتاس = –(ﻫ جاس + ب جتاس)

⇐ ص'' = –(ص) ومنها ص'' + ص = صفر (الإجابة الفرع ⓒ)

مثال

إذا كان ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{١ + جتاس}}$ ، أثبت أن ص' جاس = ص .

الحـــــل

$$\text{ص}' = \frac{(\text{ ١ + جتاس })(\text{ جتاس }) + \text{جا}^{٢}\text{س}}{(\text{ ١ + جتاس })^{٢}} = \frac{\text{جتاس + جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{س}}{(\text{ ١ + جتاس })^{٢}} = \frac{\text{جتاس + ١}}{(\text{ ١ + جتاس })^{٢}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{١ + جتاس}} \Leftarrow \text{ص}'\text{ جاس} = \frac{\text{١}}{\text{١ + جتاس}} \times \text{جاس} = \text{ص}$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$ فإن $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ تساوي :

(أ) صفر (ب) قتاس (ج) ١ (د) $\text{جتا}^{2}\text{س}$

الحـــــل

$\text{ص} = \dfrac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = \dfrac{١ - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = \dfrac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} = ١$ ومنها $\dfrac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$ (الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان ص = جاس + ٢جتاس ، فإن $\text{ص}' + \text{ص}'' + \text{ص}''' + \text{ص} =$:

(أ) ٢جتاس (ب) ١ (ج) صفر (د) جاس

الحـــــل

$\text{ص}' = \text{جتاس} - ٢\text{جاس}$ ، $\text{ص}'' = -\text{جاس} - ٢\text{جتاس}$ ، $\text{ص}''' = -\text{جتاس} + ٢\text{جاس}$

$\text{ص}' + \text{ص}'' + \text{ص}''' + \text{ص} = \text{جتاس} - ٢\text{جاس} - \text{جاس} - ٢\text{جتاس} - \text{جتاس} + ٢\text{جاس} + \text{جاس} + ٢\text{جتاس} = ٠$

(الإجابة الفرع (ج))

مثال

إذا كان ق (٢) = ٤ ، ق' (٢) = ٤ جد $\displaystyle\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س ق}(٢) - ٢\,\text{ق}(\text{س})}{٢\text{س} - ٤}$

الحـــــل

بالتعويض المباشر $\displaystyle\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س ق}(٢) - ٢\,\text{ق}(\text{س})}{٢\text{س} - ٤} = \dfrac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال : $\displaystyle\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س ق}(٢) - ٢\,\text{ق}(\text{س})}{٢\text{س} - ٤} = \lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{ق}(٢) - ٢\,\text{ق}'(\text{س})}{٢}$

$= \dfrac{\text{ق}(٢) - ٢\,\text{ق}'(٢)}{٢} = \dfrac{٤ - ٨}{٢} = -٢$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س} + ١}$ جد قيمة $\displaystyle\lim_{\text{س} \to ١} \dfrac{٢\,\text{ق}(\text{س}) - ٢\,\text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$

الحـــــل

بالتعويض المباشر $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٢ ق(س) - ٢ ق(١)}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال : $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٢ ق(س) - ٢ ق(١)}{س - ١} = \text{نهـا}_{س \to ١} ٢ ق'(س) = ٢ ق'(١)$ .... ①

$ق'(س) = \frac{(س + ١)(٢ هـ^{س}) - (٢ هـ^{س})}{(س + ١)^{٢}}$ ⇐ $ق'(١) = \frac{٤هـ - ٢هـ}{٤} = \frac{١}{٢} هـ$

من ① ⇐ $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{٢ ق(س) - ٢ ق(١)}{س - ١} = ٢ \times \frac{١}{٢} هـ = هـ$

مثال

إذا كان $ص = هـ^{س}$ جاس أثبت أن : $ص'' - ٢ص' + ٢ص = صفر$

الحـــــل

$ص = هـ^{س}$ جاس ، $ص' = (هـ^{س} \times \text{جتاس}) + (\text{جاس} \times هـ^{س})$

$ص'' = (هـ^{س} \times - \text{جاس}) + (\text{جتاس} \times هـ^{س}) + (\text{جاس} \times هـ^{س}) + (\text{جتاس} \times هـ^{س}) = ٢ \text{ جتاس } هـ^{س}$

⇐ $ص'' - ٢ص' + ٢ص = (٢ \text{ جتاس } هـ^{س}) - ٢((هـ^{س} \text{جتاس}) + (\text{جاس } هـ^{س})) + ٢(هـ^{س} \text{جاس})$

$= ٢ \text{ جتاس } هـ^{س} - ٢ هـ^{س} \text{ جتاس} - ٢ \text{ جاس } هـ^{س} + ٢ هـ^{س} \text{ جاس} = صفر$

١ – ٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية

مثال

فلسطين : ٢٠١٤

إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٥ ، ٤) الواقعة عليه هي $٤س - ٣ص = ٨$ فإن $ق'(٥)$ تساوي :

Ⓐ $\frac{٤}{٣}$ Ⓑ $\frac{٣}{٤}$ ⓙ $-\frac{٣}{٤}$ ⓓ $-\frac{٤}{٣}$

الحـــــل

ميل المستقيم $٤س - ٣ص = ٨$ العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة $(٥ ، ٤) = \frac{٤}{٣}$

⇐ ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة $(٥ ، ٤) = ق'(٥) = -\frac{٣}{٤}$ (الإجابة الفرع ⓙ)

مثال

أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنى الإقتران ق = $س^٢$ − ٥س + ٦ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات متعامدان .

الحـــــل

نقاط تقاطع المنحنى ق(س) مع محور السينات :

ق(س) = ٠ ⇐ $س^٢$ − ٥س + ٦ = ٠ ⇐ (س − ٢)(س − ٣) = ٠

⇐ س = ٢ ، س = ٣

ق′(س) = ٢س − ٥

ميل المماس عند س = ٢ = ق′(٢) = −١ ، ميل المماس عند س = ٣ = ق′(٣) = ١

∵ ق′(٢) × ق′(٣) = −١ ⇐ المماسان للمنحنى عند نقاط التقاطع متعامدان .

مثال

أوجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $س^٢$ + س والذي يوازي المستقيم ص − ٥س = ٣

الحـــــل

معادلة المماس : ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$)

نفرض أن نقطة التماس هي (س ، ص)

عند نقطة التماس يكون ميل المماس ق′(س) = ميل المستقيم ص = ٥س + ٣ (لأن المستقيم يوازي منحنى ق(س))

⇐ ق′(س) = ٥ ⇐ ٢س + ١ = ٥ ومنها س = ٢

⇐ نقطة التماس هي (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٦) ⇐ معادلة المماس : ص − ٦ = ٥(س − ٢) ⇐ ص = ٥ س − ٤

مثال

فلسطين : ٢٠١١

إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الإقتران ق(س) عند النقطة (١٢ ، ب) هي أص = س وكان ق′(١٢) = ٦ فإن الثابت ب = :

(أ) −٦ (ب) −٢ (ج) ٢ (د) ٦

الحـــــل

ميل المستقيم أص = س العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١٢ ، ب) = $\frac{١}{أ}$

⇐ ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١٢ ، ب) = ق′(١٢) = − أ

⇐ − أ = ٦ ⇐ أ = −٦ ⇐ معادلة المستقيم هي −٦ ص = س وحيث أنه يمر بالنقطة (١٢ ، ب)

⇐ −٦ ب = ١٢ ومنها ب = −٢ (الإجابة الفرع (ب))

مثال

جد الميل لجميع المماسات لمنحنى الإقتران ق(س) = ٢س^{٢} − ٥س + ٧ والمرسومة من النقطة (٠ ، −١) .

الحـــل

ق(٠) = ٧ ≠ −١ ⇐ النقطة (٠ ، −١) لا تقع على منحنى ق(س)

نفرض أن نقطة التماس هي (س ، ص)

ميل المماس ق َ(س) = ميل المستقيم من النقطتين (س ، ص) ، (٠ ، −١) (الميل من التفاضل يساوي الميل من التحليلية)

⇐ ق َ(س) = ٤س − ٥ = $\frac{ص - (-١)}{س - ٠}$ ⇐ ص + ١ = ٤س^{٢} − ٥س

⇐ ص = ٤س^{٢} − ٥س −١ ⇐ ٢س^{٢} − ٥س + ٧ = ٤س^{٢} − ٥س −١ (لأن ص = ق(س) = ٢س^{٢} − ٥س + ٧)

⇐ ٢س^{٢} = ٨ ⇐ س = ± ٢ ⇐ يوجد مماسان للمنحنى مرسومان من النقطة (٠ ، −١)

ميل المماس الأول عند س = ٢ = ق َ(٢) = ٤(٢) − ٥ = ٣

ميل المماس الثاني عند س = −٢ = ق َ(−٢) = ٤(−٢) − ٥ = −١٣

مثال

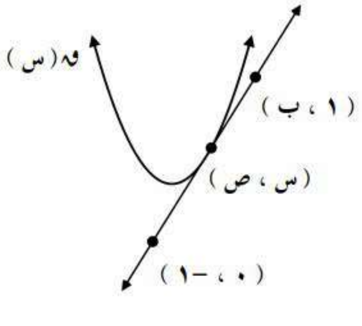
إذا كان المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، −١) ، (١ ، ب) مماساً لمنحنى الإقتران ق(س) = ٢س^{٢} − س + ٧ . جد قيمة الثابت ب

الحـــل

نفرض أن نقطة التماس هي (س ، ص)

ميل المماس ق َ(س) = ميل المستقيم (الميل عند النقطة (س ، ص) من التفاضل يساوي الميل من التحليلية)

⇐ ق َ(س) = ٤س − ١ = $\frac{ب - (-١)}{١ - ٠}$ ⇐ ٤س − ١ = ب + ١ ⇐ ب = ٤س − ٢ .... ①



المماس يمر بالنقطتين (س ، ص) ، (٠ ، −١)

⇐ ق َ(س) = ٤س − ١ = $\frac{ص - (-١)}{س - ٠}$ ⇐ ص + ١ = ٤س^{٢} − س

⇐ ص = ٤س^{٢} − س − ١ لكن ص = ق(س) = ٢س^{٢} − س + ٧

⇐ ٢س^{٢} − س + ٧ = ٤س^{٢} − س − ١ ⇐ ٢س^{٢} − ٨ = ٠ ⇐ س = ± ٢

عندما س = ٢ من ① ⇐ ب = ٦

عندما س = −٢ من ① ⇐ ب = −١٠ ⇐ ب = ٦ ، −١٠

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ − ٦٣ ن + ١٥ $ن^{٢}$ − $ن^{٣}$ حيث المسافة ف بالأمتار ، الزمن ن بالثواني ، جد ما يلي :

١) المسافة الإبتدائية . ٢) التسارع الإبتدائي ٣) الفترة الزمنية التي تكون فيها السرعة موجبة

٤) السرعة عندما يسير الجسم بسرعة ثابتة . ٥) الزمن الذي يكون عنده التسارع سالباً

الحـــــل

١) المسافة الإبتدائية ف (٠) = ٢ − ٠ + ٠ − ٠ = ٢ متر

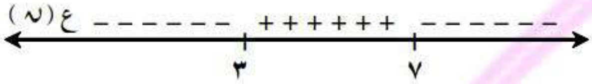
٢) التسارع الإبتدائي ت (٠)

ع (ن) = $\frac{د ف}{د ن}$ = − ٦٣ + ٣٠ ن − ٣ $ن^{٢}$ ، ت (ن) = $\frac{د ع}{د ن}$ = ٣٠ − ٦ ن ⇐ ت (٠) = ٣٠ م / $ث^{٢}$

٣) لإيجاد الفترة الزمنية التي تكون فيها السرعة موجبة نبحث إشارة السرعة

ع (ن) = − ٦٣ + ٣٠ ن − ٣ $ن^{٢}$ = ٠ ⇐ ٣ $ن^{٢}$ − ٣٠ ن + ٦٣ = ٠ ⇐ $ن^{٢}$ − ١٠ ن + ٢١ = ٠

⇐ (ن − ٧) (ن − ٣) = ٠ ⇐ ن = ٧ أو ن = ٣



من إشارة ع نلاحظ أن السرعة تكون موجبة في الفترة الزمنية] ٣ ، ٧ [

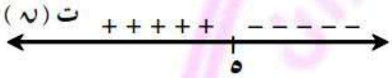
٤) السرعة عندما يسير الجسم بسرعة ثابتة أي أن المطلوب إيجاد ع (ن) عندما يكون التسارع ت (ن) = ٠

ت (ن) = ٣٠ − ٦ ن = ٠ ⇐ ن = ٥

عندما يسير الجسم بسرعة ثابتة = ع (٥) = − ٦٣ + ٣٠ (٥) − ٣ $(٥)^{٢}$ = − ٦٣ + ١٥٠ − ٧٥ = ١٢ م / ث

٥) لإيجاد الزمن الذي يكون عنده التسارع سالباً نبحث إشارة التسارع

ت (ن) = ٣٠ − ٦ ن = ٠ ⇐ ن = ٥



⇐ يكون التسارع سالباً عندما ن > ٠

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = $ن^{٣}$ − ٩ $ن^{٢}$ + ٧ حيث المسافة ف بالأمتار ، الزمن ن بالثواني ، جد ما يلي :

١) السرعة الإبتدائية ٢) التسارع عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي

٣) المسافة عندما ينعدم التسارع ٤) التسارع المتوسط في الفترة [١ ، ٣]

الحـــــل

١) السرعة ع (ن) = $\frac{د ف}{د ن}$ = ٣ $ن^{٢}$ − ١٨ ن ، السرعة الإبتدائية ع (٠) = ٠ − ٠ = ٠ م / ث

٢) التسارع عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي أي أن المطلوب إيجاد ت (ن) عندما يكون ع (ن) = ٠

ت (ن) = $\frac{د ع}{د ن}$ = ٦ ن − ١٨

ع (ن) = ٠ ⇐ ٣ $ن^{٢}$ − ١٨ ن = ٠ ⇐ ٣ ن (ن − ٦) = ٠ ⇐ ن = صفر أو ن = ٦

عندما ن = ٠ ⇐ ت (٠) = ٠ − ١٨ = − ١٨ م / ث^{٢}

عندما ن = ٦ ⇐ ت (٦) = ٦ (٦) − ١٨ = ٣٦ − ١٨ = ١٨ م / ث^{٢}

٣) المسافة عندما ينعدم التسارع أي المسافة ف (ن) عندما يكون التسارع ت (ن) = ٠

ت (ن) = ٠ ⇐ ٦ ن − ١٨ = ٠ ⇐ ن = ٦

⇐ ف (٦) = (٦)^{٣} − ٩ (٦)^{٢} + ٧ = ٢١٦ − ٣٢٤ + ٧ = − ١٠١ م

٤) التسارع المتوسط في الفترة [١ ، ٣] : $\overline{ت} = \frac{\Delta ع}{\Delta ن}$

$= \frac{ع (٣) - ع (١)}{٢} = \frac{(٣\times٩ - ١٨\times٣) - (٣\times١ - ١٨\times١)}{٢} = \frac{(-٢٧) - (-١٥)}{٢} = -٦$

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف = ن^{٢} (٢ ن − ٩)

١) جد السرعة بعد ٣ ثواني من بدء الحركة . **٢)** متى تبدأ سرعة الجسم بالتزايد

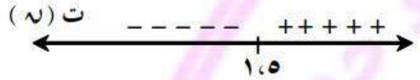
الحـــــل

١) ف = ن^{٢} (٢ ن − ٩) = ٢ ن^{٣} − ٩ ن^{٢} ، ع (ن) = ٦ ن^{٢} − ١٨ ن ⇐ ع (٣) = ٦ × ٩ − ١٨ × ٣ = ٠

٢) لمعرفة متى تبدأ سرعة الجسم بالتزايد نبحث إشارة إقتران التسارع ت (ن)

ت (ن) = ١٢ ن − ١٨ = ⇐ ن = $\frac{٣}{٢}$

نلاحظ أن سرعة الجسم تبدأ بالتزايد عندما ن = $\frac{٣}{٢}$



مثال جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى الإقتران

ق (س) = س^{٢} + ١ عند النقطة (٢ ، ٥) والمستقيم ص = ١

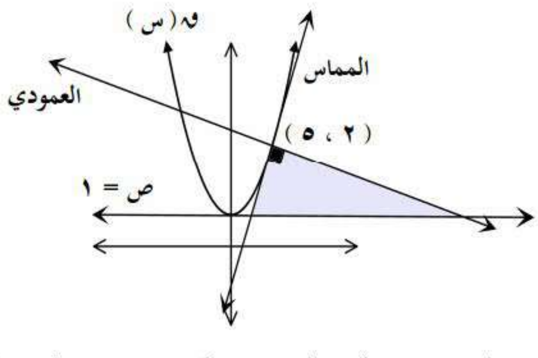
الحـــــل

م = قَ (س) = ٢س ⇐ ميل المماس لمنحنى ق (س) عند (٢ ، ٥) = قَ (٢) = ٤

نقطة التماس (٢ ، ٥) ⇐ معادلة المماس ص − ٥ = ٤ (س − ٢) ⇐ ص = ٤ س − ٣

يتقاطع المماس مع المستقيم ص = ١ عندما ٤ س − ٣ = ١

⇐ س = ١



معادلة العمودي ص − ٥ = − $\frac{١}{٤}$ (س − ٢)

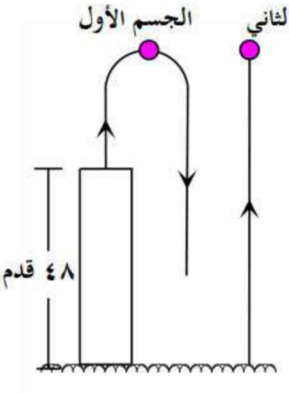
ص = − $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١١}{٢}$ ويتقاطع العمودي مع المستقيم ص = ١

عندما − $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١١}{٢}$ = ١ ⇐ س = ١٨ ⇐ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × (١٨ − ١) × (٥ − ١) = ٣٤ وحدة مربعة

مثال من قمة برج ارتفاعه (٤٨) قدم قذف جسيم رأسياً لأعلى وفق الإقتران $ف_{١}(ن) = -١٦ن^{٢} + ٣٢ن$ ، وفي اللحظة نفسها قذف جسم ثانٍ من سطح الأرض للأعلى وفق الإقتران $ف_{٢}(ن) = -١٦ن^{٢} + ع_{٠}ن$ حيث $ف_{١}$ ، $ف_{٢}$ المسافة بالأقدام ، ن الزمن بالثواني جد السرعة الإبتدائية ($ع_{٠}$) للجسيم الثاني عندما يتساوى أقصى إرتفاع للجسيمين عن سطح الأرض .

الحـــل

$ف_{١}(ن)$ للجسم الأول عن سطح الأرض $= -١٦ن^{٢} + ٣٢ن + ٤٨$



أقصى إرتفاع للجسم الأول عندما $ع_{١}(ن) = ٠$

$\Leftarrow -٣٢ن + ٣٢ = ٠ \Leftarrow ن = ١$ زمن أقصى إرتفاع للجسيم الأول

$\Leftarrow$ أقصى إرتفاع للجسيم الأول عن سطح الأرض

$= ف_{١}(١) +$ طول البرج $= -١٦ + ٣٢ + ٤٨ = ٦٤$ قدم

أقصى إرتفاع للجسم الثاني عندما $ع_{٢}(ن) = ٠$

$-٣٢ن + ع_{٠} = ٠ \Leftarrow ع_{٠} = ٣٢ن$

عند أقصى إرتفاع يكون : $ف_{٢}(ن) = -١٦ن^{٢} + ع_{٠}ن = ٦٤$

بالتعويض عن $ع_{٠} = ٣٢ن \Leftarrow -١٦ن^{٢} + ٣٢ن^{٢} = ٦٤ \Leftarrow ١٦ن^{٢} = ٦٤$

$\Leftarrow ن = ٢$ زمن أقصى إرتفاع للجسيم الثاني

$\because ع_{٠} = ٣٢ن \Leftarrow ع_{٠} = ٣٢ \times ٢ = ٦٤$ قدم / ثانية

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٢} - ٣ن + ٢$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، فإذا كانت سرعته المتوسطة في [٠ ، أ] تساوي سرعته اللحظية عندما ن = ٥ ، فجد قيمة أ .

Ⓐ ١٠   Ⓑ ١٣   Ⓒ ٤   Ⓓ ١

(أ) ١٠   (ب) ١٣   (ج) ٤   (د) ١

الحـــل

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{(أ^{٢} - ٣أ + ٢) - (٢)}{أ} = \frac{أ^{٢} - ٣أ}{أ} = أ - ٣$

السرعة اللحظية عندما ن = ٥ هي : ع(٥)

$ع(ن) = ف^{\prime}(ن) = ٢ن - ٣ \Leftarrow ع(٥) = ٧ \Leftarrow أ - ٣ = ٧$ ومنها أ = ١٠ (الإجابة الفرع (أ))

مثال فلسطين : ٢٠١٥ إكمال

قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض أفقية بحيث أن المسافة ف بالأمتار بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة $ف = ٦٤ن - ١٦ن^{٢}$:

١) أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم   ٢) بين أن الجسم يفقد نصف سرعته الإبتدائية على إرتفاع ٤٨ م

الحـــــل

١) ع (ن) = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٦٤ − ٣٢ ن = ٠ ⇐ ٣٢ ن = ٦٤ ومنها ن = ٢ ث

⇐ أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم = ف (٢) = ١٢٨ − ٦٤ = ٦٤ م

٢) الجسم على إرتفاع ٤٨ متر ⇐ ف (ن) = ٤٨ ⇐ ٦٤ ن − ١٦ ن^{٢} = ٤٨

⇐ ١٦ ن^{٢} − ٦٤ ن + ٤٨ = ٠ ⇐ ن^{٢} − ٤ ن + ٣ = ٠ ⇐ (ن − ٣) (ن − ١) = ٠

إما ن = ٣ أو ن = ١

عندما ن = ١ يكون الجسم صاعد (لأن ١ أقل من زمن أقصى إرتفاع ن = ٢)

ع (١) = ٦٤ − ٣٢ × ١ = ٣٢ قدم/ث .... ①

عندما ن = ٣ يكون الجسم هابط (لأن ٣ أكبر من زمن أقصى إرتفاع ن = ٢)

ع (٣) = ٦٤ − ٣٢ × ٣ = −٣٢ قدم/ث .... ②

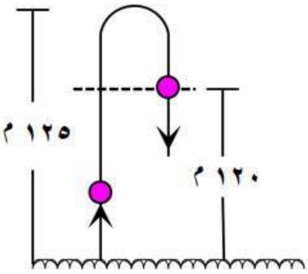
السرعة الإبتدائية ع (٠) = ٦٤ − ٣٢ × ٠ = ٦٤ قدم/ث .... ③

من ① ، ② ، ③ نلاحظ أن الجسم يفقد نصف سرعته الإبتدائية عندما يكون على إرتفاع ٤٨ متر

مثال فلسطين : ٢٠١٠ **قذف جسم رأسياً لأعلى فكانت العلاقة بين ارتفاعه بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته ن بالثواني هى ف = ٥٠ن – ٥ن^{٢} . جد الزمن اللازم لتكون المسافة التي قطعها الجسم تساوى ١٣٠م .**

الحـــــل

ف = ٥٠ن – ٥ن^{٢} و بالإشتقاق بالنسبة للزمن ⇐ $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٥٠ − ١٠ن



أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم عندما $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٠ ⇐ ٥٠ − ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٥

وتكون المسافة التي قطعها في هذه اللحظة تساوي

ف (٥) = ٥٠ × ٥ − ٥ × ٥ ^{٢} = ٢٥٠ − ١٢٥ = ١٢٥ م

وعندما يقطع الجسم مسافة ١٣٠ متر يكون نازل

إرتفاع الجسم وهو نازل ف (ن) = ٢ × زمن أقصى إرتفاع – المسافة الكلية التي قطعها الجسم

⇐ ف (ن) = ٢ × ١٢٥ – ١٣٠ = ١٢٠ متر

⇐ ٥٠ ن − ٥ ن ^{٢} = ١٢٠ ⇐ ن^{٢} − ١٠ن + ٢٤ = ٠ ومنها (ن − ٦) (ن − ٤) = ٠

⇐ ن = ٤ مرفوض لأن الجسم صاعد ، ن = ٦ ثانية وهو زمن النزول بعد قطع ١٣٠ متر وهو المطلوب

١ – ٦

قاعدة السلسلة

مثال

إذا كان $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٢}(\text{٥} - \text{٣س})^{٤}$ فإن $\text{ل}'(\text{٢}) =$:

(أ) ٤٨　　(ب) ٥٢　　(ج) ٤٤　　(د) ٥٦

الحـــل

$$\text{ل}'(\text{س}) = \text{س}^{٢} \times \text{٤}(\text{٥} - \text{٣س})^{٣} \times -\text{٣} + (\text{٥} - \text{٣س})^{٤} \times \text{٢س}$$

$$\text{ل}'(\text{٢}) = \text{٢}^{٢} \times \text{٤}(\text{٥} - \text{٣}\times\text{٢})^{٣} \times -\text{٣} + (\text{٥} - \text{٣}\times\text{٢})^{٤} \times \text{٢}\times\text{٢}$$

$$= -\text{٤٨}(-\text{١})^{٣} + \text{٤}(-\text{١})^{٤} = \text{٤٨} + \text{٤} = \text{٥٢}$$

(الإجابة الفرع ب)

مثال

إذا كان $\text{ه}(\text{س}) = \dfrac{\text{١}}{\text{س}^{٢} - \text{٦س} + \text{٩}}$ ، $\text{س} \neq \text{٣}$ ، فإن $\text{ه}''(\text{س})$ تساوي :

(أ) $-\text{ه}^{٢}(\text{س})$　　(ب) $\text{٦}\,\text{ه}(\text{س})$　　(ج) $\text{٦}\,\text{ه}^{٢}(\text{س})$　　(د) $\text{ه}^{٢}(\text{س})$

الحـــل

$$\text{ه}'(\text{س}) = \frac{-(\text{٢س} - \text{٦})}{(\text{س}^{٢} - \text{٦س} + \text{٩})^{٢}} = \frac{-\text{٢}(\text{س} - \text{٣})}{((\text{س} - \text{٣})^{٢})^{٢}} = \frac{-\text{٢}}{(\text{س} - \text{٣})^{٣}}$$

$$\text{ه}''(\text{س}) = \text{٢} \times \frac{\text{٣}(\text{س} - \text{٣})^{٢}}{(\text{س} - \text{٣})^{٦}} = \text{٦} \times \frac{\text{١}}{(\text{س} - \text{٣})^{٤}} = \text{٦} \times \frac{\text{١}}{((\text{س} - \text{٣})^{٢})^{٢}} = \text{٦} \times \frac{\text{١}}{(\text{س}^{٢} - \text{٦س} + \text{٩})^{٢}}$$

$$= \text{٦}\left(\frac{\text{١}}{\text{س}^{٢} - \text{٦س} + \text{٩}}\right)^{٢} = \text{٦}\,\text{ه}^{٢}(\text{س})$$

(الإجابة الفرع ج)

مثال

جد $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{١} + \text{س}) - \text{س}}{\text{جتاس} - \text{١}}$

الحـــل

بالتعويض المباشر $= \dfrac{\text{٠}}{\text{٠}}$ و باستخدام لوبيتال : $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{١} + \text{س}) - \text{س}}{\text{جتاس} - \text{١}} = \lim_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\frac{\text{١}}{\text{١} + \text{س}} - \text{١}}{-\text{جاس}}$

بالتعويض المباشر مرة $= \dfrac{\text{٠}}{\text{٠}}$ و باستخدام لوبيتال مرة ثانية : $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \text{٠}} \frac{\frac{\text{١}}{\text{١} + \text{س}} - \text{١}}{-\text{جاس}}$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{-\frac{١}{(١ + س)^{٢}}}{-\text{جتاس}} = \frac{-١}{-١} = ١$$

مثال

جد $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا}\,(١ - \text{جتا}\ س)}{س^{٢}}$

الحـــل

بالتعويض المباشر = $\frac{٠}{٠}$ و باستخدام لوبيتال : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا}\,(١ - \text{جتا}\ س)}{س^{٢}}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{قا}^{٢}\,(١ - \text{جتا}\ س) \times \text{جاس}}{٢س}$ بالتعويض مرة ثانية = $\frac{٠}{٠}$

و باستخدام لوبيتال مرة ثانية : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{قا}^{٢}\,(١ - \text{جتا}\ س) \times \text{جاس}}{٢س}$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{قا}^{٢}\,(١ - \text{جتا}\ س) \times \text{جتاس}) + (\text{جاس} \times ٢\text{قا}(١ - \text{جتا}\ س) \times \text{قا}\,(١ - \text{جتا}\ س)\ \text{ظا}\,(١ - \text{جتا}\ س)\ \text{جاس})}{٢}$$

$$= \frac{١ + ٠}{٢} = \frac{١}{٢}$$

مثال

إذا كان $ص = ع^{٢} + ٨ع$ ، $ع \times س = ٥ + س$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$ تساوي :

Ⓐ -٥٠ Ⓑ -١٠٠ Ⓒ ٢٠ Ⓓ ١٠٠

الحـــل

$ص = ع^{٢} + ٨ع$ ، $ع = \frac{س + ٥}{س} = ١ + \frac{٥}{س}$ ⇐ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = (٢ع + ٨) \times -\frac{٥}{س^{٢}}$

عند $س = ١$ ⇐ $ع = ١ + ٥ = ٦$ ⇐ $\frac{د ص}{د س} = (١٢ + ٨) \times -٥ = -١٠٠$ (الإجابة الفرع ب)

مثال

إذا كان $ق(س) = س^{٣} + س$ ، $هـ(س) = س^{٢}$ فإن : $(ق \circ هـ)'(١)$

Ⓐ -١ Ⓑ ١٠ Ⓒ ٤ Ⓓ ٨

الحـــل

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ١$ ، $هـ'(س) = ٢س$

$(ق \circ هـ)'(١) = ق'(هـ(١)) \times هـ'(١) = ق'(١) \times ٢ = ٤ \times ٢ = ٨$ (الإجابة الفرع د)

مثال

إذا كان $ق(س)$ قابلاً للإشتقاق وكان $ق(س^{٣} + ١) - س = صفر$ فإن $ق'(٩) =$:

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{٩}$ (جـ) صفر (د) ٣٣

الحل

$ق(س^{٣} + ١) = س \Leftarrow ق'(س^{٣} + ١) \times ٣س^{٢} = ١$ و عندما $س^{٣} + ١ = ٩ \Leftarrow س^{٣} = ٨ \Leftarrow س = ٢$

$\Leftarrow ق'(٩) \times ١٢ = ١$ ومنها $س = \frac{١}{١٢}$ (الإجابة الفرع (أ))

مثال

يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = أ(جتا٢ن + جا٢ن)$ حيث ف بعد الجسم عن نقطة ثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني . جد تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و) .

الحل

$ع(ن) = ف'(ن) = أ(-٢جا٢ن + ٢جتا٢ن)$

$ت(ن) = ع'(ن) = أ(-٤جتا٢ن - ٤جا٢ن) = -٤أ(جتا٢ن + جا٢ن) = -٤ف(ن)$

عندما يكون الجسم على بعد ٣ أمتار يكون : $ف(ن) = ٣ \Leftarrow ت(ن) = -٤ \times ٣ = -١٢$ م / ث^{٢}

مثال

إذا كان $ق(س) = لو_{هـ}((٢س + ٣)^{٢}(٣س - ٥)^{٤})$ جد $ق'(٣)$

الحل

$ق(س) = لو_{هـ}((٢س + ٣)^{٢}(٣س - ٥)^{٤}) = لو_{هـ}(٢س + ٣)^{٢} + لو_{هـ}(٣س - ٥)^{٤}$

$= ٢لو_{هـ}(٢س + ٣) + ٤لو_{هـ}(٣س - ٥)$

$\Leftarrow ق'(س) = ٢ \times \frac{٢}{٢س + ٣} + ٤ \times \frac{٣}{٣س - ٥} \Leftarrow ق'(٣) = \frac{٤}{٩} + \frac{١٢}{٤} = = \frac{٤}{٩} + ٣ = \frac{٣١}{٩}$

مثال

إذا كان $ق(س)$ قابل للإشتقاق عند $س = ١$ وكان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ)}{هـ} = ٥$ فإن $ق'(١) =$

إذا كان $ق(س)$ قابل للإشتقاق عند $س = ١$ وكان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ)}{هـ} = ٥$ فإن $ق'(١) =$:

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

الحـــــــل

بالتعويض في النهاية البسط = ق(١) و المقام = صفر والنهاية موجودة وتساوي ٥

هذا يعني أن ق(١) = ٠ و بالتعويض المباشر = $\frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال : $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{قَ(١ + هـ) \times ١}{١} = قَ(١)$

لكن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ)}{هـ} = ٥ \Leftarrow قَ(١) = ٥$ **(الإجابة الفرع ⓑ)**

مثال

إذا كان ق(س) = $هـ^{٢}$(ك(س)) ، ك(١) = ٢ ، كَ(١) = ٣ ، هـ(٢) = ٤ ، هـَ(٢) = ٥ ، جد قَ(١) .

الحـــــــل

$قَ(س) = ٢\ هـ(ك(س)) \times [هـ(ك(س))]َ = ٢\ هـ(ك(س)) \times هـَ(ك(س)) \times كَ(س)$

$\Leftarrow قَ(١) = ٢\ هـ(ك(١)) \times هـَ(ك(١)) \times كَ(١)$

$= ٢\ هـ(٢) \times هـَ(٢) \times ٣ = ٢ \times ٤ \times ٥ \times ٣ = ١٢٠$

مثال

إذا كان ص = $(١ + ع)^{٢}$ ، س = $\frac{١ - ع}{١ + ع}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠

الحـــــــل

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{١}{\frac{د س}{د ع}}$$

$$\frac{د ص}{د ع} = ٢(١ + ع) \quad ، \quad \frac{د س}{د ع} = \frac{(١ + ع) \times -١ - (١ - ع)}{(١ + ع)^{٢}} = \frac{-٢}{(١ + ع)^{٢}}$$

$$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٢(١ + ع) \times \frac{(١ + ع)^{٢}}{-٢} = -(١ + ع)^{٣}$$

عندما س = ٠ $\Leftarrow ١ - ع = ٠ \Leftarrow ع = ١ \Leftarrow \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠} = -(١ + ١)^{٣} = -٨$

مثال

إذا كان ق(س) = | $س^{٢}$ − ١ | فإن : (ق ∘ ق)َ(٣)

Ⓐ ٩٦ ⓑ ٨٠ ⓙ ١٦ ⓓ ٢٤

الحـــــل

(ق ○ ق)′ (٣) = ق′(ق(٣)) × ق′(٣) ، ق(٣) = | ٣^{٢} − ١ | = ٨

عندما س = ٣ ⇐ ق(س) = س^{٢} − ١ ⇐ ق′(س) = ٢س ⇐ ق′(٣) = ٦

⇐ (ق ○ ق)′ (٣) = ق′(٨) × ٦

عندما س = ٨ ⇐ ق(س) = س^{٢} − ١ ⇐ ق′(س) = ٢س ⇐ ق′(٨) = ١٦

⇐ (ق ○ ق)′ (٣) = ١٦ × ٦ = ٩٦ (الإجابة الفرع Ⓟ)

مثال

إذا كان ص = (جاس + جتاس)^{٤} ، أثبت أن ص″ + ٤ص = ١٢جتا^{٢} ٢س .

الحـــــل

ص′ = ٤ (جاس + جتاس)^{٣} (جتاس − جاس)

ص″ = ٤ (جاس + جتاس)^{٣} (− جاس − جتاس) + (جتاس − جاس) × ١٢ (جاس + جتاس)^{٢} (جتاس − جاس)

= −٤ (جاس + جتاس)^{٤} + ١٢ (جاس + جتاس)^{٢} (جتاس − جاس)^{٢}

= −٤ ص + ١٢((جتاس + جاس) (جتاس − جاس))^{٢} = −٤ ص + ١٢(جتا^{٢}س − جا^{٢}س)^{٢}

⇐ ص″ + ٤ص = ١٢(جتا٢س)^{٢} ⇐ ص″ + ٤ص = ١٢جتا^{٢} ٢س

مثال

إذا كان ق(س) = ٢ظتاس ، هـ(س) = Ⓟس (س^{٢} − ٣)^{٣} وكان (هـ ○ ق)′ ($\frac{\pi}{٤}$) = −٥٠ ، جد قيمة Ⓟ .

الحـــــل

ق′(س) = − ٢ قتا^{٢}س

هـ′(س) = Ⓟ س × ٣ (س^{٢} − ٣)^{٢} × ٢س + Ⓟ (س^{٢} − ٣)^{٣} = ٦ Ⓟ س^{٢} × (س^{٢} − ٣)^{٢} + Ⓟ (س^{٢} − ٣)^{٣}

(هـ ○ ق)′ ($\frac{\pi}{٤}$) = هـ′(ق($\frac{\pi}{٤}$)) × ق′($\frac{\pi}{٤}$)

∵ ق($\frac{\pi}{٤}$) = ٢ظتاس ($\frac{\pi}{٤}$) = ٢ ، ق′($\frac{\pi}{٤}$) = − ٢ × ٢ = −٤

⇐ (هـ ○ ق)′ ($\frac{\pi}{٤}$) = هـ′(٢) × −٤

⇐ −٤ هـ′(٢) = −٥٠ ⇐ −٤ (٦Ⓟ × ٢^{٢} × (٢^{٢} − ٣)^{٢} + Ⓟ (٢^{٢} − ٣)^{٣}) = −٥٠

⇐ −٤ (٢٤Ⓟ + Ⓟ) = −٥٠ ⇐ −٤ (٢٥Ⓟ) = −٥٠ ⇐ − ١٠٠Ⓟ = −٥٠ ومنها Ⓟ = $\frac{١}{٢}$

١ – ٧ الإشتقاق الضمني

مثال

إذا كان س = ق(ص^{٢} + ١) ، ق$'$(٥) = ٥ ، فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما ص = ٢ تساوي :

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢٠}$ (ج) $\frac{٣}{١٠}$ (د) $\frac{٦}{٥}$

الحل

باشتقاق الطرفين ⇐ ١ = ق$'$(ص^{٢} + ١) × ٢ ص × $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ و عندما ص = ٢ ⇐ ١ = ق$'$(٥) × ٤ × $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

⇐ ١ = ٢٠ × $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ومنها $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{١}{٢٠}$ (الإجابة الفرع ⓑ)

مثال فلسطين : ٢٠١٦

إذا كان ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، فإن : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ص ص$'$) تساوي :

(أ) $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ (ب) صفر (ج) ١ (د) $\frac{١}{٢\text{س}}$

الحل

ص$'$ = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ⇐ ص ص$'$ = $\sqrt{\text{س}}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ص ص$'$) = صفر (الإجابة الفرع ⓑ)

مثال

إذا كان ص = ظا (س ص) ، بين أن : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{ص + ص}^{٣}}{\text{١ − س (١ + ص}^{٢}\text{)}}$

الحل

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س ⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا^{٢} (س ص) (س $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ص)

⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = س $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ قا^{٢} (س ص) + ص قا^{٢} (س ص) ⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ − س $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ قا^{٢} (س ص) = ص قا^{٢} (س ص)

⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (١ − س قا^{٢} (س ص)) = ص قا^{٢} (س ص)

∵ قا^{٢} (س ص) = ١ + ظا^{٢} (س ص) = ١ + ص^{٢} ⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (١ − س (١ + ص^{٢})) = ص (١ + ص^{٢})

⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (١ − س (١ + ص^{٢})) = ص + ص^{٣} ⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{ص + ص}^{٣}}{\text{١ − س (١ + ص}^{٢}\text{)}}$

مثال

إذا كان $\sqrt{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ١}$ ، أثبت أن $\text{ص}''\text{ص} = \text{ص}' \, (\text{س} - ١)$.

الحل

$$\sqrt{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ١} \Leftarrow \text{س} - ١ = \sqrt{\text{ص}}$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س $\Leftarrow ١ = \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \times \text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = ٢\sqrt{\text{ص}}$

$$\text{ص}'' = ٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \times \text{ص}' = \frac{\text{ص}'}{\sqrt{\text{ص}}} \Leftarrow \text{ص}'' = \text{ص}' \times \frac{\text{س} - ١}{\text{ص}} \Leftarrow \text{ص}''\text{ص} = \text{ص}' \, (\text{س} - ١) \; .$$

مثال

إذا كانت العلاقة بين السرعة ع والمسافة ف هي $\text{ع} = ٤\text{ف}^{٢} - ٦\text{ف}$ ، جد التسارع عندما ف = ٢

Ⓐ ٦٤ Ⓑ ٢٤ Ⓒ ٣٢ Ⓓ ٤٠

(أ) ٦٤ (ب) ٢٤ (ج) ٣٢ (د) ٤٠

الحل

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن $\Leftarrow \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = ٨\text{ف} \times \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} - ٦ \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}} \Leftarrow \text{ت} = ٨ \, \text{ف ع} - ٦ \, \text{ع}$

وعندما ف = ٢ $\Leftarrow \text{ع} = ٤ \times ٢^{٢} - ٦\times٢ = ٤$

$\Leftarrow \text{ت} = ٨ \times ٢ \times ٤ - ٦ \times ٤ = ٦٤ - ٢٤ = ٤٠$ (الإجابة الفرع (د))

مثال

إذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٣} + ٢\text{ع}$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ع}} = ٤\text{ع}$ ، جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ عند ع = ١

الحل

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ع}} = ٤\text{ع} \Leftarrow \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \frac{١}{٤\text{ع}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{١}{٤\text{ع}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (٣\text{ع}^{٢} + ٢) \times \frac{١}{٤\text{ع}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٣}{٤}\text{ع} + \frac{١}{٢\text{ع}}$$

وبالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

$$\Leftarrow \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \left(\frac{٣}{٤} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} \right) - \left(\frac{٢}{٤\text{ع}^{٢}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} \right) \text{ وعندما ع} = ١ \Leftarrow \text{فإن } \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \frac{١}{٤}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \left(\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٤} \right) - \left(\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} \right) = \frac{٣}{١٦} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$$

مثال

إذا كان ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ أثبت أن : س ص˝ + ٢ص´ + س ص = صفر

الحـــــل ✍

ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ⇐ س ص = جاس بالإشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س

س ص´ + ص = جتاس بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

س ص˝ + ص´ + ص´ = − جاس لكن س ص = جاس

⇐ س ص˝ + ٢ص´ = − س ص ⇐ س ص˝ + ٢ص´ + س ص = صفر

مثال فلسطين : ٢٠١٠ ✍ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة (س − ص)^{٢} + ٢س − ص = ٦ عند نقطة / نقاط تقاطع منحناها مع المستقيم ص − س + ١ = صفر .

الحـــــل ✍

(س − ص)^{٢} + ٢س − ص = ٦ ، معادلة المستقيم ص = س −١

لإيجاد نقطة / نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم نعوض عن قيمة ص من معادلة المستقيم في معادلة المنحنى :

⇐ (س − (س − ١))^{٢} + ٢س − (س −١) = ٦ ⇐ ١ + ٢س − س + ١ = ٦

⇐ س + ٢ = ٦ ⇐ س = ٤

بالتعويض في معادلة المستقيم ⇐ ص = ٤ −١ = ٣

⇐ نقطة التقاطع واحدة = (٤ ، ٣) وهي نقطة التماس

نشتق العلاقة بالنسبة إلى س لإيجاد ميل المماس عند (٤ ، ٣)

⇐ ٢ (س − ص) (١ − ص´) + ٢ − ص´ = ٠

ميل المماس عند (٤ ، ٣)

٢ (٤ − ٣) (١ − ص´) + ٢ − ص´ = ٠ ⇐ ٤ − ٣ ص´ = ٠ ⇐ ص´ = $\frac{٤}{٣}$

معادلة المماس : ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$) ⇐ ص − ٣ = $\frac{٤}{٣}$ (س − ٤)

⇐ ص − ٣ = $\frac{٤}{٣}$س − $\frac{١٦}{٣}$ ⇐ ص = $\frac{٤}{٣}$س − $\frac{١٦}{٣}$ + ٣ ⇐ ص = $\frac{٤}{٣}$س − $\frac{٧}{٣}$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢$ عندما $\text{س} = ١$ ، $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{د س}^٢} = ٥$ عند $\text{س} = ١$ ، جد $\frac{\text{د}^٢\text{س}}{\text{د ص}^٢}$ عندما $\text{س} = ١$

الحـــــل

$\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ص

$\Leftarrow \; ١ = \text{ق}'(\text{س}) \times \frac{\text{د س}}{\text{د ص}} \;\Leftarrow\; \frac{\text{د س}}{\text{د ص}} = \frac{١}{\text{ق}'(\text{س})}$ وبالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى ص

$$\Leftarrow \; \frac{\text{د}^٢\text{س}}{\text{د ص}^٢} = \frac{-\text{ق}''(\text{س}) \times \frac{\text{د س}}{\text{د ص}}}{(\text{ق}'(\text{س}))^٢}$$

$$\Leftarrow \; \frac{\text{د}^٢\text{س}}{\text{د ص}^٢} \text{ عند س} = ١ = \frac{-\text{ق}''(١) \times \frac{\text{د س}}{\text{د ص}}\Big|_{\text{س}=١}}{(\text{ق}'(١))^٢} = \frac{-٥ \times \frac{١}{٢}}{٢^٢} = -\frac{٥}{٨}$$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٦\text{جتا}(\pi\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} + ٣}$ ، جد : $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\frac{١}{٣})$

الحـــــل

$\text{ق}(\text{س}) = ٦\text{جتا}(\pi\text{س})$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = -٦\pi\,\text{جا}(\pi\text{س})$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt{٢\text{س} + ٣} \text{ ، } \text{هـ}'(\text{س}) = \frac{٢}{٢\sqrt{٢\text{س}+٣}} = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}+٣}} = (٢\text{س}+٣)^{-\frac{١}{٢}}$$

$$\text{هـ}''(\text{س}) = -\frac{١}{٢}(٢\text{س}+٣)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ = \frac{-١}{\sqrt{(٢\text{س}+٣)^٣}}$$

$$(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\text{س}) = \text{هـ}''(\text{ق}(\text{س})) \times \text{ق}'(\text{س})$$

$$(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\frac{١}{٣}) = \text{هـ}''(\text{ق}(\frac{١}{٣})) \times \text{ق}'(\frac{١}{٣}) = \text{هـ}''(٦\text{جتا}(\frac{\pi}{٣})) \times -٦\pi\,\text{جا}(\frac{\pi}{٣})$$

$$= \text{هـ}''(٣) \times -٦\pi \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \text{هـ}''(٣) \times -٣\sqrt{٣}\,\pi = -\frac{١}{٢٧} \times -٣\sqrt{٣}\,\pi = \frac{\pi\sqrt{٣}}{٩}$$

مثال

ليكن المنحنيان $\text{س} = \text{ص}^{٢}$ ، $\text{س ص} = \text{ك}$ ، أثبت أن المنحنيان متعامدان عندما $٨\,\text{ك}^{٢} = ١$

الحـــــل

نفرض أن نقطة التعامد هي (س ، ص)

عند نقطة التعامد يكون $\sqrt{\text{س}} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} \Leftarrow \text{س}^{\frac{٣}{٢}} = \text{ك} \Leftarrow \text{س} = \text{ك}^{\frac{٢}{٣}}$

باشتقاق العلاقة الأولى بالنسبة إلى س : $١ = ٢\text{ص}\,\text{ص}' \Leftarrow$ ميل المنحنى الأول : $\text{ص}' = \frac{١}{٢\text{ص}}$

باشتقاق العلاقة الثانية بالنسبة إلى س : $\text{س}\,\text{ص}' + \text{ص} = ٠ \Leftarrow$ ميل المنحنى الثاني : $\text{ص}' = -\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

يكون المنحنيان متعامدان عندما يكون حاصل ضرب ميليهما $= -١ \Leftarrow \frac{١}{٢\text{ص}} \times -\frac{\text{ص}}{\text{س}} = -١$

$\Leftarrow \frac{١}{٢\text{س}} = ١ \Leftarrow ٢\text{س} = ١$ وبالتعويض عن قيمة $\text{س} = \text{ك}^{\frac{٢}{٣}}$

$\Leftarrow ٢\,\text{ك}^{\frac{٢}{٣}} = ١ \Leftarrow$ وبتكعيب الطرفين $\Leftarrow ٨\,\text{ك}^{٢} = ١$

مثال

إذا كان $\text{ص}^{٢} = \frac{٥}{\text{س}^{٢} + ١}$ ، أثبت أن : $\text{س}\,\text{ص}^{٣} + ٥\,\text{ص}' = ٠$

الحـــــل

$\text{ص}^{٢} = \frac{٥}{\text{س}^{٢} + ١} \Leftarrow \text{س}^{٢} + ١ = \frac{٥}{\text{ص}^{٢}}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\Leftarrow ٢\text{س} = \frac{-١٠\,\text{ص}\,\text{ص}'}{\text{ص}^{٤}} \Leftarrow ٢\text{س} = \frac{-١٠\,\text{ص}'}{\text{ص}^{٣}} \Leftarrow ٢\text{س}\,\text{ص}^{٣} = -١٠\,\text{ص}'$ ومنها $\text{س}\,\text{ص}^{٣} + ٥\,\text{ص}' = ٠$

٢ – ١ نظريتا رول والقيمة المتوسطة

مثال فلسطين : ٢٠١٦

إذا كان ق(س) = ٣ $\sqrt{س}$ – س يحقق شروط نظرية رول على الفترة [١ ، ٤] فإن قيمة ج التي تحددها النظرية تساوي :

Ⓐ $\frac{٣}{٢}$ Ⓑ $\frac{٧}{٤}$ Ⓒ ٢ Ⓓ $\frac{٩}{٤}$

الحل

ق(س) يحقق شروط نظرية رول ⇐ يوجد ج ∈] ١ ، ٤ [حيث ق´(ج) = ٠ ⇐ $\frac{٣}{٢\sqrt{ج}}$ – ١ = ٠

⇐ $\frac{٣}{٢\sqrt{ج}}$ = ١ ⇐ ٢ $\sqrt{ج}$ = ٣ ⇐ $\sqrt{ج}$ = $\frac{٣}{٢}$ ومنها ج = $\frac{٩}{٤}$ (الإجابة الفرع Ⓓ)

مثال

إذا كان ق(س) = ٣$س^{٢}$ – ١٢س + ١١ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [٠ ، أ] فإن قيمة أ تساوي :

Ⓐ صفر Ⓑ ٤ Ⓒ –٤ Ⓓ ٢

الحل

ق(س) يحقق شروط نظرية رول ⇐ ق(أ) = ق(٠) ⇐ ٣ $أ^{٢}$ – ١٢ أ + ١١ = ١١ ⇐ ٣ $أ^{٢}$ – ١٢ أ = ٠

⇐ ٣ أ (أ – ٤) = ٠ ⇐ إما أ = ٠ (مرفوض) أو أ = ٤ (مقبول) (الإجابة الفرع Ⓑ)

مثال

إذا كان ق(س) قابل للإشتقاق على ح بحيث ق(١) = –٢ ، ق´(س) ⩾ ٢ ∀ س ∈ [١ ، ٦] فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يكون :

Ⓐ ق(٦) ⩾ ٨ Ⓑ ق(٦) > ١٢ Ⓒ ق(٦) ⩽ ٥ Ⓓ ق(٦) = ٥

الحل

ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ⇐ يوجد ج ∈] ١ ، ٦ [حيث ق´(ج) = $\frac{ق(٦) – ق(١)}{٥}$

∵ ق´(س) ⩾ ٢ ∀ س ∈ [١ ، ٦] ، ج ∈] ١ ، ٦ [⇐ ق´(ج) ⩾ ٢

⇐ $\frac{ق(٦) – ق(١)}{٥}$ ⩾ ٢ ⇐ ق(٦) – ق(١) ⩾ ١٠ وبما أن ق(١) = –٢

⇐ ق(٦) – (–٢) ⩾ ١٠ ⇐ ق(٦) ⩾ ٨ (الإجابة الفرع Ⓐ)

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ إقتران كثير حدود بحيث إن : $١ < \text{ق}'(\text{س}) < ٢$ ، $\text{ق}(٢) = ٣$ ، أثبت باستخدام نظرية القيمة المتوسطة أن $٦ < \text{ق}(٥) < ٩$

الحـــــل

نطبق نظرية القيمة المتوسطة على الإقتران $\text{ق}(\text{س})$ في الفترة [٢ ، ٥]

∵ $\text{ق}(\text{س})$ متصل على [٢ ، ٥] وقابل للإشتقاق على] ٢ ، ٥ [لأنه كثير حدود

⇐ يوجد جـ ∈] ٢ ، ٥ [حيث $\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٣}$

∵ $١ < \text{ق}'(\text{س}) < ٢$ ⇐ $١ < \text{ق}'(\text{جـ}) < ٢$ ⇐ $١ < \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٣} < ٢$

⇐ $٣ < \text{ق}(٥) - \text{ق}(٢) < ٦$ لكن $\text{ق}(٢) = ٣$ ⇐ $٣ < \text{ق}(٥) - ٣ < ٦$ ⇐ $٦ < \text{ق}(٥) < ٩$

مثال

فلسطين : ٢٠١١

بين أن الإقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - \text{س}^٢ & ، -١ \leqslant \text{س} < ١ \\ \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٥ & ، ١ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [−١ ، ٢] ثم أوجد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية

الحـــــل

هـ (س) متصل على الفترة [−١ ، ١ [وقابل للإشتقاق على الفترة] −١ ، ١ [لأنه كثير حدود

هـ (س) متصل على الفترة] ١ ، ٢] وقابل للإشتقاق على الفترة] ١ ، ٢ [لأنه كثير حدود

عندما س = ١ نقطة تحول

$\text{هـ}(١) = ٢$ ، $\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} ٣ - \text{س}^٢ = ٢$ ، $\underset{\text{س} \to ١^+}{\text{نهـا}} \text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٥ = ٢$

⇐ هـ (س) متصل عند س = ١ ⇐ هـ (س) متصل على [−١ ، ٢]

$\text{هـ}'(\text{س}) = \begin{cases} -٢\text{س} & ، -١ < \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} - ٤ & ، ١ < \text{س} < ٢ \end{cases}$

∵ $\text{هـ}'(١)^- = -٢$ ، $\text{هـ}'(١)^+ = -٢$ ⇐ $\text{هـ}'(١)$ موجودة

⇐ هـ (س) قابل للإشتقاق على الفترة] −١ ، ٢ [⇐ هـ (س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [−١ ، ٢]

هـ َ(س) =
- -٢س ، -١ < س < ١
- ٢س – ٤ ، ١ < س < ٢
- -٢ ، س = ١
- غير موجودة ، س = -١ ، ٢

⇐ يوجد ج ∈] -١ ، ٢ [حيث هـ َ(ج) = $\frac{هـ (٢) – هـ (-١)}{٣}$ = $\frac{١ - ٢}{٣}$ = – $\frac{١}{٣}$

عندما ج ∈] -١ ، ١ [

هـ َ(ج) = – $\frac{١}{٣}$ ⇐ -٢ ج = – $\frac{١}{٣}$ ⇐ ج = $\frac{١}{٦}$ (مقبول) لأن $\frac{١}{٦}$ ∈] -١ ، ١ [

عندما ج ∈] ١ ، ٢ [

هـ َ(ج) = – $\frac{١}{٣}$ ⇐ ٢ ج – ٤ = – $\frac{١}{٣}$ ⇐ ٢ ج = $\frac{١١}{٣}$ ⇐ ج = $\frac{١١}{٦}$ (مقبول) لأن $\frac{١١}{٦}$ ∈] ١ ، ٢ [

عندما ج = ١ هـ َ(ج) = – $\frac{١}{٣}$ مرفوض لأن هـ َ(١) = -٢ ⇐ ج = $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١١}{٦}$

مثال

فلسطين : ٢٠١٣ إكمال

إذا كان ٯ(س) =
- س^٢ + س + ١ ، س ≤ ١
- ٣س ، س > ١

متصلاً على الفترة [-٣ ، $\frac{٧}{٣}$] بين أن ٯ(س) يحقق باقي شروط نظرية رول على الفترة [-٣ ، $\frac{٧}{٣}$] ثم جد قيمة / قيم ج التي تعينها النظرية

الحـــــل

ٯ(س) متصل عندما س ∈ [-٣ ، $\frac{٧}{٣}$] (معطى) .... ①

ٯ َ(س) =
- ٢س + ١ ، -٣ < س < ١
- ٣ ، ١ < س < $\frac{٧}{٣}$

∵ ٯ َ(١)$^{-}$ = ٣ ، ٯ َ(١)$^{+}$ = ٣ ⇐ ٯ َ(١) موجودة

⇐ ق̀(س) =
- ٢س + ١ ، −٣ < س < ١
- ٣ ، ١ ≤ س < $\frac{٧}{٣}$
- غير موجودة ، س = −٣ ، $\frac{٧}{٣}$

⇐ ق(س) قابل للإشتقاق على الفترة] −٣ ، $\frac{٧}{٣}$ [.................. ②

ق(−٣) = ٩ − ٣ + ١ = ٧ ، ق($\frac{٧}{٣}$) = ٣ × $\frac{٧}{٣}$ = ٧ ⇐ ق(−٣) = ق($\frac{٧}{٣}$) .... ③

من ① ، ② ، ③ ⇐ ق(س) يحقق شروط نظرية رول على الفترة [−٣ ، $\frac{٧}{٣}$]

⇐ يوجد جـ ∈] −٣ ، $\frac{٧}{٣}$ [حيث ق̀(جـ) = ٠

عندما جـ ∈] −٣ ، ١ [

ق̀(جـ) = ٠ ⇐ ٢ جـ + ١ = ٠ ⇐ جـ = − $\frac{١}{٢}$ (مقبول) لأن − $\frac{١}{٢}$ ∈] −٣ ، ١ [

عندما جـ ∈ [١ ، $\frac{٧}{٣}$ [

ق̀(جـ) = ٠ ⇐ ٣ = ٠ (مستحيل) ⇐ قيمة جـ التي تعينها النظرية = − $\frac{١}{٢}$

مثال

إذا كان ق(س) = س + $\frac{ب}{س}$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [أ ، ٤] وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي ٢ فإن قيم أ ، ب على التوالي تساوي :

Ⓐ ٤ ، ١ Ⓑ ٤ ، ٤ Ⓒ ١ ، ٤ Ⓓ ٤ ، −١

الحل

ق(س) يحقق شروط نظرية رول ، جـ = ٢ ⇐ ق̀(٢) = ٠

ق̀(س) = ١ − $\frac{ب}{س^٢}$ ⇐ ١ − $\frac{ب}{٢^٢}$ = ٠ ⇐ $\frac{ب}{٤}$ = ١ ⇐ ب = ٤

أيضاً ق(أ) = ق(٤) ⇐ أ + $\frac{٤}{أ}$ = ٥ ⇐ أ^٢ + ٤ = ٥ أ ⇐ أ^٢ − ٥ أ + ٤ = ٠

⇐ (أ − ٤) (أ − ١) = ٠ ⇐ إما أ = ٤ (مرفوض) أو أ = ١ (مقبول) (الإجابة الفرع Ⓐ)

مثال

إذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ قابل للإشتقاق حيث هـ (٤) = ٠ ، هـَ (١) = ٠

بين أن (هـ ٥ ق) (س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [–٢ ، ٢] ثم أوجد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية .

الحـــــل

هـ (س) قابل للإشتقاق إذن متصل

ق(س) ، هـ (س) متصلين ⇐ (هـ ٥ ق) (س) متصل لأنه مركب من إقترانين متصلين .... ①

ق(س) ، هـ (س) قابلين للإشتقاق ⇐ (هـ ٥ ق) (س) قابل للإشتقاق لأنه مركب من إقترانين قابلين للإشتقاق .... ②

(هـ ٥ ق) (–٢) = هـ (ق(–٢)) = هـ (٤) = ٠

(هـ ٥ ق) (٢) = هـ (ق(٢)) = هـ (٤) = ٠

⇐ (هـ ٥ ق) (–٢) = (هـ ٥ ق) (٢) .... ③

من ① ، ② ، ③ ⇐ (هـ ٥ ق) (س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [–٢ ، ٢]

⇐ يوجد جـ ∈] –٢ ، ٢ [حيث (هـ ٥ ق)َ (جـ) = ٠ ⇐ هـَ (ق(جـ)) × قَ(جـ) = ٠

وبما أن ق(جـ) = جـ^{٢} ، قَ(جـ) = ٢جـ

⇐ هـَ (جـ^{٢}) × ٢جـ = ٠ ⇐ ٢جـ = ٠ ومنها جـ = ٠

أو هـَ (جـ^{٢}) = ٠ لكن هـَ (١) = ٠ ⇐ جـ^{٢} = ١ ومنها جـ = ± ١

⇐ جـ = ٠ ، –١ ، ١

مثال

فلسطين : ٢٠١٤ إكمال

جد قيمة الثوابت ٢ ، ب ، جـ التي تجعل الإقتران

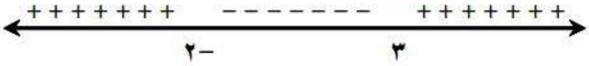
ق(س) =
| س^{٢} – س – ٦ | ، ٠ ⩽ س < ١
٢ س + ب ، ١ ⩽ س < ٢
جـ ، س = ٢

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٢]

الحـــــل

بإعادة تعريف الإقتران | س^{٢} – س – ٦ | نلاحظ أنه عندما س ∈ [٠ ، ١ [فإن

| س^{٢} – س – ٦ | = –(س^{٢} – س – ٦) = – س^{٢} + س + ٦



ق(س) =
– س^{٢} + س + ٦ ، ٠ ⩽ س < ١
٢ س + ب ، ١ ⩽ س < ٢
جـ ، س = ٢

، بما أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٢] إذن ق(س) متصل على [٠ ، ٢] وقابل للإشتقاق على] ٠ ، ٢ [

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢س + ١ \quad ، & ٠ < س < ١ \\ أ \quad ، & ١ < س < ٢ \\ \text{غير موجودة} \quad ، & س = ٠ ، ٢ \end{cases}$$

① من الإشتقاق : $ق'(١)^{+} = ق'(١)^{-}$ ⇐ $أ = -٢ + ١$ ومنها $أ = -١$

② من الإتصال : $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ أ\,س + ب = \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ -س^{٢} + س + ٦$

⇐ $-١ + ب = ٦$ ⇐ $ب = ٧$

أيضاً من الإتصال عند س = ٢ من اليسار : $ق(٢) = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ أ\,س + ب$ ⇐ $ج = ٢أ + ب$ ⇐ $ج = -٢ + ٧$

⇐ $ج = ٥$ ⇐ قيم الثوابت $أ = -١$ ، $ب = ٧$ ، $ج = ٥$

مثال فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال

بين أن الإقتران $هـ(س) = س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة $[\frac{١}{٢} ، ٢]$ ثم أوجد قيمة / قيم ج التي تعينها النظرية

الحــــل

$هـ(س) = س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}$ متصل على الفترة $[\frac{١}{٢} ، ٢]$ لأنه مجموع متصلين وكذلك قابل للإشتقاق على الفترة $]\frac{١}{٢} ، ٢[$ لأنه مجموع قابلين للإشتقاق

$هـ(\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٤} + ٤ = \frac{١٧}{٤}$ ، $هـ(٢) = ٤ + \frac{١}{٤} = \frac{١٧}{٤}$

⇐ هـ(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة $[\frac{١}{٢} ، ٢]$ ⇐ يوجد $ج \in]\frac{١}{٢} ، ٢[$ حيث $هـ'(ج) = ٠$

⇐ $٢ج - \frac{٢}{ج^{٣}} = ٠$ ⇐ $٢ج^{٤} = ٢$ ⇐ $ج^{٤} = ١$ ⇐ $ج = ١$ (ج = -١ مرفوضة)

مثال

إذا كان ق ، هـ متصلين على الفترة [٢ ، ٣] وقابلين للإشتقاق على الفترة] ٢ ، ٣ [

وكان $ق(٢) = ٣ هـ(٢) = ٦$ ، $ق(٣) = ٤ هـ(٣) = ٨$ ، بين أن : $ق'(ج) + هـ'(ج) = ٢$.

الحـــــل

ق(س) ، هـ (س) يحققان شروط نظرية القيمة المتوسطة

⇐ يوجد جـ ∋] ٢ ، ٣ [حيث قَ(جـ) = ق(٣) − ق(٢) = ٨ − ٦ = ٢ .... ①

كذلك يوجد جـ ∋] ٢ ، ٣ [حيث هـَ(جـ) = هـ (٣) − هـ (٢)

لكن هـ (٣) = ٢ ، هـ (٢) = ٢ ⇐ هـَ(جـ) = ٢ − ٢ = ٠ .... ②

من ① ، ② ⇐ قَ(جـ) + هـَ(جـ) = ٢ + ٠ = ٢

مثال

إذا كان ق ، ك إقترانين متصلين على الفترة [أ ، ب] وقابلين للإشتقاق على الفترة] أ ، ب [وكان ق(أ) = ك (أ) ، ق(ب) = ك (ب) ، فأثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∋] أ ، ب [بحيث إن : قَ(جـ) = كَ(جـ) .

الحـــــل

بتطبيق نظرية رول على الإقتران هـ (س) = ق(س) − ك (س)

هـ (س) متصل على الفترة [أ ، ب] لأنه ناتج طرح متصلين

هـ (س) قابل للإشتقاق على الفترة] أ ، ب [لأنه ناتج طرح مشتقين

هـ (أ) = ق(أ) − ك (أ) = ٠ ، هـ (ب) = ق(ب) − ك (ب) = ٠ ⇐ هـ (أ) = هـ (ب)

⇐ هـ (س) يحقق شروط نظرية رول على الفترة [أ ، ب]

⇐ يوجد جـ ∋] أ ، ب [حيث هـَ(جـ) = ٠ لكن : هـَ(جـ) = قَ(جـ) − كَ(جـ)

⇐ قَ(جـ) − كَ(جـ) = ٠ ⇐ قَ(جـ) = كَ(جـ)

مثال

إذا كان $ق(س) = ٢س (س − ٣)^{ن}$ حيث ن > ١ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [٠ ، ٣]

وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية = $\frac{٣}{٤}$ جد قيمة ن

الحـــــل

ق(س) يحقق شروط نظرية رول ، جـ = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ $قَ(\frac{٣}{٤}) = ٠$

$قَ(س) = ٢ ن س (س − ٣)^{ن − ١} + ٢ (س − ٣)^{ن}$ ⇐ $٢ ن \frac{٣}{٤} (\frac{٣}{٤} − ٣)^{ن − ١} + ٢ (\frac{٣}{٤} − ٣)^{ن} = ٠$

⇐ $٢ ن \frac{٣}{٤} (− \frac{٩}{٤})^{ن − ١} + ٢ (− \frac{٩}{٤})^{ن} = ٠$ ⇐ $٢ (− \frac{٩}{٤})^{ن − ١} (\frac{٣}{٤} ن − \frac{٩}{٤}) = ٠$

إما $(− \frac{٩}{٤})^{ن − ١} = ٠$ (وهذا مستحيل)

أو $\frac{٣}{٤} ن − \frac{٩}{٤} = ٠$ ⇐ $\frac{٣}{٤} ن = \frac{٩}{٤}$ ⇐ ن = ٣ (مقبول)

مثال

إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(ج) حيث أ < ج < ب فأثبت وجود عدد واحد على الأقل د ∈] أ ، ب [بحيث ق″(د) = ٠

الحل

بتطبيق نظرية رول على ق(س) في الفترة [أ ، ب]

ق(س) متصل على الفترة [أ ، ب] وقابل للإشتقاق على] أ ، ب [لأنه كثير حدود وكذلك ق(أ) = ق(ب)

⇐ حسب نظرية رول ⇐ يوجد ك ∈] أ ، ب [حيث ق′(ك) = ٠

بتطبيق نظرية رول على ق(س) في الفترة [ج ، ب]

ق(س) متصل على الفترة [ج ، ب] وقابل للإشتقاق على] ج ، ب [لأنه كثير حدود وكذلك ق(ج) = ق(ب)

⇐ حسب نظرية رول ⇐ يوجد ل ∈] ج ، ب [حيث ق′(ل) = ٠

بتطبيق نظرية رول على ق′(س) في الفترة [ك ، ل]

ق′(س) متصل على الفترة [ك ، ل] وقابل للإشتقاق على] ك ، ل [لأنه كثير حدود وكذلك ق′(ك) = ق′(ل) = ٠

⇐ حسب نظرية رول ⇐ يوجد د ∈] ك ، ل [حيث ق″(د) = ٠

∵ أ < ك < ج < ل < ب بمعنى أن الفترة] ك ، ل [فترة جزئية من الفترة] أ ، ب [

⇐ يوجد د ∈] أ ، ب [حيث ق″(د) = ٠

٢ – ٢ النقط الحرجة والإقترانات المتزايدة والمتناقصة

مثال

فلسطين : ٢٠١٢

إذا كان ق(س) معرفاً على ح وكان ق′(س) = $\frac{س^{٢} + ٢س}{(س + ١)^{٢}}$ فإن عدد النقاط الحرجة للإقتران ق يساوي :

Ⓐ ٠   (ب) ١   (ج) ٢   (د) ٣

الحل

① ق′(س) = ٠ عندما س^{٢} + ٢س = ٠ ⇐ س (س + ٢) = ٠ ومنها س = ٠ أو س = −٢

② ق′(س) غير موجودة عند أصفار المقام ولا يوجد أصفار مقام

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { ٠ ، ٢ } عددها ٢ (الإجابة الفرع (ب))

مثال

الإقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٣٦ - \text{س}^{٢}}$ ، $\text{س} \in [-٢ ، ٣]$ له نقاط حرجة عند س = :

Ⓐ { ٠ ، ٣ } Ⓑ { −٢ ، −٣ } Ⓒ { ٠ ، ٦ ، ٣ ، −٢ } Ⓓ { ٠ ، −٢ }

الحـــل

مجال الإقتران ق(س) هو س ∈ [−٢ ، ٣] ، $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٣٦ - \text{س}^{٢}}} = \frac{-\text{س}}{\sqrt{٣٦ - \text{س}^{٢}}}$

① ق'(س) = ٠ ⇐ −س = ٠ ومنها س = ٠ (مقبولة لأنها تنتمي للمجال)

② ق'(س) غير معرفة عند أطراف الفترة وأصفار المقام وأطراف فترة المجال هي النقطة س = −٢ فقط

عندما $٣٦ - \text{س}^{٢} = ٠$ ⇐ $\text{س}^{٢} = ٣٦$ ومنها س = ± ٦ (−٦ مرفوضة ، ٦ مرفوضة)

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { ٠ ، −٢ } (الإجابة الفرع Ⓓ)

مثال

إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة فإن أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للإقتران ق(س) على الفترة [أ ، ب] يساوي :

Ⓐ ٣ Ⓑ ٤ Ⓒ ٥ Ⓓ ٦

الحـــل

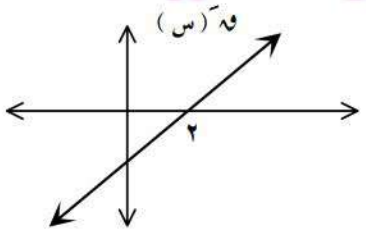
أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للإقتران ق(س) على الفترة [أ ، ب]

هو أكبر عدد ممكن من أصفار ق'(س) وهو إقتران من الدرجة الثالثة بالإضافة إلى أطراف الفترة لأن ق'(س) غير موجودة عندها

إذن أكبر عدد ممكن للنقاط الحرجة = ٣ + ٢ = ٥ (الإجابة الفرع Ⓒ)

مثال

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) للإقتران كثير الحدود ق(س) فإن منحنى ق(س) يكون متزايد في الفترة :



Ⓐ $]-\infty ، \infty[$ Ⓑ $]-\infty ، ٢]$ Ⓒ $[٠ ، \infty[$ Ⓓ $[٢ ، \infty[$

الحـــل

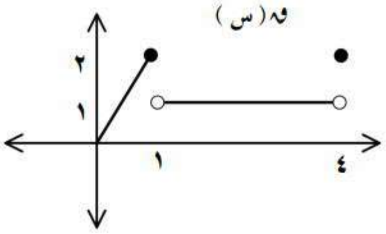
الشكل المجاور يمثل منحنى ق'(س) ⇐ لإيجاد فترات التزايد والتناقص ننظر للأجزاء أعلى وأسفل محور السينات

نجد أن منحنى ق'(س) فوق محور السينات في الفترة $[٢ ، \infty[$

⇐ منحنى ق(س) يكون متزايد في الفترة $[٢ ، \infty[$ (الإجابة الفرع Ⓓ)

مثال

يمثل الشكل المجاور منحنى قَ(س) المعرف على [٠ ، ٤] ، فإن مجموعة قيم س التي يكون لمنحنى الإقتران قَ(س) عندها نقاط حرجة هي :



Ⓐ { ٠ ، ٤ }   Ⓑ { ٠ } ∪ [١ ، ٤]   Ⓒ { ٠ ، ١ ، ٤ }   Ⓓ { ٠ } ∪] ١ ، ٤ [

الحل

الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) لذلك قيم س التي يكون لمنحنى الإقتران قَ(س) عندها نقاط حرجة هي أطراف الفترات ونقط عدم الإتصال ونقط الزوايا إن وجدت وكذلك النقط التي يكون عندها قَ‾(س) = صفر

للتوضيح :

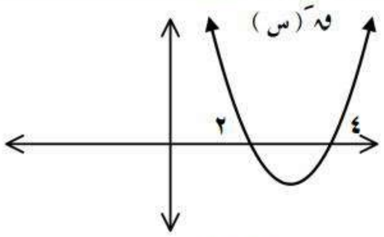
النقاط س = ٠ ، س = ٤ أطراف فترات

النقاط س = ١ ، س = ٤ نقاط إنفصال

الفترة] ١ ، ٤ [فيها قَ‾(س) = صفر

إذن مجموعة قيم س التي يكون للمنحنى عندها نقاط حرجة هي س ∈ { ٠ } ∪ [١ ، ٤]   **(الإجابة الفرع Ⓑ)**

مثال

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى قَ‾(س) للإقتران كثير الحدود قَ(س) فإن منحنى قَ(س) يكون متناقص في الفترة :	
Ⓐ [−∞ ، ٤]	Ⓑ [٤ ، ∞ [
Ⓒ [٢ ، ٤]	Ⓓ [−∞ ، ٢] ∪ [٤ ، ∞ [

الحل

الشكل المجاور يمثل منحنى قَ‾(س)

⇐ لإيجاد فترات التزايد والتناقص ننظر للأجزاء أعلى وأسفل محور السينات

نجد أن منحنى قَ‾(س) أسفل محور السينات في الفترة [٢ ، ٤]

⇐ منحنى قَ(س) يكون متناقص في الفترة [٢ ، ٤]   **(الإجابة الفرع Ⓒ)**

مثال فلسطين : ٢٠٠٩

إذا كان الإقتران ق(س) كثير حدود معرف على الفترة [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقص على مجاله وكان الإقتران هـ (س) = ٨ − س ، بين أن الإقتران ك (س) = (ق × هـ) (س) متناقص في الفترة [٢ ، ٦]

الحــــل

هـ (س) = ٨ − س ⇐ هـ′ (س) = −١ ⇐ هـ (س) متناقص في [٢ ، ٦]

نبحث إشارة ك′ (س)

ك (س) = (ق × هـ) (س) ⇐ ك′ (س) = ق (س) × هـ′ (س) + هـ (س) × ق′ (س)

إشارة ق (س) (+) (لأنه في الربع الأول) ، إشارة هـ′ (س) (−)

إشارة هـ (س) (+) (لأن منحناه فوق محور السينات في [٢ ، ٦]) ، إشارة ق′ (س) (−) (لأن ق (س) متناقص)

إذن إشارة ك′ (س) = (+) × (−) + (+) × (−) = (−) + (−) = (−)

⇐ ك (س) متناقص في الفترة [٢ ، ٦]

٢ – ٣ القيم القصوى

مثال

عين فترات التزايد والتناقص للإقتران ق (س) = ٤س − $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ، س ∋ [−٣ ، ٣] ثم أوجد القيم القصوى للإقتران .

الحــــل

ق (س) متصل على الفترة [−٣ ، ٣] ، ق′ (س) = ٤ − س^{٢}

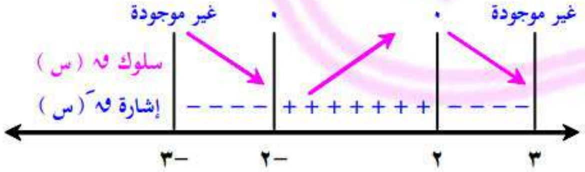
① ق′ (س) = ٠ ⇐ ٤ − س^{٢} = ٠ ⇐ س = ± ٢ (مقبولة لأنها تنتمي للمجال)

② ق′ (س) غير معرفة عند أطراف الفترة س = −٣ ، س = ٣

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ق (س) هي { ٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣ }

من إشارة ق′ (س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق (س)

متزايد على [−٢ ، ٢] ومتناقص على [−٣ ، −٢] ∪ [٢ ، ٣]



ق (−٣) = ٤ (−٣) − $\frac{١}{٣}$ (−٣)^{٣} = −٣ قيمة عظمى محلية

ق (−٢) = ٤ (−٢) − $\frac{١}{٣}$ (−٢)^{٣} = − $\frac{١٦}{٣}$ قيمة صغرى مطلقة ومحلية

ق (٢) = ٤ (٢) − $\frac{١}{٣}$ (٢)^{٣} = $\frac{١٦}{٣}$ عظمى مطلقة ومحلية

ق (٣) = ٤ (٣) − $\frac{١}{٣}$ (٣)^{٣} = ٣ قيمة عظمى محلية

مثال

إذا كان ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، π] جد :

١) مجالات التزايد والتناقص للإقتران ق(س) . ٢) القيم العظمى والصغرى للإقتران ق(س) مبيناً نوعها .

الحل

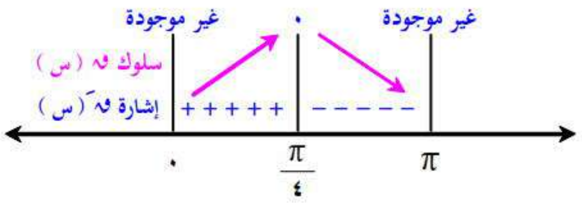
ق(س) متصل على [٠ ، π] لأنه مجموع متصلين

قَ(س) = جتاس – جاس

① قَ(س) = ٠ ⟸ جتاس – جاس = ٠ ⟸ ظاس = ١ ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

② قَ(س) غير معرفة عند أطراف الفترة عندما س = ٠ ، س = π

⟸ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، π }



من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س)

متزايد على [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ومتناقص على [$\frac{\pi}{٤}$ ، π]

ق(٠) = ١ **قيمة صغرى محلية** ، ق($\frac{\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$ عظمى مطلقة ، ق(π) = –١ قيمة صغرى مطلقة

مثال

عين فترات التزايد والتناقص للإقتران ق(س) = س + $\frac{٩}{س + ٢}$ ، س ∈ [–١ ، ٤ [ثم أوجد القيم القصوى للإقتران .

الحل

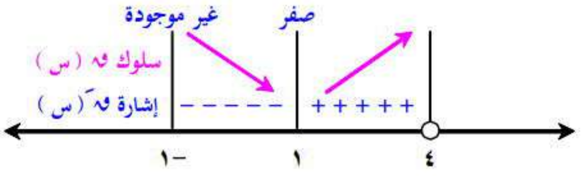
ق(س) متصل على الفترة [–١ ، ٤ [، قَ(س) = ١ – $\frac{٩}{(س + ٢)^{٢}}$

① قَ(س) = ٠ ⟸ $(س + ٢)^{٢}$ = ٩ ⟸ س + ٢ = ± ٣

س + ٢ = ٣ ⟸ س = ١ (مقبولة) ، س + ٢ = –٣ ⟸ س = – ٥ (مرفوضة)

② قَ(س) غير معرفة عند أطراف الفترة س = –١ فقط وأصفار المقام (لا يوجد)

⟸ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { ١ ، –١ }



من إشارة قَ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س)

متزايد على [١ ، ٤ [ومتناقص على [–١ ، ١]

ق(–١) = –١ + ٩ = ٨ قيمة عظمى محلية ، ق(١) = ١ + ٣ = ٤ قيمة صغرى مطلقة

مثال

فلسطين : ٢٠١٧

ليكن ق(س) = $\sqrt{٦ - س^{٢}}$ ، س ∋ [-٢ ، ١] فإن القيمة الصغرى المطلقة هي:

(أ) ق(١)	(ب) ق(٠)	(ج) ق(-١)	(د) ق(-٢)

الحـــــل

ق(س) متصل على الفترة [-٢ ، ١] ، ق'(س) = $\frac{-س}{\sqrt{٦ - س^{٢}}}$

① ق'(س) = ٠ ⟸ -س = ٠ ومنها س = ٠ (مقبولة لأنها تنتمي للمجال)

② ق'(س) غير معرفة عند أطراف الفترة وأصفار المقام

أطراف فترة المجال هما س = -٢ ، س = ١

عندما ٦ - $س^{٢}$ = ٠ ⟸ $س^{٢}$ = ٣٦ ومنها س = ± $\sqrt{٦}$ (كلاهما مرفوض)

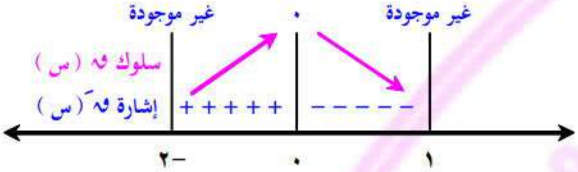
⟸ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { -٢ ، ٠ ، ١ }

من إشارة ق'(س) في الشكل المجاور يوجد

عند س = -٢ ، س = ١ قيم صغرى

ق(-٢) = $\sqrt{٢}$ قيمة صغرى مطلقة

ق(١) = $\sqrt{٥}$ قيمة صغرى محلية



(الإجابة الفرع (د))

٢ - ٤ التقعر ونقط الإنعطاف

مثال

إذا كان ق'(س) كثير حدود متزايد على الفترة س > ٠ ، وكان ق'(١) = ٠ ، ق(س) يمر بالنقطة (١ ، ٥) فإن ق(س) له قيمة محلية :

(أ) صغرى = ٥	(ب) عظمى = ٥	(ج) صغرى = ١	(د) عظمى = ١

الحـــــل

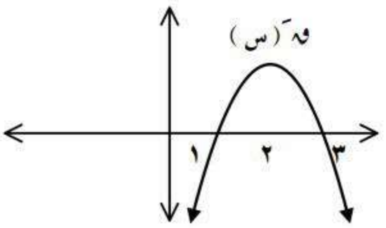
ق'(س) كثير حدود متزايد على الفترة س > ٠ ⟸ ق''(س) > ٠ في هذه الفترة ⟸ ق''(١) > ٠

∵ ق'(١) = ٠ أي أن س = ١ نقطة حرجة

⟸ حسب اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى ق(١) = ٥ قيمة صغرى محلية (الإجابة الفرع (أ))

مثال

معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل قَ(س) جد :



١) فترات التزايد والتناقص لمنحنى ق(س)

٢) القيم القصوى لمنحنى ق(س)

٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) و نقط الإنعطاف (إن وجدت)

الحـــــل

الشكل المجاور يمثل قَ(س)

١) لاحظ أن منحنى قَ(س) فوق محور السينات في الفترة [١ ، ٣] وتحت محور السينات في [– ∞ ، ١] وكذلك] ٣ ، ∞ [

إذن ق(س) متزايد في [١ ، ٣] ، ق(س) متناقص في [– ∞ ، ١] وكذلك [٣ ، ∞]

٢) القيم القصوى هي القيم التي يكون عندها قَ(س) = ٠ وتمثل نقاط تقاطع منحنى قَ(س) مع محور السينات ونلاحظ من الشكل أن منحنى قَ(س) يقطع محور السينات في النقاط س = ١ ، س = ٣

فتكون القيم القصوى لمنحنى الإقتران ق(س) هي النقاط (١ ، ق(١)) ، (٣ ، ق(٣))

٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س) و نقاط الإنعطاف (إن وجدت)

لإيجاد فترات التقعر لأعلى وللأسفل لمنحنى ق(س)

نجد أن : ميل قَ(س) على يسار س = ٢ موجب (قً(س) > ٠)

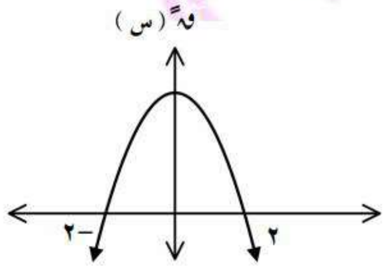
و ميل قَ(س) على يمين س = ٢ سالب (قً(س) < ٠)

⇐ ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [– ∞ ، ٢] ، ق(س) مقعر للأسفل في الفترة [٢ ، ∞]

لإيجاد نقاط الإنعطاف من الشكل نلاحظ أن عند س = ٢ يكون قً(٢) = ٠

كذلك ق(س) يغير إتجاه تقعره حول هذه النقطة وبالتالي تكون (٢ ، ق(٢)) نقطة إنعطاف

مثال



الشكل المجاور يمثل منحنى قً(س) للإقتران ق(س) المتصل على ح

، إذا علمت أن قَ(–١) = قَ(٦) = ٠ جد :

١) نقاط القيم القصوى المحلية للإقتران ق(س) .

٢) فترات التزايد والتناقص للإقتران ق(س) .

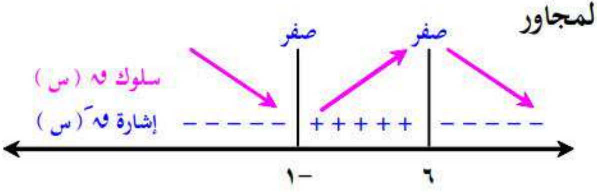
الحـــــل

قَ(–١) = قَ(٦) = ٠ ⇐ س = –١ ، س = ٦ نقاط حرجة

من الشكل المعطى :

قً(٦) < ٠ ⇐ حسب إختبار المشتقة الثانية (٦ ، ق(٦)) قيمة عظمى محلية

ق″(−١) > ٠ ⇐ حسب إختبار المشتقة الثانية (−١ ، ق(−١)) قيمة صغرى محلية



لإيجاد فترات التزايد والتناقص نمثل القيم العظمى والصغرى كما في الشكل المجاور

وبناءً عليه يكون منحنى ق(س)

متزايد على [−١ ، ٦]

ومتناقص على] −∞ ، −١] وكذلك [٦ ، ∞ [

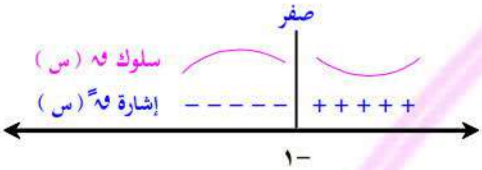
مثال

فلسطين : ٢٠١٧ دور ثاني

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + س^{٢} − ٢س فإن منحنى ق(س) يقع فوق جميع مماساته في الفترة :

(أ)] −١ ، ∞ [(ب)] ١ ، ∞ [(ج)] −∞ ، −١] (د)] −∞ ، ١]

الحـــل



ق(س) يقع فوق جميع مماساته يعني مقعر للأعلى

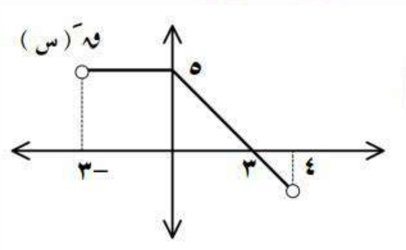
ق(س) متصل على ح لأنه كثير حدود

ق′(س) = س^{٢} + ٢ س − ٢ ق″(س) = ٢س + ٢ = ٠ ⇐ س = −١

من إشارة ق″(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [−١ ، ∞ [(الإجابة الفرع (أ))

مثال

فلسطين : ٢٠١٧



الشكل المجاور يمثل منحنى ق′(س) على الفترة [−٣ ، ٤] فإن ق(س) يكون :

(أ) مقعر للأسفل على [٠ ، ٤] (ب) مقعر للأسفل على [−٣ ، ٣]

(ج) متناقصاً على [٠ ، ٤] (د) متناقصاً على [٠ ، ٣]

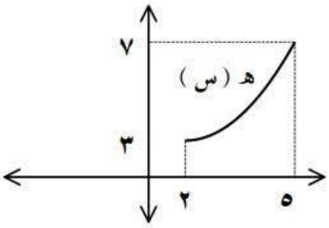
الحـــل

بما أن المنحنى يمثل ق′(س) نركز في الشكل على ميل ق′(س) والذي يبين إشارة ق″(س) وبالتالي يحدد إتجاه التقعر في الفترة [٠ ، ٤] نلاحظ أن ميل ق′(س) سالب

وهذا يعني أن إشارة ق″(س) سالبة أي أن المنحنى مقعر للأسفل في هذه الفترة (الإجابة الفرع (أ))

مثال

فلسطين : ٢٠١٦ إكمال



الشكل المجاور يمثل منحنى هـ (س) في الفترة [٢ ، ٥] ، وكان
ق(س) = س هـ (س) بين أن ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [٢ ، ٥]

الحـــــل

ق'(س) = س هـ'(س) + هـ (س) ، ق''(س) = س × هـ''(س) + ٢هـ'(س)

إشارة س في [٢ ، ٥] (+)

إشارة هـ''(س) (+) (لأن منحنى هـ (س) مقعر للأعلى في [٢ ، ٥])

إشارة هـ'(س) (+) في [٢ ، ٥] (لأن ميل هـ (س) = هـ'(س) موجب في [٢ ، ٥])

إذن إشارة ق''(س) = ((+) × (+)) + (+) = (+) ⇐ ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [٢ ، ٥]

مثال للإقتران ق(س) = جا^{٢}س – جتا٢س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] جد :

١) القيم العظمى والصغرى المحلية

٢) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الإنعطاف إن وجدت ٣) زاوية الإنعطاف .

الحـــــل

ق(س) متصل على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] لأنه حاصل طرح متصلين

ق'(س) = ٢جاس جتاس + ٢جا٢س = جا٢س + ٢ جا٢س = ٣جا٢س

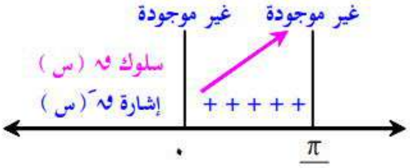
① ق'(س) = ٠

⇐ ٣جا٢س = ٠ ⇐ ٢س = ٠ ومنها س = ٠ أو ٢س = π ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ (كلاهما مرفوض لأنهما طرفي فترة)

② ق'(س) غير موجودة عند أطراف الفترة عندما س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ }

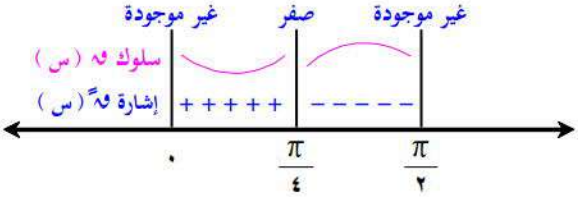
من إشارة ق'(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س)



ق(٠) = –١ قيمة صغرى مطلقة

ق($\frac{\pi}{٢}$) = ٢ قيمة عظمى مطلقة

ق''(س) = ٦جتا٢س



ق″(س) = ٠ ⇐ ٦جتا٢س = ٠

⇐ ٢س = $\frac{\pi}{٢}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$ (مقبول)

ق″(س) غير موجودة عند أطراف الفترة عندما س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

من إشارة ق″(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

مقعر لأعلى في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ، مقعر لأسفل في الفترة [$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

∵ ق″($\frac{\pi}{٤}$) = ٠ ومنحنى ق(س) يغير إتجاه تقعره حول هذه النقطة

⇐ نقطة الإنعطاف هي ($\frac{\pi}{٤}$ ، ق($\frac{\pi}{٤}$)) وتساوي ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$)

زاوية الإنعطاف هـ هي التي تحقق : ظا هـ = ق′($\frac{\pi}{٤}$) ⇐ ظا هـ = ٣جا($\frac{\pi}{٢}$) ⇐ هـ ≈ ٧١,٥٧°

مثال

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥ - س^٢ & ، \ ٠ \leqslant س \leqslant ٢ \\ س^٢ - ٣ & ، \ ٢ < س \leqslant ٣ \end{cases}$ ، جد :

١) مجالات التزايد والتناقص للإقتران ق(س)

٢) فترات التقعر للأعلى وللأسفل

الحـــــل

ق(س) متصل عند س = ٢ إذن متصل على الفترة [٠ ، ٢]

ق′(س) = $\begin{cases} -٢س & ، \ ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$

ق′(٢)⁺ = ٤ ، ق′(٢)⁻ = −٤ ⇐ ق′(٢) غير موجودة

⇐ ق′(س) = $\begin{cases} -٢س & ، \ ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، \ ٢ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \ س = ٠ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$

① عندما س ∈] ٠ ، ٢ [

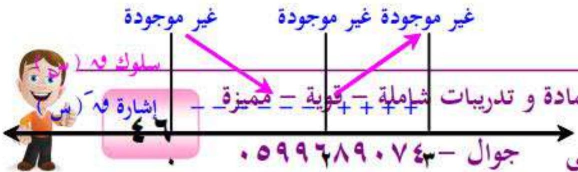
ق′(س) = ٠ ⇐ −٢س = ٠ ومنها س = ٠ (مرفوض طرف فترة)

عندما س ∈] ٢ ، ٣ [

ق′(س) = ٠ ⇐ ٢س = ٠ ومنها س = ٠ (مرفوض)

② ق′(س) غير موجودة عند أطراف الفترة عندما س = ٠ ، س = ٢ ، س = ٣

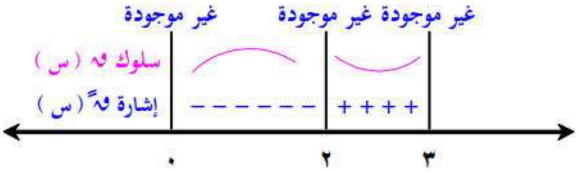
⇐ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { ٠ ، ٢ ، ٣ }



من إشارة ق َ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س)

متناقص في [٠ ، ٢] ، متزايد في [٢ ، ٣]

ق″(س) =
-٢ ، ٢ > س > ٠
٢ ، ٣ > س > ٢
غير موجودة ، س = ٠ ، ٢ ، ٣



أيضاً ق″(س) ≠ ٠

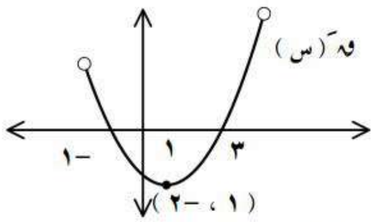
من إشارة ق″(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س)

مقعر لأسفل في [٠ ، ٢] ، مقعر لأعلى في [٢ ، ٣]

مثال

فلسطين : ٢٠١٤

إذا كان الرسم المجاور يمثل منحنى ق َ(س) ، فإن نقطة إنعطاف منحنى ق(س) هي :



Ⓐ (١ ، ٢-) Ⓑ (١ ، ق(١)) Ⓒ (٣ ، ٠) Ⓓ (١- ، ٠)

الحــــل

بما أن المنحنى يمثل ق َ(س)

من الشكل نلاحظ أن عند س = ١ يكون ق″(١) = ٠

كذلك ميل ق َ(س) على يمين س = ١ موجب (منحنى ق(س) مقعر للأعلى)

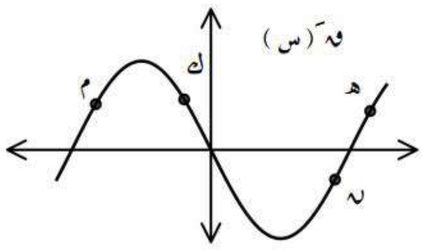
وميل ق َ(س) على يسار س = ١ سالب (منحنى ق(س) مقعر للأسفل)

⇐ ق″(١) = ٠ ومنحنى ق(س) يغير إتجاه تقعره حول س = ١ ⇐ (١ ، ق(١)) هي نقطة إنعطاف (الإجابة الفرع Ⓑ)

مثال

جنين : ٢٠١٩ تجريبي

بالإعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق َ(س) ، فإن النقطة التي يكون عندها ق″(س) ، ق‴(س) سالبتين هي :



Ⓐ م	Ⓑ ك	Ⓒ هـ	Ⓓ ن

الحـــــل

بما أن المنحنى يمثل ق′(س) نركز على ميل ق′(س) والذي يمثل ق″(س) ونركز على التقعر والذي يمثل ق″(س)

وبتفحص النقاط نجد أن :

عند النقطة ل يكون الميل وهو ق″(س) سالب والمنحنى مقعر للأسفل أي ق″(س) أيضاً سالب (الإجابة الفرع ⓑ)

مثال

إذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) الكثير الحدود عند نقطة الإنعطاف (٢ ، ١) هي ص = ٤ – ٢س

فإن (ق × ق′)′(٢) تساوي :

Ⓐ صفر ⓑ –٤ ⓙ ٤ ⓓ ٥

الحـــــل

(٢ ، ١) نقطة إنعطاف ⇐ ق(٢) = ١ ، ق″(٢) = ٠

ميل المماس = –٢ (معامل س) ⇐ ق′(٢) = –٢

(ق × ق′)′(٢) = ق(٢) × ق″(٢) + ق′(٢) × ق′(٢) = ١ × ٠ + –٢ × –٢ = ٤ (الإجابة الفرع ⓙ)

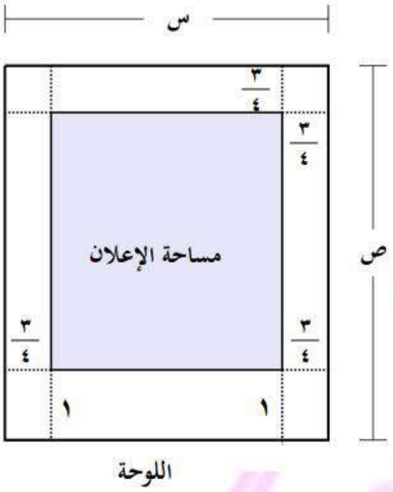
٢ – ٥ تطبيقات عملية على القيم القصوى

مثال لوحة من الورق مستطيلة الشكل محيطها ٢٤ متراً ، يراد عمل إعلان على أكبر مساحة منها بشرط أن يترك هامشاً في أسفلها عرضه متراً واحداً وثلاثة هوامش في جهاتها الثلاثة الباقية عرض كل منها $\frac{٣}{٤}$ متراً . احسب طول بعدي اللوحة .

الحل

نفرض أن عرض اللوحة (س) متر وطولها = (ص) متر

مساحة الإعلان م = طول الإعلان × عرض الإعلان



اللوحة

⇐ $\text{م} = (\text{ص} - \frac{٧}{٤})(\text{س} - \frac{٦}{٤})$ (إقتران الهدف)

محيط اللوحة = ٢ س + ٢ ص = ٢٤ متر

⇐ س + ص = ١٢ (علاقة مساعدة)

⇐ ص = ١٢ – س وبالتعويض عن قيمة ص في المساحة

⇐ $\text{م} = (١٢ - \text{س} - \frac{٧}{٤})(\text{س} - \frac{٦}{٤})$

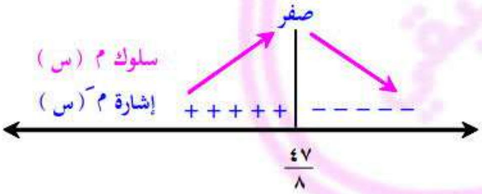
⇐ $\text{م} = (\frac{٤١}{٤} - \text{س})(\text{س} - \frac{٣}{٢})$

$$\text{م} = (\frac{٤١}{٤}\text{س} - \frac{١٢٣}{٨} - \text{س}^٢ + \frac{٣}{٢}\text{س}) = -\text{س}^٢ + \frac{٤٧}{٤}\text{س} - \frac{١٢٣}{٨}$$

$$\text{م}' = -٢\text{س} + \frac{٤٧}{٤}$$

$\text{م}' = ٠$ ⇐ $-٢\text{س} + \frac{٤٧}{٤} = ٠$ ومنها $\text{س} = \frac{٤٧}{٨}$

من إشارة م̀ في الشكل المجاور

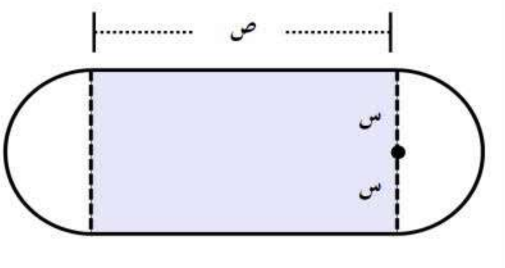


نجد أن أكبر مساحة للوحة تكون عندما $\text{س} = \frac{٤٧}{٨}$ متر

البعد الآخر $\text{ص} = ١٢ - \text{س} = \frac{٩٦}{٨} - \frac{٤٧}{٨} = \frac{٤٩}{٨}$ متر

مثال يراد إقامة سياج حول قطعة أرض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة كما في الشكل المجاور ، فإذا كان تكلفة تركيب المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين ٤ دنانير وعلى الأجزاء المنحنية ٦ دنانير جد أكبر مساحة ممكنة لقطعة الأرض التي يمكن إحاطتها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار

الحـــــل



نفرض أن عرض المستطيل = (٢س) سم وطوله = (ص) سم

مساحة قطعة الأرض م = مساحة نصفي الدائرة + مساحة المستطيل

⇐ $م = \pi س^{٢} + ٢س\ ص$ **(إقتران الهدف)**

تكلفة الجانبين المستقيمين = ٤ (٢ص) دينار = ٨ص دينار

تكلفة الأجزاء المنحنية = ٦ (٢π س) دينار = ١٢π س دينار

التكلفة الكلية ت = ٨ص + ١٢π س = ٤٠٠ **(علاقة مساعدة)**

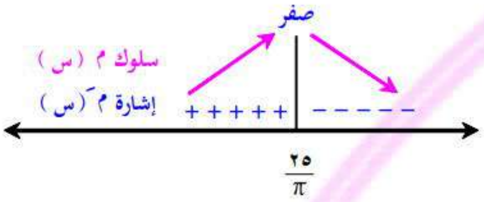
⇐ ٢ص + ٣π س = ١٠٠

⇐ ٢ص = ١٠٠ – ٣π س وبالتعويض عن قيمة ٢ص في المساحة

⇐ $م = \pi س^{٢} + س\ (\ ١٠٠ - ٣\pi س\ ) = \pi س^{٢} + ١٠٠س - ٣\pi س^{٢} = ١٠٠س - ٢\pi س^{٢}$

$م' = ١٠٠ - ٤\pi س$

$م' = ٠ \Leftarrow ١٠٠ - ٤\pi س = ٠$ ومنها $س = \frac{٢٥}{\pi}$ متر



من إشارة مَ في الشكل المجاور

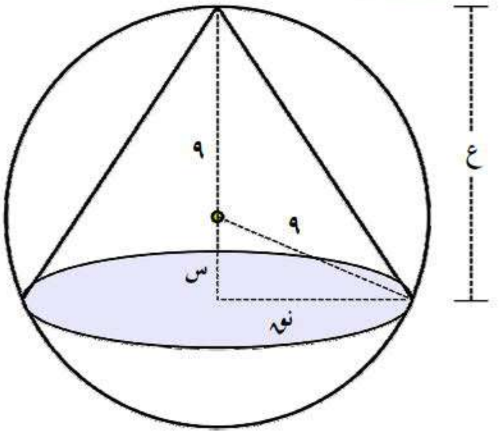
نجد أن أكبر مساحة لقطعة الأرض تكون عندما س = $\frac{٢٥}{\pi}$

بالتعويض في معادلة المساحة ⇐ $م = ١٠٠\ (\frac{٢٥}{\pi}) - ٢\pi\ (\frac{٢٥}{\pi})^{٢} = \frac{٢٥٠٠}{\pi} - \frac{١٢٥٠}{\pi} = \frac{١٢٥٠}{\pi}$ م٢

مثال جد أكبر حجم ممكن لمخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ٩سم .

الحـــــل

نفرض أن نق نصف قطر المخروط ، ع إرتفاعه ، والضلع س كما في الشكل المجاور



حجم المخروط $ح = \frac{١}{٣}\pi\ نق^{٢}\ ع$ **(إقتران الهدف)**

من فيثاغورث : $نق^{٢} = ٨١ - س^{٢}$ **(علاقة مساعدة)**

من الشكل : ع = ٩ + س **(علاقة مساعدة)**

بالتعويض عن $نق^{٢}$ ، ع في علاقة الحجم

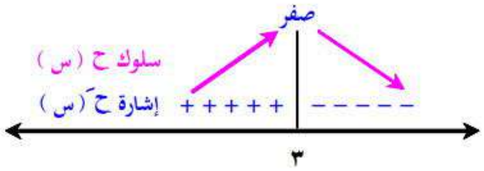
⇐ $ح = \frac{١}{٣}\pi\ (\ ٨١ - س^{٢}\ )\ (\ ٩ + س\ )$

⇐ $ح = \frac{١}{٣}\pi\ (\ ٧٢٩ + ٨١س - ٩س^{٢} - س^{٣}\ )$

$ح' = \frac{١}{٣}\pi\ (\ ٨١ - ١٨س - ٣س^{٢}\ )$

$حَ = ٠ \Leftarrow ٨١ - ١٨س - ٣س^{٢} = ٠ \Leftarrow س^{٢} + ٦س - ٢٧ = ٠ \Leftarrow (س + ٩)(س - ٣) = ٠$

ومنها س = ٣ (مقبول) أو س = −٩ (مرفوض)



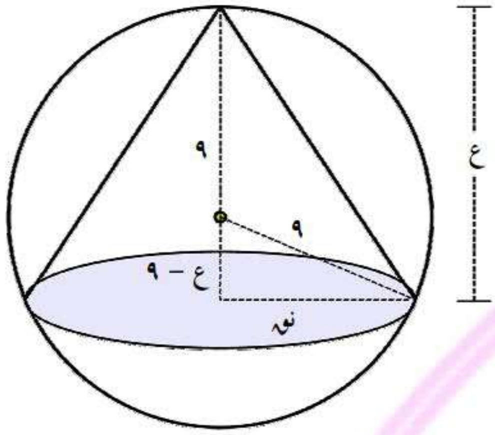
من إشارة حَ في الشكل المجاور

نجد أن أكبر قيمة لحجم المخروط عندما س = ٣سم

لإيجاد أكبر قيمة نعوض عن س = ٣ في حجم المخروط

$\Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi(٧٢٩ + ٨١(٣) - ٩(٣)^{٢} - (٣)^{٣}) \Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi(٨٦٤) = ٢٨٨\pi$ سم^{٣}

حل آخر



نفرض أن نق نصف قطر المخروط ، ع إرتفاعه كما في الشكل المجاور

حجم المخروط $ح = \frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع (إقتران الهدف)

من فيثاغورث : نق^{٢} $= ٨١ - (ع - ٩)^{٢}$ (علاقة مساعدة)

نق^{٢} $= ٨١ - (ع^{٢} - ١٨ع + ٨١) = -ع^{٢} + ١٨ع$

بالتعويض عن نق^{٢} في علاقة الحجم

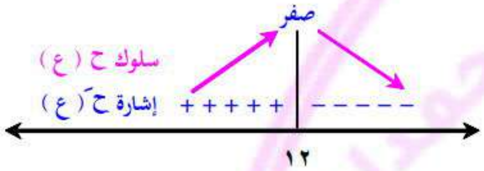
$\Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi(-ع^{٢} + ١٨ع) \times ع$

$\Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi(-ع^{٣} + ١٨ع^{٢})$

$حَ = \frac{١}{٣}\pi(-٣ع^{٢} + ٣٦ع)$

$حَ = ٠ \Leftarrow -٣ع^{٢} + ٣٦ع = ٠ \Leftarrow -٣ع(ع - ١٢) = ٠$

ومنها ع = ١٢ (مقبول) أو ع = ٠ (مرفوض)



من إشارة حَ في الشكل المجاور

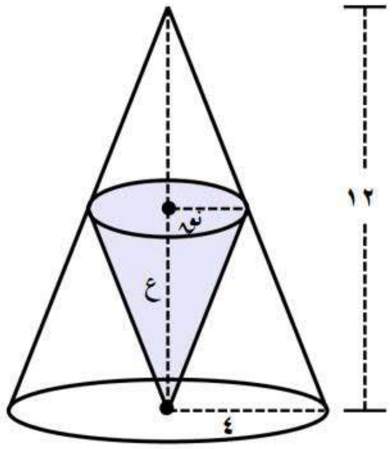
نجد أن أكبر قيمة لحجم المخروط عندما ع = ١٢سم

لإيجاد أكبر قيمة نعوض عن ع = ٣ في حجم المخروط

$\Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi(-(١٢)^{٣} + ١٨(١٢)^{٢}) \Leftarrow ح = \frac{١}{٣}\pi(٨٦٤) = ٢٨٨\pi$ سم^{٣}

مثال **جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم وارتفاعه ١٢سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي**

الحـــــل



نفرض أن نق نصف قطر المخروط الداخلي ، ع إرتفاعه كما في الشكل المجاور

حجم المخروط الداخلي ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع (إقتران الهدف)

من التشابه : $\frac{نق}{٤} = \frac{١٢ - ع}{١٢}$ (علاقة مساعدة)

⇐ ٤٨ − ٤ع = ١٢ نق ⇐ ١٢ − ع = ٣ نق

⇐ ع = ١٢ − ٣ نق و بالتعويض عن ع في علاقة الحجم

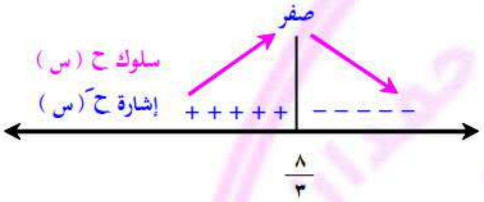
⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} (١٢ − ٣ نق)

⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (١٢ نق^{٢} − ٣ نق^{٣})

حَ = $\frac{١}{٣}$ π (٢٤ نق − ٩ نق^{٢})

حَ = ٠ ⇐ ٢٤ نق − ٩ نق^{٢} = ٠ ⇐ ٣ نق (٨ − ٣ نق) = ٠

ومنها نق = $\frac{٨}{٣}$ (مقبول) أو نق = ٠ (مرفوض)



من إشارة حَ في الشكل المجاور

نجد أن أكبر قيمة لحجم المخروط عندما نق = $\frac{٨}{٣}$ سم

بالتعويض في حجم المخروط ⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (١٢ ($\frac{٨}{٣}$)^{٢} − ٣ ($\frac{٨}{٣}$)^{٣}) ⇐ ح = $\frac{٢٥٦ \pi}{٢٧}$ سم^{٣}

مثال أردن : ٢٠١٢ شتوي

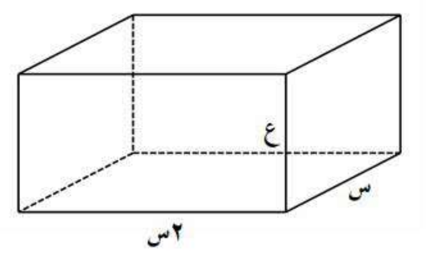
صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه ، إذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم ، فجد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

الحـــــل

نفرض أن أبعاد متوازي المستطيلات العرض = س والطول = ٢س والإرتفاع = ع كما في الشكل المجاور

حجم متوازي المستطيلات ح = مساحة القاعدة × الإرتفاع

⇐ ح = ٢ س^{٢} × ع (إقتران الهدف)



مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم

⇐ ع + ٦س = ٧٢ (علاقة مساعدة)

⇐ ع = ٧٢ − ٦س وبالتعويض عن ع في علاقة الحجم

⇐ ح = ٢ س^{٢} × (٧٢ − ٦س) = ١٤٤ س^{٢} − ١٢ س^{٣}

ح$'$ = ٢٨٨ س − ٣٦ س^{٢}

ح$'$ = ٠ ⇐ ٢٨٨ س − ٣٦ س^{٢} = ٠ ⇐ ٣٦س (٨ − س) = ٠ ⇐ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٨

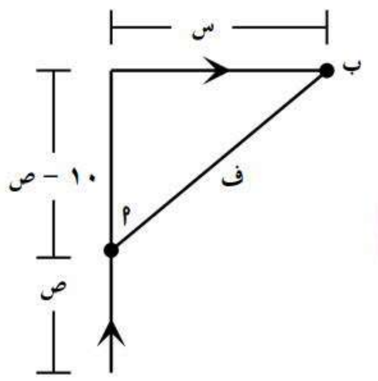
ح$''$ = ٢٨٨ − ٧٢ س ⇐ ح$''$(٨) = ٢٨٨ − ٥٧٦ = − ٢٨٨ < ٠

حسب إختبار المشتقة الثانية نجد أن أكبر حجم لمتوازي المستطيلات يكون عند س = ٨ سم

البعد الأول س = ٨ سم ، البعد الآخر ٢س = ٢ × ٨ = ١٦ سم ، ع = ٧٢ − ٦س = ٧٢ − ٦ (٨) = ٢٤ سم

مثال تسير سفينة ﺃ في اتجاه الشمال بسرعة ١٢كم/ساعة كما تسير سفينة أخرى ب في اتجاه الشرق بسرعة ٩كم/ساعة وفي لحظة ما وجدت أن ب شمالها تماماً وتبعد عنها ١٠ كيلومترات ، فأوجد الزمن الذي يمضي بعد هذه اللحظة حتى تصير المسافة بين السفينتين أقصر ما يمكن .

الحـــــل



نفرض أن السفينة ﺃ قطعت مسافة ص للشمال و السفينة ب قطعت مسافة س للشرق

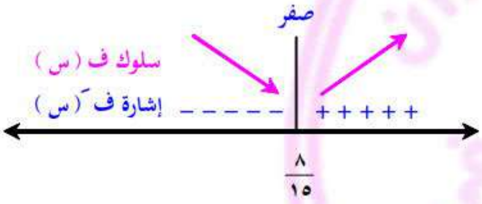
من فيثاغورث ف = $\sqrt{\text{س}^{٢} + (\text{١٠} - \text{ص})^{٢}}$ (إقتران الهدف)

المسافة = السرعة × الزمن ⇐ س = ٩ ن ، ص = ١٢ ن (علاقات مساعدة)

⇐ ف = $\sqrt{(\text{٩ ن})^{٢} + (\text{١٠} - \text{١٢ ن})^{٢}}$ = $\sqrt{\text{٢٢٥ ن}^{٢} - \text{٢٤٠ ن} + \text{١٠٠}}$

ف$'$ = $\frac{\text{٤٥٠ ن} - \text{٢٤٠}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢٢٥ ن}^{٢} - \text{٢٤٠ ن} + \text{١٠٠}}}$ = $\frac{\text{٢٢٥ ن} - \text{١٢٠}}{\sqrt{\text{٢٢٥ ن}^{٢} - \text{٢٤٠ ن} + \text{١٠٠}}}$

ف$'$ = ٠ ⇐ ٢٢٥ ن − ١٢٠ = ٠ ⇐ ن = $\frac{\text{١٢٠}}{\text{٢٢٥}}$ = $\frac{\text{٨}}{\text{١٥}}$

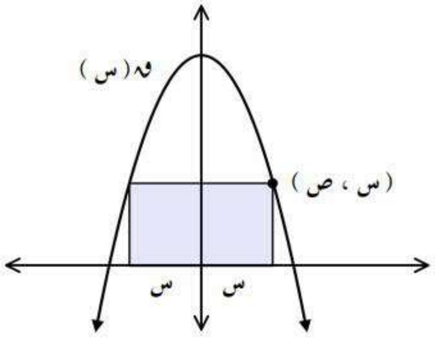


من إشارة ف$'$ في الشكل المجاور

نجد أن المسافة بين السفينتين تكون أقل ما يمكن عندما ن = $\frac{\text{٨}}{\text{١٥}}$ ساعة

مثال فلسطين : ٢٠١٣ جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات والرأسان الآخران على منحنى الإقتران ق(س) = ٨ − $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ س^{٢}

الحـــــل



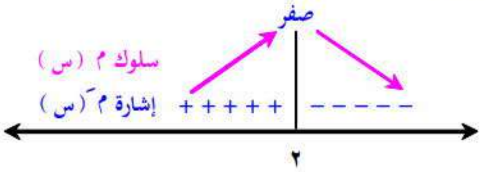
نفرض أن (س ، ص) نقطة تقاطع المستطيل مع المنحنى ق(س

مساحة المستطيل م = طول القاعدة × الإرتفاع = ٢س

لكن ص = ق(س) = ٨ − $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ س^{٢} (علاقة مساعدة)

⇐ م = ٢س (٨ − $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ س^{٢}) = ١٦س − $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ س^{٣}

م$'$ = ٠ ⇐ ١٦ – ٤ س^{٢} = ٠ ⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ± ٢ (–٢ مرفوضة)



من إشارة م$'$ في الشكل المجاور أكبر مساحة للمستطيل تكون عندما س = ٢ وحدة

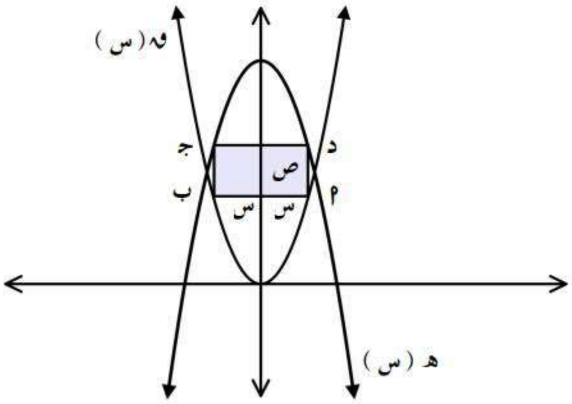
⇐ أكبر مساحة م = ١٦ (٢) – $\frac{٤}{٣}$ (٢)^{٣} = $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة .

مثال

م ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين ق(س) = ٢س^{٢} ، هـ (س) = ٣٦ – س^{٢} بحيث يقع رأساه م ، ب على منحنى ق(س) ورأساه جـ ، د يقعان على منحنى هـ (س) ، جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .

الحـــــل

نفرض أن أحد أبعاد المستطيل = ٢س والبعد الآخر = ص كما في الشكل المقابل



مساحة المستطيل م = طول القاعدة × الإرتفاع

م = ٢س ص (إقتران الهدف)

لكن ص = هـ (س) – ق(س) (علاقة مساعدة)

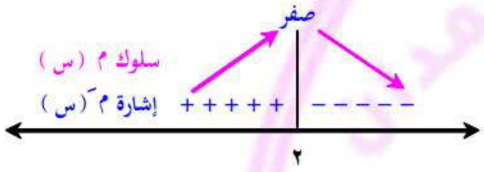
⇐ ص = ٣٦ – س^{٢} – ٢س^{٢} = ٣٦ – ٣ س^{٢}

⇐ م = ٢س (٣٦ – ٣ س^{٢}) = ٧٢س – ٦ س^{٣}

م$'$ = ٧٢ – ١٨ س^{٢}

م$'$ = ٠ ⇐ ٧٢ – ١٨ س^{٢} = ٠ ⇐ ١٨ س^{٢} = ٧٢

⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ± ٢ (–٢ مرفوضة)



من إشارة م$'$ في الشكل المجاور

نجد أن أكبر مساحة للمستطيل تكون عندما س = ٢ وحدة طول

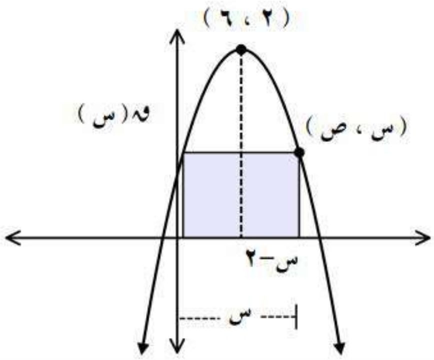
⇐ ص = ٣٦ – ٣ (٢)^{٢} = ٢٤ وحدة طول

مثال

فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال

جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن والذي تنطبق قاعدته الكبرى على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى ق(س) = ٤س – س^{٢} + ٢

الحـــــل



نفرض أن (س ، ص) نقطة تقاطع المستطيل مع المنحنى ق(س) كما في الشكل

إحداثيات نقطة الرأس للمنحنى ($\frac{–ب}{٢م}$ ، ق($\frac{–ب}{٢م}$)) = (٢ ، ٦)

ومحور التماثل يقسم قاعدة المستطيل إلى قسمين متساويين

بناءً عليه تكون قاعدة المستطيل = ٢ (س – ٢) = ٢س – ٤

مساحة المستطيل م = طول القاعدة × الإرتفاع

م = (٢س – ٤) × ص (إقتران الهدف)

لكن $ص = ق(س) = ٤س - س^{٢} + ٢$ (علاقة مساعدة)

⇐ $م = (٢س - ٤) \times (٤س - س^{٢} + ٢)$

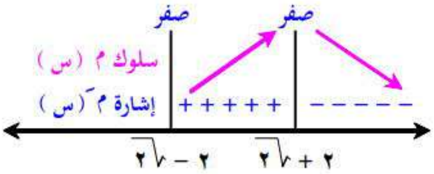
$= ٨س^{٢} - ٢س^{٣} + ٤س - ١٦س + ٤س^{٢} - ٨$

⇐ $م = - ٢س^{٣} + ١٢س^{٢} - ١٢س - ٨$

$م' = - ٦س^{٢} + ٢٤س - ١٢$

$م' = ٠$ ⇐ $- ٦س^{٢} + ٢٤س - ١٢ = ٠$ ⇐ $س^{٢} - ٤س + ٢ = ٠$

⇐ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{٨}}{٢} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = ٢ \pm \sqrt{٢}$



من إشارة $م'$ في الشكل المجاور

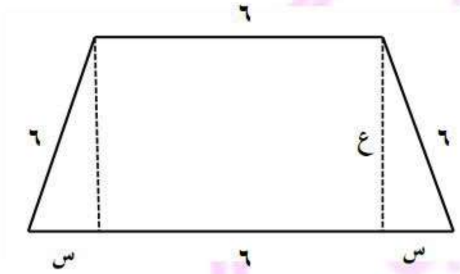
نجد أن أكبر مساحة للمستطيل تكون عندما $س = ٢ + \sqrt{٢}$ وحدة

بناءً عليه تكون قاعدة المستطيل $= ٢(٢ + \sqrt{٢} - ٢) = ٢\sqrt{٢}$

البعد الآخر $ص = ق(٢ + \sqrt{٢}) = ٤(٢ + \sqrt{٢}) - (٢ + \sqrt{٢})^{٢} + ٢ = ٨ + ٤\sqrt{٢} - ٤ - ٤\sqrt{٢} - ٢ + ٢ = ٤$

مثال شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها يساوي ٦سم ، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف .

الحل



نفرض ع إرتفاع شبه المنحرف ، س كما في الشكل المجاور

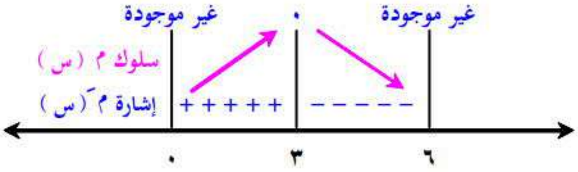
مساحة شبه المنحرف $م = \frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الإرتفاع

$م = \frac{١}{٢}(٢س + ١٢) \times ع$ (إقتران الهدف)

من فيثاغوث $ع = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ ، $س \in [٠ ، ٦]$ (علاقة مساعدة)

⇐ $م = \frac{١}{٢}(٢س + ١٢) \times \sqrt{٣٦ - س^{٢}} = (س + ٦) \times \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$م' = (س + ٦) \times \frac{- س}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} + \sqrt{٣٦ - س^{٢}} = \frac{(- س^{٢} - ٦س) + (٣٦ - س^{٢})}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} = \frac{- ٢س^{٢} - ٦س + ٣٦}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$



$م' = ٠$ ⇐ $- ٢س^{٢} - ٦س + ٣٦ = ٠$ ⇐ $س^{٢} + ٣س - ١٨ = ٠$

⇐ $(س + ٦)(س - ٣) = ٠$

⇐ $س = -٦$ (مرفوض) أو $س = ٣$ (مقبول)

من إشارة $\text{م}'$ في الشكل المجاور نجد أن أكبر مساحة لشبه المنحرف تكون عندما س = ٣ وحدة

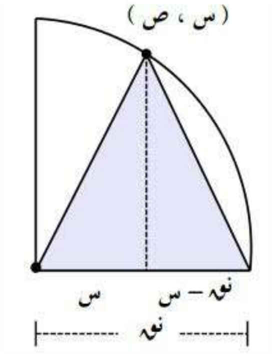
$\Leftarrow$ أكبر مساحة $\text{م} = ٩\sqrt{٢٧} = ٢٧\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

مثال

رسم مثلث داخل ربع دائرة نصف قطرها نق بحيث تنطبق قاعدة المثلث على نصف قطر الدائرة ويقع رأسه على محيطها أثبت أن أكبر مساحه لهذا المثلث تساوي $\frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢}$.

الحل

معادلة ربع الدائرة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$



مساحة المثلث $\text{م} = \frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع $= \frac{١}{٢}\,\text{نق} \times \text{ص}$ (إقتران الهدف)

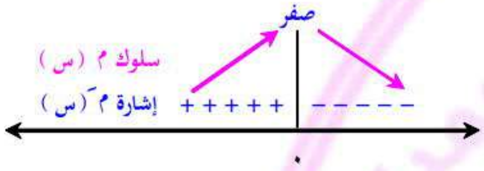
لكن $\text{ص} = \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ (علاقة مساعدة)

$$\Leftarrow \text{م} = \frac{١}{٢}\,\text{نق}\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$$

$$\text{م}' = \frac{١}{٢}\,\text{نق} \times \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}} = \frac{١}{٢}\,\text{نق} \times \frac{-\text{س}}{\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}}$$ (نق مقدار ثابت)

$\text{م}' = ٠ \Leftarrow -\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$

من إشارة $\text{م}'$ في الشكل المجاور نجد أن أكبر مساحة للمثلث تكون عندما س = ٠



$$\Leftarrow \text{م} = \frac{١}{٢}\,\text{نق}\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{نق}\sqrt{\text{نق}^{٢} - ٠} = \frac{١}{٢}\,\text{نق} \times \text{نق} = \frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢}$$

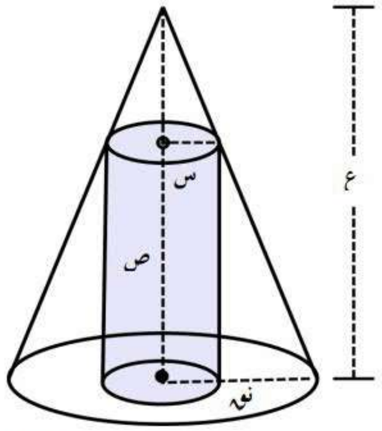
مثال

بين أن أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط .

الحل

نفرض أن س نصف قطر الأسطوانة ، ص إرتفاعها ، ونفرض أن نق نصف قطر المخروط ، ع إرتفاعه (نق ، ع ثوابت)

حجم الأسطوانة الدائرية $\text{ح} = \pi\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}$ (إقتران الهدف)



من التشابه : $\frac{\text{س}}{\text{نق}} = \frac{\text{ع} - \text{ص}}{\text{ع}}$ (علاقة مساعدة)

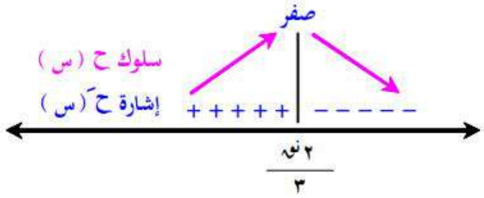
$\Leftarrow \text{ع} - \text{ص} = \frac{\text{س ع}}{\text{نق}} \Leftarrow \text{ص} = \text{ع} - \frac{\text{س ع}}{\text{نق}}$ و بالتعويض عن ص في علاقة الحجم

$\Leftarrow \text{ح} = \pi\,\text{س}^{٢}\left(\text{ع} - \frac{\text{س ع}}{\text{نق}}\right) \Leftarrow \text{ح} = \pi\left(\text{ع س}^{٢} - \frac{\text{ع}}{\text{نق}}\,\text{س}^{٣}\right)$

$\text{ح}' = \pi\left(٢\,\text{ع س} - \frac{٣\text{ع}}{\text{نق}}\,\text{س}^{٢}\right)$ (نق ، ع ثوابت)

$ح' = ٠ \Leftarrow ٢ ع س - \frac{٣ ع}{نق} س^{٢} = ٠ \Leftarrow ع س (٢ - \frac{٣س}{نق}) = ٠$

ومنها $س = ٠$ (مرفوض) أو $٢ - \frac{٣س}{نق} = ٠ \Leftarrow س = \frac{٢نق}{٣}$



من إشارة ح َ في الشكل المجاور أكبر قيمة لحجم الأسطوانة عندما $س = \frac{٢نق}{٣}$

لإيجاد أكبر قيمة نعوض عن $س = \frac{٢نق}{٣}$ في حجم الأسطوانة

$\Leftarrow ح = \pi (ع (\frac{٢نق}{٣})^{٢} - \frac{ع}{نق} (\frac{٢نق}{٣})^{٣}) = \pi (\frac{٢نق}{٣})^{٢} (ع - \frac{ع}{نق} (\frac{٢نق}{٣}))$

$= \frac{٤ \pi نق^{٢}}{٩} (ع - \frac{٢ع}{٣}) = \frac{٤ \pi نق^{٢}}{٩} \times \frac{ع}{٣} = \frac{٤}{٩} \times \frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع$

$\Leftarrow ح = \frac{٤}{٩} \times \frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع = \frac{٤}{٩} \times$ حجم المخروط

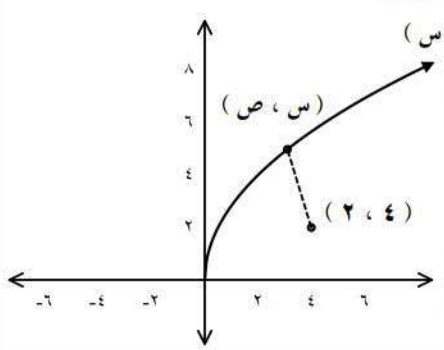
مثال جد النقطة على منحنى $ق(س) = \sqrt{٨س}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤ ، ٢) .

الحـــــل

نفرض أن ف المسافة بين النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى والنقطة (٤ ، ٢)

المسافة بين النقطتين $ف = \sqrt{(ص - ٢)^{٢} + (س - ٤)^{٢}}$ (إقتران الهدف)

$ص = ق(س) = \sqrt{٨س}$ (علاقة مساعدة)



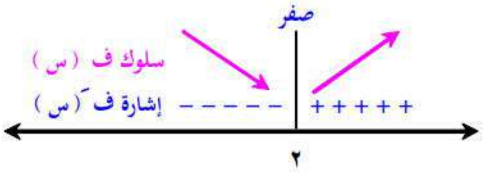
$\Leftarrow ف = \sqrt{(\sqrt{٨س} - ٢)^{٢} + (س - ٤)^{٢}}$

$$ف' = \frac{٢ (\sqrt{٨س} - ٢) \times \frac{٨}{٢ \sqrt{٨س}} + ٢ (س - ٤) \times ١}{٢ \sqrt{(\sqrt{٨س} - ٢)^{٢} + (س - ٤)^{٢}}}$$

$ف' = ٠ \Leftarrow \frac{٨ (\sqrt{٨س} - ٢)}{\sqrt{٨س}} + ٢ (س - ٤) = ٠ \Leftarrow ٨ - \frac{١٦}{\sqrt{٨س}} + ٢ س - ٨ = ٠$

$\Leftarrow ٢ س = \frac{١٦}{\sqrt{٨س}} \Leftarrow ٢ س \sqrt{٨س} = ١٦ \Leftarrow س \sqrt{٨س} = ٨$ بتربيع الطرفين

$\Leftarrow ٨س^{٣} = ٦٤ \Leftarrow س^{٣} = ٨ \Leftarrow س = ٢$



من إشارة ف َ في الشكل المجاور نجد أن أقل مسافة بين النقطتين تكون عندما $س = ٢$

$ص = \sqrt{٨س} = \sqrt{٨ \times ٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\Leftarrow$ (٢ ، ٤) هي أقرب نقطة واقعة على المنحنى ق(س) إلى النقطة (٤ ، ٢)

مثال

مصنع إطارات ينتج يومياً ١٠٠س إطار من النوع الممتاز ، ١٠٠ص إطار من النوع الاقل جودة حيث ص = $\frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س}$ ، س < ٤ ، فإذا كان مكسبه من النوع الممتاز دينارين عن كل إطار ومكسبه من النوع الأقل جودة دينار واحد عن كل إطار فأوجد عدد الإطارات من كل نوع والتي تحقق أكبر مكسب يومي للمصنع .

الحـــل

نفرض أن المكسب اليومي م دينار

⇐ م = (٢ × ١٠٠س) + (١ × ١٠٠ص) = ٢٠٠س + ١٠٠ص (إقتران الهدف)

∵ ص = $\frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س}$ (علاقة مساعدة)

$$⇐ م = ٢٠٠س + ١٠٠ × \frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س} = ١٠٠ (٢س + \frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س})$$

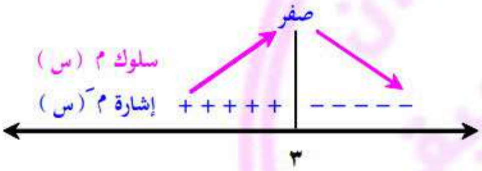
$$مَ = ١٠٠ (٢ + \frac{(٥ - س) × (-٨) - (٣٢ - ٨س) × (-١)}{(٥ - س)^{٢}})$$

$$= ١٠٠ (٢ + \frac{-٤٠ + ٨س + ٣٢ - ٨س}{(٥ - س)^{٢}}) = ١٠٠ (٢ - \frac{٨}{(٥ - س)^{٢}})$$

$$مَ = ٠ ⇐ ٢ - \frac{٨}{(٥ - س)^{٢}} = ٠ ⇐ (٥ - س)^{٢} = ٤ ⇐ ٥ - س = ±٢$$

ومنها س = ٧ (مرفوض) أو س = ٣ (مقبول)

من إشارة مَ في الشكل المجاور



نجد أن أكبر قيمة للمكسب اليومي تكون عندما س = ٣

⇐ عدد الإطارات في اليوم الواحد من النوع الممتاز = ١٠٠س = ٣٠٠ إطار

عدد الإطارات في اليوم الواحد من النوع الأقل جودة = ١٠٠ص = ١٠٠ × $\frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س}$

= ١٠٠ × $\frac{٣٢ - ٢٤}{٥ - ٣}$ = ٤٠٠ إطار