سلسلة النخبة التعليمية

12
حسب المنهاج الجديد

الكامل

::...مبحث الرياضيات ...:::

للصف الثاني عشر
الفرع الريادي و الفندقي والاقتصادي المنزلي والزراعي

للفصلين
الأول و الثاني
2019-2018

إعداد

بلال أبو غلوة
سليم السيقلي
آلاء الجزار
كمال شلبي
آلاء البرعي

إشراف

نبيل سلمن
صلاح البتان
بلال الكخن
نعيم أبو غلوة
كمال شلبي
عوض الواوي
عدنان شعت
سامي بدر
رنا زيادة
زياد عمرو
محمد الفرا

اعداد

أ.الاء فايز الجزار
غزة/ ٠٥٩٧٨٠٦١٧١

أ.بلال ابو غلوة
شمال غزة / ٠٥٩٩٨٣٣٧٨٨

أ.الاء البرعي
الوسطى- دير البلح/ ٠٥٩٧٢٣٨٨٤٣

أ.سليم السيقلي
خان يونس/ ٠٥٩٩٨٠٩٦٢٨

اشراف

أ.نبيل سلمن / غزة
ج/٠٥٩٥٦٢٥٨٢٥

أ.كمال شلبي/طولكرم
ج/ ٠٥٩٨١٢١٨٢٢

أ.رنا زيادة /غزة
ج/ ٠٥٩٩٨٥٢٠٣٠

أ. صلاح البتان / طولكرم
ج/٠٥٩٨١٢١٨٢٢

أ. عوض الواوي/ طولكرم
ج/ ٠٥٩٩٢٥٥٨٥٣

أ. زياد عمرو / الخليل
ج/ ٠٥٩٧٣١٢٢٢٠

أ.بلال الكخن / نابلس
ج/٠٥٩٩٣٨٢٦٠٧

أ.عدنان شعت/رفح
ج/٠٥٩٨٩٨٣٤٧٥

أ.محمد الفرا/خانيونس

د. نعيم أبو غلوة /شمال غزة
ج/٠٥٩٥٤٤٤٤٧٤

أ.سامي بدر/غزة
ج/٠٥٩٧٧٥٢٣٥٠

المنهاج الجديد

٢٠١٨-٢٠١٩

المحـــــتويات

الوحدة ١

	المصفوفات	١-٥٨
١-١	المصفوفة	٢
١-٢	جمع المصفوفات و طرحها	٩
١-٣	ضرب المصفوفات	١٨
١-٤	المحددات	٢٨
١-٥	النظير الضربي للمصفوفة المربعة	٣٦
١-٦	حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات	٤٣
١-٧	تمارين عامة	٥٠

الوحدة ٢

	التفاضل	٥٩-١٠٥
٢-١	متوسط التغير	٦٠
٢-٢	مفهوم المشتقة الاولى	٦٦
٢-٣	قواعد الاشتقاق	٧٢
٢-٤	تطبيقات هندسية(المماس والعمودي)	٨٠
٢-٥	قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب)	٨٦
٢-٦	القيم القصوى	٩١
٢-٧	تمارين عامة	٩٨

الوحدة ٣

	التكامل	١٠٦-١٤٩
٣-١	التكامل غير المحدود	١٠٧
٣-٢	قواعد التكامل غير المحدود	١١٢
٣-٣	تطبيقات هندسية على التكامل غير المحدود	١١٧
٣-٤	التكامل المحدود	١٢٢
٣-٥	خصائص التكامل المحدود	١٢٨
٣-٦	التكامل بالتعويض	١٣٤
٣-٧	تطبيقات على التكامل المحدود (إيجاد المساحات)	١٣٩
٣-٨	تمارين عامة	١٤٤

الوحدة ٤

	الاحصاء	١٥٠-١٧٤
٤-١	العلامة المعيارية	١٥٠
٤-٢	التوزيع الطبيعي المعياري	١٥٨
٤-٣	تمارين عامة	١٦٦

الوحدة ٥

	الرياضيات المالية	١٧٥-٢٠٨
٥-١	الفائدة	١٧٦
٥-٢	الفائدة المركبة	١٨٤
٥-٣	السندات	١٩٠
٥-٤	أنواع السندات	١٩٨
٥-٥	تمارين عامة	٢٠٢

البنود الملونة باللون الأحمر يستثنى منها الفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الوحدة الأولى

١

المصفوفات

كراسة الكامل

الوحدة الأولى / المصفوفات

الدرس الأول / المصفوفة

القسم الأول : الملخص

المصفوفة : هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد على هيئة صفوف وأعمدة محصورين بين قوسين [ ]

ويرمز لها بأحد حروف الهجاء أ ، ب ،.... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات

ملاحظات :

١) تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها م × ن حيث

م: عدد الصفوف ، ن: عدد الأعمدة

٢) عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها × عدد أعمدتها

٣) تتحدد أي مدخلة في المصفوفة بحسب الصف والعمود الواقعة فيهما

مصفوفات خاصة :

١) **المصفوفة المربعة:** هي المصفوفة التي يكون فيها عدد صفوفها = عدد اعمدتها = م

(تسمي مصفوفة مربعة من الرتبة م)

مثال : $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

٢) **مصفوفة الوحدة :** هي مصفوفة مربعة بحيث $م_{ي هـ} = \begin{cases} ١ & ، ي = هـ \\ ٠ & ، ي \neq هـ \end{cases}$ يرمز لها بالرمز م

مثال: $م_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة وحدة من الرتبة الثانية

٣) **المصفوفة الصفرية(و):** هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار

مثال: $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صفرية من الرتبة ٢ × ٣

٤) **مصفوفة الصف :** هي المصفوفة المكونة من صف واحد

مثال : ص = [١ −٢ ٣] هي مصفوفة صف من الرتبة ١ × ٣

٥) **مصفوفة العمود :** هي المصفوفة المكونة من عمود واحد

مثال : ص $= \begin{bmatrix} -٢ \\ ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمود من الرتبة ٣ × ١

تساوي مصفوفتين : تتساوى المصفوفتان أ ، ب اذا كان لهما نفس الرتبة ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية

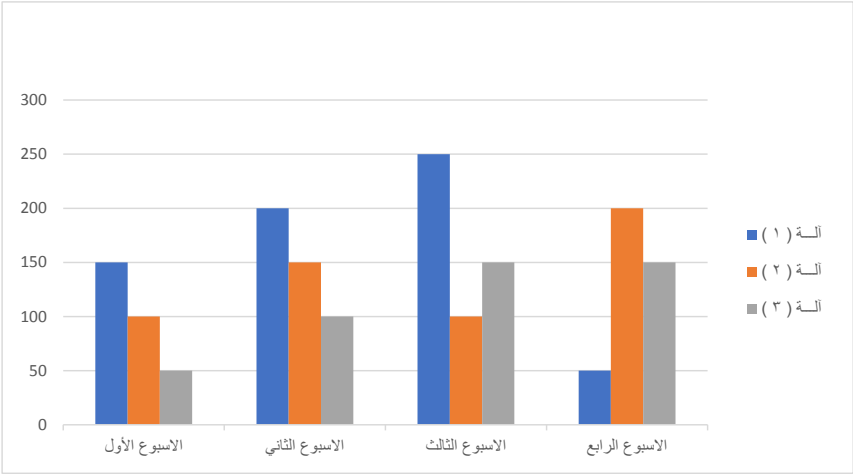
(أ = ب اذا وفقط اذا كان $أ_{يه} = ب_{يه}$ لجميع قيم ي ، هـ)

إذا نصحك شخص بقسوة

لا تقاطعه بل استفد من ملاحظاته فوراء قسوته حب عظيم

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: يوضح الرسم البياني مبيعات مصنع لثلاثة أنواع من الآلات في أربعة أسابيع ، أنظم هذه المعلومات في مصفوفة ؟



الحل

الطريقة الأولى : الأعمدة هي الأربعة أسابيع

الصفوف هي المبيعات

$$\begin{bmatrix} ١٥٠ & ٢٠٠ & ٢٥٠ & ٥٠ \\ ١٠٠ & ١٥٠ & ١٠٠ & ٢٠٠ \\ ٥٠ & ١٠٠ & ١٥٠ & ١٥٠ \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية : الأعمدة هي المبيعات

الصفوف هي الأربعة أسابيع

$$\begin{bmatrix} ١٥٠ & ١٠٠ & ٥٠ \\ ٢٠٠ & ١٥٠ & ١٠٠ \\ ٢٥٠ & ١٠٠ & ١٥٠ \\ ٥٠ & ٢٠٠ & ١٥٠ \end{bmatrix}$$

السؤال الثاني: إذا كانت

$$أ = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & ٤ \\ \sqrt{٥} & \frac{٢}{٣} & ٠ \end{bmatrix}، \quad ب = \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}، \quad جـ = \begin{bmatrix} ٨ & -٣ \\ \sqrt{١٦} & ٤ \\ ٢,٣ & -٥ \end{bmatrix}$$

فرع أ : ما رتبة كل من المصفوفات أ، ب، جـ

الحل

رتبة أ تساوي ٢×٣ ، رتبة ب تساوي ٢×٢ ، رتبة جـ تساوي ٣×٢

فرع ب : ما قيمة $أ_{٢٢}$ ، $ب_{١٢}$ ، $جـ_{١٣}$ ، $جـ_{٢٣}$

الحل

$$أ_{٢٢} = \frac{٢}{٣} \ ، \ ب_{١٢} = ٣ \ ، \ جـ_{١٣} = ٢,٣ \ ، \ جـ_{٢٣} = -٥$$

فرع جـ : ما قيمة $أ_{٢١} + جـ_{٢٣}$

الحل

$$أ_{٢١} + جـ_{٢٣} = ٢ + (-٥) = -٣$$

السؤال الثالث: أجد قيمة س ، ص في المصفوفات الآتية :

فرع أ :

$$\begin{bmatrix} ٩ & ٦ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ص & ٦ \\ -٢ & -١-س \end{bmatrix}$$

الحل

من تساوي المدخلات المتناظرة فإن :

$٣ص = ٩ \Leftarrow ص = ٣$

$-١-س = -٢ \Leftarrow -س = -٢-١ \Leftarrow -س = -٣ \Leftarrow س = ٣$

فرع ب :

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س+٤ \\ ص \end{bmatrix}$$

الحل

من تساوي المدخلات المتناظرة فإن :

$س + ٤ = ٢ \Leftarrow س = -٢$

$ص = ٣س$ بالتعويض بقيمة س = -٢

$ص = ٣ \times -٢ \Leftarrow ص = -٦$

السؤال الرابع: المصفوفة جـ من الرتبة ٣×٢ إذا عرفت مدخلاتها بحيث أن $جـ_{يه} = ٢ي - ه$ أكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها

الحل

جـ من الرتبة ٣×٢

$$جـ = \begin{bmatrix} جـ_{١١} & جـ_{١٢} & جـ_{١٣} \\ جـ_{٢١} & جـ_{٢٢} & جـ_{٢٣} \end{bmatrix}$$

$جـ_{١١} = ٢ \times ١ - ١ = ١$

$جـ_{٢١} = ٢ \times ١ - ٢ = ٠$

$جـ_{١٢} = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

$جـ_{٢٢} = ٢ \times ٢ - ٢ = ٢$

$جـ_{١٣} = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$

$جـ_{٢٣} = ٢ \times ٣ - ٢ = ٤$

$\boxed{جـ_{يه} = ٢ي - ه} \Leftarrow$

$$\Leftarrow جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الاجابة
١	إذا كانت **س** = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ فإن رتبة **س** = أ) ٢ × ٣ ب) ٣ × ٢ جـ) ٦ د) **٢**	أ
٢	إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ & ١- \\ ٥ & ٨ & ٢- \\ ٦ & ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن المدخلة $أ_{٣٢}$ تساوي : أ) ١ - ب) ٣٢ جـ) ٢٣ د) ٢-	د
٣	إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ص \\ ١- & ٥- \end{bmatrix}$ فإن س + ص = أ) ١٠ ب) ٥ جـ) صفر د) - ٥	جـ
٤	**إذا كانت** $\begin{bmatrix} س-٢ & ٣ \\ ٥ & س+ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ فإن قيمة ص تساوي : **ا) - ٢ ب) ٢ ج) - ٤ د) ٤**	أ
٥	إذا كانت $\begin{bmatrix} س+١ & ٢ \\ س & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن قيمتي س ، ص على الترتيب أ. ٤ ، ٥ ب. ٤ ، ٣ ج. ٣ ، ٤ د. ٣ ، - ٤	أ

٦	إذا كان $\begin{bmatrix} ٢ & ص \\ س - ص & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن س = أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) ٣	أ
٧	إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة $س_{١٢} \times س_{٢١}$ = أ) ١٠ ب) ٢ ج) -١ د) ١	ج
٨	مصفوفة الوحدة من بين المصفوفات الآتية : أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$	د
٩	المصفوفة المربعة من بين المصفوفات الآتية هي : أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix}$	ج
١٠	لتكن ب = $\begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ فإن $ب_{٢١} - ب_{١٢}$ = أ) -٢ ب) -١ ج) صفر د) ٢	أ
١١	إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ & -ص \\ ٢س & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & س \\ ١٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن قيمة ص تساوي أ) -١٢ ب) ٦ ج) ١٢ د) -٦	د

#	القسم الثاني : اجب عن الأسئلة الاتية	الاجابة
١	اكتب المصفوفة أ من الرتبة ٣ × ٤ بحيث: $أ_{يهـ} = \begin{cases} ٢^{ي} & ، ي < هـ \\ -١ & ، ي = هـ \\ ٥هـ & ، ي > هـ \end{cases}$	الاجابة : $\begin{bmatrix} -١ & ١٠ & ١٥ & ٢٠ \\ ٤ & -١ & ١٥ & ٢٠ \\ ٨ & ٨ & -١ & ٢٠ \end{bmatrix}$
٢	إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص^{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ل \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢٥ & ٨ & ٤ \end{bmatrix}$، جد قيمة المقدار س + ص + ل ؟	٢٣ ، ١٣
٣	أوجد قيمة كل من س ، ص في المعادلة المصفوفية الآتية : $\begin{bmatrix} س - ١ & ١٠ \\ س + ٧ & ص^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ١٣ & ٩ \end{bmatrix}$	س = ٦ ص = ± ٣

كراسة الكامل

الوحدة الأولى / المصفوفات

الدرس الثاني / جمع المصفوفات وطرحها

القسم الأول : الملخص

جمع المصفوفات : اذا كان أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن فان جـ = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن حيث مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ ، ب

$$ج_{يهـ} = أ_{يهـ} + ب_{يهـ}$$

ضرب المصفوفة بعدد حقيقي :

اذا كان أ مصفوفة من الرتبة م × ن وكان ك عددا حقيقيا ،فان ك أ = جـ ،حيث جـ هي مصفوفة من الرتبة م × ن وتكون مدخلاتها ناتجة من : $ج_{يهـ} = ك\ أ_{يهـ}$

لجميع قيم ي ، هـ

طرح المصفوفات :

اذا كان أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن فان أ – ب = أ + (- ب)

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي :

اذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن وكانت ك ، ع فان :

١) أ + ب = ب + أ (التبديل)

٢) (أ + ب) + جـ = ب +(أ + جـ) (التجميع)

٣) أ + و = و + أ = أ (العنصر المحايد)

٤) أ + (-أ) = (- أ) + أ = و (النظير الجمعي)

٥) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب (توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات)

لا تيأس إذا رجعت للوراء
فالسهم يحتاج أن ترجعه للوراء لينطلق بقوة إلى الأمام

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: تحتوي مكتبة جامعة الخليل على ٢٠٠٠ كتاب علمي ، ٢٥٠٠ كتاب تاريخي ، ٤٠٠٠ كتاب أدبي ، وتحتوي مكتبة جامعة بيت لحم على ٥٠٠٠ كتاب علمي ، ٥٥٠٠ كتاب تاريخي ، ٦٥٠٠ كتاب أدبي ، وتحتوي مكتبة جامعة النجاح الوطنية على ٣٥٠٠ كتاب علمي ، ٤٥٠٠ كتاب تاريخي ، ٥٠٠٠ كتاب أدبي .

فرع أ : أرتب أعداد الكتب في كل مكتبة في مصفوفات ، وأرمز لها بالرموز ا،ب،جـ على الترتيب ؟

الحل

$$ا = [٢٠٠٠ \quad ٢٥٠٠ \quad ٤٠٠٠]$$

$$ب = [٥٠٠٠ \quad ٥٥٠٠ \quad ٦٥٠٠]$$

$$جـ = [٣٥٠٠ \quad ٤٥٠٠ \quad ٥٠٠٠]$$

فرع ب : أجد العدد الكلي للكتب من كل نوع في المكتبات الثلاث ، وأضعها في مصفوفة؟

الحل

العدد الكلي $= ا + ب + جـ$

$$= [٢٠٠٠ \quad ٢٥٠٠ \quad ٤٠٠٠] + [٥٠٠٠ \quad ٥٥٠٠ \quad ٦٥٠٠] + [٣٥٠٠ \quad ٤٥٠٠ \quad ٥٠٠٠]$$

$$[١٠٥٠٠ \quad ١٢٥٠٠ \quad ١٥٥٠٠]$$

فرع جـ : كم يزيد عدد الكتب من كل نوع في ب على عدد الكتب في ا ؟ أرتب ذلك في مصفوفة ؟

مقدار الزيادة

الحل

$$= ب - ا = [٥٠٠٠ \quad ٥٥٠٠ \quad ٦٥٠٠] - [٢٠٠٠ \quad ٢٥٠٠ \quad ٤٠٠٠]$$

$$= [٣٠٠٠ \quad ٣٠٠٠ \quad ٢٥٠٠]$$

السؤال الثاني: أجد ناتج ما يأتي :

فرع أ :

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠+-١ & ٠+-٢ \\ ٠+-٢ & ٠+٣ \\ ٠+-١ & ٠+-٥ \end{bmatrix}$$

فرع ب

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & -٣ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١-٣ & ١-٤ & ١-٥ \\ ١-٦ & ١--٢ & ١--١ \end{bmatrix}$$

السؤال الثالث: إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أجد

فرع ١ : $(أ+ب)-٢جـ$

الحل

$$(أ+ب)-٢جـ = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} ٢ - \left(\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & -٤ \\ ١٠ & ٠ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & -١ \\ ٦ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨-٥ & ٤+٤ \\ ١٠-٠ & ٠--١ \\ ٦-٦ & ٤--١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٨ \\ -١٠ & ١ \\ ٠ & -٥ \end{bmatrix}$$

فرع ٢ : $(أ+ب)+جـ$

الحل

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣- & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \right) = (أ+ب)+جـ$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٠ & ١- \\ ٦ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٥ & ١- \\ ٩ & ١ \end{bmatrix}$$

فرع ٣ : $أ+(ب+جـ)$

الحل

$$أ+(ب+جـ) = \left(\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣- & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٥ & ١- \\ ٩ & ١ \end{bmatrix}$$

فرع ٤ : $٢(أ+جـ)$

الحل

$$٢(أ+جـ) = ٢ \left(\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \right)$$

$$= ٢ \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٨ & ٢- \\ ٧ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢- \\ ١٦ & ٤- \\ ١٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

فرع ٥ : (ب+جـ)

الحل

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \right) = (ب+جـ)$$

فرع ٦ : (جـ + ب)

الحل

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٢ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \right) = (جـ + ب)$$

السؤال الرابع: أحل المعادلات المصفوفية الآتية :

فرع ١ : $\begin{bmatrix} س+ص & ٨ \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ س-٣ص & ٧ \end{bmatrix}$ من تساوي المدخلات المتناظرة

الحل

$$س + ص = ٤ \leftarrow \boxed{١}$$

$$س - ٣ص = ٠ \leftarrow \boxed{٢}$$

بضرب المعادلة $\boxed{١}$ في ٣ ثم جمعها للمعادلة $\boxed{٢}$

$$٣س + ٣ص = ١٢$$

$$س - ٣ص = ٠$$

$$\Leftarrow \quad ٤س = ١٢ \quad \Leftarrow \quad \boxed{س = ٣}$$ بالتعويض في المعادلة $\boxed{١}$

$$\Leftarrow \quad ٣ + ص = ٤ \quad \Leftarrow \quad ص = ٤ - ٣ \quad \Leftarrow \quad \boxed{ص = ١}$$

فرع ٢ :

$$\begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ص \\ -١ \end{bmatrix} ٣ + \begin{bmatrix} س \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ \\ ٦ص \\ -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س+١٥ \\ ٦ص+١ \\ ١ \end{bmatrix}$$

من تساوي المدخلات المتناظرة

$$س+١٥=١١ \Leftarrow س=١١-١٥ \Leftarrow \boxed{س=-٤}$$

$$١+٦ص=١٣ \Leftarrow ٦ص=١٣-١ \Leftarrow ٦ص=١٢ \Leftarrow \boxed{ص=٢}$$

السؤال الخامس: أحل المعادلات المصفوفية الآتية :

فرع ١ :

$$\begin{bmatrix} ٥- & ٠ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix} ٣ = ٢س - \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٣- & ١٠ \end{bmatrix}$$

الحل

بإضافة المعكوس الجمعي

$$\left(\begin{bmatrix} ١٥- & ٠ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ١- \\ ٣ & ١٠- \end{bmatrix}\right) = ٢س - \left(\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٣- & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ١- \\ ٣ & ١٠- \end{bmatrix}\right)$$

$$-٢س = \begin{bmatrix} ١٨- & ١- \\ ٣٠ & ٢ \end{bmatrix}$$ (بالضرب في $\frac{-١}{٢}$)

$$س = \frac{-١}{٢}\begin{bmatrix} ١٨- & ١- \\ ٣٠ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٩ & \frac{١}{٢} \\ ١٥- & ١- \end{bmatrix}$$

فرع ٢ : $\frac{١}{٢}ص + \begin{bmatrix} ٢- & ٠ & ٢- \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣- \\ ٦- & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

الحل

بإضافة المعكوس الجمعي

$$\frac{١}{٢}ص + \left(\begin{bmatrix} ٢- & ٠ & ٢- \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٢ \\ ٣- & ١- & ٠ \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٣- \\ ٦- & ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٠ & ٢ \\ ٣- & ١- & ٠ \end{bmatrix} \right)$$

$$\frac{١}{٢}ص = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ١- \\ ٩- & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$ **(بالضرب في ٢)**

$$ص = ٢ \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ١- \\ ٩- & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$ص = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ & ٢- \\ ١٨- & ٨ & ٠ \end{bmatrix}$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

جمع المصفوفات وطرحها

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$ ، فإن ٢أ + ب = أ) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٦ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$	جـ
٢	إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ١ \end{bmatrix}$ فإن ٢أ أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٤- & ٦ \\ ٤- & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٤- & ٦ \\ ٢ & ٨- \end{bmatrix}$	د
٣	إذا كانت أ مصفوفة فإن أ + (ـ أ) يساوي : أ) ٢أ ب) و جـ) صفر د) أ	ب
٤	إذا علمت أن ٢أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ فإن أ = أ) $\begin{bmatrix} ٨ & ١٢- \\ ١٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٨ & ١٢- \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٨ & ٦- \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$	ب
٥	إذا علمت أن ٢أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$ ، فإن ـ أ = أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٤- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ١ \end{bmatrix}$	د

٦	إذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ فجد قيمة ١٦ أ + ١٦ ب ـ ١٤(أ+ ب) تساوى أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١٢ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٨ & ٨ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ٨ & ٨ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$
٧	ادا كان ٢س ـ $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ فان س تساوى أ) $\begin{bmatrix} ٦ & ٦ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١٢ & ١٢ \\ ١٦ & ١٦ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$	ب
٨	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٧ & -٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ فان المقدار أ ـ ب يساوى أ) $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & -١٢ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$	ب

الوحدة الأولى / المصفوفات

الدرس الثالث / ضرب المصفوفات

القسم الأول : الملخص

- **ضرب المصفوفات :**

✓ **يمكن ضرب مصفوفة في مصفوفة اذا كان عدد الاعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية .**

✓ اذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل فان حاصل الضرب

أ . ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو

$$جـ_{يه} = أ_{ي1} \times ب_{1ه} + أ_{ي2} \times ب_{2ه} + \cdots + أ_{ين} \times ب_{نه}$$

- **خصائص عملية الضرب على المصفوفات:**

اذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات حيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان ، م المصفوفة المحايدة ، ك ∈ ح فان :

١) (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ) (الخاصية التجميعية)

٢) أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ) (توزيع الضرب على الجمع من اليمين)

٣) (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ) (توزيع الضرب على الجمع من اليسار)

٤) أ . م = م . أ = أ (العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات)

٥) ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

قال الله تعالى " قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ "

فمنع سبحانه المساواة بين العالم والجاهل لما قد خص به العالم من فضيلة العلم

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول:

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ٠ب معرفة	أ٠ب غير معرفة	رتبة مصفوفة الناتج
٣×١	٢×٣	✓	———	٢×١
٣×٢	٣×٢	———	✓	———
١×٢	٣×١	✓	———	٣×٢

السؤال الثاني: أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن) :

فرع ١ : $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix}$

الحل

(حاصل الضرب معرف لأن عدد الأعمدة في الأولى = عدد الصفوف في الثانية)

$$= [٣×٨+١×٩] = [٣٣]$$

فرع ٢ : $\begin{bmatrix} ٢ \\ -٥ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

الحل

(حاصل الضرب غير معرف لأن عدد الأعمدة في الأولى ≠ عدد الصفوف في الثانية)

فرع ٣ : $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$

الحل

(حاصل الضرب معرف لأن عدد الأعمدة في الأولى = عدد الصفوف في الثانية)

$$= \begin{bmatrix} ١×٠+٠×-١ & ١×-١+٠×٠ \\ ٠×٠+-١×-١ & ٠×-١+-١×٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

فرع ٤ : $\begin{bmatrix} ٢- & ٤ & ٢ \\ ٤ & ١٠ & ٠ \\ ٧- & ١ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٥- \\ ٢ & ١- & ٦ \end{bmatrix}$

الحل

(حاصل الضرب معرف لأن عدد الأعمدة في الأولى = عدد الصفوف في الثانية)

$$\begin{bmatrix} (٢\times١)+(٠\times٠)+(٠\times٥-) & (٤\times١)+(١٠\times٠)+(١\times٥-) & (٢\times١-)+(٤\times٠)+(٧\times٥-) \\ (٢\times٢)+(٠\times١-)+(٠\times٦) & (٤\times٢)+(١٠\times١-)+(١\times٦) & (٢\times٢-)+(٤\times١-)+(٧\times٦-) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣٣ \\ ٤ & ٤ & ٥٠- \end{bmatrix} =$$

السؤال الثالث: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٠ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ١٥ \\ ٣ & ٥ & ٦- \end{bmatrix}$ $جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٩ \\ ١- & ٢- & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix}$ أجد

(إن أمكن)

فرع ١ : ب·جـ

الحل

(معرفة لأن عدد الأعمدة في ب = عدد الصفوف في جـ)

$$\begin{bmatrix} (٣\times٧)+(١-\times٨)+(٠\times١٥) & (٥\times٧)+(٢-\times٨)+(٦\times١٥) & (٩\times٧)+(٤\times٨)+(٠\times١٥) \\ (٣\times٣)+(١-\times٥)+(٠\times٦-) & (٥\times٣)+(٢-\times٥)+(٦\times٦-) & (٩\times٣)+(٤\times٥)+(٠\times٦-) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ١٣ & ١٠٩ & ٩٥ \\ ٤ & ٣١- & ٤٧ \end{bmatrix} =$$

فرع ٢ : $٠.١٢(-ب)$

الحل

$$٠.١٢(-ب) ٢ = \begin{bmatrix} ٧- & ٨- & ١٥- \\ ٣- & ٥- & ٦+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٧- & ٨- & ١٥- \\ ٣- & ٥- & ٦+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٦ & ٢ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix} =$$

(يجوز الضرب لأن عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى = عدد الصفوف في المصفوفة الثانية)

$$\begin{bmatrix} ٦+٢٨- & ١٠+٣٢- & ٦+٢٨- \\ ١٢-٦٠- & ١٠-٤٨- & ٦-٤٢- \\ ٦٠+٠ & ٥٠-+٠ & ٣٠-+٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٢- & ٢٢- & ٧٢- \\ ٤٨- & ٥٨- & ٧٨- \\ ٣٠- & ٥٠- & ٦٠ \end{bmatrix}$$

فرع ٣ : جـ^{٢}

الحل

جـ^{٢} = جـ · جـ

(يجوز الضرب لأن عدد الأعمدة في جـ = عدد الصفوف في جـ)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٩ \\ ١- & ٢- & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٩ \\ ١- & ٢- & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٩+٥-+٠ & ١٥+١٠-+٦٣ & ٢٧+٢٠+٠ \\ ٣-+٢+٠ & ٥+٤+٢٤ & ٩-+٨-+٠ \\ ٠+٦-+٠ & ٠+١٢-+٠ & ٠+٢٤+٠ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٥٩ & ٤٧ \\ ١- & ٢٣ & ١٧- \\ ٦- & ١٢- & ٢٤ \end{bmatrix} =$$

فرع ٤ : ا^{٢} = ا · ا

الحل

(لا يجوز الضرب لأن عدد الأعمدة في ا = عدد الصفوف في ا)

السؤال الرابع: جد قيم س ، ص فيما يأتي :

$$\begin{bmatrix} س & ٢- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ص & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٤- \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$$

الحل

يجوز ضرب المصفوفات $\begin{bmatrix} ٣س-٢ & ٢-٢س-ص \\ ٣-٠ & ٢-٠+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٤- \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$

من تساوي المدخلات المتناظرة فإن ٣س − ٢ = ٤ ⇐ ٣س = ٦ ⇐ س = ٢

− ٢س − ٢ص = − ١٤ بالتعويض عن قيمة س = ٢

$\Leftarrow -٢\times٢-٢ص=-١٤ \Leftarrow -٤-٢ص=-١٤ \Leftarrow -٢ص=-١٤+٤$

$\Leftarrow -٢ص=-١٠ \Leftarrow ص=٥$

السؤال الخامس: إذا كان $أ=\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ ١ & ٧\end{bmatrix}$ $ب=\begin{bmatrix}٧ & ١ & ٢\\ ٣ & ٥- & ١\end{bmatrix}$ $جـ=\begin{bmatrix}٢ & ٥ & ٣-\\ ١- & ٢- & ٢\\ ٠ & ١ & ٤\end{bmatrix}$

أجد :

فرع ١ : $(أ\cdot ب)\cdot جـ$

الحل

$$(أ\cdot ب)\cdot جـ=\left(\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ ١ & ٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٧ & ١ & ٢\\ ٣ & ٥- & ١\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}٢ & ٥ & ٣-\\ ١- & ٢- & ٢\\ ٠ & ١ & ٤\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}٢١+٠ & ٣+٠ & ٦+٠\\ ٧+٢١ & ٣٥-+١ & ٢+٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢ & ٥ & ٣-\\ ١- & ٢- & ٢\\ ٠ & ١ & ٤\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}٢١ & ٣ & ٦\\ ٢٨ & ٣٤- & ٩\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢ & ٥ & ٣-\\ ١- & ٢- & ٢\\ ٠ & ١ & ٤\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}٤٢+٠ & ٣-+٠ & ١٠٥+٦-+٦\\ ٥٦+٠ & ٣٤+٠ & ١٤٠+٦٨+٩\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٦٣-+٦+٢٤\\ ٨٤-+٦٨+٣٦\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}٣٩ & ١٠٥ & ٣٣-\\ ٩٠ & ٢١٧ & ١١٦-\end{bmatrix}$$

فرع ٢ : $(أ\cdot ب)\cdot جـ$

الحل

$$(أ\cdot ب)\cdot جـ=\left(\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ ١ & ٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٧ & ١ & ٢\\ ٣ & ٥- & ١\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}٢ & ٥ & ٣-\\ ١- & ٢- & ٢\\ ٠ & ١ & ٤\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}٢١+٠ & ٣+٠ & ٦+٠\\ ٧+٢١ & ٣٥-+١ & ٢+٧\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢ & ٥ & ٣-\\ ١- & ٢- & ٢\\ ٠ & ١ & ٤\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢١ & ٣ & ٦ \\ ٢٨ & -٣٤ & ٩ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -٣ \\ -١ & -٢ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤٢+٠+٣- & ١٠٥+٦-+٦ & ٦٣-+٦+٢٤ \\ ٥٦+٠+٣٤ & ١٤٠+٦٨+٩ & ٨٤-+٦٨+٣٦ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣٩ & ١٠٥ & -٣٣ \\ ٩٠ & ٢١٧ & -١١٦ \end{bmatrix} =$$

فرع ٣ : $٢(أ٠ب)$

الحل

$$٢(أ٠ب) = ٢\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ & ١ \end{bmatrix}\right)$$

$$٢\begin{bmatrix} ٠+٢١ & ٠+٣ & ٠+٦ \\ ٢١+٧ & -١+٣٥ & ٢+٧ \end{bmatrix} =$$

$$٢\begin{bmatrix} ٢١ & ٣ & ٦ \\ ٢٨ & -٣٤ & ٩ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤٢ & ٦ & ١٢ \\ ٥٦ & -٦٨ & ١٨ \end{bmatrix} =$$

فرع ٤ : $٢(أ)٠ب$

الحل

$$٢(أ)٠ب = ٢\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ & ١ \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٢ & ١٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ & ١ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤٢+٠ & ٦+٠ & ١٢+٠ \\ ١٤+٤٢ & -٢+٧٠ & ٤+١٤ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤٢ & ٦ & ١٢ \\ ٥٦ & -٦٨ & ١٨ \end{bmatrix} =$$

فرع ٥ : $أ٠(٢ب)$

الحل

$$أ٠(٢ب) = \left(\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}٢\begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ & ١ \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٤ & ٢ & ٤ \\ ٦ & -١٠ & ٢ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٠+٤٢ & ٠+٦ & ٠+١٢ \\ ١٤+٤٢ & ٢+-٧٠ & ٤+١٤ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤٢ & ٦ & ١٢ \\ ٥٦ & ٦٨- & ١٨ \end{bmatrix} =$$

دراسة الكامل

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	اذا كانت أ= $\begin{bmatrix}٣\\٦\end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix}-٣ & ٤\end{bmatrix}$ فان أ × ب تساوى أ) $\begin{bmatrix}-٩\\٢٤\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-٩ & ١٢\\-١٨ & ٢٤\end{bmatrix}$ جـ) [١٥] د) $\begin{bmatrix}-٩ & -١٨\\١٢ & ٢٤\end{bmatrix}$	ب
٢	إذا كانت جـ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٥ ، وكانت ب مصفوفة من الرتبة ٣ × ٥ وكانت جـ = أ × ب فإن رتبة أ هي : أ. ٢×٣ ب. ٣×٥ ج. ٢×٣ د. ٢×٥	أ
٣	إذا كان أ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن: $أ_{س\times ٣} \times ب_{ي\times ١} = جـ_{٢\times ١}$ ، فإن ن + ي أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٥	د
٤	إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣ ، ب من الرتبة ٣×٤ ، جـ من الرتبة ٢ × ٤ ، فأي العمليات التالية معرفة على المصفوفات : أ) ب أ + جـ ب) أ جـ +ب جـ) جـ أ + ب د) أ ب + جـ	د
٥	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix}٥ & -١ & ٣\\١ & ٢ & -٢\end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix}١ & ٤\\٠ & ٣\\-١ & ٢\end{bmatrix}$ ، وكانت جـ = أ × ب فإن $جـ_{١٢}$ تساوي : أ) ٣ ب) ١ ج) صفر د) ٢	أ
٦	إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث تكون عملية الجمع والطرح معرفتين وكان ك عدد حقيقي فإن احدى العبارات التالية صحيحة: أ) إذا كان أ . ب = أ . جـ ، فإن ب = جـ ب) أ .ب = ب . أ ج) ك(أ . ب) = (ك أ) . (ك ب) د) (أ + ب).جـ = أ .جـ + ب .جـ	د

٧	ناتج الضرب : $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$ × $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ هو أ) $\begin{bmatrix} -٦ \\ ١٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٦ & ١٠ \end{bmatrix}$ جـ) [٤] د) $\begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ -١٥ & ١٠ \end{bmatrix}$	د
٨	إذا كانت س مصفوفة بحيث أن س × $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن س تساوي : أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$	ب
٩	إذا كان أ$_{٣\times٢}$ ، ب$_{٢\times٣}$ ، جـ$_{٢\times٢}$ ، أي العمليات الآتية يمكن إجرائها : أ) أ × ب + جـ ب) ب × أ + جـ ج) أ × جـ + ب د) ب × جـ + أ	ب
١٠	إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣ ، وكانت ب مصفوفة من الرتبة ٣ × ٥ وكانت جـ = أ × ب فإن رتبة جـ هي : أ. ٢×٣ ب. ٣×٥ ج. ٢×٣ د. ٢×٥	د
١١	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، وكان أ × ب$_{٣\times٥}$ = جـ$_{٢\times٥}$ فإن م تساوي أ) ٢ ب) ٣ ج) ٥ د) ٦	ب
١٢	إحدى العمليات الآتية صحيحة دائماً لأي مصفوفتين س ، ص : أ) س + ص = ص + س ب) س ـ ص = ص ـ س ج) س × ص = ص × س د) س ـ ص = ص + س	أ

#	القسم الثاني : اجب عن الأسئلة الاتية	الجواب
١	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١- \\ ٥- & ١ \end{bmatrix}$ ، أوجد أ× ب إن أمكن	$\begin{bmatrix} ٤ & ٧- \\ ١٢- & ١- \end{bmatrix}$
٢	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ× ب	$\begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ٤ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$
٣	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ جد : ١) أ × ب ٢) ٢ أ + ب	$\begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix}$
٤	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ احسب : ١. ٣ أ ـ ٢ ب ٢. ب × أ	$\begin{bmatrix} ٧ & ١١ \\ ٠ & ١٥ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ١ & ١٠- \\ ٦ & ١٥ \end{bmatrix}$

الوحدة الأولى / المصفوفات

الدرس الرابع / المحددات

القسم الأول : الملخص

محدد المصفوفة : هي ربط المصفوفة بعدد حقيقي

١) اذا كانت $أ = [أ_{١١}]$ فان $|أ| = أ_{١١}$

٢) اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ قان محدد أ ويرمز له بالرمز $|أ|$

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}أ_{٢٢} - أ_{٢١}أ_{١٢}$$

٣) اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$

فان $|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$

الطريق إلى التميز نادراً ما يكون مزدحماً

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أجد :

فرع أ : $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

الحل

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٢ \times ٣ = ٤ - ٦ = ٢$$

فرع ب : $\begin{vmatrix} ١٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$

الحل

$$\begin{vmatrix} ١٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ١٢ \times ١ - ٤ \times ٣ = ١٢ - ١٢ = ٠$$

فرع جـ : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣- \\ ١- & ٢ & ٣- \\ ٢- & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

الحل

$$= ٣- \begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢- \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٣- & ١- \\ ٤ & ٢- \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٣- & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٣-(٢ \times ٢ - ١ \times ٣) - ٢(٣- \times ٢ - ٤ \times ١-) + ١(٣- \times ٣ - ٤ \times ٢)$$
$$= ٣-(٤ + ٣-) - ٢(٦ + ٤) + ١(٩- - ٨)$$
$$= ٣- \times ١- + ٢ \times ١٠ + ١ \times ١٧-$$
$$= ٣ - ٢٠ + ١٧ = ٣٤-$$

السؤال الثاني: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ،أجد

$|أ \cdot ب|$ ، $|أ + ب|$ ، $|أ - ٢ب|$

فرع ١ : $|أ \cdot ب|$

الحل

نجد أولاً : $أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٢\times١+١\times٠ & ٢\times١-+٤\times٢ \\ ٢\times٣+١\times٠ & ٢\times٣+٤\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢ & ١٤ \end{bmatrix}$$

ثانياً : $|أ\cdot ب| = \begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢ & ١٤ \end{vmatrix} = ٢\times١٤-٦\times٢ = ٢٨-١٢ = ١٦$

(حل اخر $|أ\cdot ب| = |أ| \cdot |ب| = ٢\times٨ = ١٦$)

فرع ٢ : $|أ+ب|$

الحل

نجد أولاً : $أ+ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

ثانياً : $|أ+ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٣\times٢-٥\times٣ = ١٥-٦ = ٩$

فرع ٣ : $|أ-٢ب|$

الحل

نجد أولاً : $أ-٢ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩- & ٠ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$$

ثانياً : $|أ-٢ب| = \begin{vmatrix} ٩- & ٠ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix} = ٢\times٩--١\times٠ = ١٨+٠ = ١٨$

السؤال الثالث: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١ & س \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٥$

الحل

$$٣\times١-٢\times س = ٥$$

$$٢س-٣ = ٥ \Leftarrow ٢س = ٨ \Leftarrow س = ٤$$

السؤال الرابع: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} س & -٢ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٠ \end{vmatrix} = ١١$

الحل

$$= س \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٦ & ٠ \end{vmatrix} - (-٢) \begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = ١١$$

$$س(٠ - -٦) + ٢(٠ - ٥) + ١(٠ - ٥) = ١١$$

$$س \times ٦ + ١٠ + -٥ = ١١$$

$$٦س + ٥ = ١١ \Leftarrow ٦س = ٦ \Leftarrow س = ١$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ٢ فإن قيمة س تساوي : أ) ٢ ب) ـ ٢ جـ) ٣ د) ٤	أ
٢	إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ـ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ فإن | س | + | ص | يساوي أ) ـ ١٦ ب) ٢١ جـ) ٦ د) ـ ٦	جـ
٣	إذا كانت و هي المصفوفة الصفرية من الرتبة الثانية ، م هي مصفوفة الوحدة من الرتبة الثانية ، فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة: أ. م + و = و ب. و . م = و ج. و . م = م د. | و | = | م |	ب
٤	إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٦ & ـ٩ \end{vmatrix}$ = صفر ، فإن قيمة س = أ) ـ ٢ ب) صفر ج) ٢ د) ١٨	أ
٥	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن | ٣ أ | = أ) ٩ ب) ٦ ج) ٣ د) ١	أ
٦	إذا كان $\begin{vmatrix} ٣س ـ ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١١ ، فإن س تساوي : أ) ـ ٣ ب) ٢ ج) ٥ د) ٣	د
٧	لتكن س = $\begin{bmatrix} ١ & ـ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن |س | - | ص | = أ) ـ ٦ ب) ٦ ج) ٨ د) ١٠	د

#	القسم الثاني : اجب عن الأسئلة الاتية	الجواب
١	إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٢- \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٤- & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ أوجد محددة المصفوفة |أ|	٢٩ ـ
٢	ما قيمة/ قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} ٢- & ٤ \\ ٥ & (س - ١) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢- \end{vmatrix}$	١ ـ
٣	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد ١) أ × ب ٢) |أ ـ ب|	$\begin{bmatrix} ٢ & ١٧ \\ ٢ & ٢٣ \end{bmatrix}$ ، ٤
٤	إذا علمت أن : $\begin{vmatrix} س & ١ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٢ \\ ٢- & ٢- & ٠ \end{vmatrix} = ٤-$ ، فما قيمة س ؟	٦ ـ
٥	احسب محددة المصفوفة $\begin{bmatrix} ٦ & ٤- & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$	٨ ـ
٦	إذا كانت $\begin{vmatrix} ١ & ١- & ٢ \\ ٥ & س & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٦ \end{vmatrix} = ٨$ ، فما قيمة س ؟	٥
٧	إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ٠ & ٢- \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٤- & ٥ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ١ & ٤- \end{vmatrix}$ ، فجد قيمة س	١
٨	جد محددة المصفوفة ب ، حيث ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ١ & ٠ & ٤- \\ ٣ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$	٧٠

٩	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد : ١) أ × ب ٢) |أ + ب|	١) $\begin{bmatrix} -٥ & -٤ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ ٢) ٣٦
١٠	إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ، جد : | أ ـ ب |	١٦
١١	إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد : ١) | أ × ب| ٢) | أ + ٢ ب |	١) -٢٠ ٢) ـ ١٩
١٢	جد $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ ٤ & ٠ & ٦ \end{vmatrix}$	ـ ٢٠٢
١٣	إذا كانت جـ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٥ & ١ & ٠ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ جد محدد المصفوفة جـ	٧١
١٤	أوجد $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ٦ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$	٢٢

الوحدة الأولى / المصفوفات

الدرس الخامس / النظير الضربي للمصفوفة المربعة

القسم الأول : الملخص

تعريف :

اذا كانت أ ، ب مصفوفتين ثنائيتين ، وكان أب = ب أ = $م_{2}$ ($م_{2}$ المصفوفة المحايدة أو مصفوفة الوحدة) .

فإن ب تسمى النظير الضربي لـِ أ وبالرموز ب = $أ^{-1}$ ، ($أ^{-1}$ النظير الضربي للمصفوفة أ)

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة الثنائية :

اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$ فان $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix}$ حيث $|أ| \neq 0$

إذا كان $|أ| = 0$ فإن أ ليس لها نظير ضربي (تسمى أ مصفوفة منفردة)

ملاحظة : $(أ.ب)^{-1} = ب^{-1}.أ^{-1}$

احذف من قاموسك هذه الكلمات نهائياً
" لا أستطيع ، لا أقدر ، لن أنجح ، سوف أفشل .....
وما إلى ذلك "

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أجد النظير الضربي للمصفوفات الآتية (إن أمكن) :

فرع ١ : $أ = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

الحل

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - ٢ \times -١ = ٣$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٣} \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ١- & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{-٢}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$$

فرع ٢ : $ب = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل

$$|ب| = \begin{vmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ - ٤ \times \frac{١}{٢} = ٠$$

(لا يوجد نظير ضربي)

فرع ٣ : $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

الحل

$$|جـ| = \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٠ \times ٠ - ١ \times ١ = -١$$

$$جـ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

(ملاحظة $م^{-١} = م$)

السؤال الثاني: أجد قيمة س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة حيث :

فرع أ : $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل

المصفوفة منفردة $\Leftarrow$ محدد المصفوفة = صفر

$$\begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$$

$$٣س - ٦ = ٠$$

$$٣س = ٦ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$$

فرع ب $\begin{bmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{bmatrix}$

الحل

المصفوفة منفردة $\Leftarrow$ محدد المصفوفة = صفر

$$\begin{vmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{vmatrix} = ٠$$

$$س^{٢} - ٣٦ = ٠$$

$$س^{٢} = ٣٦ \Leftarrow \boxed{س = ٦}، \boxed{س = -٦}$$

السؤال الثالث: إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب $= ٤$أ ، أجد ب$^{-١}$

الحل

$$ب = ٤أ = ٤\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ١٦ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} ١٢ & ١٦ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$$

$$|ب| = \begin{vmatrix} ١٢ & ١٦ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix} = ١٢ \times ٨ - ١٦ \times ٤ = ٩٦ - ٦٤ = ٣٢$$

$$ب^{-١} = \frac{١}{٣٢}\begin{bmatrix} ٨ & -١٦ \\ -٤ & ١٢ \end{bmatrix} \Leftarrow ب^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٣٢} & \frac{-١٦}{٣٢} \\ \frac{-٤}{٣٢} & \frac{١٢}{٣٢} \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad ب^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، أجد $(أ \cdot ب)^{-1}$ ، $ب^{-1} \cdot أ^{-1}$ ؟ ماذا تلاحظ ؟

الحل

$$أ \cdot ب = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times -1 + -1 \times 4 & -1 \times 2 + -1 \times 1 \\ 1 \times -1 + -2 \times 1 & 1 \times 2 + -2 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|أ \cdot ب| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 0 - 1 \times 2 = -2$$

$$(أ \cdot ب)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad (أ \cdot ب)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

نجد $ب^{-1}$

$$|ب| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times 1 - -1 \times 2 = 1$$

$$ب^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$ب^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

نجد $أ^{-1}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times 2 - -1 \times 4 = -2$$

$$أ^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$أ^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$ب^{-1}\,أ^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times 1 & -\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 2 \\ 1\times 2 - 2\times 1 & 1\times 1 - 2\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $(أ\,ب)^{-1} = ب^{-1}\,أ^{-1}$

السؤال الخامس: أحل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = س \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

الحل

$$س \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

لتكن $أ = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ نوجد النظير الضربي للمصفوفة أ ؟

$$|أ| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$$

$$أ^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

بضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي لِـ أ $\left(أ^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)$

$$س \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} 19 & -27 \\ -32 & 44 \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 19 & -27 \\ -32 & 44 \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} & -\frac{27}{2} \\ -16 & 22 \end{bmatrix}$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	أجب عن الأسئلة الاتية	الاجابة
١	أوجد قيمة س التي تجعل المصفوفة أ مصفوفة منفردة أ = $\begin{bmatrix} ٣س & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix}$	-٤
٢	أوجد النظير الضرب (إن وجد) للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{-١}{٢} \\ \frac{١}{١٢} & \frac{١}{٦} \end{bmatrix}$
٣	إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فجد أ $^{-١}$	$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$
٤	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فجد (٢ أ) $^{-١}$	$\begin{bmatrix} \frac{٦}{٢٨} & \frac{-٢}{٢٨} \\ \frac{٢}{٢٨} & \frac{٤}{٢٨} \end{bmatrix}$
٥	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد : ١) ٢ أ + ب ٢) ب $^{-١}$	١) $\begin{bmatrix} ٤ & ٩ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

٦	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد : ١. أ $^{-١}$ ٢. | ٢ أ +ب |	$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ -٤٤
٧	جد النظير الضربي للمصفوفة أ حيث أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ٠ & \frac{١-}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$
٨	إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد : ١) (٢ أ) $^{-١}$ ٢) أ×ب	$\begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ١٨ & ١ \end{bmatrix}$
٩	إذا كانت س ع $^{-١}$ = ص ، ص = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ جد س $^{-١}$	$\begin{bmatrix} \frac{١}{١٢} & \frac{١-}{١٢} \\ \frac{٢}{١٢} & \frac{٥}{٢٤} \end{bmatrix}$
١٠	اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ فأوجد (أ× ب)$^{-١}$	$\begin{bmatrix} \frac{٢٢}{١٠} & \frac{٤-}{١٠} \\ \frac{٤-}{١٠} & \frac{٣}{١٠} \end{bmatrix}$
١١	اذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix} ١ & ٦- \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$ فجد : ١) ٣ أ – ب ٢) ب$^{-١}$	١) $\begin{bmatrix} ١٨ & ١٠- \\ ١١- & ١١ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} \frac{١-}{٢} & \frac{١-}{٢} \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$

١٢	حل المعادلة المصفوفية : $\text{س}_{٢} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & -٤ \end{bmatrix}$

دراسة الكمال

كراسة الكامل

الوحدة الأولى / المصفوفات

الدرس السادس / حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات

القسم الأول : الملخص

من التطبيقات المهمة للمصفوفات استخدامها في حل أنظمة المعادلات الخطية ، ويمكن اجراء ذلك بعدة طرق منها :

١ـ طريقة النظير الضربي :

في الطريقتين اتأكد أن المعادلتين مرتبتان على الصورة $أ س + ب ص = جـ$

اذا كان لدينا النظام $أ_{١١} س + أ_{٢١} ص = جـ_{١}$

$أ_{١٢} س + أ_{٢٢} ص = جـ_{٢}$

فاننا نكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية كالتالي:

$$\begin{bmatrix} جـ_{١} \\ جـ_{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢١} \end{bmatrix}$$

أي على صورة $أ ع = جـ$ ،حيث $أ$ مصفوفة المعاملات ، $ع$ مصفوفة المتغيرات ، $جـ$ مصفوفة الثوابت

فاذا كانت $أ$ مصفوفة غير منفردة فان $أ^{-١}$ موجود ، وبضرب طرفي المعادلة من اليمين في $أ^{-١}$ وينتج $ع = أ^{-١} جـ$ ، ومنها نجد حل النظام

ملاحظة : في النظام $\boxed{أ ع = جـ}$ ، اذا كانت $أ$ مصفوفة منفردة فلا يمكن استخدام طريقة النظير الضربي وفي هذه الحالة

اما ان يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول او ليس له حل .

٢ـ طريقة كريمر :

حل نظام من المعادلات الخطية مكون من معادلتين في متغيرين (مجهولين) س ، ص أو ثلاث معادلات في ثلاثة متغيرات (مجاهيل) س ، ص ، ع والذي يتخذ الصورة $أ ع = جـ$ ،

حيث $أ$ مصفوفة المعاملات ، $ع$ مصفوفة المتغيرات ، $جـ$ مصفوفة الثوابت ، $|أ| \neq ٠$ هو

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} ، ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} ، ع = \frac{|أ_{ع}|}{|أ|}$$

حيث $|أ_{س}|$ هو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الأول بعمود مصفوفة الثوابت

$|أ_{ص}|$ هو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الثاني بعمود مصفوفة الثوابت

$|أ_{ع}|$ هو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود االثالث بعمود مصفوفة الثوابت

تعلم العلم فإن يكن لك مال كان لك

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أحل الأنظمة الخطية الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي :

فرع أ : $٣س - ٤ص = ٤$ ، $-٢س + ٤ص = ٤$

الحل

نتأكد أن المعادلتين مرتبتين

$$٣س - ٤ص = ٤$$
$$-٢س + ٤ص = ٤$$

نكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

نجد النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ٨ = ٤$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

(بالضرب بالنظير الضربي للمصفوفة من جهة اليمين في المعادلة المصفوفية)

$$\left(\begin{bmatrix} ٤ \\ ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{٣}{٤} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ٤ \times ١ + ٤ \times ١ \\ ٤ \times \frac{٣}{٤} + ٤ \times \frac{١}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٨ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \quad \therfore \quad س = \boxed{٨} \quad ، \quad ص = \boxed{٥}$$

فرع ب : $س - ص = ٣$ ، $٢س = ٦ - ص$

الحل

نتأكد أن المعادلتين مرتبتين

$$س - ص = ٣$$
$$٢س + ص = ٦$$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

نجد النظير الضربي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ - -٢ = ٣$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٣} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{-٢}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$$

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ **هو** $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{-٢}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$

(بالضرب بالنظير الضربي للمصفوفة من جهة اليمين في المعادلة المصفوفية)

$$\left(\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{-٢}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{-٢}{٣} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ٦ \times \frac{١}{٣} + ٣ \times \frac{١}{٣} \\ ٦ \times \frac{١}{٣} + ٣ \times \frac{-٢}{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \quad \therfore \quad س = \boxed{٣} \quad ، \quad ص = \boxed{٠}$$

السؤال الثاني: أحل الأنظمة الخطية الآتية باستخدام طريقة كريمر :

فرع أ : $س - ص = ٨$ ، $٢س + ص = ١$

نتأكد أن المعادلتين مرتبتين

$$س - ص = ٨$$
$$٢س + ص = ١$$

المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٨ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ - -٢ = ٣$

$$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٨ & -١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٨ & -١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٨ - -١ = ٩$

$$أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ٨ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ - ١٦ = -١٥$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٩}{٣} = \boxed{٣} \Leftarrow \boxed{س = ٣}$$

$$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١٥}{٣} = \boxed{-٥} \Leftarrow \boxed{ص = -٥}$$

فرع ب $٢ص - س = ١$ ، $٢س + ص - ٨ = ٠$

الحل

نتأكد أن المعادلتين مرتبتين

$$-س + ٢ص = ١$$
$$٢س + ص = ٨$$

المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٨ \end{bmatrix}$

$$أ = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها $|أ| = \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = -١ - ٤ = -٥$

$$أ_{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٨ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٨ & ١ \end{vmatrix} = ١ - ١٦ = -١٥$

$$أ_{ص} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix}$$

ومنها $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٨ \end{vmatrix} = -٨ - ٢ = -١٠$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-١٥}{-٥} = \boxed{٣} \Leftarrow \boxed{س = ٣}$$

$$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١٠}{-٥} = \boxed{٢} \Leftarrow \boxed{ص = ٢}$$

السؤال الثالث: في نظام من معادلتين خطيتين كانت $|أ| = ١١$ ، $|أ_{س}| = ٣٣$ ، $|أ_{ص}| = ١١$ ، أجد قيمة س ، ص ؟

الحل

بإستخدام طريقة كريمر

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٣٣}{١١} = [٣] \Leftarrow \boxed{س = ٣}$$

$$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١١}{١١} = [١] \Leftarrow \boxed{ص = ١}$$

السؤال الرابع: في نظام من معادلتين خطيتين على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠ ، وكانت

$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات ، $ب = \begin{bmatrix} ٢- \\ ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت .

فرع ١ : أكتب المعادلتين الخطيتين بدلالة س ، ص .

الحل

المعادلتان هما

$$س + ٢ص = -٢$$
$$٣س + ١١ص = ٩$$

فرع ٢ : أستخدم طريقة كريمر لحل النظام .

الحل

$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$ ومنها $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١١ \end{vmatrix} = ١١ - ٦ = ٥$

$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ٩ & ١١ \end{bmatrix}$ ومنها $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٢- & ٢ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = -٢٢ - ١٨ = -٤٠$

$أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$ ومنها $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٩ \end{vmatrix} = -٩ - -٦ = ١٥$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٤٠-}{٥} = [٨-] \Leftarrow \boxed{س = -٨}$$

$$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٥}{٥} = [٣] \Leftarrow \boxed{ص = ٣}$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	أجب عن الأسئلة الاتية	الجواب
١	حل النظام التالي باستخدام النظير الضربي : س = ص + ١ ٢س + ص = ٢	س =١ ، ص = ٠
٢	مثل النظام التالي بمعادلة مصفوفية ثم جد قيم س ، ص باستخدام قاعدة كريمر : ٢س ـ ص = ١ ، ٢ ص ـ ٣ س = صفر	س=٢ ، ص = ٣
٣	حل النظام التالي باستخدام المصفوفات : ٢س ـ ص = ١ ، ٣س ـ ٢ص = صفر	س=٢ ، ص = ٣
٤	حل النظام التالي باستخدام المصفوفات : ٣س = ٢ ص + ٥ ، ٢س ـ ص = ٤	س = ٣ ، ص = ٢
٥	حل النظام التالي باستخدام كريمر ، وجد أن : س = ـ ٢ ، $\|أ_{س}\|$ = ٤ ، $\|أ_{ص}\|$ = ـ ٦ ، فما قيمة ص ؟	٣
٦	حل النظام التالي باستخدام المصفوفات : ص = ٢س +١ ، س + ص = ٧	س = ٢ ، ص = ٥
٧	حل النظام التالي باستخدام المصفوفات : ٢س + ٣ ص = ـ ١ ، ٤ ص + س = ٢	س = ـ ٢ ، ص =١
٨	اذا كانت $أ_{س} = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$ ١.اكتب معادلتين خطيتين بدلاله س ، ص ٢.استخدم قاعدة كريمر لحل النظام	٢س-ص=-١ س+ص=٧ $س = \frac{٨-}{٣}$ ، ص = ٥

كراسة الكامل

الوحدة الأولى / المصفوفات

تمـــارين عامـــة

السؤال الأول : اختار رمز الإجابة الصحيحة ، مما يأتي :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
د	أ	جـ	أ	جـ	ب	أ	جـ	د	ب

١) إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٣ & -٢ \\ ٠ & -٤ & ٤ \\ ٢ & -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ما قيمة $أ_{٣٢}$

الحل

$أ_{٣٢}$ = هي القيمة الموجودة لتقاطع الصف الثاني مع العمود الثالث = ٤

د

٢) إذا كانت المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٦ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ما رتبتها

الحل

عدد الصفوف × عدد الأعمدة

٢ × ٣

أ

٣) إذا كان $\begin{bmatrix} ٢س + ٣ & ٤ \\ ٥ & ص - ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ، ص على الترتيب

الحل

من تساوي المدخلات المتناظرة

$٢س + ٣ = ٧ \Leftarrow ٢س = ٤ \Leftarrow س = ٢$

$ص - ٢ = -١ \Leftarrow ص = ١$

ج

٤) إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات بحيث أ ٠ ٢ب = جـ ، أ من الرتبة ٢ × ٣ ، جـ من الرتبة ٢ × ٤ ، فما رتبة المصفوفة ب

الحل

بفرض رتبة ب م × ن فإن $أ_{٢×٣} \cdot ٢ب_{م×ن} = جـ_{٣×٤}$

عدد الأعمدة في المصفوفة أ = عدد الصفوف في المصفوفة ٢ب

أي أن م = ٣ ، ن = ٤ إذن رتبة ب هي ٣ × ٤

أ

٥) إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ فما قيمة $|٢س|$

الحل

$س = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \Leftarrow ٢س = \begin{bmatrix} ٤ & -١٠ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$

$|٢س| = \begin{vmatrix} ٤ & -١٠ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix} = -٨ - -٢٠ = ١٢$

ج

---

٦) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٣ & ٣س \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة

الحل

مصفوفة منفردة $\Leftarrow$ محدد المصفوفة = صفر

$\Leftarrow \begin{vmatrix} ٢ & -٤ \\ ٣ & ٣س \end{vmatrix} = ٠$

$\Leftarrow ٦س - (-١٢) = ٠$

$\Leftarrow ٦س + ١٢ = ٠ \Leftarrow ٦س = -١٢ \Leftarrow س = -٢$

ب

---

٧) إذا كان $أ_س = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ أجد المصفوفة أ

الحل

إزالة عمود الثوابت (العمود الأول من المصفوفة $أ_س$ ، والعمود الثاني من المصفوفة $أ_ص$)

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$

أ

---

٨) اذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ أجد $(أ)^{٥}$

الحل

$أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

ج

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٦ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{١٦} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣٢ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٣٢} \end{bmatrix} = ا٠^٢ ا٠^٢ ا = ا^٥$$

٩) ما ناتج $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل

$$= \begin{bmatrix} ٣\times٢ & ٢\times٢ & ٤\times٢ \\ ٣-\times٠ & ٢\times٠ & ٤\times٠ \\ ٣-\times١ & ٢\times١ & ٤\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٤ & ٨ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ -٣ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

د

١٠) إذا كانت ا مصفوفة من الرتبة الثانية ، وكان ا + م$_٢$ = و$_٢$ فما هي المصفوفة ا

الحل

هي النظير الجمعي للمصفوفة م$_٢$ م$_٢$ = − م$_٢$

ب

السؤال الثاني: إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٦ & -٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

ر = $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ & -٢ \\ -٤ & ١ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ل = $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ أجد الآتي (إن أمكن) :

فرع أ : جـ + ل

الحل

يجوز الجمع لتساوي الرتب لكل من المصفوفتين

$$جـ + ل = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

فرع ب: ٣جـ − ٢ل

يجوز الطرح لتساوي الرتب لكل من المصفوفتين

الحل

$$٣جـ - ٢ل = ٣\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ٩ & ١٥ \\ ٦ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦- & ١٠ \\ ١٢ & ٤ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

فرع جـ : $(أ \cdot ب) \cdot د$

الحل

$$(أ \cdot ب) \cdot د = \begin{bmatrix} ٢- & ٦ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٤- \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٢ \\ ٤ & ٥- & ٦ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} ٢- & ٦ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٤- \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١٠ & ١١- & ١٤ \\ ٢٢ & ٢١- & ٢٢ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ٢٦ & ١٤ & ٤- \\ ٩٢ & ٦٣ & ٣٣- \\ ١٧٢ & ١٣٣ & ٨٣- \end{bmatrix}$$

فرع د : $ل^{-١}$

الحل

نجد أولاً $|ل| = \begin{vmatrix} ٥ & ٤- \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٥ - -٨ = ٢٣$

$$ل^{-١} = \frac{١}{٢٣}\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢٣} & \frac{٤}{٢٣} \\ \frac{٢-}{٢٣} & \frac{٥}{٢٣} \end{bmatrix}$$

فرع هـ : $|جـ|$

الحل

$$|جـ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - -٤ = ١٦$$

السؤال الثالث : أحل المعادلات المصفوفية الآتية :

الحل :

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix} = ٢س + \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

بإضافة النظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ إلى المعادلة المصفوفية

$$\left(\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤- & ٢- \end{bmatrix}\right)=٢س+\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤- & ٢- \end{bmatrix}\right)$$

$$٢س=\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$س=\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} \Leftarrow س=\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

فرع ب: $\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}-٣م_{٢}=ص.\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل

($م_{٢}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة الثانية)

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}-٣\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}=ص.\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}=ص.\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}=ص.\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

نجد النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}=١\times٤-٢\times٠=٤$$

$$\frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{١-}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{١-}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

بضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{١-}{٢} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ من اليسار

$$\left(\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\right) = ص \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$$

$$ص = \begin{bmatrix} ١+١ & ٠+-\frac{١}{٢} \\ ١+٥ & ٠+-\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

$$ص = \begin{bmatrix} ٢ & -\frac{١}{٢} \\ ٦ & -\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

فرع جـ : $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٢- \\ ٤ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤- \\ ٦ \end{bmatrix} = س$

الحل

$$س = \begin{bmatrix} ٢\times٢ + ٥\times٤- + ٦\times٤ \\ ٢\times٢- + ٣\times٤- + ٦\times٤ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٨ \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع : أكتب أنظمة المعادلات الآتية على شكل معادلات مصفوفية :

فرع أ : $٢س - ٣ص = ٠$ ، $س + ٢ص = ٧$

الحل

نتأكد أن المعادلتان مرتبتان

$٢س - ٣ص = ٠$

$س + ٢ص = ٧$

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

فرع ب: $س - ٣ص + ٣ع = ٢$ ، $٤س + ص - ع = ٢$ ، $٥س - ع + ص = ٠$

الحل

نتأكد أن المعادلات مرتبة

$س - ٣ص + ٣ع = ٢$

$٤س + ص - ع = ٢$

$٥س + ص - ع = ٠$

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٢ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & -٣ & ١ \\ -١ & ١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$$

السؤال الخامس: أستخدم طريقة كريمر لحل النظام الآتي :

$٢ص - ٤س = ٢$ ، $٥س + ص = ٨$

الحل

نتأكد أن المعادلتين مرتبتين

$-٤س + ٢ص = ٢$

$٥س + ص = ٨$

المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٨ \end{bmatrix}$

$$أ = \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \quad \text{ومنها} \quad |أ| = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = -٤ - ١٠ = -١٤$$

$$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٨ & ١ \end{bmatrix} \quad \text{ومنها} \quad |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٨ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ١٦ = -١٤$$

$$أ_{ص} = \begin{bmatrix} -٤ & ٨ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \quad \text{ومنها} \quad |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٥ & ٨ \end{vmatrix} = -٣٢ - ١٠ = -٤٢$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-١٤}{-١٤} = \boxed{١} \Leftarrow \boxed{س = ١}$$

$$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٤٢}{-١٤} = \boxed{٣} \Leftarrow \boxed{ص = ٣}$$

السؤال السادس: إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & س \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٦$ ، أحسب قيمة س

الحل

$$١ \begin{vmatrix} س & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & س \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٦$$

$$(٢-س)٢-(٤-٣س)٣+(٢-٣)=٦$$
$$٢-س-٨+٦س+-٣=٦$$
$$٥س-٩=٦$$
$$٥س=٦+٩$$
$$٥س=١٥ \Leftarrow س=\frac{١٥}{٥} \Leftarrow س=٣$$

السؤال السابع : في نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين س ، ص كانت قيمة ص = ٢ ،
$|أ_س| = -٢١$ ، $|أ_ص| = -١٤$ أحسب قيمة س .

الحل

$$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} \quad (\text{بمعلومية ص} = ٢)$$
$$٢ = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$
$$٢ = \frac{-١٤}{|أ|} \quad (\text{بالضرب التبادلي})$$
$$٢|أ| = -١٤$$
$$|أ| = \frac{-١٤}{٢} = -٧ \Leftarrow |أ| = -٧$$

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|}$$
$$س = \frac{-٢١}{-٧} = ٣ \Leftarrow س = ٣$$

ملاحظات الطالب

الوحدة الثالثة

٣

حساب المثلث

الدرس الاول / التكامل غير المحدود

القسم الأول : الملخص

اذا كان الاقتران ق / (س) هو المشتقة الأولى للاقتران ق (س) فان الاقتران ق(س)+جـ يشمل مجموعة الاقترانات التي مشتقتها الأولى ق / (س) ، ويسمى بالتكامل غير المحدود للاقتران ق / (س) ، أو يسمى بالاقتران الأصلي الذي مشتقته ق / (س) .

وبالرموز

$$\int ق'(س)\,ds = ق(س)+جـ \quad ، \quad جـ \in ح$$

- الرمز $\int$ هو إشارة التكامل
- ds تشير أن الاقتران بدلالة س
- جـ يسمى ثابت التكامل .

الشخص الذي يمكنه أن يكون أي شخص ويصنع أي شيء سوف يتعرض للنقد والذم وإساءة الفهم، هذا جزء من ثمن العظمة.

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول : أكمل الجدول الآتي :-

	المشتقة ق / (س)	الاقتران الأصلي ق(س)+جـ
١	٤س ٣	س ٤ +جـ
٢	٤س ٣ + ٣س ٢ + ٢	س ٤ + س ٣ + ٢س+جـ
٣	٢س+١	س ٢ + س+جـ
٤	٤س ٢ + ٣	∫(٤س ٢ + ٣)دس

السؤال الثاني: أضع إشارة ✓ أمام العبارة الصائبة واشارة ✗ أمام العبارة الخاطئة :-

أ) $\int(٥س+٤)دس = \frac{٥س^{٢}}{٢}+٤س$

الإجابة : (✗) التصويب : $\int(٥س+٤)دس = \frac{٥س^{٢}}{٢}+٤س+جـ$

ب) $\int(٦س^{٥}+٣س^{٢})دس = س^{٦}+س^{٣}+جـ$

الإجابة : (✓)

ج) $\int(٣س^{٣}+٣س)دس = ٦س+٣$

الإجابة : (✗) التصويب : $\int(٣س^{٣}+٣س)دس = \frac{٣س^{٤}}{٤}+\frac{٣س^{٢}}{٢}+جـ$

د) $\int\frac{-٥}{س^{٢}}دس = \frac{٥}{س}+جـ$

الإجابة : (✓)

هـ) $\int$ ٢نوهـ س = نوهـ^{٢} + جـ

الإجابة : (✗)

التصويب : $\int$ ٢نوهـ س = ٢ نوهـ س + جـ

و) $\int$ ٢نوهـ ×نوهـ = نوهـ^{٢} + جـ

الإجابة : (✓)

السؤال الثالث: اذا كان ق(س) = $\int \frac{س^{٢}+٣}{س+١}$ د س ، أجد ق$'$(س)

الحل

ق(س) = $\int \frac{س^{٢}+٣}{س+١}$ د س

ق$'$(س) = مشتقة $\int \frac{س^{٢}+٣}{س+١}$ د س ، وبما أن الاشتقاق عملية عكسية للتكامل

فان ق$'$(س) = $\frac{س^{٢}+٣}{س+١}$.

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	$\int \sqrt{٣}\, ds$ يساوي : أ) $\sqrt{٣} + جـ$ ب) $\sqrt{٣}$ س + جـ جـ) س+ جـ د) صفر	ب
٢	$\int ٩\, ds$ يساوي : أ) ٩ ب) ٩ س جـ) ٩ س + جـ د) صفر	جـ
٣	إذا كان $\int (٢س^{٢} - ٣)\, ds$ فإن ق$'$ (٢) تساوي : أ) صفر ب) - ٥ ج) ٨ د) ٥	د
٤	أحد الاقترانات التالية يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة ق$'$ (س) = ٣س^{٢} ـ ٤س أ) م(س) = س^{٣} ـ ٢س^{٢} ب) ق(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} جـ) م(س) = ٦س ـ ٤ د) ق(س) = ٣س^{٢} ـ ٤س + جـ	أ
٥	إذا كان $\int س(٤س - ٢)\, ds$ فإن $\frac{ds}{ds}$ = أ) ٨س ـ ٢ ب) ٤س^{٢} ـ ٢س جـ) $\frac{س^{٢}}{٣}$ (٢س^{٢} ـ ٢س) د) ٤ س^{٣} ـ س^{٣} + جـ	ب
٦	إذا علمت أن ق(س) = س^{٤} + $\int ٣س^{٢}\, ds$ ، فإن ق$'$ (١) = أ) ٣ ب) ٥ ج) ١٠ د) ٧	د
٧	إذا كانت $\int ق(س)\, ds = ٣س^{٢} - ٥س + جـ$ ، فإن ق$'$ (٢) = أ . ـ ٢ ب. صفر ج. ٢ د. ٧	د

#	القسم الثاني :اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	اذا كان ق(س)=$\int (س^{٢}+٥)(س-١)$ دس جد قَ(س)	قَ(س) = $(س^{٢}+٥)(س-١)$
٢	اذا كان ق(س)=$\int \frac{س^{٢}+٢}{س+١}$ دس جد قَ(٢)	٤
٣	اكمل الجدول التالي : ١. قَ(س) ق(س) ٦ ٢. $٣س^{٢}+٢س$ ٣. جـ ثابت ٤. ٢ ٥. $٥س^{٤}+٣س^{٢}+٢س$ ٦. $س^{٤}+٣س^{٢}$	١.صفر ٢. $س^{٣}+س^{٢}+$جـ ٣.صفر ٤.٢س+جـ ٥. $س^{٥}+س^{٣}+س^{٢}+$جـ ٦. $٤س^{٣}+٦س$
٤	بالاعتماد على معلوماتك بالتفاضل بين ان كانت العبارات التالية صحيحة : ١. $\int ٣س^{٢}$ دس $= س^{٣}+س+$جـ ٢. $\int (٢س+١)$ دس $= س^{٢}+س+$جـ ٣. $\int \pi$ دس $= \pi س+$جـ ٤. $\int \frac{١}{س}$ دس $= \frac{-١}{س^{٢}}+$جـ	١. (✗) ٢. (✓) ٣. (✓) ٤. (✓)

الدرس الثاني / قواعد التكامل غير المحدود

القسم الأول : الملخص

قاعدة (١) :

$\int أ \, دس = أس + جـ$ ، $أ، جـ$ عددين حقيقين

قاعدة (٢) :

$\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$ ، جـ عدد حقيقي ، $ن \neq -١$

قاعدة (٣) :

اذا كان الاقتران ق(س) قابلا للتكامل فان

$\int أ \, ق(س) \, دس = أ \int ق(س) \, دس$ ، $أ \neq ٠$

قاعدة (٤) :

اذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل ، فان :-

١) $\int (ق + هـ)(س) \, دس = \int ق(س) \, دس + \int هـ(س) \, دس$

٢) $\int (ق - هـ)(س) \, دس = \int ق(س) \, دس - \int هـ(س) \, دس$

تعميم :- اذا كان $ص = \int ق(س) \, دس$ فان $\frac{دص}{دس} = \frac{د}{دس} \int ق(س) \, دس$ ومنه $\frac{دص}{دس} = ق(س)$

مِقدار الوقت الذي تقضيه في التدريب ليس هو المهم بالضرورة، المهم هو ما تبذله من جهد في التدريب.

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول : أجد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{٢}{٣} \, ds$

الحل

$$\int \frac{٢}{٣} \, ds = \frac{٢}{٣} س + جـ$$

ب) $\int \pi \, dع$

الحل

$$\int \pi \, dع = ٤\pi + جـ$$

ج) $\int -\sqrt{٥} س \, ds$

الحل

$$\int -\sqrt{٥} س \, ds = \frac{-\sqrt{٥}}{٢} س^{٢} + جـ$$

د) $\int (٢س^{٢} + ٣) \, ds$

الحل

$$\int (٢س^{٢} + ٣) \, ds = س^{٣} + ٣س + جـ$$

ه) $\int \left(٧س^{-٣} - \frac{٢}{س^{٢}} + ١\right) ds$

الحل

$$\int \left(٧س^{-٣} - \frac{٢}{س^{٢}} + ١\right) ds = \int (٧س^{-٣} - ٢س^{-٢} + ١) \, ds$$

$$= \frac{٧}{٤} س^{-٤} - \frac{٢}{(-١)} س^{-١} + س + جـ$$

$$= \frac{٧}{٤} س^{-٤} + \frac{٢}{س} + س + جـ$$

و) $\int ك^{٢} \, ds$، $ك \neq ٠$

الحل

$$\int ك^{٢} \, ds = ك^{٢} س + جـ$$

السؤال الثاني: أجد $\int (٢ص - ٥)(ص + ٣)\,د ص$

الحل

$$\int (٢ص - ٥)(ص + ٣)\,د ص = \int (٢ص^{٢} + ٦ص - ٥ص - ١٥)\,د ص$$

$$= \int (٢ص^{٢} + ص - ١٥)\,د ص$$

$$= \frac{٢}{٣} ص^{٣} + \frac{ص^{٢}}{٢} - ١٥ ص + جـ$$

السؤال الثالث: أجد $\int \frac{ل^{٢} - ٥ل + ٦}{ل - ٢}\,د ل$ ، $ل \neq ٢$

الحل

$$\int \frac{ل^{٢} - ٥ل + ٦}{ل - ٢}\,د ل = \int \frac{\cancel{(ل - ٢)}\,(ل - ٣)}{\cancel{(ل - ٢)}}\,د ل$$

$$= \int (ل - ٣)\,د ل$$

$$= \frac{ل^{٢}}{٢} - ٣ل + جـ$$

السؤال الرابع: أجد $\int (٢س + ١)(س^{٣} + س^{٢} - ٣س + ٤)\,د س$

الحل

$$\int (٢س + ١)(س^{٣} + س^{٢} - ٣س + ٤)\,د س$$ نضرب الاقواس ببعضها

$$= \int (٢س^{٤} + ٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ٨س + س^{٣} + س^{٢} - ٣س + ٤)\,د س$$

$$= \int (٢س^{٤} + ٣س^{٣} - ٥س^{٢} + ٥س + ٤)\,د س$$

$$= \frac{٢}{٥} س^{٥} + \frac{٣}{٤} س^{٤} - \frac{٥}{٣} س^{٣} + \frac{٥}{٢} س^{٢} + ٤س + جـ$$

السؤال الخامس: اذا كان ق (س) = $\int (٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢س + ٤)$ ء س ، أجد ن / (س)

الحل

ق (س) = $\int (٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢س + ٤)$ ء س

= $\frac{٣}{٤}س^{٤} + \frac{٥}{٣}س^{٣} - س^{٢} + ٤س + ج$ نشتق الطرفين

ومنه نوجد ن / (س) = $٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٢س + ٤$

السؤال السادس: اذا كان ص = $\int (٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥}$ ء س أجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء}{ء س}\int (٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥}$ ء س المشتقة تلغي التكامل

$= \cancel{\frac{ء}{ء س}}\cancel{\int}\ (٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥}$ ء س

$\frac{ء ص}{ء س} = (٢س + ٢)(س^{٢} + ٢س)^{٥}$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	اجب عن السؤال : جد التكاملات الاتية :	الجواب
١	$\int (٢س - ٣)^{٢}\, ؤس$	$\frac{٤}{٣}س^{٣} - \frac{١٢}{٢}س^{٢} + ٩س + جـ$
٢	$\int \frac{س^{٢} + ٥س + ٦}{س + ٢}\, ؤس$	$\frac{س^{٢}}{٢} + ٣س + جـ$
٣	$\int (٥ - \sqrt[٣]{س^{٤}})\, ؤس$	$٥س - \frac{٣}{٤}\sqrt[٣]{س^{٤}} + جـ$
٤	$\int س^{٣}(س^{-٣} + س^{٤} - ٢)\, ؤس$	$س + \frac{س^{٨}}{٨} - \frac{س^{٤}}{٢} + جـ$
٥	$\int س(\sqrt[٨]{س} - ٢)\, ؤس$	$\frac{٢}{٥}\sqrt[٨]{س^{٥}} - س^{٢} + جـ$
٦	$\int \frac{٥س^{٢} + ١٠س}{س + ٢}\, ؤس$	$\frac{٥س^{٢}}{٢} + جـ$
٧	$\int (س^{٢} + ٥)(س - ٤)\, ؤس$	$\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{٤س^{٣}}{٣} + \frac{٥س^{٢}}{٢} - ٢٠ + جـ$
٨	$\int \left(\frac{٣}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{-٤}}\right) ؤس$	$\frac{-٣}{س} + س^{٥} + جـ$
٩	$\int (\sqrt[٨]{س} - ٤)(\sqrt[٨]{س} + ٤)\, ؤس$	$\frac{س^{٢}}{٢} - ١٦س + جـ$
١٠	اذا كان $\int ق`(س)\, ؤس = ٣س^{٢} - ٥س + جـ$ جد $ق``(٢)$	٦

الدرس الثالث / تطبيقات هندسية على التكامل غير المحدود

القسم الأول : الملخص

ايجاد قاعدة الاقتران

ايجاد ق(س):
بمعلومية كل من :
* قاعدة الاقتران قَ(س).
* نقطة يمر بها المنحنى .
الطريقة :
ق(س) = ∫ قَ(س) دس
مع استخدام المعطيات لايجاد قيمة جـ .

ايجاد قَ(س) :
بمعلومية كل من :
* قاعدة الاقتران ق ״(س).
* ميل المماس .
الطريقة :
= ∫ ق ״(س) دس قَ(س)
مع استخدام المعطيات لايجاد قيمة جـ .

إنني لا أحاول الأداء أفضل من أي شخص آخر، إنني فقط أحاول الأداء أفضل من نفسي.

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الاول : اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطي بالعلاقة قَ(س) = ٥
أجد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٢،٣)

الحل

ق(س) = ∫ قَ(س) دس

ق(س) = ∫ ٥ دس

ق(س) = ٥س + جـ ومن المعطى : أن المنحنى يمر بالنقطة (٢،٣)

أي أن : ق(٢) = ٣ ، ومنها :

ق(٢) = ٥ × ٢ + جـ = ٣

١٠ + جـ = ٣ ⇐ **جـ = −٧**

اذن : ق(س) = ٥س − ٧

السؤال الثاني: اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطي بالعلاقة
قَ(س) = س + ٣ أجد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٢،٧)

الحل

ق(س) = ∫ قَ(س) دس ⇐ ق(س) = ∫ (س + ٣) دس

ق(س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٣س + جـ ومن المعطى : أن المنحنى يمر بالنقطة (٢،٧)

أي أن : ق(٢) = ٧ ، ومنها :

ق(٢) = $\frac{٢^{٢}}{٢}$ + ٣ × ٢ + جـ = ٧

ق(٢) = ٢ + ٦ + جـ = ٧ ⇐ **جـ = −١**

اذن : ق(س) = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٣س − ١

السؤال الثالث : اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ك(س) عند أي نقطة عليه يعطي بالعلاقة كَ(س) = (س + ١)^{٣} أجد ك(٢) علما بأن منحنى ك(س) يمر بالنقطة (٢،٠)

الحل

$$ك(س) = \int كَ(س)\,د س$$

$$ك(س) = \int (س+١)^{٣}\,د س$$

$$ك(س) = \int (س+١)^{٢}(س+١)\,د س$$

$$ك(س) = \int (س^{٢}+٢س+١)(س+١)\,د س$$

$$ك(س) = \int (س^{٣}+٢س^{٢}+س+س^{٢}+٢س+١)\,د س$$

$$ك(س) = \int (س^{٣}+٣س^{٢}+٣س+١)\,د س$$

$$ك(س) = \frac{س^{٤}}{٤}+س^{٣}+\frac{٣}{٢}س^{٢}+س+جـ$$ ثم نعوض عن س = ٠ أي أن : ق(٠) = ٢ ، ومنها :

$$ق(٠) = ٥ \times ٠ + جـ = ٢$$

$$\boxed{جـ = ٢}$$

اذن : $$ك(س) = \frac{س^{٤}}{٤}+س^{٣}+\frac{٣}{٢}س^{٢}+س+٢$$

$$ك(٢) = \frac{(٢)^{٤}}{٤}+(٢)^{٣}+\frac{٣}{٢}(٢)^{٢}+٢+٢$$
$$= ٤+٨+٤+٦$$
$$= ٢٢$$

السؤال الرابع: اذا كان ق ″(س) = −٢ ١س + ٢ وكان ميل المماس يساوي ٤ عند النقطة (٣،٠) أجد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل

المعطيات : ق ″(س) = −٢ ١س + ٢

ميل المماس يساوي ٤ عند النقطة (٣،٠) اي ان : قَ(٠) = ٤

المنحنى يمر بالنقطة (٣،٠) اي ان : ق(٠) = ٣

= ∫ق ″(س) ءس قَ(س)

قَ(س) = ∫(−٢ ١س + ٢) ءس

قَ(س) = −٦س ٢ + ٢س + جـ ١ ومن المعطى قَ(٠) = ٤

ومنها : قَ(٠) = ٠ + ٠ + جـ ١ = ٤ ⇐ **جـ ١ = ٤**

ومنها : قَ(س) = −٦س ٢ + ٢س + ٤

ق(س) = ∫قَ(س) ءس

ق(س) = ∫(−٦س ٢ + ٢ س + ٤) ءس

ق(س) = −٢س ٣ + س ٢ + ٤ س + جـ ٢ ومن المعطى : ق(٠) = ٣

ومنها : ⇐ **جـ ٢ = ٣** ق(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + جـ ٢ = ٣

اذن : ق(س) = −٢س ٣ + س ٢ + ٤ س + ٣

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الثاني :اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	جد قاعدة الاقتران ق(س) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) يعطي بالعلاقة ق(س) = ٢س − ١ علما بأن الاقتران يمر بالنقط (١،٦)	ق(س) = س^{٢} − س + ٦
٢	جد قاعدة الاقتران ق(س) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) يعطي بالعلاقة ق(س) = ٦ علما بأن الاقتران يمر بالنقط ق(١) = ١٠	ق(س) = ٦س + ٤
٣	اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) يساوي ٦ عند النقطة (١،٧) جد قاعدة الاقتران ق(س) اذا كان مشتقة ميل المماس تعطي بالعلاقة ق″(س) = ٤س + ١	ق(س) = $\frac{٢س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س + \frac{١٧}{٦}$
٤	جد قاعدة الاقتران ق(س) اذا كان للاقتران ق(س) مماسا أفقي عند النقطة (١،١٠) علما أن ق″(س) = ٥ − ٤س	ق(س) = $\frac{٥س^{٢}}{٢} - \frac{٢س^{٣}}{٣} - ٣س + \frac{٥٣}{٦}$

الدرس الرابع / التكامل المحدود

القسم الأول : الملخص

تعريف :

التكامل المحدود : اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق ، فان :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ﺩس = ﻭ(س)\Big|_{أ}^{ب} = ﻭ(ب) - ﻭ(أ)$$

حيث أ: الحد الادنى ، ب : الحد الاعلى ، أ،ب عددان حقيقيان .

أتعلم :

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفرا دائما .

الشخص الحكيم يصنع فُرصاً أكثر من تلك التي يعثر عليها.

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الاول : أحسب قيمة كل من التكاملات التالية :

أ) $\int_{-1}^{2} 6\pi \, ds = 6\pi s \Big|_{-1}^{2}$

الحل

$= (6\pi \times 2) - (6\pi \times -1)$

$= 12\pi - (-6\pi)$

$= 18\pi$

ب) $\int_{0}^{2} (5 - 3s^2) \, ds$

الحل

$\int_{0}^{2} (5 - 3s^2) \, ds = 5s - s^3 \Big|_{0}^{2}$

$= [5 \times 2 - (2)^3] - [5 \times 0 - (0)^3]$

$= 10 - 8 - 0$

$= 2$

جـ) $\int_{1}^{3} (\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s}) \, ds$

الحل

$\int_{1}^{3} (\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s}) \, ds = \int_{1}^{3} (s^{-2} - s^{-3}) \, ds$

$= (\frac{s^{-1}}{-1} + \frac{s^{-2}}{-2}) \Big|_{1}^{3}$

$= (-\frac{1}{s} + \frac{1}{-2s^2}) \Big|_{1}^{3}$

$= [-\frac{1}{3} + \frac{1}{-2 \times 9}] - [-\frac{1}{1} + \frac{1}{-2 \times 1}]$

$= [-\frac{1}{3} + \frac{1}{-18}] - [-1 + \frac{1}{-2}] = \frac{2}{9}$

د) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{s} \, ds = \int_{1}^{8} s^{\frac{1}{3}} \, ds$

الحل

$= \frac{s^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_{1}^{8}$

$= \frac{3}{4} s^{\frac{4}{3}} \Big|_{1}^{8}$

$= [\frac{3}{4} \times (8)^{\frac{4}{3}}] - [\frac{3}{4} \times (1)^{\frac{4}{3}}]$

$= \frac{45}{4}$

السؤال الثاني: اذا كان $\int_{3}^{أ} ب^{2}\ ءس = ٣٢$ فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

الحل

$$\int_{3}^{أ} ب^{2}\ ءس = ٣٢$$

$$ب^{2}\ س\Big|_{3}^{أ} = ٣٢$$

$$ب^{2} \times ٥ - ب^{2} \times ٣ = ٣٢$$

$$٥ب^{2} - ٣ب^{2} = ٣٢$$

$$٢ب^{2} = ٣٢$$

$$ب^{2} = ١٦$$

$$\boxed{ب = \pm ٤}$$

السؤال الثالث: اذا كان $\int_{-٢}^{ا} (٣ - ٢س)\ ءس = ٠$ فما قيمة / قيم الثابت ا ؟

الحل

$$\int_{-٢}^{ا} (٣ - ٢س)\ ءس = ٠$$

$$٣س - س^{2}\Big|_{-٢}^{ا} = ٠$$

$$[٣ا - ا^{2}] - [٣ \times -٢ - (-٢)^{2}] = ٠$$

$$٣ا - ا^{2} - (-١٠) = ٠$$

$$٣ا - ا^{2} + ١٠ = ٠$$

$$ا^{2} - ٣ا - ١٠ = ٠$$

$$(ا - ٥)(ا + ٢) = ٠$$

$$\boxed{ا = ٥}\ ،\ \boxed{ا = -٢}$$

السؤال الرابع : احسب $\int_{0}^{2} (2س-1)^{2}\, ءس$

الحل

$$\int_{0}^{2} (2س-1)^{2}\, ءس = \int_{0}^{2} (4س^{2}-4س+1)\, ءس$$

$$= \left[\frac{4}{3}س^{3}-2س^{2}+س\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[\frac{4}{3}\times 2^{3}-2\times 2^{2}+2\right]-[0]$$

$$= \frac{14}{3} = \left[\frac{4}{3}\times 8-8+2\right]-[0]$$

السؤال الخامس: أجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل مما يأتي :

أ) $ص=\int (4س^{3}+2س-5)\, ءس$

الحل بمعلومية ان : $ص=\int ص'\, ءس$ فأن $\frac{ء ص}{ء س} = 4س^{3}+2س-5$

ب) $ص=\int_{2}^{7} (4س^{3}+2س-5)\, ءس$

بمعلومية أن :مشتقة التكامل المحدود يساوي صفر فأن مشتقة $\int_{2}^{7} (4س^{3}+2س-5)\, ءس$ يساوي صفر .

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	قيمة $\int_{٣}^{٥} ٢ \, ds$ أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٢ د) ٤	د
٢	قيمة $\int_{٠}^{٢} س^{\frac{٣}{٢}} \sqrt{س} \, ds$ أ) ٤ ب) $\frac{٨}{٣}$ جـ) صفر د) ٣	ب
٣	إذا كان $\int ق(س) \, ds = ٣س^{٢} + ٢س + جـ$ ، فإن $\int_{١}^{٢} ق(س) \, ds$ يساوي : أ) ٦ ب) ١٠ ج) ١١ د) ١٢	ج
٤	إذا علمت أن $\int_{٢}^{ب} (٢س - ١) \, ds = ٠$ ، فان قيم ب الممكنة؟ أ) ٢، ـ ١ ب) ٢، ـ ٢ ج) ٢،١ د)صفر، ـ ٢	أ
٥	قيمة $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}} \, ds$ يساوي : أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ـ $\frac{١}{٢}$ ج) ـ $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٣}{٢}$	أ
٦	إذا كان ص $= \int_{٣}^{٧} س^{٢} \, ds$ فإن $\frac{ds ص}{ds س}$ يساوي : أ) $س^{٢}$ ب) ٧ ج) ٧ د) صفر	د
٧	إذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س) \, ds = ٨$ ، ق (٣) = ـ ق (١) ، فإن ق (١) = أ) ـ ٤ ب) صفر ج)٤ د) ٨	أ

#	القسم الثاني :اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	جد التكاملات الاتية : ١. $\int_{١}^{٣}(٢س+١)\,ىس$ ٣. $\int_{١}^{٤}(\sqrt{س}+س)\,ىس$ ٢. $\int_{-١}^{١}(س+١)(س+٢)\,ىس$ ٤. $\int_{١}^{٣}\frac{س^{٢}-١٦}{س-٤}\,ىس$	١. ١٠ ٢. $\frac{١٤}{٣}$ ٣. $\frac{٧٣}{٦}$ ٤. ٨
٢	اذا كان $ق'(س)=٣س^{٢}+٢س+١$ جد متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من $س_{١}=٢$ الى $س_{٢}=٤$	٣
٣	اذا كان $\int_{١}^{٤}٢ب\,س\,ىس=-٣٠$ جد قيمة ب ؟	٢-
٤	اذا كان $ق'(س)$ هي مشتقة الاقتران الاولى وكان $ق(٣)=٨$ و كان $\int_{١}^{٦}ق'(س)\,ىس=٢٠$ جد ق (٦)	٢٨
٥	اذا كان $ق(س)=\int_{-١}^{٣}(٣س^{٢}+٢س)\,ىس$ جد $ق'(٤)$	صفر
٦	اذا كان $ص=\int_{٢}^{٤}(٣س+١)\,ىس$ جد $\frac{ىص}{ىس}$ عندما س=٥	صفر
٧	اذا كان $\int_{ب}^{أ}(٢س-٣)\,ىس=١٨$ جد قيمة أ ؟	٣-،٦
٨	اذا كان $\int_{ب}^{أ}(س+أ)\,ىس=\int_{ب}^{٣}أ\,ىس$ جد قيمة أ ؟	٠،$\frac{٢}{٣}$

الدرس الخامس / خصائص التكامل

القسم الأول : الملخص

خصائص التكامل المحدود :

اولا :

$$\int_{ب}^{ب} ق(س)\,ءس = \text{صفر ، حيث ب عدد حقيقي .}$$

ثانيا :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,ءس$$

ثالثا :

اذا كان ق (س) معرفا على الفترة [أ،ب] ، وكان جـ عدد حقيقي بحيث أ < جـ < ب ، فأن

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

وتسمي هذه الخاصية خاصيةَ الاضافة .

رابعا :

اذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل فان :

$$\int_{أ}^{ب} (ق \pm هـ)(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,ءس$$

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الاول : أحسب $\int_{-2}^{2} (س^{2} - ٦س) \, ءس$

الحل

$\int_{-2}^{2} (س^{2} - ٦س) \, ءس$ = صفر (حسب الخاصية (١))

السؤال الثاني: أحسب التكاملات الاتية :

أ) $\int_{-2}^{3} (س - ٦) \, ءس$

الحل

$$\int_{-2}^{3} (س - ٦) \, ءس = \left[\frac{س^{2}}{٢} - ٦س \right]_{-2}^{3}$$

$$= \left[\frac{٩}{٢} - ١٨ \right] - \left[\frac{٤}{٢} - ١٢ \right]$$

$$= \frac{-٢٧}{٢} - (-١٠)$$

$$= \frac{-٢٧}{٢} + \frac{٢٠}{٢}$$

$$= \frac{-٧}{٢}$$

ب) $\int_{-2}^{0} (س - ٦) \, ءس$

الحل

$$\int_{-2}^{0} (س - ٦) \, ءس = \left[\frac{س^{2}}{٢} - ٦س \right]_{-2}^{0}$$

$$= \left[\frac{٢٥}{٢} - ٣٠ \right] - \left[\frac{٤}{٢} - ١٢ \right]$$

$$= \frac{-٣٥}{٢} - (-١٠)$$

$$= \frac{-٣٥}{٢} + \frac{٢٠}{٢}$$

$$= \frac{-١٥}{٢}$$

جـ) $\int_{٣}^{٥} (س - ٦)\,ﻫ س$

الحل

$$\int_{٢}^{٣} (س - ٦)\,ﻫ س = \int_{٢}^{٥} (س - ٦)\,ﻫ س - \int_{٣}^{٥} (س - ٦)\,ﻫ س$$

$$= \frac{١٥-}{٢} + \frac{٧}{٢}$$

$$= \frac{٨-}{٢} = ٤-$$

السؤال الثالث : اذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س)\,ﻫ س = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} ٢ق(س)\,ﻫ س = ٤$ ،أجد قيمة الاتية :

المعطيات : $\int_{٠}^{٢} ٢ق(س)\,ﻫ س = ٤ \Leftarrow \boxed{\int_{٠}^{٢} ق(س)\,ﻫ س = ٢}$

أ) $\int_{٠}^{٢} -٣ق(س)\,ﻫ س$

الحل

$$= -٣\int_{٠}^{٢} ق(س)\,ﻫ س - ٣ق(س)\,ﻫ س \quad (\text{من المعطي})$$

$$= -٣ \times ٢ = ٦-$$

ب) $\int_{-١}^{٠} ق(س)\,ﻫ س$

الحل

$$\int_{٠}^{٢} ق(س)\,ﻫ س = \int_{-١}^{٢} ق(س)\,ﻫ س - \int_{-١}^{٠} ق(س)\,ﻫ س$$

$$= -٣ - ٢ = ٥-$$

جـ) $\int_{-١}^{٢} (٣ق(س) + س)\,ﻫ س$

الحل

$$\int_{-١}^{٢} س\ ﻫ س = ٣\int_{-١}^{٢} ق(س)\,ﻫ س + \int_{-١}^{٢} (٣ق(س) + س)\,ﻫ س$$

$$= ٣ \times -٣ + \left| \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{-١}^{٢}$$

$$= -٩ + \left(\frac{-١^{٢}}{٢} - \frac{٢^{٢}}{٢} \right)$$

$$= -٩ + \left(\frac{١}{٢} - ٢ \right)$$

$$= \frac{-١٥}{٢}$$

السؤال الرابع: اذا كان $\int_{٢}^{٣} ٣ق(س)\,ds = ١٢$ ، $\int_{٢}^{٣} -٢هـ(س)\,ds = ٦$ ، أوجد قيمة :

$$\int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣\,ق(س))\,ds$$

الحل

المعطيات : $\int_{٢}^{٣} ٣ق(س)\,ds = ١٢ \Leftarrow \boxed{\int_{٢}^{٣} ق(س)\,ds = ٤}$

$$\int_{٢}^{٣} -٢هـ(س)\,ds = ٦ \Leftarrow \boxed{\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds = -٣}$$

$$= ٥\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds - ٣\int_{٢}^{٣} ق(س)\,ds \quad \int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣\,ق(س))\,ds$$

$$= ٥ \times -٣ - ٣ \times ٤$$

$$= -١٥ - ١٢ = -٢٧$$

السؤال الخامس : اذا كان $\int_{١}^{أ} (٢س + ٥)\,ds = ٠$ ، أجد قيمة / قيم الثابت أ؟

الحل

$$\int_{١}^{أ} (٢س + ٥)\,ds = ٠$$

$$س^{٢} + ٥س \Big|_{١}^{أ} = ٠$$

$$[أ^{٢} + ٥ \times أ] - [١^{٢} + ٥ \times ١] = ٠$$

$$أ^{٢} + ٥أ - ٦ = ٠$$

$$(أ + ٦)(أ - ١) = ٠$$

$$\boxed{أ = -٦} \text{ ، } \boxed{أ = ١}$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	$\int_{٠}^{٥} (س^{٢} - ٣س + ٢)\, ءس$ أ) ٥ ب) ـ ٥ جـ) صفر د) ١٢	جـ
٢	إذا كان $\int_{٣}^{ب} ٢\, ءس = ١٠$ ، فإن قيم ب هي : أ) ٢ ، ـ ٥ ب) ـ ٢ ، ٥ ج) ٢ ، ٥ د) ـ ٢ ، ـ ٥	ب
٣	إذا كان $\int_{٣}^{٥} ٢ق(س)\, ءس = -٦$ ، فإن $\int_{٥}^{٣} ٣ق(س)\, ءس$ أ) ٩ ب) ـ ٩ ج) ـ ١٨ د) ١٨	أ
٤	$\int_{ب}^{جـ} ٥\, ءس = ٢٠$ ، فإن قيمة الثابت جـ تساوي أ) ٤ ب) صفر جـ) ٢٠ د) ١٥	أ
٥	اذا كان ق(س) قابل للتكامل فان $\int_{٣}^{٦} ق(س)\, ءس - \int_{٨}^{٦} ق(س)\, ءس =$ أ. $\int_{٣}^{٨} ق(س)\, ءس$ ب. $\int_{٨}^{٣} ق(س)\, ءس$ ج. $\int_{٣}^{٦} ق(س)\, ءس$ د. $\int_{٦}^{٨} ق(س)\, ءس$	أ
٦	إذا كان $\int_{١}^{٤} ٢\, هـ(س)\, ءس = -٦$ ،فإن $\int_{٤}^{١} ٣\, هـ(س)\, ءس =$ أ) ١٨ ب) ٩ ج) ـ ٩ د) ـ ١٨	ب

#	القسم الثاني :اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	اذا كان $\int_{١}^{٥} ق(س)\,ﺩس = ٤$، $\int_{١}^{٣} ٢ق(س)\,ﺩس = ١٢$ أوجد $\int_{٥}^{٣} ق(س)\,ﺩس$	٢
٢	اذا كان $\int_{٣}^{٥} ٤ق(س)\,ﺩس = ١٦$، $\int_{١}^{٥} ٢ق(س)\,ﺩس = ٨$ أوجد $\int_{٣}^{١} (ق(س) - ٢س)\,ﺩس$	٤
٣	اذا كان $\int_{٢}^{٥} هـ(س)\,ﺩس = ٥$، $\int_{٧}^{٢} هـ(س)\,ﺩس = -٢$ أوجد $\int_{٧}^{٥} (هـ(س) + ٢س)\,ﺩس$	٢-
٤	اوجد $\int_{-٢}^{-٢} س^{٣} + \frac{س^{٥} - ٣س}{س^{٤} + ٢}\,ﺩس$	صفر
٥	اذا كان $\int_{١}^{٣} \frac{١}{٢} ق(س)\,ﺩس = ٧$ ، جد $\int_{٣}^{١} (ق(س) + ٢س + ٣)\,ﺩس$	٧
٦	اذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,ﺩس = ٨$، $\int_{٣}^{١} ٤هـ(س)\,ﺩس = ١٢$ أوجد $\int_{١}^{٣} (٣ق(س) - ٥هـ(س))\,ﺩس$	٢٧
٧	$\int_{٥}^{٢} (٢س - ق(س))\,ﺩس$ أوجد $\int_{١}^{٥} ق(س)\,ﺩس = ٢$، $\int_{١}^{٢} ٣ق(س)\,ﺩس = ١٥$ اذا كان	٢٤-
٨	إذا كان $\int_{١}^{٧} (ق(س) - ١)\,ﺩس = ٨$ ، $\int_{٧}^{٣} ق(س)\,ﺩس = -٦$ ، فما قيمة $\int_{١}^{٣} ق(س)\,ﺩس$	٨

الدرس السادس / التكامل بالتعويض

القسم الأول : الملخص

التكامل بالتعويض احدى الطرق المستخدمة قي علم التفاضل والتكامل لحساب الاشتقاق العكسي وتستخدم هذه الطريقة من خلال نقل التكامل من شكل الى اخر بحيث يصبح من السهل اجراء وحساب التكامل بالطرق العادية وان كانت برموز اخرى .

متى نستخدم طريقة التكامل بالتعويض ؟

يستطيع الطالب استخدام التكامل بالتعويض عندما يحتوي التكامل على الاقتران ومشتقتة ، كذلك اذا وجد قوس مرفوع الى قوة ولا يمكننا تحليلة .

إن أعظم اكتشاف لجيلي، هو أن الإنسان يمكن أن يُغير حياته، إذا ما استطاع أن يغير اتجاهاته العقلية.

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

أجد التكاملات الاتية :

س١: $\int (٢-٣س)^{٣}\, دس$

الحل بفرض ان: $ص = ٢-٣س$

$دص = -٣\, دس$

$دس = \frac{١}{-٣}\, دص$

$\int (٢-٣س)^{٣}\, دس = \int (ص)^{٣} \times \frac{١}{-٣}\, دص$

$= \frac{١}{-٣} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{ص^{٤}}{١٢} + جـ$

س٢: $\int \frac{٣}{(س-١)^{٥}}\, دس$

الحل بفرض ان: $ص = س - ١$

$دص = دس$

$\int \frac{٣}{(س-١)^{٥}}\, دس = \int \frac{٣}{(ص)^{٥}}\, دص$

$= \int ٣ص^{-٥}\, دص$

$= ٣ \frac{ص^{-٤}}{-٤} + جـ$

$= \frac{٣}{-٤ص^{٤}} + جـ$

$= \frac{٣}{-٤(س-١)^{٤}} + جـ$

س٣: $\int (أس + ب)^{٤}\, دس$ ، $أ، ب$ ثوابت.

الحل نفرض ان: $ص = أ س + ب$

$دص = أ\, دس$

$دس = \frac{١}{أ}\, دص$

$\int (أس + ب)^{٤}\, دس = \int (ص)^{٤} \times \frac{١}{أ}\, دص$

$= \frac{١}{أ} \times \frac{ص^{٥}}{٥} + جـ$

$= \frac{ص^{٥}}{أ٥} + جـ$

$= \frac{(أس + ب)^{٥}}{أ٥} + جـ$

س٤: $\int س^{٢}(س^{٣}+١)^{٤}\, دس$

الحل بفرض ان: $ص = س^{٣} + ١$

$دص = ٣س^{٢}\, دس$

$دس = \frac{١}{٣س^{٢}}\, دص$

$\int س^{٢}(س^{٣}+١)^{٤}\, دس = \int س^{٢}(ص)^{٤} \times \frac{١}{٣س^{٢}}\, دص$

$= \frac{١}{٣} \int (ص)^{٤}\, دص$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{ص^{٥}}{٥} + جـ$

$= \frac{(س^{٣}+١)^{٥}}{١٥} + جـ$

س٥: $\int_{1}^{2} (٢س-٣)^{٢}\, دس$

الحل بفرض ان: $ص = ٢س - ٣$

$دص = ٢\, دس$

$\frac{١}{٢} دص = دس$

$= \int_{١}^{٢} (ص)^{٢} \frac{١}{٢} دص$

$= \frac{١}{٢} \int_{١}^{٢} (ص)^{٢} دص$

$= \frac{١}{٢} \times \left| \frac{ص^{٣}}{٣} \right|_{١}^{٢}$

$= \left| \frac{(٢س-٣)^{٣}}{٦} \right|_{١}^{٢}$

$= \frac{(٢\times٢-٣)^{٣}}{٦} - \frac{(٢\times١-٣)^{٣}}{٦}$

$= \frac{١}{٦} - \frac{-١}{٦} = \frac{١}{٣}$

س٦: $\int_{٠}^{١} (٢س-٥)(س^{٢}-٥س+٧)^{-٢}\, دس$

الحل بفرض ان: $ص = س^{٢} - ٥س + ٧$

$دص = (٢س-٥)\, دس$

$دس = \frac{١}{(٢س-٥)} دص$

$\int_{٠}^{١} (٢س-٥)(س^{٢}-٥س+٧)^{-٢}\, دس$

$= \int_{٠}^{١} (٢س-٥)(ص)^{-٢} \times \frac{١}{(٢س-٥)} دص$

$= \int_{٠}^{١} (ص)^{-٢}\, دص$

$= \left| \frac{ص^{-١}}{-١} \right|_{٠}^{١}$

$= \left| \frac{١}{-ص} \right|_{٠}^{١}$

$= \left| \frac{١}{-(س^{٢}-٥س+٧)} \right|_{٠}^{١}$

$= \frac{١}{-(١^{٢}-٥\times١+٧)} - \frac{١}{-(٠^{٢}-٥\times٠+٧)}$

$= \frac{١}{-٣} + \frac{١}{٧} = \frac{-٤}{٢١}$

س٧: $\int \sqrt{٣س-١}\, دس$

الحل بفرض ان: $ص = ٣س - ١$

$دص = ٣\, دس$

$دس = \frac{١}{٣} دص$

$= \int \sqrt{ص} \times \frac{١}{٣} دص$

$= \frac{١}{٣} \int ص^{\frac{١}{٢}}\, دص$

$= \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ$

$= \frac{٢(٣س-١)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ$

س٨: $\int (س+٢)\sqrt[٣]{س^{٢}+٤س}\ دس$

الحل بفرض ان: $ص = س^{٢}+٤س$

$$دص = (٢س+٤)دس$$

$$دس = \frac{١}{(٢س+٤)}دص$$

$$دس = \frac{١}{٢(س+٢)}دص$$

$$\int (س+٢)\sqrt[٣]{س^{٢}+٤س}\ دس = \int (س+٢)\sqrt[٣]{ص}\ \frac{١}{٢(س+٢)}دص$$

$$= \frac{١}{٢}\int \sqrt[٣]{ص}\ دص$$

$$= \frac{١}{٢}\int ص^{\frac{١}{٣}}دص$$

$$= \frac{١}{٢}\times \frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}+جـ$$

$$= \frac{٣ص^{\frac{٤}{٣}}}{٨}+جـ$$

$$= \frac{٣(س^{٢}+٤س)^{\frac{٤}{٣}}}{٨}+جـ$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الثاني :اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	جد التكامل : $\int (٢س-١)^{٤}\, د س$	$\frac{(٢س-١)^{٥}}{١٠}+جـ$
٢	جد التكامل : $\int (٢س+١)(س^{٢}+س+٥)^{٣}\, د س$	$\frac{(س^{٢}+س+٥)^{٤}}{٤}+جـ$
٣	جد التكامل : $\int \frac{٣س^{٢}+٢س}{(س^{٣}+س^{٢})^{٥}}\, د س$	$\frac{١}{-٤(س^{٣}+س^{٢})^{٤}}+جـ$
٤	جد التكامل : $\int \sqrt{٥س+٣}\, د س$	$\frac{٢\sqrt{(٥س+٣)^{٣}}}{١٥}+جـ$
٥	جد التكامل : $\int (٢س-٢)\sqrt{س^{٢}-٢س+١}\, د س$	$\frac{٢\sqrt{(س^{٢}-س+١)^{٣}}}{٣}+جـ$
٦	جد التكامل : $\int (٥س^{٤}+٢س)(س^{٥}+س^{٢}+٣)^{-\frac{١}{٢}}\, د س$	$٢\sqrt{س^{٥}+س^{٢}+٣}+جـ$

الدرس السابع / تطبيقات على التكامل المحدود
(ايجاد المساحات)

القسم الأول : الملخص

تعريف :

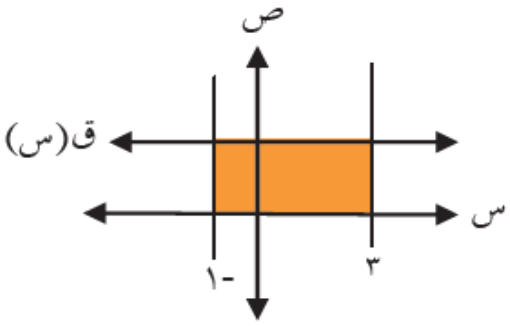
المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات ، والمستقيمين (س=أ) ، (س=ب) والواقعة فوق محور السينات تساوي:

$$م = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

إن ما يسعى إليه الإنسان السامي يكمن في ذاته هو، أما الدنيء فيسعى لما لدى الآخرين.

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الاول : أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣ ومحور السينات والمستقيمين س=−١ ، س=٣



الحل

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س$$

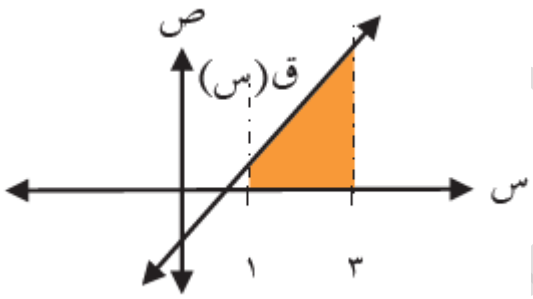
$$م = \int_{-١}^{٣} ٣\,د س$$

$$= ٣س \Big|_{-١}^{٣}$$

$$= [٣\times٣] - [-١\times٣]$$

$$= ٩ - (-٣) = ١٢$$

السؤال الثاني: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٣س − ٢ ومحور السينات والمستقيمين س=١ ، س=٣



الحل

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س$$

$$م = \int_{١}^{٣} (٣س - ٢)\,د س$$

$$= \frac{٣}{٢}س^{٢} - ٢س \Big|_{١}^{٣}$$

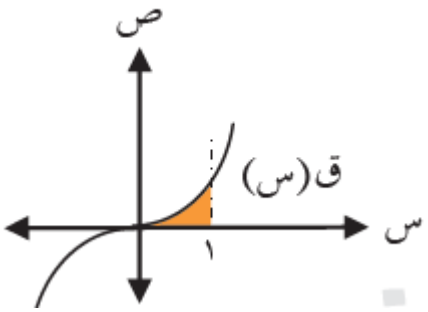
$$= \left[\frac{٣}{٢}\times٣^{٢} - ٢\times٣\right] - \left[\frac{٣}{٢}\times١^{٢} - ٢\times١\right]$$

$$= \left[٦ - \frac{٢٧}{٢}\right] - \left[٢ - \frac{٣}{٢}\right]$$

$$= -٦ - \frac{٢٧}{٢} - \left[\frac{-١}{٢}\right]$$

$$= ٨$$

السؤال الثالث: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س ^{٣} ومحور السينات والمستقيمين س=٠ ، س=١



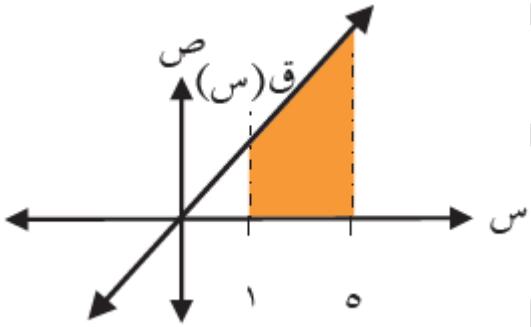
الحل المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس

$$= \int_{٠}^{١} س^{٣} \, ءس$$

$$= \left[\frac{س^{٤}}{٤} \right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{١}{٤} - ٠ = \frac{١}{٤}$$

السؤال الرابع: اذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = أ س ومحور السينات والمستقيمين س=١ ، س=٥ تساوي ٨ ، فما قيمة الثابت أ ، أ > ٠



الحل المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس

$$٨ = \int_{١}^{٥} أ س \, ءس$$

$$٨ = \left[\frac{أ س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{٥}$$

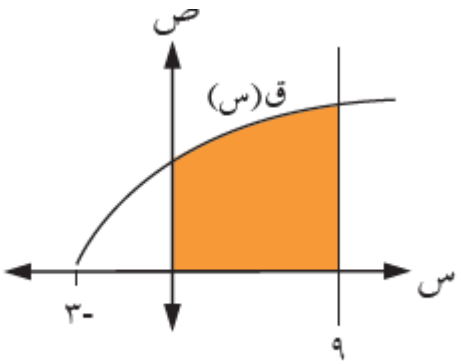
$$٨ = \frac{٢٤ أ}{٢}$$

$$١٢ أ = ٨$$

$$أ = \frac{٨}{١٢}$$

$$\boxed{أ = \frac{٢}{٣}}$$

السؤال الخامس: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ك(س) = $\sqrt{٣س + ٩}$ ومحور السينات والمستقيمين س= ٠ ، س=٩



الحل المساحة = $\int_{أ}^{ب} ك(س)\,ود س$

$$م = \int_{٠}^{٩} \sqrt{٣س + ٩}\ \,ود س$$

$$م = \int_{٠}^{٩} (٣س + ٩)^{\frac{١}{٢}}\,ود س$$

باستخدام التعويض لحل التكامل :

بفرض ان: $ص = ٣س + ٩$

$$ود ص = ٣\ ود س$$

$$ود س = \frac{١}{٣} ود ص$$

$$= \int_{٠}^{٩} (ص)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{٣} ود ص \quad م = \int_{٠}^{٩} (٣س + ٩)^{\frac{١}{٢}}\,ود س$$

$$= \frac{١}{٣} \times \left| \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} \right|_{٠}^{٩}$$

$$= \left| \frac{٢\sqrt{ص^{٣}}}{٩} \right|_{٠}^{٩}$$

$$= \frac{٢\sqrt{(٣س + ٩)^{٣}}}{٩}$$

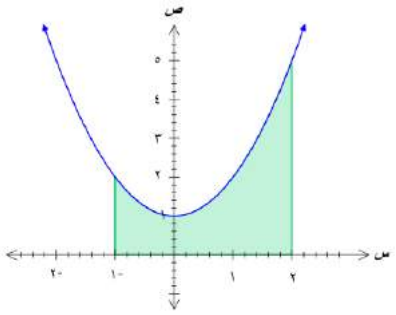
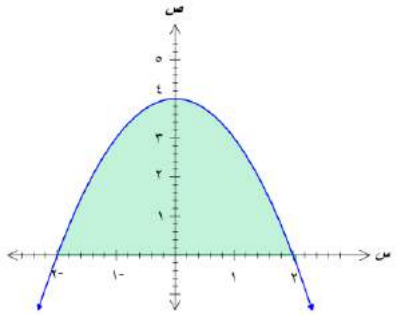
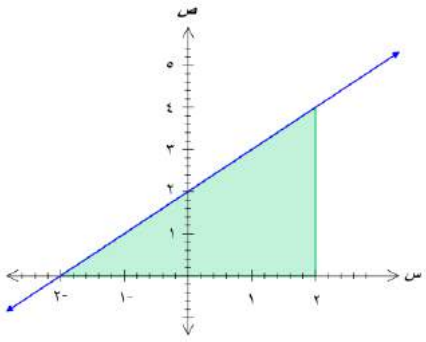
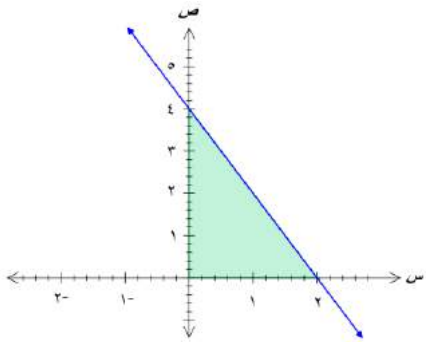
$$= \frac{٢\sqrt{(٣ \times ٩ + ٩)^{٣}}}{٩} - \frac{٢\sqrt{(٣ \times ٠ + ٩)^{٣}}}{٩}$$

$$= \frac{٢ \times ٢١٦}{٩} - \frac{٢ \times ٢٧}{٩}$$

$$= ٤٨ - ٦$$

$$= ٤٢$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	**جد مساحة المنطقة المحصورة بين:** المنحنى ق(س) = س^{٢} + ١ ومحور السينات والمستقيمان : س = ٢، س = −١ 	٦ وحدات مربعة
٢	**جد مساحة المنطقة المحصورة بين :** المنحنى ق(س) = ٤ − س^{٢} ومحور السينات . والمستقيمان س = ٢ ، س = -٢ 	$\frac{٤٠}{٣}$ وحدات مربعة
٣	**جد مساحة المنطقة المحصورة بين :** المنحنى ق(س) = س + ٢ ومحور السينات والمستقيمان : س = −٢، س = ١ 	٤.٥ وحدات مربعة
٤	**جد مساحة المنطقة المحصورة بين :** المنحنى ق(س) = ٤ − ٢س ومحور السينات والمستقيمان : س = ٢ ، س = ٠ 	٤ وحدات مربعة

التمارين العامة

السؤال الاول: أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي :

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	جـ	أ	ب	د	أ	أ	جـ	د	أ	جـ

١) اذا كان $ق(س) = \int (٢س + ١) ؤس$ **فما قيمة** $ق'(٢)$ ؟

الحل بمعلومية ان : $ق(س) = \int ق'(س) ؤس$ فأن $ق'(س) = ٢س + ١$

ومنها $ق'(٢) = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

جـ

---

٢) ما الاقتران اذي يمثل اقترانات أصليا للمشتقة $ق'(س) = ٤س^{٢} + ٦س + ٢$ ؟

الحل باشتقاق كل من الخيارات الموجودة فأن أ هي الاجابة ، بحيث أن :

$ق(س) = \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ١$

$ق'(س) = ٤س^{٢} + ٦س + ٢$

أ

---

٣) اذا كان $\int ق'(س) ؤس = ٣س - ٤س^{٢} + ٢$ **، ما قيمة** $ق'(١)$ ؟

الحل بمعلومية ان : $ق(س) = \int ق'(س) ؤس$ فأن $ق(س) = ٣س - ٤س^{٢} + ٢$

ومنها : $ق'(س) = ٣ - ٨س$

ومنها : $ق'(١) = ٣ - ٨ = -٥$

ب

---

٤) ماهو $\int س \sqrt[٣]{س^{٢}} ؤس$ ؟

الحل $= \int س \times س^{\frac{٢}{٣}} ؤس = \int س^{\frac{٥}{٣}} ؤس = \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} + جـ$ $\int س \sqrt[٣]{س^{٢}} ؤس$

د

٥) اذا كان $\int_{٢}^{٠} قـ'(س)\,ds = ١٢$ وكان $قـ(٥) = ٢قـ(٢)$ ، ماقيمة $قـ(٢)$؟

الحل

$$\int_{٢}^{٠} قـ'(س)\,ds = ١٢$$

$$قـ(٥) - قـ(٢) = ١٢$$

$$٢قـ(٢) - قـ(٢) = ١٢$$

$$قـ(٢) = ١٢$$

أ

---

٦) اذا كان ، $هـ(س) = \int_{٠}^{٣} (٢س + ٣س^{٢} + ١)\,ds$ ماقيمة $هـ'(٢)$ ؟

الحل بمعلومية ان : مشتقة التكامل المحدود يساوي صفر فأن الاجابة هي صفر

أ

---

٧) اذا كان $\int_{١}^{ب} ب\ ds = ٢$ ، ماقيمة /قيم الثابت ب ؟

الحل

$$\int_{١}^{ب} ب\ ds = ٢$$

$$ب س \Big|_{١}^{ب} = ٢$$

$$ب^{٢} - ب = ٢$$

$$ب^{٢} - ب - ٢ = ٠$$

$$(ب + ١)(ب - ٢) = ٠$$

$$ب = -١ \text{ ، } ب = ٢$$

جـ

---

٨) اذا كان $\int_{٢}^{٧} ٣قـ(س)\,ds = ٩$ ، $\int_{٧}^{٠} قـ(س)\,ds = -٢$ ، ماقيمة $\int_{٢}^{٠} قـ(س)\,ds$ ؟

الحل

المعطيات : $\int_{٢}^{٧} ٣قـ(س)\,ds = ٩ \Leftarrow \int_{٢}^{٧} قـ(س)\,ds = ٣$

$$\int_{٧}^{٠} قـ(س)\,ds = -٢ \Leftarrow \int_{٠}^{٧} قـ(س)\,ds = ٢$$

المطلوب : $\int_{٢}^{٠} قـ(س)\,ds = \int_{٢}^{٧} قـ(س)\,ds - \int_{٥}^{٧} قـ(س)\,ds$

$$= ٣ - ٢ = ١$$

د

٩) ماقيمة $\int_{-1}^{1} (س^{٢} + ٢س + ١)^{٥} \, ود س$؟

الحل

أ

حسب الخاصية $\int_{ب}^{ب} ق(س) \, ود س = $ **صفر** فان الاجابة هي صفر .

---

١٠) $\int (٢س + ٣)^{٧} \, ود س$؟

الحل

بفرض ان: $ص = ٢س + ٣$

$ود ص = ٢ ود س$

$\frac{١}{٢} ود ص = ود س$

$\int (٢س + ٣)^{٧} \, ود س = \int (ص)^{٧} \times \frac{١}{٢} ود ص$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ$

$= \frac{(٢س + ٣)^{٨}}{١٦} + جـ$

جـ

السؤال الثاني: **اذا علمت ان** $ق`(س) = ٤س^{٣} + س^{٢} - ٢س$ ، $ق(٠) = ٣$ ، **أجد** $ق(١)$

الحل

$ق(س) = \int ق`(س) \, ود س$

$ق(س) = \int (٤س^{٣} + س^{٢} - ٢س) \, ود س$

$ق(س) = س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س^{٢} + جـ$ ومن المعطى : $ق(٠) = ٣$

، ومنها : $\Leftarrow$ $\boxed{جـ = ٣}$ $ق(٠) = ٠ + ٠ - ٠ + جـ = ٣$

اذن : $ق(س) = س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س^{٢} + ٣$

المطلوب : $ق(١) = ١ + \frac{١}{٣} - ١ + ٣$

$\boxed{ق(١) = \frac{١٠}{٣}}$

السؤال الثالث: **اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة** $ق'(س) = ٣ - ٢س$
ما قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطة $(١ ، ٦)$ ؟

الحل

$$ق(س) = \int ق'(س) \, د س$$

$$ق(س) = \int (٣ - ٢س) \, د س$$

$ق(س) = ٣س - س^{٢} + جـ$ ومن المعطى : أن المنحنى يمر بالنقطة $(١ ، ٦)$

أي أن : $ق(١) = ٣ - ١ + جـ = ٦$ ، ومنها :

$$٢ + جـ = ٦ \Leftarrow \boxed{جـ = ٤}$$

اذن : $ق(س) = ٣س - س^{٢} + ٤$

السؤال الرابع : **اذا كان** $\int_{١}^{٣} ق(س) \, د س = ٧$ ، $\int_{١}^{٣} هـ(س) \, د س = -٤$ ، **ماقيمة** $\int_{٣}^{١} (٢ق(س) - ٥هـ(س) + ٢) \, د س$ ؟

الحل

$$= -\int_{١}^{٣} (٢ق(س) - ٥هـ(س) + ٢) \, د س$$

$$= -٢\int_{١}^{٣} ق(س) \, د س + ٥\int_{١}^{٣} هـ(س) \, د س - \int_{١}^{٣} ٢ \, د س$$

$$= (-٢ \times ٧) + (٥ \times -٤) - ٢(٣ - ١)$$

$$= (-١٤) + (-٢٠) - ٤ = -٣٨$$

السؤال الخامس: **أجد** $\int (٢س + ١) \sqrt[٣]{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}} \, د س$

الحل بفرض ان: $ص = س^{٢} + س + ٤$

$$د ص = (٢س + ١) \, د س$$

$$د س = \frac{١}{(٢س + ١)} \, د ص$$

$$\int (٢س + ١) \sqrt[٣]{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}} \, د س = \int (٢س + ١) \sqrt[٣]{ص^{٢}} \, \frac{١}{(٢س + ١)} \, د ص$$

$$= \int \sqrt[٣]{ص^{٢}} \, د ص$$

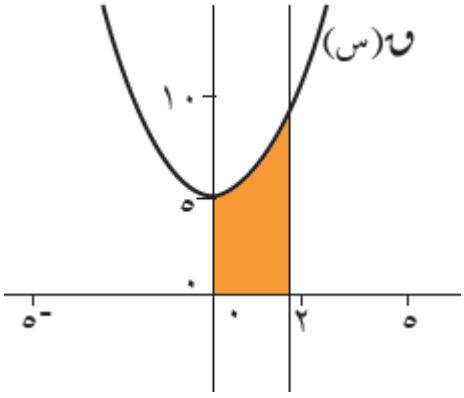
$$= \int ص^{\frac{٢}{٣}} \, د ص$$

$$= \frac{\text{ص}^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{3\text{ص}^{\frac{5}{3}}}{5} + \text{جـ}$$

$$= \frac{3(\text{س}^2 + \text{س} + 4)^{\frac{5}{3}}}{5} + \text{جـ}$$

السؤال السادس: أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^2 + ٥ ومحور السينات والمستقيمين س=٠ ، س=٢



الحل

المساحة = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{د}\text{س}$

$$= \int_{0}^{2} (\text{س}^2 + 5)\,\text{د}\text{س}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\text{س}^3 + 5\text{س}\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\times 2^3 + 5\times 2\right] - [0]$$

$$= 10 + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{38}{3}$$

ملاحظات الطالب

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

الوحدة الثانية

٢

حساب التفاضل

الوحدة الثانية / التفاضل

الدرس الاول / متوسط التغير

القسم الأول : الملخص

تعريف :

اذا كان ق(س) اقترانا ، وتغيرت س من $س_1$ الى $س_2$ فان :

متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ وذلك عندما تتغير

س من $س_1$ الى $س_2$، $س_1 \neq س_2$

ملاحظة هندسيا : متوسط التغير = ميل القاطع $= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

التسويف هو ذلك الشئ الماكر الذى يجعلك تظل كما كنت الأمس

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: اذا كان ص = ق(س) = ٥س − ١ اجد Δس ، Δص عندما تتغير س:

فرع أ : من $س_١ = ٢$ الى $س_٢ = ٣,٨$

الحل

$Δس = س_٢ − س_١$

$= ٣,٨ − ٢ = ١,٨$ ومنها $\boxed{Δس = ١,٨}$

$Δص = ص_٢ − ص_١$

$ص_١ = ق(س_١) = ق(٢) = ٥ × ٢ − ١ = ٩$

$ص_٢ = ق(س_٢) = ق(٣,٨) = ٥ × ٣,٨ − ١ = ١٨$ ، فأن :

$Δص = ص_٢ − ص_١$

$= ١٨ − ٩ = ٩$ ومنها $\boxed{Δص = ٩}$

فرع ب: من $س_١ = ٤$ الى $س_٢ = −٢$

الحل

$Δس = س_٢ − س_١$

$= −٢ − ٤ = −٦$ ومنها $\boxed{Δس = −٦}$

$Δص = ص_٢ − ص_١$

$ص_١ = ق(س_١) = ق(٤) = ٥ × ٤ − ١ = ١٩$

$ص_٢ = ق(س_٢) = ق(−٢) = ٥ × −٢ − ١ = −١١$، فأن :

$Δص = ص_٢ − ص_١$

$= −١١ − ١٩ = −٣٠$ ومنها $\boxed{Δص = −٣٠}$

السؤال الثاني: أجد متوسط التغير للاقتران ص=ق(س) في الحالات الاتية :

أ) $ق(س) = |س - ٣|$ ، **عندما تتغير س من** $س_١ = ٧$ الى $س_٢ = ٤$

الحل

متوسط تغير الأقتران $ق(س) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{ق(٤) - ق(٧)}{٤ - ٧}$$

$$= \frac{[|٤ - ٣|] - [|٧ - ٣|]}{-٣}$$

$$= \frac{|١| - |٤|}{-٣}$$

$$= \frac{١ - ٢}{-٣} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

ب) $ق(س) = س^٢ - ١$ ، **عندما** $س_١ = ٢$ ، $\Delta س = ٤$

الحل

$\Delta س = ٤$

$س_٢ - س_١ = ٤$

$س_٢ - ٢ = ٤$ ومنها $\boxed{س_٢ = ٦}$

متوسط تغير الأقتران $ق(س) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{ق(٦) - ق(٢)}{٦ - ٢}$$

$$= \frac{[٦^٢ - ١] - [٢^٢ - ١]}{٤}$$

$$= \frac{٣٥ - ٣}{٤}$$

$$= \frac{٣٢}{٤} = ٨$$

السؤال الثالث: ليكن ص = ق(س) اقترانا ، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من $س_1 = 1$ الى $س_2 = 4$ هو ١٣ ، أجد :

أ) التغير في ص .

الحل

$$\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$$

بمعلومية ان :

$$\text{متوسط تغير الأقتران } ق(س) = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{4 - 1} = 13$$

$$\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{3} = \frac{13}{1} \quad \text{(بالضرب التبادلي)}$$

ومنها فأن : $\boxed{ق(س_2) - ق(س_1) = 39}$

التغير في ص = ٣٩

ب) ق(٤) علما بأن ق(١)=٦

$$\Delta ص = ق(س_2) - ق(س_1)$$

$$39 = ق(4) - ق(1)$$

$$39 = ق(4) - 6$$

$$ق(4) = 39 + 6 = 45$$

السؤال الرابع: إذا كان $ق(س) = س + 7$ ، أجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(-2، ق(-2))$ ، $(3، ق(3))$

الحل

$$\text{ميل القاطع} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{ق(3) - ق(-2)}{3 - (-2)}$$

$$= \frac{[7+3] - [7+(-2)]}{5}$$

$$= \frac{10-5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق (س) عندما تتغير س من س١ = ٢ إلى س٢ = ٤ هو ٢ ، وكان ق (٤) = ٦ ، فإن ق(٢)= أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) ـ ٢	ب
٢	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) في الفترة [ـ ٤ ، ٢] يساوي ٣ ، ق (ـ ٤) = ٢ فإن ق (٢) = أ) ٢٠ ب) ٢٦ جـ) ١٦ د) ١٨	أ
٣	تقع النقطتان أ (صفر ، ١) ، ب (ـ ١ ، ٢) على منحنى الاقتران ص= ق (س) فإن ميل المستقيم القاطع أ ب يساوي : أ) ٢ ب) ١ ج) صفر د) ـ ١	د
٤	متوسط تغير الاقتران ق (س) = $\sqrt{س + ٥}$ في الفترة [٤ ، ١١] يساوي : أ) ٧ ب) ١ ج) $\frac{١}{٧}$ د) $\frac{٥}{٧}$	ج
٥	متوسط تغير الاقتران ق (س) = س^{٢} + ١ ، عندما تتغير س من س١ =١ إلى س٢ = ٣ هو : أ) ٥ ب) ٢ ج) ٤ د) ١٠	ج
٦	إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، فإن متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٤] يساوي : أ) ١ ب) ٢ ج) $\frac{-١}{٣}$ د) $\frac{١}{٣}$	د
٧	إذا كان ق (س) = ٢س +١ فإن متوسط تغير الاقتران ق (س) عندما تتغير س من س ١= ٣ إلى س٢ = ٥ يساوي : أ) ٩ ب) ٢ ج) ٤ د) ١٨	ب

#	القسم الثاني : اجب عن الاسئلة الاتية :	الجواب
١	إذا كان ق (س) = $\sqrt{٣س + ٥}$ أوجد متوسط التغير عندما تتغير س من س١ = ٠ إلى س٢ = ٥	$\frac{١}{\sqrt{٥}}$
٢	إذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) = س^{٢} +٣س يساوي ١٠، أوجد قيمة س$_{١}$ عندما يكون التغير في قيمة س يساوي ٣؟	٢
٣	جد متوسط التغير للاقتران المار بالنقطتين أ (٣ ، ٦) ، ب (٧ ، ١٠)	١
٤	اذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) في الفترة [أ ، ١.٣] يساوي ٢ وكان ق(١.٣)=٦.٥ ق(أ)=٥ جد قيمة أ ؟	١
٥	اذا كان متوسط التغير الاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س في الفترة [أ،٣أ] يساوي ١١ جد قيمة أ ؟	١
٦	اذا كان ص = ق(س) اقتران ، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٢ الى س$_{٢}$ = ٥ هو ٩ ، جد : ق(٢) علما بأن ق(٥) = ٧	٢٠-
٧	اذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٤ الى س$_{٢}$ = ٤ + هـ يساوي $\frac{٢هـ^{٢} - ٨}{هـ + ٢}$ جد قَ(٤)	٤-

الوحدة الثانية / التفاضل

الدرس الثاني / مفهوم المشتقة الاولى

القسم الأول : الملخص

تعريف :

معدل التغير للاقتران ق(س) أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند النقطة $(س_١ ، ق(س_١))$:

$$قَ(س_١) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$$

وبالرموز :

$$قَ(س_١) = \frac{د ص}{د س}\Big|_{س=س_١} \text{ أو } صَ\Big|_{س=س_١}$$

ملاحظة :

المشتقة الأولى = $\lim_{هـ \to 0}$ متوسط التغير $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ أي أن :

$قَ(س_١)$ تساوي نهاية متوسط للاقتران ق (س) في الفترة $[س_١ ، س_١ + هـ]$ عندما تؤول هـ الى الصفر .

كن جميل الخلق تهواك القلوب

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة ، أجد $ق'(س)$ عند النقطة المعطاه في كل حالة :

فرع أ : $ق(س) = ٢س - ٧$ ، $س = -٣$

الحل

$$ق'(-٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(-٣+هـ) - ق(-٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[٢(-٣+هـ) - ٧] - [٢(-٣) - ٧]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[-٦+٢هـ - ٧] - [-٦ - ٧]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ - ١٣ + ١٣}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢\not{هـ}}{\not{هـ}}$$

$$= ٢$$

فرع ب : $ق(س) = ٣ - س$ ، $س = ٢$

الحل

$$ق'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[٣ - (٢+هـ)] - [٣-٢]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[٣-٢-هـ] - [١]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١ - هـ - ١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-\not{هـ}}{\not{هـ}}$$

$$= -١$$

فرع جـ : ق(س) = س^{٢} + س ، س = $-\frac{١}{٢}$

الحل

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق\left(-\frac{١}{٢}+هـ\right)-ق\left(-\frac{١}{٢}\right)}{هـ} = ق'\left(-\frac{١}{٢}\right)$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\left[\left(-\frac{١}{٢}+هـ\right)^{٢}+\left(-\frac{١}{٢}+هـ\right)\right]-\left[\left(-\frac{١}{٢}\right)^{٢}+\left(-\frac{١}{٢}\right)\right]}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\left[\frac{١}{٤}-٢\times\frac{١}{٢}\times هـ+هـ^{٢}-\frac{١}{٢}+هـ\right]-\left[\frac{١}{٤}-\frac{١}{٢}\right]}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{٤}-هـ+هـ^{٢}-\frac{١}{٢}+هـ-\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{٤}-هـ+هـ^{٢}-\frac{١}{٢}+هـ-\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{هـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \to ٠} هـ$$

$$= ٠$$

السؤال الثاني : اذا كان ق$'$(٣) = ٨ ، أجد :

فرع أ : $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+هـ)-ق(٣)}{هـ}$

الحل

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+هـ)-ق(٣)}{هـ} = ق'(٣) = ٨$$

فرع ب : $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+هـ)-ق(٣)}{٢هـ}$

الحل

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+هـ)-ق(٣)}{٢هـ} = \frac{١}{٢}\times \text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+هـ)-ق(٣)}{هـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\times ق'(٣)$$

$$= \frac{١}{٢}\times ٨ = ٤$$

فرع جـ : $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣) - ق(٣+هـ)}{هـ}$

الحل

$$= -١ \times \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ} \quad \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣) - ق(٣+هـ)}{هـ}$$

$$= -١ \times ن'(٣)$$
$$= -١ \times ٨ = -٨$$

السؤال الثالث: **إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من** $س_١ = ٣$ الى $س_٢ = ٣ + هـ$ يساوي $\frac{٢}{(-١+هـ)}$ ، اجد قيمة $ق'(٣)$

الحل

متوسط التغير $= \frac{ق(س_٢) - ن(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{ق(٣+هـ) - ن(٣)}{٣ - هـ + ٣} = \frac{٢}{(-١+هـ)}$$

$$= \frac{ق(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ} = \frac{٢}{(-١+هـ)}$$ بأخذ نهاية الطرفين :

$$هـ'(٣) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{٢}{(-١+هـ)}$$

$$ن'(٣) = \frac{٢}{-١}$$

$$ن'(٣) = -٢$$

السؤال الرابع : **إذا كان** $\Delta ص = \frac{٧هـ - هـ^٢}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من $س_١ = ٥$ الى $س_٢ = ٥ + هـ$ أجد $ق'(٥)$.

الحل

$\Delta ص = \frac{٧هـ - هـ^٢}{٤}$ ، $\Delta س = ٥ + هـ - ٥ = هـ$

$ق'(٥)$ = نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[٥ ، ٥ + هـ]$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{\frac{٧هـ - هـ^{٢}}{٤}}{هـ} \quad ق'(٥)$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{٧هـ - هـ^{٢}}{٤هـ} \quad \text{(باخذ هـ عامل مشترك)}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{\cancel{هـ}(٧ - هـ)}{٤\cancel{هـ}}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{(٧ - هـ)}{٤}$$

$$= \frac{٧}{٤}$$

السؤال الخامس : اذا كان ص= ق(س) = س^{٢} + ١ ، أجد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة .

الحل

$$ق'(س) = \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{[(س + هـ)^{٢} + ١] - [س^{٢} + ١]}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{[س^{٢} + ٢س \times هـ + هـ^{٢} + ١] - س^{٢} - ١}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{\cancel{س^{٢}} + ٢س هـ + هـ^{٢} \cancel{+ ١} - \cancel{س^{٢}} \cancel{- ١}}{هـ}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{٢س هـ + هـ^{٢}}{هـ} \quad \text{(بأخذ هـ عامل مشترك)}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} \frac{\cancel{هـ}(٢س + هـ)}{\cancel{هـ}}$$

$$= \text{نهـــا}_{هـ \leftarrow 0} (٢س + هـ)$$

$$= ٢س$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الثاني:اجب عن الاسئلة التالية	الجواب
١	باستخدام تعريف المشتقة جد $\text{ق}'(٢)$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٥ - \text{س}$	١-
٢	باستخدام تعريف المشتقة جد $\text{ق}'(-٣)$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢$	٦-
٣	اذا كان $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ اقترانا وكانت قيمة التغير في قيمة ص $= \frac{٤\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}}{٣}$ جد $\text{ق}'(٢)$ اذا تغيرت س من $\text{س}_{١} = ٢$ الى $\text{س}_{٢} = ٢ + \text{هـ}$	$\frac{٤}{٣}$
٤	**اذا كان** $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ **جد** $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{٢\text{هـ}}$	$\frac{٩}{٢}$
٥	**اذا كان** $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٤ + \text{هـ})}{٢\text{هـ}} = ١٢$ جد $\text{ق}'(٤)$	٢٤-
٦	اذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ في الفترة $[\text{هـ}، ٢\text{هـ}]$ يساوي $\frac{\text{هـ} + ٢\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$ جد $\text{ق}'(٢)$	٢

الوحدة الثانية / التفاضل

الدرس الثالث / قواعد الاشتقاق

القسم الأول : الملخص

قاعدة (١) : اذا كان ق(س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي ، فأن قَ(س) = ٠ ، ∀س ∈ ع

قاعدة (٢) : اذا كان ق(س) = س^{ن} فان قَ(س) = ن س$^{ن-١}$ ، ن عدد حقيقي ، س ≠ ٠

قاعدة(٣): اذا كان اقترانين ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = أ **وكانت** أ ∈ ع

وكان هـ(س) = أ ق(س) **فان** هَ(س) = أ قَ(س)

قاعدة (٤) : اذا كان اقترانين ك(س)، ع(س) قابلين للاشتقاق ، وكان

ق(س) = ك(س) ± ع(س) ، فان :

الاقتران ق(س) يكون قابلا للاشتقاق ويكون قَ(س) = كَ(س) ± عَ(س)

قاعدة(٥): اذا كان اقترانين ق(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق عند س = أ **فان :**

(ق × هـ)َ(أ) = ق(أ) × هَ(أ) + هـ(أ) × قَ(أ)

وبالكلمات :

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الاول×مشتقة الاقتران الثاني +الاقتران الثاني×مشتقة الاقتران الاول

قاعدة (٦) : اذا كان اقترانين ق(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق وكان هـ(س) ≠ ٠ عند س = أ فان

$$(ق \div هـ)(أ) = \left(\frac{ق}{هـ}\right)'(أ) = \frac{هـ(أ) \times قَ(أ) - ق(أ) \times هَ(أ)}{(هـ(أ))^{٢}}$$

وبالكلمات :

مشتقة ناتج القسمة اقترانين = $\frac{\text{(المقام×مشتقة البسط) - (البسط×مشتقة المقام)}}{\text{مربع المقام}}$

إن الاتجاه الذي يبدأ مع التعلم سوف يكون من شأنه
أن يحدد حياه المرء في المستقبل

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقترانات الاتية :

فرع أ : $ص = \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

الحل

ص=ثابت ومنها فان $\frac{د ص}{د س} = ٠$ (حسب قاعدة ١)

فرع ب : $ص = ٥س + ٣$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = ٥$ (حسب قاعدة ٢)

فرع جـ : $ص = \frac{٣}{س^{٢}} + ٥س ، س \neq ٠$

الحل

$ص = ٣س^{-٢} + ٥س$

$\frac{د ص}{د س} = -٦س^{-٣} + ٥$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٦}{س^{٣}} + ٥$

فرع د : $ص = ٧س^{٢} + \sqrt[٣]{س^{٢}}$

الحل

$ص = ٧س^{٢} + س^{\frac{٢}{٣}}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٤س + \frac{٢}{٣}س^{-\frac{٢}{٣}-١}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٤س + \frac{٢}{٣}س^{-\frac{١}{٣}}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٤س + \frac{٢}{٣س^{\frac{١}{٣}}}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٤س + \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

فرع هـ : ص = (٢س + ٥)(٣ − س ٣)

الحل

$$\frac{د ص}{د س} = (٢س + ٥) \times (-٣س^{٢}) + (٣ - س^{٣}) \times (٢)$$

$$\frac{د ص}{د س} = -٦س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦ - ٢س^{٣}$$

$$\frac{د ص}{د س} = -٨س^{٣} + ١٥س^{٢} + ٦$$

فرع جـ : $ص = \frac{س}{س + ٣}$ ، س ≠ −٣ عندما س = ١

الحل

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ \times (س + ٣) - ١ \times س}{(س + ٣)^{٢}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{س + ٣ - س}{(س + ٣)^{٢}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{(س + ٣)^{٢}}$$

$$\frac{د ص}{د س}_{|س=١} = \frac{٣}{(١ + ٣)^{٢}} = \frac{٣}{١٦}$$

السؤال الثاني: **اجد** قَ(٣) ، **علما بان** ق(س) = س ٢ − س + ٥

الحل

ق(س) = س ٢ − س + ٥

قَ(س) = ٢س − ١

قَ(٣) = ٢ × ٣ − ١ = ٥

السؤال الثالث: **إذا كان** ق(س) = س ٢ + ٣س **وكان** ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)

، هـ(٢) = ٥ ، هَ(٢) = ١ أجد لَ(٢)

الحل

ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س) نجد مشتقة الاقتران :

لَ(س) = قَ(س) + ٣هَ(س)

$$\boxed{لَ(٢) = قَ(٢) + ٣هَ(٢)} \leftarrow \boxed{١}$$

ق(س) = س ٢ + ٣س

قَ(س) = ٢س + ٣

$ق'(٢) = ٢ \times ٢ + ٣ = ٧$ ومنها $\boxed{ق'(٢) = ٧}$ ومن المعطيات : $\boxed{هـ'(٢) = ١}$

نعوض في ١ :

$ل'(٢) = ق'(٢) + ٣ هـ'(٢)$

$ل'(٢) = ٧ + ٣ \times ١ = ١٠$

السؤال الرابع: **إذا كان** $ق(س) = \frac{٣س + ٢}{٤س + ١}$ ، $س \neq \frac{-١}{٤}$ ، **أحسب** $ق'(٢)$

الحل

$$ق'(س) = \frac{٤ \times (٣س + ٢) - ٣ \times (٤س + ١)}{(٤س + ١)^{٢}}$$

$$ق'(٢) = \frac{٤ \times (٣ \times ٢ + ٢) - ٣ \times (٤ \times ٢ + ١)}{(٤ \times ٢ + ١)^{٢}}$$

$$ق'(٢) = \frac{٤ \times ٨ - ٣ \times ٩}{٩^{٢}}$$

$$ق'(٢) = \frac{٣٢ - ٢٧}{٨١}$$

$$ق'(٢) = \frac{٥}{٨١}$$

السؤال الخامس: **إذا كان** $ق(س) = س^{٣} ل(س) + هـ(س)$ **وكان** $ل'(٢) = ٥ ، هـ'(٢) = ٧ ، ل(٢) = -٣$ **فما قيمة** $ق'(٢)$ ؟

الحل

$ق(س) = س^{٣} ل(س) + هـ(س)$

$ق'(س) = س^{٣} \times ل'(س) + ل(س) \times ٣س^{٢} + هـ'(س)$

$ق'(٢) = ٢^{٣} \times ل'(٢) + ل(٢) \times ٣ \times ٢^{٢} + هـ'(٢)$

$ق'(٢) = ٨ ل'(٢) + ١٢ ل(٢) + هـ'(٢)$ (بالتعويض بالمعطيات)

$ق'(٢) = ٨ \times ٥ + ١٢ \times -٣ + ٧$

$ق'(٢) = ٤٠ - ٣٦ + ٧$

$ق'(٢) = ٤ + ٧$

$ق'(٢) = ١١$

السؤال السادس: أجد المشتقة الثانية لكل الاقترانات ازاء النقط المبينة بجانبها :

أ) ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} + س + ١ ، س = ٢

ب) هـ(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ س > ٠ ، س = ١

أ) ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} + س + ١ ، س = ٢

الحل

المشتقة الالى : قَ(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ١

المشتقة الثانية : ق ً (س) = ١٢س^{٢} − ١٢س

المطلوب : ق ً (٢) = ١٢ × ٤ − ١٢ × ٢ = ٢٤

ب) هـ(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ س > ٠ ، س = ١

الحل

هـ(س) = $\frac{١}{س^{\frac{١}{٢}}}$

هـ(س) = س$^{-\frac{١}{٢}}$

المشتقة الاولى : هَ(س) = $-\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}-١}$

هَ(س) = $-\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

المشتقة الثانية : هـ ً (س) = $-\frac{١}{٢} \times -\frac{٣}{٢}$ س$^{-\frac{٥}{٢}}$

هـ ً (س) = $\frac{٣}{٤}$ س$^{-\frac{٥}{٢}}$

المطلوب : هـ ً (١) = $\frac{٣}{٤} \times (١)^{-\frac{٥}{٢}} = \frac{٣}{٤}$

السؤال السابع: اجد المشتقة الاولى و الثانية والثالثة للاقتران ق(س) = ٢س^{٤} + س^{٣} − ٤س + ١ ثم أبين ان ق$^{(٥)}$ (١) = ٠

الحل

ق(س) = ٢س^{٤} + س^{٣} − ٤س + ١

المشتقة الاولى : قَ(س) = ٨س^{٣} + ٣س^{٢} − ٤

المشتقة الثانية : قـ$''$(س) = ٢٤س^{٢} + ٦س

المشتقة الثالثة : قـ$'''$(س) = ٤٨س + ٤٦

لايجاد المطلوب الثاني ، نجد كل من المشتقة الرابعة والخامسة :

المشتقة الرابعة : ق$^{(٤)}$ (س) = ٤٨

المشتقة الخامسة : ق$^{(٥)}$ (س) = ٠ ومنها فأن :

ق$^{(٥)}$ (١) = ٠

ملاحظة : بما أن درجة المشتقة أكبر من درجة كثير الحدود فان ق^{٥} (س)= صفر وبهذا لا داعي الى استخدام الحل السابق في أسئلة اختار من متعدد .

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	السؤال	الجواب
١	اذا كان ق(س) = ٢س^{٣} + ٤س + ١ جد قَ(−٢)	٢٨
٢	اذا كان ص = $\sqrt{س}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٤	$\frac{١}{٤}$
٣	اذا كان ﻫ(س) = (س + ٣)(س + ٤) جد ﻫَ(٤)	١٥
٤	اذا كان ق(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ + $\frac{٢}{س^{٣}}$ جد قَ(−١)	٨-
٥	اذا كان ص = $\sqrt[٣]{س^{٤}}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ١	$\frac{٤}{٣}$
٦	اذا كان ق(س) = $\frac{س + ٢}{س + ٤}$ جد قَ(٣)	$\frac{٢}{٧}$
٧	اذا كان ق(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ١ ، وكان ك(س) = ق(س) + هـ(س) جد كَ(٣) علما بان هـ(٣) = ١ ، هـَ(٣) = ٤	١٩
٨	اذا كان ق(س) = $\frac{أ}{س + ٢}$ جد قيمة أ علما بأن قَ(٢) = ١	١٦-
٩	اذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣س وكان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(ب + هـ) - ق(ب)}{هـ}$ = ١١ جد قيمة ب ؟	٤
١٠	اذا كان ق(س) = س^{٢} + س ، هـ(س) = ٤س + ١ جد (ق × هـ)َ(س)	٦٩
١١	اذا كان ق(س) = $\frac{س + س^{٢}}{هـ(س)}$ جد قَ(١) علما بان هـ(١) = ٤ ، هـَ(١) = −٢	١

١٢	اذا كان $ق(س) = (أ + س)^{٢}$ جد قيمة أ علما بأن $ق'(-٢) = ٦$	٥
١٣	اذا كان $ق(س) = أ س^{٢} + هـ(س) + ٣$ جد قيمة أ علما بان $ق'(٢) = ٥$ $هـ'(٢) = ٤$	$\frac{١}{٤}$
١٤	اذا كان $ق(س) = ل(س)(٣س^{٢} + ٤)$ جد $ل'(١)$ علما بان $ق'(١) = ٠$ $ل(١) = ٢$	$\frac{-١٢}{٧}$
١٥	اذا كان $ق(س) = (س + ٣)(س + أ)$ جد قيمة أ علما بان $ق'(١) = ١٠$	٥
١٦	اذا كان $ق(س) = س^{٢} - ب س$ جد قيمة ب علما بان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١) - ق(١ + هـ)}{هـ} = -٤$	٢-
١٧	اذا كان $ق(س) = ٣ س^{٥} + ٧س^{٢} + ٦س$ جد $ق^{(٧)}(٣)$	٠

الوحدة الثانية / التفاضل

الدرس الرابع /تطبيقات هندسية (المماس والعمودي)

القسم الأول : الملخص

تعريف :

نقطة التماس $(س_١، ص_١)$: نقطة مشتركة بين المستقيم ل ومنحنى الاقتران ق(س) ، وهي نقطة وحيدة في جوارها ، ويسمي المستقيم ل مماسا لمنحنى الاقتران ق(س) عند تلك النقطة .

تعريف :

- **ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص =(س) عند النقطة $(س_١، ص_١)$ الواقعة عليه يساوي $قَ(س_١)$**

ومعادلته هي : $ص - ص_١ = م(س - س_١)$ **، حيث** $م = قَ(س_١)$ ، $ص_١ = (س_١)$

- **ميل العمودى المرسوم لمنحنى الاقتران ص =(س) عند النقطة $(س_١، ص_١)$ الواقعة عليه يساوي $\frac{-١}{م}$**

ومعادلته هي : $ص - ص_١ = \frac{-١}{م}(س - س_١)$ **، حيث** $م = قَ(س_١)$ ، $ص_١ = (س_١)$

قاعدة (١) : ميل المماس لمنحنى ق(س) عند $(س_١ = ٢)$ يساوي $قَ(٢)$.

أتعلم :

يكون المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س = $س_١$ أفقيا اذا كان المماس موازيا لمحور السينات ويكون ميله صفرا (أي ان $قَ(س_١) = ٠$)

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: **أجد** ميل المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{س^{٢} + ٢}{س + ٣}$ ، $س \neq -٣$ عندما $س = -٢$

الحل

ميل المماس عند $س = -٢$ يساوي $ق'(-٢)$ نجد المشتقة اولا :

$$م = ق'(س) = \frac{(١) \times (٢ + س^{٢}) - (س٢) \times (س + ٣)}{(س + ٣)^{٢}}$$

$$م|_{س=-٢} = ق'(-٢) = \frac{(١) \times (٢ + (-٢)^{٢}) - (-٢ \times ٢) \times (-٢ + ٣)}{(-٢ + ٣)^{٢}}$$

$$= \frac{(١) \times (٦) - (-٤) \times (١)}{(١)^{٢}}$$

$$= \frac{٦ - ٤-}{١} = -١٠$$

السؤال الثاني : أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} - س + ١$ عند النقطة $(١، ٠)$ الواقعة عليه .

الحل

لايجاد معادله العمودي يلزم ايجاد :

اولا : نقطة التماس = $(س_{١}، ص_{١})$ = $(١، ٠)$

ثانيا :ميل المماس عند س = ٠ ويساوي $ق'(٠)$ ، لذا نجد المشتقة :

$$م = ق'(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ١ \quad \text{ومنها}$$

$$م|_{س=٠} = ق'(٠) = ٣ \times ٠^{٢} + ٤ \times ٠ - ١ \quad (\text{اي ان ميل المماس} = -١)$$

ثالثا : معادلة المماس :

$$(ص - ص_{١}) = \frac{-١}{م}(س - س_{١})$$

$$(ص - ١) = \frac{-١}{-١}(س - ٠)$$

$$ص - ١ = س$$

المعادلة : $ص - س - ١ = ٠$

السؤال الثالث: أجد الاحداثي السيني للنقطة / للنقاط الواقعة على المنحنى الاقتران ق(س) = $(س^{٢}-٤)(٢س+١)$ التي يكون المماس عندها افقيا .

الحل

بما ان المماس افقيا فأن : ميل المماس يساوي صفر .

أي ان : $ق'(س)=٠$ (حيث ميل المماس هو المشتقة)

$ق(س)=(س^{٢}-٤)(٢س+١)$

$ق'(س)=(س^{٢}-٤)\times(٢)+(٢س+١)\times(٢س)$

$ق'(س)=٢س^{٢}-٨+٤س^{٢}+٢س$

$ق'(س)=٦س^{٢}+٢س-٨$ (بوضع $ق'(س)=٠$)

$٦س^{٢}+٢س-٨=٠$ (بالقسمة على ٢)

$٣س^{٢}+س-٤=٠$ (بتحليل العبارة التربيعية)

$(٣س+٤)(س-١)=٠$

اما $س=-\frac{٤}{٣}$ أو $س=١$

السؤال الرابع: أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٧،٠) الواقعة عليه ، ويعامد المستقيم الذي ميله $=-\frac{١}{٣}$

الحل

لايجاد معادله المماس يلزم ايجاد :

اولا : نقطة التماس هي $=(س_{١}، ص_{١})$ (٧،٠)

ثانيا : بمعلومية ان ميل العمودي $=-\frac{١}{٣}$

$-\frac{١}{م}=-\frac{١}{٣}$ (بالضرب التبادلي)

$-م=-٣$

$م=٣$

ثالثا : معادلة المماس : $(ص-ص_{١})=م\ (س-س_{١})$

$(ص-٧)=٣\ (س-٠)$

$ص-٧=٣س$

$ص-٣س-٧=٠$

السؤال الخامس : اذا كان ق(س) = ا س^{٢} + ٥س − ٢ ، وكان ميل المماس لمنحنى عندما (س = ١) يساوي ١١، أجد قيمة الثابت أ.

الحل

بمعلومية ان : ميل المماس عند س = ١ ويساوي ١١

أي ان : قَ(٠) = ١١

ق(س) = ا س^{٢} + ٥س − ٢

قَ(س) = ٢ا س + ٥ ،وبما ان قَ(٠) = ١١

٢ا × ١ + ٥ = ١١

٢ا = ٦

ا = ٣

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} ـ ٣س + ١ عند النقطة (١ ، ـ ١) يساوي : أ) ـ ١ ب) صفر جـ) د) ٢	أ
٢	يكون للاقتران ق (س) = س^{٢} ـ ٤س +١ مماساً أفقياً عندما س = أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٤	ج
٣	ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = $\frac{٥}{س^{٢}-١}$ عند س= ٢ يساوي أ) ٢٠ ب) $\frac{٢٠}{٩}$ ج) $\frac{-٢٠}{٩}$ د) -٢٠	ج
٤	إذا علمت أن ق (س) = ٢س^{٢} +٤س ، فإن قيمة س التي يكون ميل المماس لمنحنى ق (س) عندها يساوي ٤ هي : أ) ٢ ب) ١ ج) صفر د) ٤٨	ج
٥	قيم س التى يكون للاقتران ق (س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} ـ ١٢س +١ مماساً أفقياً عند: أ) -٢، ١ ب) -٢، -١ ج) ٢، ١ د) ٢، -١	د

#	القسم الثاني :اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	أجد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = (س + ٣)(س + ٤) عند س= ١.	ص − ١٢ = ٧(س − ١)
٢	أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س+٥}{س+١}$ عند س=٣.	ص − ٢ = ٤(س − ٣)
٣	أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = (س + ٣)^{٢} عند النقطة (١٦،١)	ص − ١٦ = $\frac{-١}{٨}$(س − ١)
٤	أوجد نقط التماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} − ٤س + ١ عندما يكون ميل المماس =٦	(٦،٥)
٥	أوجد نقط/نقطة التماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} − ٦س + ٨ والذي يكون عندها المماس افقيا ، ثم جد المعادلة .	(١−،٣) **المعادلة :** ص = −١
٦	اذا كان كان ميل المماس لمنحنىق(س) = ٥س^{٢} − أس − ٣ عند النقطة (−١،٣)يساوي ٧، أجد أ .	١٧-
٧	اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} + ٦ س + ٧يساوي $\frac{-١}{٤}$ جد معادلة المماس .	ص − ٢ = ٤(س + ١)

القسم الأول : الملخص

قاعدة السلسلة :

اذا كان هـ(س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س ، وكان ق (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند هـ (س) فأن الاقتران المركب (ق ∘ هـ)(س) يكون قابلا للاشتقاق عن س ، ويكون

$$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)).هـ'(س)$$

نتيجة (١) :

اذا كانت ص = ق (ع) ، ع = هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، ص = ق (هـ (س)) ، وبالتالي :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

نتيجة (٢) :

اذا كان ص= (هـ(س)) ^{ن} ، وكان هـ(س) قابل للاشتقاق ، ن ∈ ص ، فان :

$$\frac{د ص}{د س} = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$$

كل من توقف عن التعليم فهو كهل ،
ولا يهم إن كان في العشرين أو في الثمانين من عمره ،

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: اذا كان $ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = س + ١$ أجد $(ق \circ هـ)'(س)$.

الحل

$$هـ(س) = ١ \quad ق(س) = ٢س ،$$
$$= ق'(هـ(س)) . هـ'(س) \quad (ق \circ هـ)'(س)$$
$$= ق'(س + ١) \times ١$$
$$= ٢(س + ١)$$

السؤال الثاني : اذا كانت $ص = (٢س - ١)^{٢}$، أجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ \times (٢س - ١) \times ٢$$
$$\frac{د ص}{د س} = ٤ \times (٢س - ١)$$
$$\frac{د ص}{د س} = ٨س - ٤$$

السؤال الثالث: إذا كان $ص = ع^{٢} - ٥ع + ١$ ، $ع = ٢س + ٣$، أجد $\frac{د ص}{د س}$.

الحل

$$\frac{د ص}{د ع} = ٢ع - ٥$$
$$\frac{د ع}{د س} = ٢$$
$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$
$$= ٢ \times (٢ع - ٥)$$
$$= ٤ع - ١٠$$
$$= ٤(٢س + ٣) - ١٠$$
$$= ٨س + ١٢ - ١٠$$
$$= ٨س + ٢$$

السؤال الرابع : **اذا كان** $م(س) = (س^{٢} - س)^{٤}$ **أجد** $م'(٢)$.

الحل

$$م(س) = (س^{٢} - س)^{٤}$$
$$م'(س) = ٤ \times (س^{٢} - س)^{٣} \times (٢س - ١)$$
$$م'(٢) = ٤ \times (٢^{٢} - ٢)^{٣} \times (٢ \times ٢ - ١)$$
$$م'(٢) = ٤ \times (٢)^{٣} \times ٣$$
$$م'(٢) = ٩٦$$

السؤال الخامس : **اذا كان** $ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١)$ ، **أجد** $ق'(١)$ **علما بأن** $هـ'(١) = ٥$ ، $هـ(٤) = ٢$

الحل

$$ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١)$$
$$ق'(س) = هـ'(٣س^{٢} + ١) \times ٦س$$
$$ق'(١) = هـ'(٣ + ١) \times ٦$$
$$ق'(١) = هـ'(٤) \times ٦$$
$$ق'(١) = ٢ \times ٦ = ١٢$$

السؤال السادس : اذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانا قابلا للاشتقاق على ح بحيث أن :

ق(٢) = ٣، هـ(٣) = ١، ق'(٤) = -٢، هـ(٢) = ٤، هـ'(٢) = ٣ ، ق'(٢) = ٥، أجد

اولا: $(ق \circ هـ)'(٢)$

الحل

$$= ق'(هـ(٢)) . هـ'(٢) \quad (ق \circ هـ)'(٢)$$
$$= ق'(٤) \times ٣$$
$$= -٢ \times ٣$$
$$= -٦$$

ثانيا : $(هـ \circ ق)'(س)$

الحل

$$ق'(٢) = هـ'(ق(٢)) . \quad (هـ \circ ق)'(٢)$$
$$= هـ'(٣) \times ٥$$
$$= ١ \times ٥$$
$$= ٥$$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ (س) = ٢س٢ ـ ١ فإن (ق ٥ هـ)/ (١) = أ) ـ ٤ ب) ـ ١ جـ) ١ د) ٤	أ
٢	ن فه (س) = ٢س^{٢} + س ـ ١، هـ (س) = $\sqrt{س}$ ، فان (ق ٥ هـ)/(١) : أ) ـ ٣ ب) ـ ١ جـ) ١ د) ٣	د
٣	إذا كان ق (س) = س^{٢} ، فإن (ق٥ ق/)/ (١) = أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٨	د
٤	إذا كان ق (س) = أ هـ^{س} ، وكان هـ/ (٣) = ٢ ، ق/ (٩) = ٢ ، فإن قيمة الثابت أ = أ) ٢ ب) ٤ جـ) ١ د) ١	أ
٥	إذا كان (ق٥ هـ)/ (٢) = ٢٧ ، حيث ق (س)= س^{٢} ـ ٥ س ، هـ/ (٢) = ٣ ، فإن هـ (٣) = أ) ٢١ ب) ١٦ ج) ٩ د) ٧	د
٦	إذا كان (ق ٥ هـ)(س) = س وكانت ق/ (س) = $\frac{١}{س}$ حيث هـ قابل للاشتقاق فإن هـ/ (س) = أ) ١ ب) س ج) ق (س) د) هـ(س)	د

#	القسم الثاني :اجب عن الاسئلة التالية :	الجواب
١	**اذا كان** ق(س) = س^{٢} + ١، هـ(س) = ٢س^{٢} + ٥ **جد :** ١. (هـ ○ ق)$'$(س) ٢. (هـ ○ ق)$'$(٢)	١. ٨س(٢س^{٢} + ٥) ٢. ٢٠٨
٢	**إذا كان** ص = ع^{٣} − ١ ، ع = ٣س−س^{٢}، **أجد** $\frac{د ص}{د س}$ **عند س=٢**	٦-
٣	اذا كان ق(٢س + ١) = ٢س^{٢} − ٤س + ٩ **جد** قَ(٥)	٢
٤	اذا كان م(س) = س^{٢} × ق(٤س − ١) جد مَ(٢) علما ان: ق(٧) = ١٢، قَ(٧) = −١	١٦-
٥	اذا كان ق(س) = (أ − س)^{٤} وكان قَ(٣) = ٤ جد قيمة أ ؟	٢
٦	اذا كان ق(س) = (٢س − م(س))^{٣} جد قَ(٥) علما ان: م(٥) = ٤، مَ(٥) = −٢	٤٣٢
٧	**إذا كان** ص = ٢ع + ٥ ، ع = أس^{٢} − ٤، $\frac{د ص}{د س}$ = ٣٦س **جد قيمة** أ ؟	٩

الوحدة الثانية / التفاضل

الدرس السادس /القيم القصوى للاقتران

القسم الأول : الملخص

تعريف :

اذا كان ص = ق(س) وكانت س = جـ في مجال الاقتران ، فأنه يقال ان ق (جـ) :

أ. قيمة عظمي محلية للاقتران ، اذا كانت ق (جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لـ جـ .

ب. قيمة عظمي محلية للاقتران ، اذا كانت ق (جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س المجاورة لـ جـ .

اختبار المشتقة الاولى للقيم القصوى :

اذا كان ق (س) قابلا للاشتقاق ، وكانت جـ مجال ق(س) ، فأن :

أ. اذا تغيريت قَ(س) اشارة من موجبة لقيم س < جـ الى سالبة لقيم س > جـ فأن ق (جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق (س).

ب. اذا تغيريت قَ(س) اشارة من سالبة س < جـ لقيم الى موجبة لقيم س > جـ فأن ق (جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق (س).

كل من توقف عن التعليم فهو كهل ،
ولا يهم إن كان في العشرين أو في الثمانين من عمره ،
بينما كل من لا ينفك يتعلم يظل شاباً

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أعين القيمة / القيم القصوى ان وجدت لكل من الاقترانات الاتية :

أ. $ق(س) = ٤س - ٢س^{٢}$ ، $س \in ح$

الحل

اولا : نوجد مشتقة الاقتران ق(س) :

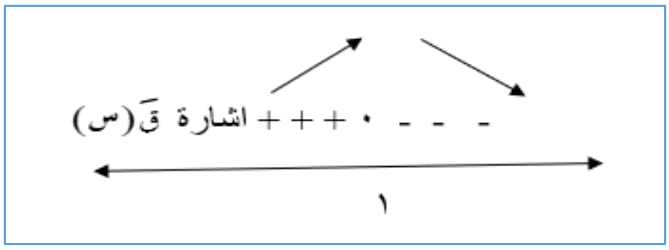
$ق'(س) = ٤ - ٤س$

ثانيا : بوضع $ق'(س) = ٠$ ،ومنها :

$٤ - ٤س = ٠$

$-٤س = -٤$

$\boxed{س = ١}$



ومن ملاحظة اشارة $ق'(س)$ في الشكل المجاور :

تغيرت الاشارة من موجب الى سالب عند س = ١ ومنها فأن ق (١) قيمة عظمى محليه وقيمتها :

$ق(١) = ٤ - ٢ = ٢$

ب. $ق(س) = س(س^{٢} - ١٢)$ ، $س \in ح$

الحل

اولا : نوجد مشتقة الاقتران ق(س) :

$ق'(س) = س \times (٢س) + (س^{٢} - ١٢) \times ١$

$ق'(س) = ٢س^{٢} + س^{٢} - ١٢$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

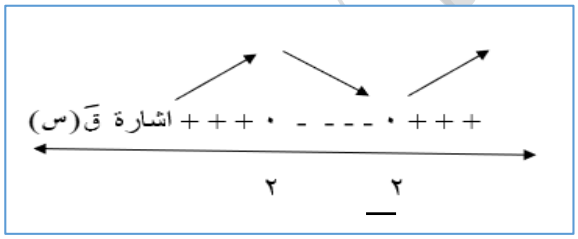
ثانيا : بوضع $ق'(س) = ٠$ ،ومنها :

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$٣س^{٢} = ١٢$

$س^{٢} = ٤$

$\boxed{س = \pm ٢}$ ، ومن ملاحظة اشارة $ق'(س)$ في الشكل المجاور :



١ تغيرت الاشارة من موجب الى سالب عند $س = -٢$ ومنها فأن $ق(-٢)$ قيمة عظمى محليه وقيمتها :

$ق(-٢) = -٢(-٤ - ١٢) = ١٦$

٢ تغيرت الاشارة من سالب الى موجب عند س = ٢ ومنها فأن ق(٢) قيمة صغرى محليه وقيمتها :

ق(٢) = ٢(٤ − ١٢) = −١٦

جـ. ق(س) = س^{٣} − ٣س + ٢ ، س ∈ ح

الحل

اولا : نوجد مشتقة الاقتران ق(س) :

قَ(س) = ٣س^{٢} − ٣

ثانيا : بوضع قَ(س) = ٠ ،ومنها :

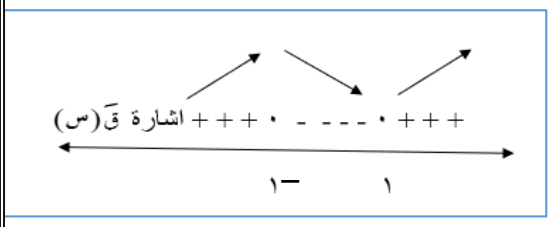
٣س^{٢} − ٣ = ٠

٣س^{٢} = ٣

س^{٢} = ١

س = ±١

، ومن ملاحظة اشارة قَ(س) في الشكل المجاور :



١ تغيرت الاشارة من موجب الى سالب عند س = −١ ومنها فأن ق(−١) قيمة عظمى محليه وقيمتها

ق(−١) = (−١)^{٣} − ٣(−١) + ٢ = ٤

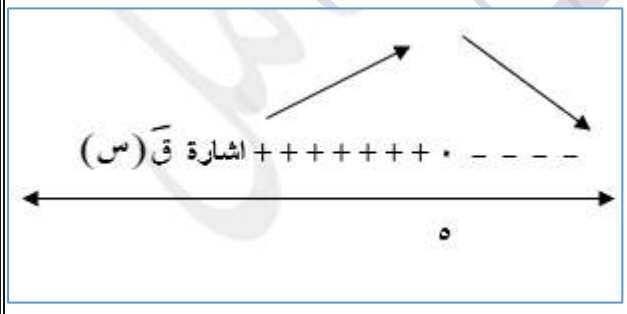
٢ تغيرت الاشارة من سالب الى موجب عند س = ١ ومنها فأن ق(١) قيمة صغرى محليه وقيمتها :

ق(١) = (١)^{٣} − ٣(١) + ٢ = ٠

د. ق(س) = −س^{٢} + ١٠س + ٥ ، س ∈ ح

الحل

اولا : نوجد مشتقة الاقتران ق(س) :



قَ(س) = −٢س + ١٠

ثانيا : بوضع قَ(س) = ٠ ،ومنها :

−٢س + ١٠ = ٠

−٢س = −١٠

س = ٥

ومن ملاحظة اشارة قَ(س) في الشكل المجاور :

تغيرت الاشارة من موجب الى سالب عند س = ٥ ومنها فأن ق(٥) قيمة عظمى محليه وقيمتها :

ق(٥) = −(٥)^{٢} + ١٠(٥) + ٥ = ٣٠

السؤال الثاني: أعين القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س + ١ ، س ∈ ح

الحل

اولا : نوجد مشتقة الاقتران ق(س) :

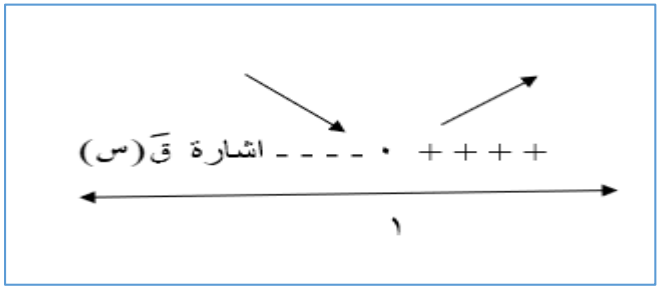
قَ(س) = ٢س − ٢

ثانيا : بوضع قَ(س) = ٠ ،ومنها :

٢س − ٢ = ٠

٢س = ٢

س = ١



ومن ملاحظة اشارة قَ(س) في الشكل المجاور :

تغيرت الاشارة من سالب الى موجب عند س = ١ ومنها فأن ق(١) قيمة صغرى محليه وقيمتها :

ق(٢) = (٢)^{٢} − ٢(٢) + ١ = ٠

السؤال الثالث: **اذا كان للاقتران** ق(س) = − س^{٢} + ب س − ٣ ، س ∈ ح **قيمة عظمى محلية عند س = ـ٢ فما قيمة ب ؟**

الحل

للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة س= −٢ ومنها :

قَ(−٢) = ٠ بمعلومية ان : قَ(س) = − ٢س + ب

قَ(−٢) = − ٢ × −٢ + ب = ٠

٤ + ب = ٠

ب = −٤

السؤال الرابع: **اذا كان** ق(س) = س^{٣} − ٥ ، س ∈ ح ، **أبين انه لا توجد للاقتران ق(س) أي قيم قصوى**

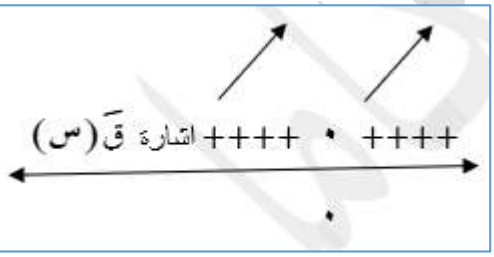
الحل

أولا ، نوجد مشتقة الاقتران ق(س) :

قَ(س) = ٣س^{٢}

ثانيا ، بوضع قَ(س) = ٠ :

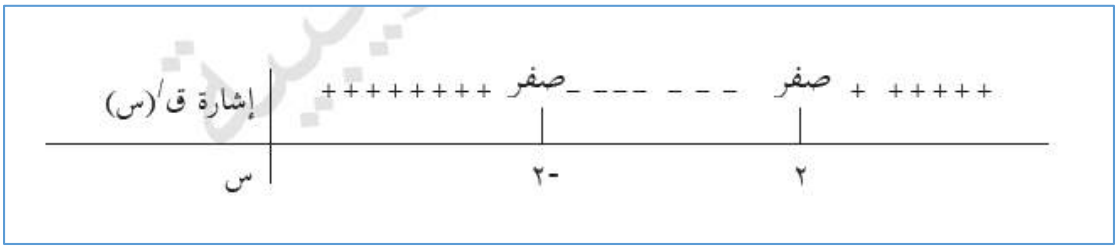
٣س^{٢} = ٠ ⟸ س = ٠



ومن ملاحظة اشارة قَ(س) في الشكل المجاور ، فأن :

المنحنى ق(س) لايغير من سلوكه حول س=٠ ، اذن لا يوجد قيم قصوي للاقتران .

السؤال الخامس: الشكل الاتى يبين اشارة ، أجد قيم س التى عندها قيم قصوى للاقتران ق(س) وأبين نوعها ، علما بأن ق(س) كثير حدود معرف على ح .



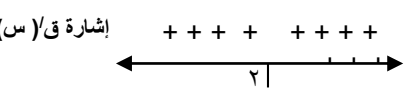
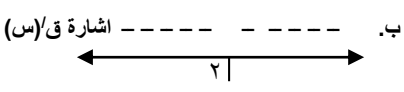
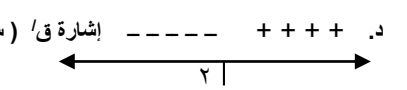
الحل

ومن ملاحظة اشارة قَ(س) في الشكل المجاور :

١ تغيرت الاشارة من موجب الى سالب عند س = −٢ ومنها فأن ق(−٢) قيمة عظمى محليه .

٢ تغيرت الاشارة من سالب الى موجب عند س = ٢ ومنها فأن ق(٢) قيمة صغرى محليه .

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	القسم الاول : اختر الاجابة الصحيحة	الجواب
١	إحدى إشارات ق/(س) الآتية تظهر وجود قيمة عظمى للاقتران ق (س) عند (س =٢) : أ.  ب.  ج. د. 	ج
٢	عدد القيم القصوى المحلية للاقتران ق (س) = س^{٣} ـ ٢٧ يساوي أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) صفر	د
٣	الاقتران ق(س) = ٦س ـ س^{٢} له قيمة عظمى محلية تساوي : أ) ٣ ب) ٦ ج) ٩ د) ١٢	ج
٤	إذا كان ق (س) = س^{٢} ـ ٤س +٥ ، فإن القيمة الصغرى المحلية للاقتران ق (س) هي : أ) ٥ ب) ٢ ج) ١ د) صفر	ج
٥	إذا كان ق (س) = ب س^{٢} + ٨س +٩ له قيمة صغرى محلية عند س= -٢ فان قيمة ب الثابت تساوى أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) ٤	ب

#	القسم الثاني : اجب عن الاسئلة التالية	الجواب
١	**عين القيم القصوى للاقتران** ق(س) = س^{٢} − ٤س + ٥	ق(٢)=١ قيمة صغري
٢	**عين القيم القصوى للاقتران** ق(س) = س^{٣} − ١٢س + ١	ق(٢)=-١٥ قيمة صغري ق(-٢)=١٧ قيمة عظمى
٣	اذا كان الاقتران ق(س) = أس^{٢} + ٤س + ٣ له قيمة عظمى عند س =٢ جد قيمة أ ؟	١-
٤	عين القيم القصوى للاقتران ق(س) = ٢ − ٦س − س^{٢}	ق(-٣)=١١ قيمة عظمى
٥	عين القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣}	ق(٣)=-٢٧ قيمة صغري لا يوجد قيمة قصوى عند س=٠

كراسة الكامل

الوحدة الثانية / التفاضل

التمارين العامة

السؤال الأول : اختر رمز الاجابة الصحيحة :

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	أ	ب	جـ	ب	د	أ	د	-	-	جـ

١. اذا كان متوسط التغير الاقتران ق(س) في الفترة $[-٤، ٢]$ يساوي ٣ ، ق$(-٤) = ٢$ ما قيمة ق(٢) ؟

الحل

متوسط تغير الأقتران $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$$\frac{\text{ق}(٢) - \text{ق}(-٤)}{٢ - (-٤)} = ٣$$

$$\frac{\text{ق}(٢) - ٢}{٦} = \frac{١٣}{١} \quad \text{(بالضرب التبادلي)}$$

$$\text{ق}(٢) - ٢ = ١٨$$

$$\text{ق}(٢) = ٢٠$$

أ

٢. ما ميل القاطع الذى يقطع لمنحنى الاقتران ق(س) المار بالنقطتين أ$(١، ٣)$ ،ب$(٣، ٩)$ ؟

الحل

ميل القاطع $= \dfrac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ ، $(\text{س}_٢، \text{ص}_٢) = (٣، ٩)$ ،$(\text{س}_١، \text{ص}_١) = (١، ٣)$

$$= \frac{٩ - ٣}{٣ - ١}$$

$$= \frac{٦}{٢} = ٣$$

ب

٣. اذا كان ق$(\text{س}) = \sqrt{\text{س}}$ ، ماقيمة قَ(٤) ؟

$$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\text{قَ}(٤) = \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$$

$$ق'(س) = \frac{1}{2 س^{\frac{1}{2}}}$$

ج

٤. ما ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) $= \frac{٥}{س^{٢} - ١}$ عند س=٢ ؟

الحل ميل المماس عند س = ٢ ويساوي $ق'(٢)$ ، لذا نجد المشتقة :

$$م = ق'(س) = \frac{(٠) \times ٥ - (س^{٢} - ١) \times (٢س)}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$$

$$م = ق'(س) = \frac{-١٠ س}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$$

$$م|_{س=٢} = ق'(٢) = \frac{-١٠ \times (٢)}{(٢^{٢} - ١)^{٢}} = \frac{-٢٠}{٩}$$

ب

٥. اذا كانت ص $= (س - ١)^{٥}$ ، ما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = -١ ؟

الحل ص $= (س - ١)^{٥}$

$$\frac{د ص}{د س} = ٥ \times (س - ١)^{٤} \times ١$$

$$\frac{د ص}{د س}|_{س=-١} = ٥ \times (-١ - ١)^{٤}$$

$$\frac{د ص}{د س}|_{س=-١} = ٥ \times (-٢)^{٤}$$

$$\frac{د ص}{د س}|_{س=-١} = ٥ \times ١٦$$

$$\frac{د ص}{د س}|_{س=-١} = ٨٠$$

د

٦. اذا كان ق(س) $= س^{٢}$ ، هـ(س) $= س - ٢$ ما قيمة $(ق \circ هـ)'(١)$؟

الحل $ق'(س) = ٢س$ ، $هـ'(س) = ١$ ، $هـ(س) = -١$

$$(ق \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) . هـ'(س)$$

$$(ق \circ هـ)'(١) = ن'(هـ(١)) . هـ'(١)$$

$$ن' = (-١)' \times ١$$

$$= ٢ \times -١ \times ١$$

$$= -٢$$

أ

٧. اذا كان ق(س) = ٦س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٦} + ١٠ ، ما قيمة قَ(١) ؟

الحل

ق(س) = ٦س^{٢} − $\frac{١}{٣}$ س^{٦} + ١٠

قَ(س) = ١٢س − ٢س^{٥}

قَ(١) = ١٢×١ − ٢×١^{٥} = ١٠

د

٨. اذا كان ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = س + ١ ما قيمة (هـ ○ ق)$'$(٠)؟

الحل

قَ(س) = ٢س ، هَ(س) = ١ ، هـ(س) = ١

(هـ ○ ق)$'$(س) = هـ$'$(ق(س)).ق$'$(س)

(هـ ○ ق)$'$(٠) = هـ$'$(ق(٠)).ق$'$(٠)

هـ$'$(٠).(٠×٢) =

٠ =

-

٩. اذا كانت ص = (١ − ٢س)^{٢} ماقيمة $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ عندما س=٣ ؟

الحل

ص = (١ − ٢س)^{٢}

$\frac{دص}{دس}$ = ٢×(١ − ٢س)×−٢

$\frac{دص}{دس}$ = −٤×(١ − ٢س)

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = −٤×−٢

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ٨

-

١٠. اذا كان ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١) فما قيمة قَ(س) ؟

الحل

ق(س) = هـ(٣س^{٢} + ١)

قَ(س) = هَ(٣س^{٢} + ١)(٦س)

قَ(س) = ٦س هَ(٣س^{٢} + ١)

ج

السؤال الثاني: اذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) عندما تتغير س من من $س_١ = ٢$ الى $س_٢ = ٥$ هو ١٠ ، أجد ق(٥) اذا كان ق(٢) = ٦ ؟

الحل

متوسط تغير الأقتران $ق(س) = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = ١٠$$

$$\frac{ق(٥) - ٦}{٣} = \frac{١٠}{١} \quad \text{(بالضرب التبادلي)}$$

$$ق(٥) - ٦ = ٣٠$$

$$ق(٥) = ٣٦$$

السؤال الثالث : اذا كان متوسط التغير في الاقتران $ق(س) = س^٢ + ٣$ ، عندما تتغير س من ٢ الى ا يساوي ٦ فما قيمة ا ؟

الحل

متوسط تغير الأقتران $ق(س) = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$\frac{ق(ا) - ق(٢)}{ا - ٢} = ٦$$

$$\frac{(ا^٢ + ٣) - (٢^٢ + ٣)}{ا - ٢} = ٦$$

$$\frac{ا^٢ + ٣ - ٧}{ا - ٢} = ٦$$

$$\frac{ا^٢ - ٤}{ا - ٢} = \frac{٦}{١} \quad \text{(بالضرب التبادلي)}$$

$$ا^٢ - ٤ = ٦(ا - ٢)$$

$$ا^٢ - ٤ = ٦ا - ١٢$$

$$ا^٢ - ٦ا + ١٢ - ٤ = ٠$$

$$ا^٢ - ٦ا + ٨ = ٠ \quad \text{(بتحليل العبارة التربيعية)}$$

$$(ا - ٤)(ا - ٢) = ٠$$

$$ا = ٤ ، ا = ٢$$

لكم أ = ٢ مرفوضة لانها تجعل المقام يساوي صفر

السؤال الرابع: **اذا كان** $ق(س) = س^{٢} + ١$، **أجد** $ق'(٣)$ **باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة .**

الحل

$$ق'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[(٣+هـ)^{٢} + ١] - [٣^{٢} + ١]}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{[٩ + ٦هـ + هـ^{٢} + ١] - ١٠}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٩ + ٦هـ + هـ^{٢} + ١ - ١٠}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٦هـ + هـ^{٢}}{هـ}$$ (بأخذ هـ عامل مشترك)

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٦ + هـ)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} (٦ + هـ)$$

$$= ٦$$

السؤال الخامس : **اذا كان** $ق(س) = (س^{٢} + ٢)(٣س + ٤)$ **أجد** $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$

الحل

$$ق'(٢) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$$ نجد المشتقة للاقتران $ق(س)$

$$ق(س) = (س^{٢} + ٢)(٣س + ٤)$$

$$ق'(س) = (س^{٢} + ٢) \times ٣ + (٣س + ٤) \times (٢س)$$

$$ق'(٢) = (٢^{٢} + ٢) \times ٣ + (٣ \times ٢ + ٤) \times (٢ \times ٢)$$

$$ق'(٢) = ٦ \times ٣ + (٦ + ٤) \times ٤$$

$$ق'(٢) = ١٨ + (١٠ \times ٤)$$

$$ق'(٢) = ٥٨$$

ومنها : $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ} = ٥٨$

السؤال السادس: **اذا كان** م(س)=س^{٢} × ق(س) أجد مَ(٣) علما بأن ق(٣) = −٢

قَ(٣) = ٥

الحل

م(س)=س^{٢} × ق(س)

مَ(س) = س^{٢} × قَ(س) + ق(س) × ٢س

مَ(٣) = ٣^{٢} × قَ(٣) + ق(٣) × ٢ × ٣

مَ(٣) = ٩ قَ(٣) + ٦ق(٣)

مَ(٣) = ٩ × ٥ + ٦ × −٢

مَ(٣) = ٤٥ + −١٢

مَ(٣) = ٣٣

السؤال السابع : **أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى** ق(س) = س^{٣} + ٥س^{٢} − ٣ **عند النقطة التى احداثيها السيني** = ١ .

الحل

لايجاد معادله العمودي يلزم ايجاد :

اولا : نقطة التماس = (س$_{١}$، ص$_{١}$) = (١، ق(١))

ق(١) = (١)^{٣} + ٥ × (١)^{٢} − ٣ = ٣

ومنها نقطة المماس هي : (س$_{١}$، ص$_{١}$) = (١، ٣)

ثانيا :ميل المماس عند س = ١ ويساوي قَ(١) ، **لذا نجد المشتقة :**

م = قَ(س) = ٣س^{٢} + ٥س ومنها

م$|_{س=١}$ = قَ(١) = ٣ × ١^{٢} + ٥ × ١ = ٨ (اي ان ميل المماس = ٨)

ثالثا : معادلة العمودي على المماس :

(ص − ص$_{١}$) = $\frac{-١}{م}$ (س − س$_{١}$)

(ص − ٣) = $\frac{-١}{٨}$ (س − ١)

ص + $\frac{١}{٨}$ س − ٣ − $\frac{١}{٨}$ = ٠

ص + $\frac{١}{٨}$ س − $\frac{٢٥}{٨}$ = ٠

المعادلة : ٨ص + س − ٢٥ = ٠

السؤال الثامن: أجد قيمة الثابت أ التى تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران $ص = أس^{٢} + ٣س + ١$ **مساويا ٤ عندما س=١ .**

الحل

$م = ق'(س) = ٢أس + ٣$

وبمعلومية أن : ميل المماس لمنحنى مساويا ٤ عندما س=١

أي أن :

$م|_{س=١} = ٤$

فأن : $ق'(١) = ٢أ + ٣ = ٤$

$٢أ = ١$

$\boxed{أ = \frac{١}{٢}}$

السؤال التاسع: أجد القيم القصوى للاقتران $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٧$

الحل

اولا : نوجد مشتقة الاقتران ق(س) :

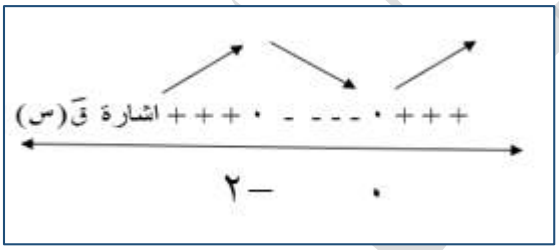
$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٦س$

ثانيا : بوضع $ق'(س) = ٠$ ،ومنها :

$٣س^{٢} + ٦س = ٠$

$٣س(س + ٢) = ٠$

$س = ٠ ، س = -٢$



ومن ملاحظة اشارة $ق'(س)$ في الشكل المجاور :

١ تغيرت الاشارة من موجب الى سالب عند $س = -٢$ ومنها فأن $ق(-٢)$ قيمة عظمى محليه وقيمتها

$ق(-٢) = -٨ + ٣(-٢)^{٢} + ٧ = ١١$

٢ تغيرت الاشارة من سالب الى موجب عند $س = ٠$ ومنها فأن $ق(٠)$ قيمة صغرى محليه وقيمتها :

$ق(٠) = ٠ + ٠ + ٧ = ٧$

ملاحظات الطالب

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

الوحدة الرابعة / الأحصاء

الدرس الأول / العلامة المعيارية

القسم الأول : الملخص

القيمة الخام : هي القيمة الاصلية التى نحصل عليها في اختبار أو مقياس ما ، ويرمز لها بالرمز " س "

العلامة المعيارية : هى عدد الانحرافات المعيارية التى تبعدها القيمة (العلامة) الخام عن الوسط الحسابي ، وبالرموز فأن :

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

حيث ان :

μ : هي الوسط الحسابي= مجموع القيم / عدد القيم $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$

σ : هي الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي $= \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \mu)^2}{ن}}$

أتعلم :

الوسط الحسابي $(\bar{ع})$ لجميع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر ، وانحرافها المعياري $(\sigma_ع)$ يساوي واحد

أي أن :

لمجموع العلامات المعيارية لتوزيع ما = صفر

ليس الجمال بأثواب تزيننا ،،، إن الجمال جمال العلم والأدب

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: في مزرعة خراف اذا كانت كتل (٥) كالاتي : ٤٠ كغم ، ٥٠ كغم، ٦٠ كغم، ٧٠ كغم ، ٥٥كغم أجد العلامات المعيارية للكتل ؟

الحل لايجاد العلامات المعيارية ، نجد اولا كل من $\mu ، \sigma$:

أولا: الوسط الحسابي $\mu = \frac{\sum_{ر=١}^{٥} س_ر}{٥}$

$$= \frac{٤٠+٥٠+٦٠+٧٠+٥٥}{٥} = ٥٥$$

ثانيا : نجد الانحراف المعياري عن طريق الجدول :

س	$س - \mu$	$(س - \mu)^٢$	$ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$
٤٠	١٥-=٥٠-٤٠	٢٥٥	$\frac{١٥-}{١٠} = ١,٥-$
٥٠	٥-=٥٥-٥٠	٢٥	$\frac{٥-}{١٠} = ٠,٥-$
٦٠	٥=٥٥-٦٠	٥	$\frac{٥}{١٠} = ٠,٥$
٧٠	١٥=٥٥-٧٠	٢٥٥	$\frac{١٥}{١٠} = ١,٥$
٥٥	٠=٥٥-٥٥	٠	$\frac{٠}{١٠} = ٠$
المجموع	صفر	٥٠٠	

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \mu)^٢}{٥}}$$

$$= \sqrt{\frac{٥٠٠}{٥}}$$

$$= \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

(ايجاد العلامات المعيارية في الجدول العمود الرابع)

السؤال الثاني : **اذا علمت ان علامة علي في امتحان اللغة العربية ٧٢، وفي المحاسبة ٦٩ ، وفي الرياضيات ٧٥ ، والوسط الحسابي لعلامات طلبة الصف في المواد الثلاث بالترتيب هو ٦٩، ٦٨، ٧٩ ، والانحراف المعياري ١ ،٤، ٢ ، في أي المواد كان تحصيل علي أفضل ؟**

الحل لنستطيع الحكم نجد العلامات المعيارية المناظرة للمواد الثلاثة :

العلامة المعيارية للغة العربية $(س = ٧٢)$ هو $ع = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٧٢ - ٦٩}{١} = ٣$

العلامة المعيارية للمحاسبة $(س = ٦٩)$ هو $ع = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٦٩ - ٦٨}{٤} = ٠,٢٥$

العلامة المعيارية للرياضيات $(س = ٧٥)$ هو $ع = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٧٥ - ٧٩}{٢} = -٢$

بمقارنة العلامات المعيارية فأن افضل تحصيل هو اللغة العربية .

السؤال الثالث: اذا كان الوسط الحسابي لاطوال أشجار الصنوبر في محيط برك سليمان في بيت لحم ١٧ مترا ، والانحراف المعياري لمجموعة الاطوال يساوي ٣ م ، أجد الاطوال الحقيقية للأشجار التى العلامات المعيارية لأطوالها هي : ٢ ، -١,٨ .

الحل المعطيات : $\mu = ١٧$ ، $\sigma = ٣$

بمعلومية أن :

$ع_١ = ٢$

$٢ = \frac{س_١ - \mu}{\sigma}$

$٢ = \frac{س_١ - ١٧}{٣}$

$س_١ - ١٧ = ٦$

$\boxed{س_١ = ٢٣}$

$ع_٢ = -١,٨$

$-١,٨ = \frac{س_٢ - \mu}{\sigma}$

$-١,٨ = \frac{س_٢ - ١٧}{٣}$

$س_٢ - ١٧ = -٥,٤$

$س_٢ = -٥,٤ + ١٧$

$\boxed{س_٢ = ١١,٦}$

السؤال الرابع : اذا حولت القيم الخام لمجتمع احصائي الى علامات معيارية وكانت كالاتي ٠,٥ ، ٠,٥ ك ،-١,٥ ، ٠ ، -٠,٥ أجد قيمة ك؟ أتحقق أن الانحراف المعياري للعلامات المعيارية يساوي ١.

الحل بمعلومية ان :

مجموع العلامات المعيارية = صفر

$$٠,٥ + ٠,٥ \text{ ك} + -١,٥ + ٠ + -٠,٥ = \text{صفر}$$

$$٠,٥ \text{ ك} + -١,٥ = \text{صفر}$$

$$٠,٥ \text{ ك} = ١,٥$$

$$\text{ك} = \frac{١,٥}{٠,٥} = ٣$$

لايجاد المطلوب الثاني نجد : أولا: الوسط الحسابي $\mu = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$

$$= \frac{٠,٥ + ٠ + (-١,٥) + ١,٥ + (-٠,٥)}{٥} = ٠$$

ثانيا : نجد الانحراف المعياري عن طريق الجدول :

ع	$س - \mu$	$(س - \mu)^{٢}$
٠.٥	٠.٥-=٠.٥-٠	٠.٢٥
١.٥	١.٥-=١.٥-٠	٢.٢٥
١.٥-	١.٥=(١.٥-)-٠	٢.٢٥
٠	٠=٠-٠	٠
٠.٥-	٠.٥=(٠.٥-)-٠	٠.٢٥
المجموع	صفر	٥

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \mu)^2}{ن}}$$

$$= \sqrt{\frac{٥}{٥}} = \sqrt{١} = ١$$

السؤال الخامس: اذا كانت العلامتان ٤٤ ، ٨٤ تقابلهما العلامتان المعياريتان -٢، ٣ على الترتيب .أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع العلامات الاصلية ؟

الحل بمعلومية أن :

عندما $س_١ = ٤٤$ فأن :

$ع_{٤٤} = -٢$

$$-٢ = \frac{\mu - ٤٤}{\sigma}$$ (بالضرب التبادلي)

التبادلي) $-٢\sigma = \mu - ٤٤$

$\sigma ٣ = \mu - ٨٤$

$\boxed{١} \leftarrow \boxed{\mu - \sigma ٢ = ٤٤}$

عندما $س_٢ = ٨٤$ فأن :

$ع_{٨٤} = ٣$

$$٣ = \frac{\mu - ٨٤}{\sigma}$$ (بالضرب

$\boxed{\mu + \sigma ٣ = ٨٤} \leftarrow \boxed{٢}$

باستخدام الحذف للمعادلتين :

$$\begin{array}{rcrcr} ٨٤ & = & \sigma ٣ & + & \mu \\ ٤٤ & = & \sigma ٢ & - & \mu \\ \hline ٤٠ & = & \sigma ٥ & & \end{array}$$

$\sigma = ٨$ بالتعويض في معادلة $\boxed{١}$

$٤٤ = ٨ \times ٢ - \mu$

$٤٤ = ١٦ - \mu$

$\mu = ٦٠$

السؤال السادس : اذا كانت العلامات المقابلة للعلامتين ٨٥، ٧٠ ، هي ١ ، -٢ على الترتيب . أحسب العلامة المعيارية للعلامة الخام ٧٥.

الحل لايجاد قيمة س نجد اولا كل من : $\mu ، \sigma$

بمعلومية أن :

عندما $س_{١} = ٨٥$ فأن :

$ع_{٨٥} = ١$

$\frac{\mu - ٨٥}{\sigma} = ١$ (بالضرب التبادلي)

$\sigma = \mu - ٨٥$ التبادلي)

$\sigma ٢- = \mu - ٧٠$

$\boxed{\mu + \sigma = ٨٥} \leftarrow \boxed{١}$

عندما $س_{٢} = ٧٠$ فأن :

$ع_{٧٠} = ٢-$

$\frac{\mu - ٧٠}{\sigma} = ٢-$ (بالضرب)

$\boxed{\mu + \sigma ٢- = ٧٠} \leftarrow \boxed{٢}$

باستخدام الحذف للمعادلتين :

$$\begin{array}{rrrr} \sigma & + & \mu & = ٨٥ \\ \sigma ٢- & + & \mu & = ٧٠ \\ \hline \sigma ٣ & & & = ١٥ \end{array}$$

$\boxed{\sigma = ٥}$ بالتعويض في معادلة $\boxed{١}$

$\mu + \sigma = ٨٥$

$\mu + ٥ = ٨٠$

$\boxed{\mu = ٨٠}$

العلامة المعيارية المقابلة للعلامة $(س = ٧٥)$ هو $ع = \frac{س - \mu}{\sigma} = \frac{٧٥ - ٨٠}{٥} = ١-$

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#		الجواب
١	توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٥٦ وانحرافه المعياري ١٠ ما هي العلامات المعيارية المناظرة لكل من العلامات الخام التالية : ٤٠ ، ٥٦ ، ٧٠ .	على الترتيب (-١.٦ ، ٠ ، ١.٤)
٢	الجدول التالي يوضح علامات طالب في ثلاث مباحث موزعة كما يلي ١) ما هي علامة الطالب المعيارية في المباحث الثلاثة . ٢) في أي المباحث كان مستوى الطالب أفضل .	١)(عربي ١.٣٣) (علوم ٠.٤) (رياضيات ٠.٥) ٢)الرياضيات
٣	إذا كانت المفردات التالية تمثل ٧ علامات معيارية كما يلي : ١.٥ ، -١ ، ١ ، ٠ ، -٠.٥ ، أ ، ٣أ جد قيمة أ .	أ = -٠.٢٥
٤	**صف مكون من ٢٠ طالبة ، اذا كانت علامات الطالبات منى ، عبير ، أماني في الرياضيات هي: ٩٠،س،٨٠ على الترتيب والعلامات المعيارية المقابلة لها هي ٣،-١ ، ٢ ، أجد علامة الطالبة عبير.**	٥٠
٥	**اذا كان الفرق بين علامتي أمل وسارة يساوي ٨ والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهما يساوي ٢ ، جد الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف .**	٤

المبحث	الوسط الحسابي	الانحراف المعياري	علامة الطالب
اللغة العربية	٨٢	٦	٧٠
العلوم	٦٤	١٠	٦٨
الرياضيات	٧٦	٨	٨٠

كراسة الكامل

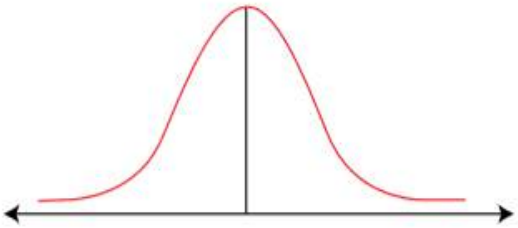
الوحدة الرابعة / الأحصاء والاحتمال

الدرس الثاني / التوزيع الطبيعي المعياري

القسم الأول : الملخص

تعريف :

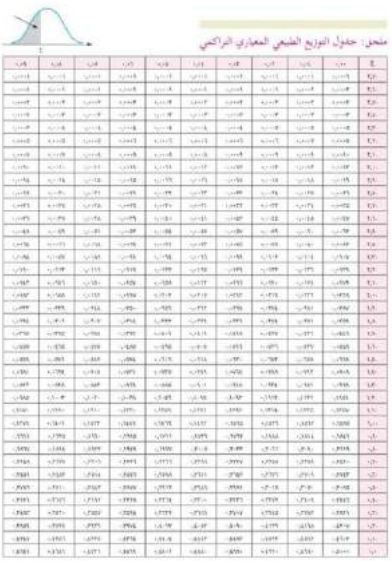
منحنى التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى تكراري لتوزيع العلامات المعيارية مقابل تكراراتها ،بوسط حسابي يساوي صفر ، وانحراف معياري يساوي واحد .

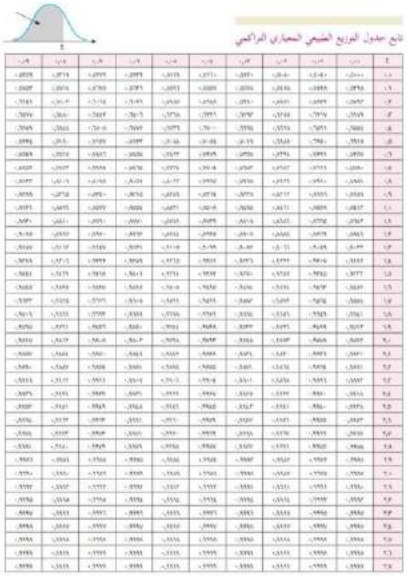


وأهم خصائصه :

١. التمثيل البياني له منحنى يشبه الجرس ومتماثل حول المستقيم الرأسي المار بالوسط .
٢. يتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال .
٣. المنحنى متصل .
٤. يقترب المنحنى من المحور س ، ولكنه لايمسه .
٥. المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري يساوي وحدة مساحة واحدة .

ومن الجدير بالاشارة ان المساحة المحصورة تحت ع يمكن حسابها من خلال جداول منظمة ودقيقة أعدت لهذا الغرض .





ملاحظات مهمه:

١. بما ان المساحة تحت المنحنى تساوي ١
المساحة فوق $(ع = ا)$ = ١ ـ المساحة تحت $(ع = ا)$
المساحة تحت $(ع = -ا)$ = المساحة تحت $(ع = ا)$
٢. المساحة المحصورة بين $(ع = ا)$ و $(ع = ب)$ = المساحة تحت $(ع = ب)$ ـ المساحة تحت $(ع = ا)$

ملاحظات عامة على التطبيقات على التوزيع الطبيعي المعياري :

١. نحول القيم الخام الي قيم معيارية باستخدام القانون
٢. نسبة المساحة أو نسبة الاشخاص أو نسبة الطلبة : هي نفسها المساحة حسب المطلوب من المسألة .
٣. النسبة المئوية لعينة ما = المساحة × ١٠٠٪
٤. عدد العينة = العدد الكلي ×المساحة

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في كل من الحالات الاتية :

فرع أ : تحت (ع = ١,٣٨)

الحل

المساحة تحت (ع = ١,٣٨) = = ٠,٩١٦٢

(من تقاطع الصف = ١,٣ والعمود = ٠,٠٨)

فرع ب : فوق (ع = ٠,٩٠)

الحل

المساحة فوق (ع = ٠,٩٠) = ١ – المساحة تحت (ع = ٠,٩٠)

= ١ – ٠,٨١٥٩

= ٠,١٨٤١

فرع جـ : بين (ع = –١,٥) و (ع = ١,٥)

الحل

المساحة بين (ع = –١,٥) و (ع = ١,٥)

= المساحة تحت (ع = ١,٥) - المساحة تحت (ع = –١,٥)

= ٠,٩٣٣٢ – ٠,٠٦٦٨

= ٠,٨٦٦٤

السؤال الثاني : **أجد العلامة المعيارية (ع) في كل من الحالات الاتية :**

فرع أ :المساحة تحت ع هي ٠,٨٥٥٤

الحل

نبحث في الجدول عن المساحة ٠,٨٥٥٤ ، أجد انها تقع في تقاطع الصف = ١,٠ مع العمود ٠,٠٦ ومنها فأن : ع = ١,٠٦

فرع ب : المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

الحل

المساحة تحت ع هي ٠,٧٧٣٤ = ١ ـ المساحة فوق ع هي ٠,٧٧٣٤

= ١ − ٠,٧٧٣٤

= ٠,٢٢٦٦

نبحث في الجدول عن المساحة ٠,٢٢٦٦ ، أجد انها تقع في تقاطع الصف = -٠,٧ مع العمود ٠,٠٥ ومنها فأن : ع = -٠,٥٧

فرع جـ : المساحة بين ع و -ع هي ٠,٦

الحل

المساحة بين ع و -ع = ٠,٦

المساحة تحت ع ــ المساحة تحت – ع = ٠,٦

المساحة تحت ع ــ المساحة فوق ع = ٠,٦

المساحة تحت ع ــ (١ ـ المساحة تحت ع) = ٠,٦

المساحة تحت ع ــ ١ + المساحة تحت ع = ٠,٦

٢ × المساحة تحت ع ــ ١ = ٠,٦

٢ × المساحة تحت ع = ١,٦

المساحة تحت ع = ٠,٨

نبحث في الجدول عن المساحة ٠,٨ ، القيمة نفسها لا نجدها لذلك ناخد القيمة القريبة منها وهي ٠,٧٩٩٥ أجد انها تقع في تقاطع الصف = ٠,٨ مع العمود ٠,٠٥ ومنها فأن : ع = ٠,٨٤

السؤال الثالث: مدرسة ثانوية فيها ٥٠٠ طالب ، أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ١٦٥ سم ، وبانحراف معياري ١٠ سم ، ما نسبة الطلبة الذين تنحصر أطوالهم بين ١٥٠ سم ، ١٨٠ سم ؟ وماعددهم ؟ (المعطيات $\mu = ١٦٥$ ، $\sigma = ١٠$)

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ١٥٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١٦٥ - }{١٠} = -١,٥$$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ١٨٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١٦٥ - ١٨٠}{١٠} = ١,٥$$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين (ع = -١,٥) و (ع = ١,٥)

= المساحة تحت (ع = ٢) - المساحة تحت (ع = -٠,٥)

= ٠,٩٣٣٢ - ٠,٠٦٦٨ = ٠,٨٦٦٤

ثالثا : عدد الطلاب = المساحة × العدد الكلي

= ٠,٨٦٦٤ × ٥٠٠

= ٤٣٣,٨ ≈ ٤٣٣ طالب

السؤال الرابع : اذا كان الزمن الذى يستغرقة بائع جرائد للوصول الى أحد البيوت يتخذ توزيعا طبيعيا ، بوسط حسابي ١٢ دقيقة وبانحراف معياري دقيقتان ، وكان هذا الموزع ينقل الجرائد يوميا على مدار ٣٦٥ يوما ، ما عدد الايام التى يستغرق فيها الموزع زمنا :

أ) يزيد على ١٧ دقيقة ؟

ب) ينحصر بين ٩ ، -٣ دقيقة ؟

المعطيات : $(\mu = ١٢ ، \sigma = ٢)$

أ) يزيد على ١٧ دقيقة ؟

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ١٧ الي علامة معيارية المقابلة لها $= ٢,٥ = \frac{١٢ - ١٧}{٢} = \frac{\mu - ١٧}{\sigma}$

ثانيا : نجد نسبة المساحة فوق (ع = ٢,٥) = ١ - المساحة تحت (ع = ٢,٥)

= ١ - ٠,٩٩٣٨ = ٠,٠٠٦٢

ثالثا: عدد الايام = المساحة × العدد الكلي

$= ٠,٠٠٦٢ \times ٣٦٥$

$= ٢,٢٦٣$

≈ ٢ يوم

ب) ينحصر بين ٩ ، -٣ دقيقة ؟

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ٩ الي علامة معيارية المقابلة لها $= \frac{٩-١٢}{٢} = -١,٥$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ١٣ الي علامة معيارية المقابلة لها

$= \frac{١٧-١٢}{٢} = ٠,٥$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين $(ع = -١,٥)$ و $(ع = ٠,٥)$

= المساحة تحت $(ع = ٠,٥)$ - المساحة تحت $(ع = -١,٥)$

$= ٠,٦٩١٥ - ٠,٠٦٦٨ = ٠,٦٢٤٧$

ثالثا : عدد الايام = المساحة × العدد الكلي

$= ٠,٦٢٤٧ \times ٣٦٥$

$= ٢٢٨$ يوم

السؤال الخامس : اذا كانت علامات ٦٠٠ طالب تتخذ توزيعا طبيعيا بوسط حسابي ٧٢ وبانحراف معياري ٨ وكانت علامة النجاح هي ٦٠ ، أجد :

أ) ما النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢ ، ٧٨ ؟

ب) عدد الطلبة الراسبين ؟

المعطيات : (العدد الكلي = ٦٠٠ ، $\mu = ١٢$ ، $\sigma = ٢$)

أ) ما النسبة المئوية للطلبة الذين تقع علاماتهم بين ٦٢ ، ٧٨ ؟

اولا : نحول العلامة الخام س = ٦٢ الي علامة معيارية المقابلة لها

الحل

$$= \frac{٦٢ - ٧٢}{٨} = -١,٢٥$$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ٧٨ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{٧٨ - ٧٢}{٨} = ٠,٧٥$$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين (ع = -١,٢٥) و (ع = ٠,٧٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,٧٥) - المساحة تحت (ع = -١,٢٥)

= ٠,٧٧٣٤ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٦٦٧٨

ثالثا: النسبة المئوية = المساحة × ١٠٠٪

= ٠,٦٦٧٨ × ١٠٠٪ = ٦٦,٧٨٪

ب) عدد الطلبة الراسبين ؟ (علامة النجاح = ٦٠ أي ان الرسوب من حصل على اقل من ٦٠)

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ٦٠ الي علامة معيارية المقابلة لها $= \frac{٦٠ - ٧٢}{٨} = -١,٥$

ثانيا : المساحة تحت = ٠,٠٦٦٨ (ع = -١,٥)

ثالثا : عدد الطلاب = المساحة × العدد الكلي

= ٠,٠٦٦٨ × ٦٠٠

= ٤٠,٠٨ ≈ ٤٠ طالب

السؤال السادس: تتبع رواتب ١٠٠٠ موظف في احدى الشركات توزيعا طبيعيا بوسط ٧٠٠ دينار ، وبانحراف معياري ٢٠ دينارا . أحسب عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ٦٨٠ دينارا و ٧٤٠ دينارا

اولا : نحول العلامة الخام س = ٦٨٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

الحل

$$= \frac{٦٨٠ - ٧٠٠}{٢٠} = -١$$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ٧٤٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{٧٤٠ - ٧٠٠}{٢٠} = ٢$$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين (ع = -١) و (ع = ٢)

= المساحة تحت (ع = ٢) - المساحة تحت (ع = -١)

$= ٠,٩٧٧٢ - ٠,١٥٨٧ = ٠,٨١٨٥$

ثالثا : عدد الموظفين = المساحة × العدد الكلي

$= ٠,٨١٨٥ \times ١٠٠٠$

$= ٨١٨,٥$

≈ ٨١٩ موظف

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#		الجواب
١	اوجد المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي المعياري في الحالات التالية : ١) المساحة تحت ع = ٢.٥ ٢) المساحة فوق ع = - ١.٥ ٣)المساحة تحت ع = - ١.٨٤ ٤)المساحة فوق ع = ٢.٥ ٥) المساحة بين ع = ١.١٥ وع = ٣.٢١ ٦)المساحة بين ع = ٢.٠٩ وع = - ١.٢٧	١) ٠.٩٩٣٨ ٢) ٠.٠٦٦٨ ٣) ٠.٢٠٠٥ ٤) ٠.٠٦٦٨ ٥) ٠.١٢٤٤ ٦) ٠.٨٧٩٧
٢	ما هي العلامة المعيارية التي تكون مساحة المنحنى الطبيعي الواقعة تحتها تساوي ٠.٦٥	٠.٣٩
٣	إذا كانت كتل ١٠٠٠ شخص تتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٦٢ كغم انحراف معياري ١٠ ، ما نسبة الأشخاص التي تقع كتلتهم بين ٦٥ و ٨٥	٠.٣٩
٤	إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مصابيح ينتجها مصنع تتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي ١٣٠٠ ساعة وانحراف معياري ٢٠٠ ساعة ، اختير احد المصابيح عشوائيا ،ما احتمال أن يبقى المصباح صالح لمدة أطول من ١٨٠٠ ساعة	٠.٠٠٦٢

٥	كتلة رغيف الخبز ينتجه مخبز تتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٢٠٠ غم وانحراف معياري ١٠	١) ٠.٩٣٣٢ ٢) ٠.٣٤
٦	إذا كانت علامات طلبة إحدى الصفوف في امتحان الرياضيات تتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٧٠ وانحراف معياري يساوي ١٠ ، اختير احد الطلبة بصورة عشوائية ،أجد : ١) ما احتمال أن تكون علامته اكبر من ٩٠ ٢) إذا تقرر إعطاء أفضل ١٠% من الطلبة جوائز تقديرية ما هي اقل علامة تحصل على جائزة .	١) ٠.٩٧٧٢ ٢) ٨٢.٨
٧	إذا كانت أطوال مجموعة من الطلبة عددهم ٥٠٠٠ طالب تتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي ١٦٥ سم وانحراف معياري يساوي ١٠ ، جد : ١) ما النسبة المئوية للطلبة الذين تنحصرأطوالهم بين ١٥٠ و ١٨٥، وماعددهم ٢) ما هو الطول الذي يقع ٨٢.٣٨% من الطلبة تحته .	١) ٧٧% ، وعدد الطلبة=٣٨٥٠ طالب ٢)١٧٤.٣سم
٨	إذا كانت علامة امتحان الرياضيات تتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٦٥ وانحراف معياري ١٠ اوجد ما يلي : ١) نسبة الطلبة الذين حصلوا على علامات تقل عن ٦٥ . ٢) نسبة الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن ٧٠ . ٣) نسبة الطلبة الراسبون علما أن علامة النجاح ٥٠ .	١) ٠.٥٠ ٢) ٠.٣٠٨٥ ٣) ٠.٠٦٦٨

الوحدة الرابعة / الأحصاء والاحتمال

التمارين العامة

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات (١٠-١) :

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	جـ	جـ	د	ب	أ	ب	ب	أ	د	أ

١. ما قيمة الوسط الحسابي (μ) والانحراف المعياري (σ) لمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري :

الحل

$\mu = ٠$ ، $\sigma = ١$

ج

٢. ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٧٧ علما بأن الوسط الحسابي ٧٠ والانحراف المعياري ١٤ ؟

الحل

العلامة المعيارية $(س = ٧٧)$ هو $ع = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$$= \frac{٧٧ - ٧٠}{١٤}$$

$$= \frac{٧}{١٤} = ٠,٥$$

ج

٣. اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات ٧٥ و والانحراف المعياري ١٥ فما العلامة الخام المناظرة للعلامة المعيارية ع = ٢ ؟

الحل

بمعلومية ان : $ع = ٢$

$$٢ = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$٢ = \frac{س - ٧٥}{١٥} \quad \text{(بالضرب التبادلي)}$$

$$س - ٧٥ = ٣٠$$

$$\boxed{س = ١٠٥}$$

د

٤. اذا كان تقييم أداء موظفي بنك أ يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٣,٨ وبانحراف معياري ٠,٤ وتقييم موظفي بنك ب يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٣,٦ وبانحراف معياري ٠,٢ ، اذا كان وسيم موظفا في بنك أ وتقييمه ٤,٣ وفراس موظفا في بنك ب تقييمه ٣,٧ ما العبارة الصحيحة ؟

الحل

بنك أ : $\mu = ٣,٦$ ، $\sigma = ٠,٢$

بنك ب : $\mu = ٣,٨$ ، $\sigma = ٠,٤$

وسيم موظف في بنك أ وتقييمة $(س = ٤,٣)$

فراس موظف في بنك ب وتقييمة $(س = ٣,٧)$

للمقارنة بين الموظفين ، نحول تقييم كل منهما الي علامات معيارية :

العلامة المعيارية لـ وسيم $(س = ٤,٣)$ هي $= \frac{٣,٨ - ٤,٣}{٠,٤} = ١,٢٥ - ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$

العلامة المعيارية لـ فراس $(س = ٣,٧)$ هي $= \frac{٣,٨ - ٣,٧}{٠,٤} = ٠,٢٥ - ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$

ب

ومن مقارنة العلامتان المعياريتان فأن أداء وسيم افضل من أداء فراس

---

٥. ما المساحة تحت $(ع = ٢,٨٥)$ ؟

الحل

من تقاطع الصف = ٢,٨ مع المعمود = ٠,٠٥ ، فأن المساحة = ٠,٩٩٧٨

أ

---

٦. ما مساحة المنطقة بين $(٠,٩٦ < ع < ١,٦٥)$ ؟

الحل

= المساحة تحت $(ع = ١,٦٥)$ - المساحة تحت $(ع = ٠,٩٦)$

$= ٠,٩٥٠٥ - ٠,٨٣١٥$

$= ٠,١١٩$

ب

---

٧. ما مجموع العلامات المعيارية لتوزيع طبيعي معياري ؟

الحل

قاعدة : مجموع العلامات المعيارية لتوزيع طبيعي معياري = صفر

ب

٨. اذا كانت العلامة الخام أقل من الوسط الحسابي في توزيع ما ، فان العلامة المعيارية المناظرة (ع) تكون :

أ

الحل قاعدة عامة : سالبة

٩. اذا كانت العلامات المعيارية لخمسة طلاب كما يلي ١، $\frac{١}{٢}$، $\frac{-٣}{٢}$، أ، $\frac{-١}{٢}$ فما قيمة الثابت أ؟

الحل قاعدة : مجموع العلامات المعيارية لتوزيع طبيعي معياري = صفر

ومنها : $١ + \frac{١}{٢} + \frac{-٣}{٢} + أ + \frac{-١}{٢} = ٠$

د

$\frac{١}{٢} + \frac{-١}{٢} + أ + \frac{-١}{٢} = ٠$ ومنها $أ = \frac{١}{٢}$

١٠. ما المساحة الواقعة فوق $(ع = ٠,٧٥)$

الحل المساحة فوق $(ع = ٠,٧٥)$ = ١ – المساحة تحت $(ع = ٠,٧٥)$

أ

$= ١ - ٠,٧٧٣٤$

$= ٠,٢٢٦٦$

السؤال الثاني: اذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتان ٧١، ٥٣ هما ٠.٥ ،-١ على الترتيب ،أجد الوسط الحسابي و الانحراف المعياري للعلامات الخام لطلاب الصف .

بمعلومية أن :

الحل عندما $س_١ = ٧١$ فأن : $ع_{٧١} = ٠,٥$

$\frac{\mu - ٧١}{\sigma} = ٠,٥$ (بالضرب التبادلي)

التبادلي) $\sigma ٠,٥ = \mu - ٧١$

$\sigma - = \mu - ٥٣$

$\boxed{\mu + \sigma ٠,٥ = ٧١} \leftarrow \boxed{١}$

عندما $س_٢ = ٥٣$ فأن : $ع_{٥٣} = -١$

$\frac{\mu - ٥٣}{\sigma} = -١$ (بالضرب)

$\boxed{\mu - \sigma = ٥٣} \leftarrow \boxed{٢}$

باستخدام الحذف للمعادلتين :

$$\begin{array}{rcl} \mu + \sigma ٠,٥ & = & ٧١ \\ \mu - \sigma & = & ٥٣ \\ \hline \sigma ١,٥ & = & ١٨ \end{array}$$

$\sigma = ١٢$ بالتعويض في معادلة [١]

$$\mu = \sigma - ٥٣$$
$$\mu = ١٢ - ٥٣$$
$$\mu = ٦٥$$

السؤال الثالث : خط إنتاج في مصنع ينتج أكياسا من الأرز بوسط حسابي يساوي ١.٠١ كغم وبانحراف معياري يساوي٠.٠٢ كغم، أجد :

أ) نسبة الاكياس التي كتلتها أقل من ١.٠٣ كغم .

ب)نسبة الأكياس التي تتراوح كتلها بين ١كغم و ١.٠٥ كغم .

المعطيات : $\mu = ١,٠١$ ، $\sigma = ٠,٠٢$

أ) نسبة الاكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم

الحل

اولا : نحول العلامة الخام $س = ١,٠٣$ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١,٠١ - }{٠,٠٢} = ١$$

ثانيا : المساحة تحت $= ٠,٨٤١٣$ $(ع = ١)$

ب) نسبة الأكياس التي تتراوح كتلها بين ١كغم و ١,٠٥ كغم .

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ١ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١,٠ - }{٠,٠٢} = -٠,٥$$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ١,٠٥ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١,٠٥ - ١,٠١}{٠,٠٢} = ٢$$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين (ع = -٠,٥) و (ع = ٢)

= المساحة تحت (ع = ٢) - المساحة تحت (ع = -٠,٥)

= ٠,٩٧٧٢ - ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٦٨٧

السؤال الرابع: إذا ارتبط عمر بطارية السيارة بالمسافة التي تقطعها السيارة باستعمال هذه البطارية وعلم ان عمر أحد أنواع بطاريات السيارات يتوزع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي ١٠٠٠٠٠كم ،وبانحراف معياري ١٠٠٠٠كم، وأنتجت إحدى الشركات ٢٠٠٠٠ بطارية من هذا النوع في الشهر ،اجد:

أ) عدد البطاريات التي تتراوح عمرها بين ٩٠٠٠٠كم ،١١٠٠٠٠كم .

ب) عدد البطاريات التي يزيد عمرها على ١٢٠٠٠٠كم .

ج)النسبة المئوية للبطاريات التي تتراوح اعمارها بين ٨٠٠٠٠كم ، ١١٠٠٠٠كم .

المعطيات : $\mu = ١٠٠٠٠٠$ ، $\sigma = ١٠٠٠٠$، العدد الكلي = ٢٠٠٠٠

أ) عدد البطاريات التي تتراوح عمرها بين ٩٠٠٠٠كم ،١١٠٠٠٠كم .

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ٩٠٠٠٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١٠٠٠٠٠ - ٩٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = -١$$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ١١٠٠٠٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١٠٠٠٠٠ - ١١٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١$$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين (ع = −١) و (ع = ١)

= المساحة تحت (ع = ١)- المساحة تحت (ع = −١)

= ٠,٨٤١٣ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٨٢٦

ثالثا : عدد البطاريات = المساحة × العدد الكلي

= ٠,٦٨٢٦ × ٢٠٠٠٠

= ١٣٦٥٢

≈ ٢٧٣

ب) عدد البطاريات التي يزيد عمرها على ١٢٠٠٠٠كم .

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ١٢٠٠٠٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١٠٠٠٠٠ - ١٢٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٢$$ (حسب قانون العلامة المعيارية)

ثانيا : نجد نسبة المساحة فوق (ع = ٢) = ١ − المساحة تحت (ع = ٢)

= ٠,٠٢٢٨ = ١ − ٠,٩٧٧٢

ثالثا: عدد البطاريات = المساحة × العدد الكلي

= ٠,٠٢٢٨ × ٢٠٠٠٠

= ٤٥٦

ج)النسبة المئوية للبطاريات التي تتراوح اعمارها بين ٨٠٠٠٠كم ، ١١٠٠٠٠كم .

الحل

اولا : نحول العلامة الخام س = ٨٠٠٠٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١٠٠٠٠٠ - ٨٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = -٢$$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ١١٠٠٠٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$$= \frac{١٠٠٠٠٠ - ١١٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١$$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين (ع = −٢) و (ع = ١)

= المساحة تحت (ع = ١)- المساحة تحت (ع = −٢)

= ٠,٨٤١٣ − ٠,٠٢٢٨ = ٠,٨١٨٥

ثالثا: النسبة المئوية = المساحة × ١٠٠٪

= ٠,٨١٨٥ × ١٠٠٪ = ٨١,٨٥٪

السؤال الخامس : نادي رياضي مكون من ٤٠٠ عضو تتبع اعمارهم التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٤٠ سنة وبانحراف معياري ٥ ،اجد:

أ) عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم عن ٥٠ سنة .

ب) عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥سنة إلى ٤٥ سنة .

الحل

أ)عدد الأعضاء الذين تزيد أعمارهم عن ٥٠ سنة .

المعطيات : العدد الكلي ٤٠٠ ، μ = ٤٠ ، σ = ٥

اولا : نحول العلامة الخام س = ٥٠ الي علامة معيارية المقابلة لها

$= \frac{٥٠-٤٠}{٥} = ٢$ (حسب قانون العلامة المعيارية)

ثانيا : نجد نسبة المساحة فوق (ع = ٢) = ١ − المساحة تحت (ع = ٢)

= ٠,٠٢٢٨ = ١ − ٠,٩٧٧٢

ثالثا: عدد الاعضاء = المساحة × العدد الكلي

= ٠,٠٢٢٨ × ٤٠٠

= ٩,١٢ ≈ ٩

ب)عدد الأعضاء الذين تتراوح أعمارهم بين ٣٥سنة إلى ٤٥ سنة .

اولا : نحول العلامة الخام س = ٣٥ الي علامة معيارية المقابلة لها

$= \frac{٣٥-٤٠}{٥} = -١$

(حسب قانون العلامة المعيارية)

نحول العلامة الخام س = ٤٥ الي علامة معيارية المقابلة لها $= \frac{٤٥-٤٠}{٥} = ١$

ثانيا : نجد نسبة المساحة بين (ع = −٠,٥) و (ع = ٢)

= المساحة تحت (ع = ٢) - المساحة تحت (ع = −٠,٥)

= ٠,٩٧٧٢ − ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٦٨٧

ثالثا: عدد الاعضاء = المساحة × العدد الكلي

= ٠,٦٦٨٧ × ٤٠٠

= ٢٧٣ عضو

ملاحظات الطالب

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

الوحدة الخامسة ٥

الرياضيات المالية

الدرس الأول / الفائدة

القسم الأول : الملخص

تعريف الفائدة

هو المبلغ الذي يدفع مقابل استخدام المال أو هي عائد استثمار مبلغ ما بمعدل معين لزمن معين . ويعبر عنه عادة بنسبة مئوية تسمى " سعر الفائدة " أو " معدل الفائدة ".

أنواع الفائدة

الفائدة البسيطة

وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ في نهاية كل فترة زمنية

الفائدة المركبة

وهي الفائدة التي تحسب على أصل المبلغ بعد إضافة الفائدة الى الأصل في نهاية كل فترة زمنية ، أي أنه بعد نهاية كل فترة زمنية يكون لدينا أصل جديد ، وهذا الأصل الجديد هو أصل المبلغ السابق مضافا اليه الفائدة من الفترة السابقة

العوامل المؤثرة في حساب الفائدة هي :

م	أصل المبلغ ، وهو عبارة عن مبلغ القرض ، أو المبلغ المستثمر
ع	معدل الفائدة هو العائد من وحدة رأس المال (دينار) لكل وحدة زمن (سنة)
ن	الفترة الزمنية وهي عبارة عن مدة القرض ، أو مدة الاستثمار

الفائدة البسيطة (Simple Interest):

تستخدم الفائدة البسيطة عند اقتراض الأموال، أو استثمارها لفترة زمنية قصيرة الأجل (عادة أقل من سنة) ، وتحسب دائما على أصل المبلغ عن كل وحدة زمنية ، أي أنها لا تعتبر من فترة زمنية إلى أخرى عند ثبات أصل القرض ، او أصل المبلغ المستثمر .

تسمى هذه الفائدة بالفائدة البسيطة ، وتحسب بالعلاقة :

$$ف = م \times ع \times ن$$

جملة المبلغ بفائدة بسيطة = المبلغ الأصلي + الفائدة البسيطة

$$ج = م + ف$$

حيث : (ف) هي الفائدة ، (م) أصل المبلغ ، (ع) معدل الفائدة ، (ن) الفترة الزمنية ، أو المدة بالسنوات ، واذا كانت بالأشهر = عدد الأشهر ÷ ١٢

أنواع الفائدة البسيطة:

اذا كانت مدة الإيداع بالايام، نميز بين طريقتين لحساب الفائدة البسيطة :

١) الفائدة التجارية: (ف) ك حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة التجارية ٣٦٠ يوما ،

ن = المدة بالأيام ÷ ٣٦٠

٢) الفائدة الصحيحة (ف) : حيث تعتبر عدد أيام السنة في الفائدة الصحيحة ٣٦٥ يوما

ن = المدة بالأيام ÷ ٣٦٥

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أودعت عبير مبلغا قدره ١٣٨٠٠ دينار في بنك لمدة ١٠ أشهر بمعدل فائدة بسيطة ٤ % سنويا ، أجد :

أ) مقدار الفائدة .

ب) الجملة البسيطة للمبلغ في نهاية المدة .

المعطيات / م = ١٣٨٠٠، ن = ١٠ أشهر، ع = ٤% = ٠.٠٤

أ) مقدار الفائدة

الحل

نحول ن = ١٠ أشهر = $\frac{١٠}{١٢}$ سنة

ف = م × ع × ن

$= ١٣٨٠٠ \times \frac{١٠}{١٢} \times ٠.٠٤$

$= ١٣٨٠٠ \times \frac{١٠}{١٢} \times \frac{٤}{١٠٠}$

= ٤٦ × ١٠ × ١ = ٤٦٠ دينار

ب) الجملة البسيطة للمبلغ في نهاية المدة

الحل

جملة المبلغ= المبلغ الأصلي + الفائدة

ج = م + ف

= ١٣٨٠٠ + ٤٦٠

= ١٤٢٦٠ دينار

السؤال الثاني: أجد مقدار المبلغ الذي يجب ايداعه في بنك لمدة ٨ سنوات ، للحصول على جملة مقدارها ٥٦٠٠ دينار ، بمعدل فائدة بسيطة ٥ %

الحل

ن = ٨ سنوات ، جـ = ٥٦٠٠ ، ع = ٠.٠٥

جملة المبلغ = م + ف

ف = م × ع × ن

$= م \times ٨ \times \frac{٥}{١٠٠}$

$ف = \frac{٤٠}{١٠٠} م$

$ف = \frac{٤}{١٠} م$

$ف = \frac{٢}{٥} م$

جـ = م + ف

$٥٦٠٠ = م + \frac{٢}{٥} م$

$م = ٥٦٠٠ \times \frac{٥}{٧}$

م = ٤٠٠٠ دينار

السؤال الثالث: أحسب عدد الأشهر اللازمة لاستثمار مبلغ قدره ٢٤٠٠٠ دينار ، بمعدل فائدة بسيطة ٨ % سنويا ليعطي فائدة قدرها ٨٠٠ دينار

المعطيات : م = ٢٤٠٠ ، ف = ٨٠٠ دينار ، ع = ٠.٠٨ سنوياً

المطلوب : ن بالأشهر

الحل

$$ف = م \times ع \times ن$$

$$٨٠٠ = ٢٤٠٠ \times ن \times \frac{٨}{١٠٠}$$

$$ن = \frac{٨٠٠}{٨ \times ٢٤}$$

$$ن = \frac{١٠٠}{٢٤}$$

$$ن = ٤١, ٠ \text{ سنة}$$

$$ن = \frac{٤١}{١٠٠} \times ١٢ = ٤,٩ \approx ٥ \text{ شهر}$$

السؤال الرابع: اقترض تاجر من البنك مبلغ ١٢٠٠٠ دينار ، بمعدل فائدة بسيطة مقدارها ١١ % لمدة ٣ سنوات ، أحسب جملة المبلغ .

المبلغ = ١٢٠٠٠ ، ع = ٠.١١ ، ن = ٣

الحل

$$ف = ١٢٠٠٠ \times \frac{١١}{١٠٠} \times ٣$$

$$= ٣٩٦٠ \text{ دينار}$$

جملة المبلغ : جـ = م + ف

$$= ١٢٠٠٠ + ٣٩٦٠$$

$$= ١٥٩٦٠ \text{ دينار}$$

السؤال الخامس: قامت فيروز باستثمار مبلغ ١٢٠٠٠ دينار ، بمعدل فائدة ٣% سنويا من اصل المبلغ المستثمر ، أجد :

أ) الفائدة التي تحصل عليها فيروز في ٣ أشهر .
ب) الفترة الزمنية اللازمة للحصول على عوائد قدرها ٢١٦٠ دينارا .

م = ١٢٠٠٠ ، ع = ٠.٠٣ (شهرياً)

الحل

أ) الفائدة في ٣ أشهر

ف = م × ع × ن

$= ١٢٠٠٠ \times \frac{٠.٠٣}{١٢} \times ٣$

= ٩٠ دينار

ب) الفترة الزمنية اللازمة للحصول على عوائد قدرها ٢١٦٠ دينار .

الحل

$٢١٦٠ = ١٢٠٠٠ \times \frac{٣}{١٠٠} \times ن$

$ن = \frac{٢١٦٠}{٣ \times ١٢٠}$

$= \frac{١٨}{٣}$

= ٦ سنوات

السؤال السادس: أودع جورج مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ٢٤٠ يوما ، بمعدل فائدة بسيطة ١٢ % سنويا . أحسب الفائدة التجارية والصحيحة .

الحل

م = ٨٠٠٠ ، ع = $\frac{١٢}{١٠٠}$ سنوياً ، ن = ٢٤٠ يوما

الفائدة التجارية ف = م × ع × ن

$= ٨٠٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٢٤٠}{٣٦٠}$

= ٦٤٠ دينار

الفائدة الصحيحة $\quad ف = م \times ع \times ن$

$$= ٨٠٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٢٤٠}{٣٦٥}$$

$$= ٦٣١,٢٣٢ \text{ دينار}$$

السؤال السابع: حصلت لبنى على فوائد من البنك قيمتها ٤٢٠ دينارا مقابل استثمارها مبلغ ١٢٠٠٠ دينار في حساب الربح البسيط لمدة ٧ شهور . أجد معدل الفائدة البسيطة التي يمنحها البنك للبنى .

الحل

ف = ٤٢٠ دينار ، م = ١٢٠٠٠ دينار ، ن = ٧ أشهر

$$ف = م \times ع \times ن$$

$$٤٢٠ = ١٢٠٠٠ \times ع \times \frac{٧}{١٢}$$

$$ع = \frac{٤٢٠ \times ١٢}{١٢٠٠٠ \times ٧}$$

$$= \frac{٦}{١٠٠}$$

$$= ٦٪$$

القسم الثالث : تمارين اثرائية

#	أجب عن الأسئلة التالية	الجواب
١	أودع تاجر مبلغ ٢٠٠٠٠ دينار في بنك بحساب الربح البسيط لمدة ٤ سنوات ، احسب معدل الفائدة التي حصل عليها التاجر إذا حصل على فوائد قيمتها٣٧٥٠ دينار .	٠,٠٤٦
٢	استثمر احمد مبلغ ٥٠٠٠ دينار في بنك لمدة ٢٨٠ يوم ، بمعدل فائدة بسيطة ١٠% احسب الفائدة التجارية والصحيحة التي يحصل عليها احمد	ف ت = ٣٨٨,٩ ف ص = ٣٨٣,٥٦
٣	اقترض شخص مبلغ ٨٠٠٠ دينار من بنك بمعدل فائدة بسيطة ٨% ، احسب المدة الزمنية للقرض إذا كانت الفوائد التجارية على المبلغ تساوي ٣٢٠ دينار.	ن = ١٨٠ يوم
٤	وفر طالب مبلغ من المال في بنك بحساب الربح البسيط بمعدل فائدة ٥% سنويا لمدة ١٦٠ يوم احسب مقدار المبلغ الذي وفره الطالب ليحصل على فوائد صحيحة قيمتها ٣٠.٧ دينار	١٤٠٠

الدرس الثاني / الفائدة المركبة

القسم الأول : الملخص

تعريف الفائدة المركبة:

هي المردود المالي الناتج من استثمار مبلغ من المال خلال مدة زمنية محددة بمعدل فائدة معين، بحيث يضاف هذا المرود الى المبلغ الأصلي في نهاية كل دورة زمنية، وتحسب جملة المبلغ بالفائدة المركبة حسب العلاقة:

$$ج = م (١ + ع)^{ن}$$

$$ف = ج - م$$

م: المبلغ الأصلي **ن: المدة الزمنية** **ع: المعدل**

ف : الفائدة المركبة **ج : جملة المبلغ**

إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام:

عند إضافة الفائدة أكثر من مرة في العام، يكون قانون الجملة المستخدم في هذه الحالة، هو:

$$ج = م (١ + \frac{ع}{ر})^{ن ر}$$

حيث ر : عدد مرات إضافة الفائدة

لا نحقق الأعمال بالأمنيات وإنما بالإرادة نصنع المعجزات.

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أودعت جمعية الأمل للمكفوفين ٨٠٠٠ دينار في بنك، بحساب فائدة مركبة معدلها السنوي ٩ % أجد حملة المبلغ بعد ٦ سنوات .

الحل

م = ٨٠٠٠ ، ع = ٩٪ ، ن = ٦ سنوات

جملة المبلغ: جـ = م(١ + ع)^{ن}

= ٨٠٠٠(١ + ٠,٠٩)^{٦}

= ٨٠٠٠ × ١,٦٧

= ١٣٤١٦,٨ دينار

السؤال الثاني: أودعت سعاد مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك، بحساب فائدة مركبة ٧.٥ % سنوياً. أجد عدد السنوات التي تلزم حتى تصبح جملة المبلغ ٧١٧٨.١٤٦٦ ديناراً.

الحل

م = ٥٠٠٠، ع = ٧.٥٪ = ٠,٠٧٥ ، جـ = ٧١٧٨,١٤٦٦

جـ = م(١ + ع)^{ن}

٧١٧٨,١٤٦٦ = ٥٠٠٠(١ + ٠,٠٧٥)^{ن}

$\frac{٧١٧٨,١٤٦٦}{٥٠٠٠}$ = (١,٠٧٥)^{ن}

(١,٠٧٥)^{ن} = ١,٤٣٥

لـو(١,٠٧٥)^{ن} = لـو١,٤٣٥

ن لـو(١,٠٧٥) = لـو١,٤٣٥

$ن = \frac{لـو١,٤٣٥}{لـو١,٠٧٥}$

$= \frac{١,٤٣٥}{١,٠٧٥}$

≈ ٥ سنوات

السؤال الثالث: أودع غسان ٤٠٠٠٠ دينار في بنك بفائدة مركبة بمعدل ما وفي نهاية ٨ سنوات، بلغت الفوائد المستحقة له ١٥٦٥٧.٨٥ ديناراً. أجد معدل الفائدة المركبة السنوي.

م = ٤٠٠٠٠ ، ن = ٨ ، ف = ١٥٦٥٧.٨٥

الحل

ف = جـ − م

جـ = ٤٠٠٠٠ + ١٥٦٥٧,٧٥

جـ = ٥٥٦٥٧,٨٥

جـ = م(١ + ع)^{ن}

٥٥٦٥٧,٨٥ = ٤٠٠٠٠(١ + ع)^{٨}

$(١ + ع)^{٨} = \frac{٥٥٦٥٧.٨٥}{٤٠٠٠٠}$

$١ + ع = \sqrt[٨]{١,٣٩}$

١ + ع = ١,٠٤

ع = ٤٪

السؤال الرابع: أحسب رأس المال الناتج من توظيف مبلغ ١٥٠٠٠ دينار في بنك، يعطي فائدة مركبة معدلها ٧ % سنويا لمدة ٥ سنوات ، وتضاف الفائدة مرتين في العام ، ثم احسب الفائدة المركبة.

الحل

م = ١٥٠٠٠ ، ع = ٧% ، ن = ٥

$جـ = م\left(١ + \frac{ع}{ر}\right)^{ر ن}$

$جـ = ١٥٠٠٠\left(١ + \frac{٠,٠٧}{٢}\right)^{٢\times٥}$

$= ١٥٠٠٠(١,٠٣٥)^{١٠}$

= ٢١١٥٨,٩٨ دينار

ثم أحسب الفائدة المركبة ف = جـ − م

= ٢١١٥٨ − ١٥٠٠٠ = ٦١٥٨ دينار

السؤال الخامس: اقترض ماجد مبلغ ٨٠٠٠ دينار من البنك بمعدل فائدة مركبة ٨ % سنويا، وبعد مدة زمنية كان المبلغ المطلوب منه ١٤٨٠٧.٤٤ دنانير ، أجد مدة الاستثمار لهذا المبلغ .

الحل

م= ٨٠٠٠، ع = ٨% ج= ١٤٨٠٧.٤٤

$$ج = م\left(1+\frac{ع}{ر}\right)^{ر ن}$$

$$ج = ٨٠٠٠(1+٠,٠٨)^{ن}$$

$$١٤٨٠٧,٤٤ = ٨٠٠٠(١,٠٨)^{ن}$$

$$\text{لـو}١,٨٥١ = \text{لـو}١,٠٨ ن$$

$$ن = \frac{\text{لـو}١,٨٥١}{\text{لـو}١,٠٨} = ٨ \text{ سنة}$$

السؤال السادس: أودع رامي مبلغ ٥٠٠٠ دينار في بنك بمعدل فائدة مركبة ١٢% سنويا ولمدة ٣ سنوات، فاذا علمت أن الفوائد تضاف كل ٣ شهور. أجد جملة الوديعة.

الحل

م = ٥٠٠٠، ع = ١٢% =٠.١٢، ن = ٣ سنوات

الفوائد تضاف كل ٣ شهور (٤ مرات في السنة)

$$ج = م\left(1+\frac{ع}{ر}\right)^{ر ن}$$

$$ج = ٥٠٠٠\left(1+\frac{٠,١٢}{٤}\right)^{٤\times٣}$$

$$= ٥٠٠٠(١+٠,٠٣)^{١٢}$$

$$= ٥٠٠٠(١,٠٣)^{١٢}$$

$$= ٧١٢٨,٨ \text{ دينار}$$

القسم الثالث: أسئلة اثرائية

#	أجب عن الأسئلة التالية	الاجابة
١	يوفر خالد مبلغ ٦٠٠٠ دينار في بنك بحساب الربح المركب بمعدل فائدة ٦% احسب مقدار الفائدة التي يحصل عليها بعد ٧ سنوات .	جـ = ٩٠٢١,٧ ف = ٣٠٢١,٧
٢	أودع موظف مبلغ ٧٠٠٠ في بنك بحساب الفائدة المركبة بمعدل فائدة نصف سنوية مقدارها ٣% ، احسب المدة الزمنية للتوفير حتى يحصل على فائدة مقدارها ٢٩٢٩.٦دينار .	**ن=٦ سنوات**
٣	أستثمر تاجر مبلغ ٥٠٠٠٠دينار في بنك بحساب الفائدة المركبة ، احسب معدل الفائدة السنوية بعد ٦ سنوات إذا كانت جملة المبلغ تساوي ٦٣٤٧٠ دينار .	ع = ٠,٠٤
٤	احسب جملة مبلغ ٧٠٠٠ دينار استثمر في بنك بمعدل فائدة مركبة مقدارها ٦% سنويا لمدة ٥ سنوات تضاف كل شهرين .	جـ = ٩٤٣٤,٩
٥	استثمر احمد مبلغ ١٠٠٠دينار في بنك بمعدل فائدة مركبة لمدة سنتين تضاف كل ٤ شهور ، احسب معدل الفائدة المركبة إذا حصل على فوائد قيمتها ١٠٠ دينار .	هـ(ع) = ١٣١,٣٦

الدرس الثالث / السندات

القسم الأول: الملخص

تعريف السند

هو أداة دين، يصدر عن الدولة، أو عن الشركات المساهمة العامة، أو عن بعض البلديات من أجل تمويل بعض المشاريع.

لكل سند عوامل، هي :

١. **القيمة الاسمية للسند: وهي القيمة التي تكون مدونة على السند.**
٢. **القيمة الحالية (الحقيقية): وهي قيمة السند التي تتعهد الشركة بتسديدها لحامل السند في موعد الاستحقاق، وقد تكون أكبر أو أقل من القيمة الاسمية، أو تساويها.**
٣. **القيمة السوقية (الفعلية): ثمن شراء السند، أو ثمن بيعه في سوق الأوراق المالية.**

لحظة الإصدار	لحظة البيع والشراء	لحظة الاستحقاق
القيمة الاسمية (إذا كان السند بمعدل فائدة صفري يكون السعر أقل من القيمة الاسمية)	القيمة السوقية	القيمة الحالية (الحقيقية)

ملاحظة: لا يوجد في فلسطين مؤسسات تطرح السندات.

تقييم السند: هو معرفة القيم التقديرية للسند الممثل للعرض في تاريخ معين، وبمعدل معين للفائدة، فالقيمة الحالية بتاريخ ما، تتكون من القيمة الحالية للقيمة الاسمية والقيمة الحالية للفوائد الدورية الباقية.
عند شراء السند يدفع المشتري قيمة السند، ويدخل في حسابها معدل الاستثمار في السوق المالية بالإضافة للحقوق التي يمنحها له السند الذي اشتراه وعليه يكون:
ثمن الشراء (القيمة الحقيقية للسند) = القيمة الحالية (الحقيقية) للسند + القيمة الحالية للفوائد الدورية حتى تاريخ استحقاقه محسوبة بمعدل الاستثمار.

قانون القيمة الشرائية للسند:

$$\text{ق (ح)} = \text{ف} \times \left[\frac{\frac{١}{(١+\overline{ع})^{ن}} - ١}{\overline{ع}} \right] + \frac{\text{م}}{(١+\overline{ع})^{ن}}$$

ق (ح): القيمة الحالية ا : القيمة الاسمية ف : الفائدة

$\bar{ع}$: معدل فائدة الاستثمار (السوقية): المدة الزمنية ع : معدل فائدة السند (الاسمية)

عزيزي الطالب عليك التمييز بين الأسهم والسندات :

السند : حق دين لا يجوز المشاركة في إدارة الشركة .

السهم : حق ملكية يحق للمساهم المشاركة في الإدارة .

ملاحظات :

اعتبر ن = ٥ سنوات

القيمة الاسمية أ	معدل الفائدة الاسمية	معدل الفائدة السوقية	القيمة الحقيقة
مثال/ ٥٠٠ دولار	٧%	٩%	٤٦١
مثال/ ٥٠٠ دولار	٧%	٥%	٥٤٢
مثال/ ٥٠٠ دولار	٧%	٧%	٥٠٠

أي

- ✓ **عندما يكون معدل الفائدة الاسمية أقل من معدل الفائدة السوقية فان القيمة الحقيقة أقل من القيمة الاسمية**
- ✓ **عندما يكون معدل الفائدة الاسمية أكبر من معدل الفائدة السوقية فان القيمة الحقيقة أكبر من القيمة الاسمية**
- ✓ **عندما يكون معدل الفائدة الاسمية مساويا لمعدل الفائدة السوقية فان القيمة الحقيقة مساوية للقيمة الاسمية**

القسم الثاني: حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: أجد القيمة الحالية لسند قيمته الاسمية ٤٥٠٠ ديناراً يستهلك بعد ٥ سنوات، ومعدل فائدته الاسمية ٧% علماً بأن الفائدة الدوية السوقية ومعدل الفائدة السنوية ٧ %.

الحل أ= ٤٥٠٠، ن = ٥، ع = ٧٪ ، $\bar{ع}$ = ٧٪

ف = أ × ع

$= ٤٥٠٠ \times \frac{٧}{١٠٠}$

$= ٣١٥$

$ق(ع) = ف \left[\frac{١ - \frac{١}{(١+\bar{ع})^{ن}}}{\bar{ع}} \right] + \frac{أ}{(١+\bar{ع})^{ن}}$

$ق(ع) = ٣١٥ \left[\frac{١ - \frac{١}{(١+٠,٠٧)^{٥}}}{٠,٠٧} \right] + \frac{٤٥٠٠}{(١+٠,٠٧)^{٥}}$

$= ٣١٥ \left[\frac{١ - \frac{١}{١,٤}}{٠,٠٧} \right] + \frac{٤٥٠٠}{١,٤}$

$= ٣١٥ \left[\frac{٠,٢٨}{٠,٠٧} \right] + ٣٢١٤,٢٨$

$= ١٢٨٥,٧١ + ٣٢٠٨,٤$

$= ٤٤٩٩,٩٩$ دينار

ق(ح) = ١٢٩١.٥٦ + ٣٢٠٨.٤ =٤٤٩٩ دينار

✓ عندما يكون معدل الفائدة الاسمية= المعدل الفائدة السوقية فان القيمة الحقيقة = للقيمة الاسمية

السؤال الثاني: اشترت يمنى سنداً قيمته الاسمية ١٥٠٠ دينار، ويستهلك في نهاية ٥ سنوات بمعدل فائدة اسمي ٧% سنوياً، ومعدل الاستثمار في السوق ٦% سنوياً، أجد قيمته الحالية الاستهلاكية.

الحل

$$أ = ١٥٠٠ \text{ ، } ن = ٥ \text{ ، } ع = ٧٪ \text{ ، } \overline{ع} = ٦٪$$

$$ف = أ \times ع$$

$$= \frac{٧}{١٠٠} \times ١٥٠٠$$

$$= ١٠٨$$

$$ق(ع) = ف \left[\frac{١ - \frac{١}{(١ + \overline{ع})^{ن}}}{\overline{ع}} \right] + \frac{أ}{(١ + \overline{ع})^{ن}}$$

$$= \frac{٦}{١٠٠} \times ٣٦٠٠$$

$$= ٢١٦$$

$$= ١٠٥ \left[\frac{١ - \frac{١}{١,٣٤}}{٠,٠٦} \right] + \frac{١٥٠٠}{١,٣٤}$$

$$= ١٠٥ \left[\frac{٠,٢٥}{٠,٠٦} \right] + \frac{١٥٠٠}{١,٣٤}$$

$$= ١٠٥ [٤,٢] + ١١٢٠,٨٨$$

$$= ١١٢٠,٨٨ + ٤٤٢,٢٩$$

$$= ١٥٦٣,١٧ \text{ دينار}$$

السؤال الثالث: سند قيمته الاسمية ٣٦٠٠ دينار، ويستهلك في نهاية ٨ سنوات بالقيمة الاسمية نفسها، بمعدل فائدة الاسمية السنوية ٦% إذا كان معدل الاستثمار في السوق المالية ٩% سنوياً. أجد القيمة الحالية لهذا السند.

الحل

أ= ٣٦٠٠ ، ن = ٨ ، ع = ٦٪ ، $\overline{ع}$ = ٩٪

ف = أ × ع

$= \frac{٦}{١٠٠} \times ٣٦٠٠$

$= ٢١٦$

$ق(ع) = ف \left[\frac{١ - \frac{١}{(١+\overline{ع})^{ن}}}{\overline{ع}} \right] + \frac{أ}{(١+\overline{ع})^{ن}}$

$= ٢١٦ \left[\frac{١ - \frac{١}{(١+٠,٠٩)^{٨}}}{٠,٠٩} \right] + \frac{٣٦٠٠}{(١+٠,٠٩)^{٨}}$

$= ٢١٦ \left[\frac{١ - \frac{١}{١,٩٩}}{٠,٠٩} \right] + \frac{٣٦٠٠}{١,٩٩}$

$= ٢١٦ [٥,٥] + ١٨٠٦,٧٢$

= ٣٠٠١.٦ دينار

✓ **عندما يكون معدل الفائدة الاسمية أقل من معدل الفائدة السوقية فان القيمة الحقيقة أقل من القيمة الاسمية**

يمكن الاعتماد على الملاحظة في الإجابة وهذا كافي وإذا حل يجب أن يكون الجواب نفسه

السؤال الرابع : بلغ معدل الاستثمار في السوق المالية ٧% سنوياً لمدة ٣ سنوات لسند قيمته الحالية ١٧٠٠ دينار ، ومعدل فائدته الاسمي ٧% سنوياً . أجد القيمة الاسمية للسند .

الحل

$\bar{ع} = ٧٪$ ، ن = ٣ ، $ق(ع) = ١٧٠٠$ ، $ع = ٧٪$

$$ق(ع) = ف\left[\frac{١ - \frac{١}{(١+\bar{ع})^{ن}}}{\bar{ع}}\right] + \frac{ا}{(١+\bar{ع})^{ن}}$$

$$١٧٠٠ = ا \times ٠,٠٧ \left[\frac{٠,١٨٦}{٠,٠٧}\right] + \frac{ا}{١,٢٣}$$

$$١٧٠٠ = (ا \times ٠,١٨٦) + \frac{ا}{١,٢٣}$$

$$ا + ا(٠,٢٢٦) = ٢٠٩١$$

$$ا(١,٢٢٦) = ٢٠٩١$$

$ا = ١٧٠٠,٥$ دينار

يمكن الاعتماد على الملاحظة في الإجابة وهذا كافي وإذا حل يجب أن يكون الجواب نفسه يعني

ق (ح) = ١٧٠٠ = ٠.٠٧أ × ٢.٦٢ + ٠.٨٢أ

١٧٠٠ = ٠.١٨٢ + ٠.٨٢أ

أ = ١٧٠٠ دينار

السؤال الخامس : سند قيمته الاسمية ٤٠٠٠ دينار ، يستهلك في نهاية ٥ سنوات بالقيمة الاسمية نفسها إذا كان معدل الفائدة في السوق ١٠% أجد معدل الفائدة الاسمي . علماً بأن القيمة الحقيقية ٧٤٨٤.٤٧٢ ديناراً .

الحل

أ= ٤٠٠٠ ، ن = ٥ ، ب(ع) = ٧٤٨٤,٤٧٢ ،

ب(ع) = ٧٤٨٤,٤٧٢ ع = ١٠٪

$$٧٤٨٤,٤٧٢ = ف\left[\frac{١-\frac{١}{(١+٠,١٠)^{٥}}}{٠,١٠}\right] + \frac{٤٠٠٠}{(١+٠,١٠)^{٥}}$$

$$٧٤٨٤,٤٧٢ = ف\left[\frac{١-\frac{١}{(١,١)^{٥}}}{٠,١٠}\right] + \frac{٤٠٠٠}{(١+٠,١٠)^{٥}}$$

$$٧٤٨٤.٤٧٢ = ف\left[\frac{١-٠,٦٢٠٩٢}{٠,١٠}\right] + \frac{٤٠٠٠}{١,٦١٠٥١}$$

$$٧٤٨٤,٤٧٢ = (٣,٧٩٠٧ \times ف) + ٢٥٠٠$$

$$٤٩٨٤,٤٧٢ = ٣,٧٩٠٧ \ ف$$

$$ف = \frac{٤٩٨٤,٤٧٢}{٣,٧٩٠٧}$$

$$ف = ١٣١٥,١٦$$

$$ف = أ \times ع$$

$$١٣١٥,١٦ = ٤٠٠٠ \times ع$$

$$ع = \frac{١٣١٥,١٦}{٤٠٠٠}$$

$$= ٠,٣٢$$

$$ع = ٣٢٪$$

القسم الثالث: أسئلة اثرائية

#	أجب عن الأسئلة الأتية	الاجابة
١	أصدرت شركة الاتصالات الدولية سندات ، القيمة الاسمية للسند ٦٠٠ دينار لمدة ١٢ عام بمعدل فائدة اسمية ٧% ومعدل فائدة سوقية ١٢% ، جد ١) القيمة الحالية للسند . ٢)القيمة الحالية للسند إذا دفعت الفائدة كل ٦ أشهر .	١) قـ(ع) = ٤١٤١,١ ٢) قـ(ع) = ٤١١,٧
٢	اشترى تاجر ٤٠٠ سند في إحدى الشركات بقيمة اسمية إجمالية ٦٠٠٠ دينار بمعدل فائدة اسمية ٤% سنويا احسب الحقيقة للسند علما أن معدل الفائدة السوقية ٦% سنويا لمدة ٨ سنوات	قـ(ع) = ١٣١,٣٦
٣	اشترى موظف سند من إحدى الشركات بقيمة اسمية ٢٥٠ دينار وبعد سنة حصل على عائد ثابت دوري مقداره ١٠ دنانير ، جد القيمة الحقيقية للسند بعد ٦ سنوات علما أن معدل الفائدة السوقية للسند يساوي ٧% .	ف = ١٠ قـ(ع) = ٢١٤,٢٤
٤	أصدرت إحدى الدول سندات قيمتها الاسمية ١٠٠٠ دينار بمعدل فائدة اسمية ٩% ومعدل فائدة سوقية ٩% لمدة ٢٠ عاما احسب القيمة الحقيقية للسند	بما ان ع = $\bar{ع}$ فان القيمة الحقيقة = القيمة الاسمية = ١٠٠٠ دينار
٥	اشترى شخص سند من إحدى الشركات بقيمة اسمية ٥٠٠٠ دينار لمدة ٧ سنوات ، بمعدل فائدة سوقية ٨% سنويا جد معدل الفائدة الاسمية للسند إذا بلغت قيمته الحقيقية ٦٦٧٠ دينار .	ع = ٠,١١٤

٦	اشترى احمد سند من احدى الشركات بمعدل فائدة اسمية ٨% ومعدل فائدة سوقية ١٢% جد القيمة الاسمية للسند بعد اربع سنوات علما ان القيمة الحقيقية للسند ٤٨٠٠ دينار	أ = ٥٥١٧,٢
٧	اشترى شخص سند من إحدى الشركات بقيمة اسمية ٣٠٠ دينار ، يباع السند بعد ١٠ سنوات بمعدل فائدة اسمية نصف سنوية قيمتها ٣% جد القيمة الحالية للسند إذا كانت معدل الفائدة السوقية نصف السنوية ٤% .	ف = ٩ هـ (ع) = ٢٥٩,٤
٨	أصدرت إحدى المؤسسات الخيرية سندات، القيمة الاسمية للسند تساوي ٤٠٠٠ دينار ويباع بعد ١٥ عاما بمعدل فائدة اسمية ٩% سنويا ،ومعدل فائدة سوقية ٦% سنويا جد القيمة الحالية للسند علما أن الفائدة تدفع كل أربع شهور .	ف = ١٢٠ هـ (ع) = ٥١٧٩,٥

الدرس الرابع / أنواع السندات

القسم الأول : الملخص

أنواع السندات من حيث الفائدة :

للسندات أنواع كثيرة من حيث الفائدة ، منها :

- السندات المستديمة (ذات معدل الفائدة الثابت)
- ذات معدل الفائدة المتحرك ،
- صفرية الكوبون
- الدخل والمشاركة
- الرديئة .

سنتطرق في دراستنا إلى السندات المستديمة فقط :

السندات المستديمة :

هذا النوع من السندات ليس له فترة سداد محدد ، وتصدرها عادة الحكومات لتمويل مشروعاتها ، ويستطيع حامل السند استرداد القيمة ببيع السند في السوق المالية ، ويمكن حساب ثمن الشراء (القيمة الشرائية) لهذا السند باستخدام علاقة القيمة الحالية للدفعات المستديمة ، أي أن ثمن شراء السند .

$$ق(ع) = \frac{أ \times ع}{\overline{ع}} \quad ، \quad \text{علما بأن } ف = أ \times ع$$

أ : القيمة الاسمية

ع : معدل الفائدة السنوية

$\overline{ع}$: معدل الفائدة في السوق المالي ، وتسمى معدل الاستثمار

ق(ع) : القيمة الحالية للسندات المستديمة

القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول : أجد القيمة الحالية لسند دائم قيمته الاسمية ٤٥٠٠ دينار ، ومعدل فائدته ٨% علماً بأن الفائدة الدورية الأولى تؤدى بعد ٧ سنوات ، ومعدل الفائدة في السوق المالية ٦% سنوياً .

الحل

أ= ٤٥٠٠ ، ع = ٦٪ ، $\overline{ع}$ = ٨٪

$$ث(ع) = \frac{أ ع}{\overline{ع}}$$

$$= \frac{٤٥٠٠ \times ٠,٠٨}{٠,٠٦}$$

= ٦٠٠٠ دينار

السؤال الثاني: أجد ثمن شراء سند قيمته الاسمية ٣٠٠٠ دينار ، ويستهلك بعد ١٢ سنة بالقيمة الاسمية نفسها ، وتدفع فوائده كل ثلاثة شهور ، وبمعدل سنوي ٨% إذا علمت أن معدل الاستثمار في السوق المالية ٥% كل ثلاثة شهور .
(ملاحظة : ٣ شهور تعني ربع سنوي) .

الحل

أ= ٣٠٠٠ ، ع = $\frac{٨٪}{٤}$ = ٢٪ ، $\overline{ع}$ = ٥٪ ، ن = ١٢ × ٤=٤٨ (كل ثلاث شهور)

ف = أ × ع = ٣٠٠٠ × ٠,٠٢ = ٦٠

$$ق(ح) = ف \times \left[\frac{\frac{١}{(\overline{ع}+١)^{ن}} - ١}{\overline{ع}} \right] + \frac{أ}{(\overline{ع}+١)^{ن}}$$

$$= ٦٠ \times \left[\frac{\frac{١}{(٠,٠٥+١)^{٤٨}} - ١}{٠,٠٥} \right] + \frac{٣٠٠٠}{(٠,٠٥)^{٤٨}} = ١٠٨٤,٦ + ٢٨٨,٤ = ١٣٧٣ \text{ دينار}$$

السؤال الثالث: أصدرت شركة مساهمة عامة سندات مستديمة بقيمة اسمية ٤٠٠٠ دينار للسند وبمعدل فائدة اسمي ٩% فإذا علمت أن القيمة الحقيقية للسند تساوي ٥١٤٢.٨٦ ، أجد معدل الفائدة السوقي .

الحل

أ= ٤٠٠٠

ن(ع) = ٥١٤٢.٨٦ ، ع = ٠,٠٩ ، $\bar{ع}$ = ؟

$$ن(ع) = \frac{أ ع}{\bar{ع}}$$

$$\bar{ع} = \frac{٤٠٠٠ \times ٠,٠٩}{٥١٤٢,٨٦}$$

$$\bar{ع} = ٠,٠٦٩$$

$$\bar{ع} \approx ٧\%$$

السؤال الرابع: اشترى وليد سندات مستديمة من أحد الشركات المساهمة العامة بقيمة اسمية ٣٠٠٠ دينار للسند وبمعدل فائدة اسمي ١٢% ، فاذا كان معدل الفائدة في السوق ١٢% ، أجد القيمة الحقيقية للسندات .

الحل

أ= ٣٠٠٠ ، ع = ١٢% ، $\bar{ع}$ = ١٢%

$$ن(ع) = \frac{أ ع}{\bar{ع}}$$

$$= \frac{٣٠٠٠ \times ٠,١٢}{٠,١٢}$$

= ٣٠٠٠ دينار

القسم الثالث : أسئلة اثرائية

#	أجب عن الأسئلة الاتية	الاجابة
١	أصدرت إحدى المؤسسات سندات مستديمة القيمة الاسمية للسند تساوي ٨٠٠ دينار بمعدل فائدة اسمية ربع سنوية ٢% ،جد معدل الفائدة السوقية علما أن القيمة الحقيقية للسند ٩١٥ دينار .	$\bar{ع} = ٠,٠٧$
٢	اشترى تاجر سندات دائمة ، القيمة الاسمية للسند تساوي ٦٠٠٠دينار ويباع بعد ١٥ عاما بمعدل فائدة اسمية ٤% سنويا ،ومعدل فائدة سوقية ٥% سنويا جد القيمة الحالية للسند .	$ق(ع) = ٤٨٠٠$
٣	أصدرت إحدى المؤسسات الخيرية سندات أبدية (مستديمة) ، بمعدل فائدة اسمية ٩% سنويا ،ومعدل فائدة سوقية ١١% سنويا جد القيمة الاسمية للسند علما أن القيمة الحالية للسند تساوي ٧٠٠٠ دينار .	$ا = ٨٥٥٥,٥$
٤	اشترى خالد سندات دائمة ، القيمة الاسمية للسند تساوي ٣٠٠٠ دينار بمعدل فائدة سوقية ٩% ،جد معدل الفائدة الاسمية للسند علما أن القيمة الحالية للسند تساوي ٢٠٠٠ دينار .	$ع = ٠,١٣٥ \approx ١٤٪$

تمـــارين عامـــة

السؤال الأول : اختار رمز الإجابة الصحيحة ، مما يأتي :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
د	أ	ج	ب	ب	جـ	ب	ب	ج	أ

١) إذا استثمر مبلغ قدره ٨٢٠٠٠ دينار ، بمعدل ٥% سنوياً ، فما الفائدة البسيطة بعد ٦ سنوات :

الحل

الفائدة البسيطة = م × ن × ع

$= ٨٢٠٠٠ \times ٦ \times \frac{٥}{١٠٠}$

$= ٢٤٦٠٠$

د

٢) استثمر مبلغ قدره ٥٠٠٠ دينار بمعدل ٨% سنوياً ، فما الجملة البسيطة للمبلغ بعد ١٠ سنوات

الحل

الفائدة البسيطة = م × ن × ع

$= ٥٠٠٠ \times ١٠ \times \frac{٨}{١٠٠}$

$= ٤٠٠٠$

أ

٣) إذا بلغت الفائدة البسيطة لمبلغ ٨٠٠ دينار ٨٠ ديناراً ، فإن معدل الفائدة يساوي

الحل

معدل الفائدة البسيطة = (قيمة الفائدة / المبلغ الأصلي) × ١٠٠%

$$= \frac{٨٠}{٨٠٠} \times ١٠٠٪$$

$$= ١٠٪$$

ج

٤) إذا كانت الفائدة التجارية لمبلغ ما تساوي ١٤٦ فما قيمة الفائدة الصحيحة

الحل

الفائدة التجارية = $\frac{ع}{٣٦٠} \times ن \times ٢ = 6$ 4

$$٢ \times ن \times ع = ٣٦٠ \times ١٤٦$$

الفائدة الصحيحة = $\frac{ع \times ن \times ٢}{٣٦٥} = \frac{٣٦٠ \times ١٤٦}{٣٦٥}$

$$= ف(ص) = ١٤٤$$

ب

٥) أصدرت احدى الشركات المساهمة العامة سندات القيمة الاسمية للسند ١٠٠٠٠٠ دينار لمدة ١٥ سنة ، وتحمل معدل فائدة اسمي ١٠% ، ومعدل الفائدة بالسوق ١٠% ما القيمة الحقيقية للسند في تاريخ الاستحقاق ؟

الحل

أ = ١٠٠٠٠٠ ، ن = ١٥ ، ع = ١٠٪ ، $\bar{ع}$ = ١٠٪

$$ف = أ \times ع$$

$$= \frac{١٠}{١٠٠} \times ١٠٠٠٠٠$$

$$= ١٠٠٠٠$$

$$ق(ع) = ف\left[\frac{\frac{1}{(1+ع)^{ن}}-1}{ع}\right] + \frac{م}{(1+ع)^{ن}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠\left[\frac{\frac{1}{(1+٠,١)^{١٥}}-1}{٠,١}\right] + \frac{١٠٠٠٠٠٠}{(1+٠,١)^{١٥}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠\left[\frac{٠,٧٦}{٠,١}\right] + \frac{١٠٠٠٠٠٠}{٤,١٧}$$

$$= ٧٦٠٦٠,٧٩ + ٢٣٩٨٠,٨$$

$$= ١٠٠٠٤١,٦$$

ب

٦) **أي من الآتية ليست من عناصر احتساب الفائدة ؟**

الحل

جملة المبلغ

د

٧) **أراد علي أن يستثمر مبلغ ٢٨٠٠ دينار بفائدة بسيطة بمعدل ٤% سنوياً ، وحصل في نهاية المدة على فائدة مقدارها ٢٨٠ ديناراً ، كم مدة الاستثمار ؟**

الحل

$$٢٨٠ = ٢٨٠٠ \times ن \times ٠,٠٤$$

$$ن = \frac{٢٨٠}{٢٨٠٠ \times ٠,٠٤} = ٢,٥$$

سنتان ونصف

ج

٨) **تتساوى الفائدة المركبة مع الفائدة البسيطة في :**

الحل

الفترة الأولى فقط

ب

٩) استثمر مبلغ ١٠٠٠ دينار لمدة ١٠ سنوات ، وبلغت جملته ١٥٥٢.٩٦٩ تتساوى الفائدة المركبة مع الفائدة البسيطة في ديناراً ، فما هي معدل الفائدة المركبة ؟

الحل

جملة الفائدة المركبة $١٥٥٢,٩٦٩ = ١٠٠٠(١+ع)^{١٠}$

$$١٥٥٢,٩٦٩ = ١٠٠٠(١+ع)^{١٠}$$
$$\frac{١٥٥٢,٩٦٩}{١٠٠٠} = (١+ع)^{١٠}$$
$$\sqrt[١٠]{١,٥٥} = ١+ع$$
$$ع = ١,٠٤٤٨ - ١$$
$$ع = ٠,٠٤٤٨$$
$$ع = ٤,٥٪$$

$١٥٥٢,٩٦٩ = ١٠٠٠(١+ع)^{١٠}$

$\frac{١٥٥٢,٩٦٩}{١٠٠٠} = (١+ع)^{١٠}$

$\sqrt[١٠]{١,٥٥} = ١+ع$

$ع = ١,٠٤٤٨ - ١$

$ع = ٠,٠٤٤٨$

$ع = ٤,٥٪$

ج

١٠) إذا بلغت القيمة الحقيقية لسندات مستديمة ٢٤٠٠٠ دينار ، وبلغ معدل الفائدة في السوق ١٠% فما مبلغ الفائدة على السندات ؟

الحل

$$\frac{ف}{٠,١} = ٢٤٠٠٠$$
$$ف = ٢٤٠٠$$

$\frac{ف}{٠,١} = ٢٤٠٠٠$

$ف = ٢٤٠٠$

أ

السؤال الثاني: **اقترضت رتيل من بنك مبلغ ٨٠٠٠ دينار لمدة ١٢٠ يوماً بمعدل ١٢% سنوياً . احسب الفائدة البسيطة التجارية والصحيحة**

الحل

م = ٨٠٠٠ ، ن = ١٢٠ يوم ، ع = ١٢%

الفائدة البسيطة التجارية :

$$ف = م \times ن \times \frac{ع}{٣٦٠}$$

$$= ٨٠٠٠ \times \frac{١٢٠}{٣٦٠} \times ٠,١٢$$

$$= ٣٢٠$$

$$= ٨٠٠٠ \times \frac{١٢٠}{٣٦٠} \times ٠,١٢$$

$$= ٣٢٠ \text{ دينار}$$

الفائدة البسيطة الصحيحة :

$$\bar{ف} = م \times ن \times \frac{ع}{٣٦٥}$$

$$= ٨٠٠٠ \times \frac{١٢٠}{٣٦٥} \times ٠,١٢$$

$$= ٣١٥,٦١٦$$

$$= ٨٠٠٠ \times \frac{١٢٠}{٣٦٥} \times ٠,١٢$$

$$= ٣١٥,٦١٦ \text{ دينار}$$

السؤال الثالث : **حصل أحد التجار من البنك على فوائد قيمتها ٨٤٠ ديناراً مقابل مبلغ ٢٤٠٠٠ دينار ، أودعه في البنك لمدة سنتين أحسب معدل الفائدة البسيطة التي حسبها البنك**

المعطيات / ف = ٨٤٠ دينار

م = ٢٤٠٠٠ دينار

ن= ٢ سنة

المطلوب / ع

الحل

ف = م × ن × ع

٨٤٠ = ٢٤٠٠٠ × ٢ × ع

$$ع = \frac{٨٤٠}{٢٤٠٠٠ \times ٢}$$

ع = ٠٫٠١٧٥

= ١٫٧٥٪

السؤال الرابع : **أودعت فداء مبلغ ٥٠٠٠ دينار في البنك بمعدل فائدة مركبة ١٢% سنوياً ، أحسب مبلغ الفائدة المستحقة لها بعد ٤ سنوات ، إذا كانت الفوائد تضاف كل شهر ؟**

المعطيات / م = ٥٠٠٠٠

ف = ١٢٪

ن = ٤ سنوات

الفوائد تضاف كل شهر أي ١٢ مرة في السنة

المطلوب / الفائدة

الحل

$$جـ = م\left(١ + \frac{ع}{ر}\right)^{ن ر}$$

$$= ٥٠٠٠\left(١ + \frac{٠٫١٢}{١٢}\right)^{٤ \times ١٢}$$

جـ = ٨٠٦١٫١٣

ف = جـ − م

= ٨٠٦١٫١٣ − ٥٠٠٠

= ٣٠٦١٫١٣ دينار

السؤال الخامس : أجد المبلغ الذي تصبح جملته ٧١٧٦.٨٨ ديناراً في نهاية ٣ سنوات ، بمعدل فائدة مركبة ٦% سنوياً تضاف كل شهرين .

جـ = ٧١٧٦,٨٨
ن = ٣
ع = ٦٪
تضاف كل شهري أي ٦ مرات في السنة (ر = ٦)

المطلوب / م

الحل

$$جـ = م\left(1+\frac{ع}{ر}\right)^{ر\times ن}$$

$$٧١٧٦,٨٨ = م\left(1+\frac{٠,٠٦}{٦}\right)^{٦\times ٣}$$

$$٧١٧٦,٨٨ = م(١,٠١)^{١٨}$$

$$٧١٧٦,٨٨ = م\ ١,١٩٦$$

$$م = ٦٠٠٠,٧$$ دينار

السؤال السادس: أصدرت الدولة سندات دائمة القيمة الاسمية للسند ١٠٠٠ دينار ، ومعدل الفائدة الاسمي ١٠% ، ومعدل الفائدة في السوق ٩% والفوائد تدفع كل سنة ، أجد سعر إصدار هذه السندات .

المعطيات / أ = ١٠٠٠

ع = ١٠٪

$\bar{ع}$ = ٩٪

المطلوب / سعر الإصدار لهذه السندات الدائمة ق (ح)

الحل

$$ق(ع) = \frac{أ \times ع}{\bar{ع}}$$

$$ق(ع) = \frac{١٠٠٠ \times ٠,١٠}{٠,٠٩}$$ ومنها

$$ق(ع) = \frac{١٠٠٠ \times ١٠}{٠٩}$$

$$= ١١١١,١$$ دينار