بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين	State of Palestine دولة فلسطين	الاسم :...........................
وزارة التربية والتعليم العالي		المبحث: الرياضيات
مديرية التربية والتعليم جنوب الخليل		الصف: الثاني ثانوي علمي
الاختبار الموحد لمديرية جنوب الخليل		التاريخ: ٦ / ١ / ٢٠١٩م
الفرع العلمي/ الورقة الأولى	مجموع العلامات: (١٠٠) علامة	الزمن : ساعتان ونصف فقط

اختبار نهاية الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٩م

ملاحظة: عدد أسئلة الورقة (ستة) أسئلة. أجب عن (خمسة) أسئلة منها فقط.

القسم الأول: يتكون هذا القسم من أربعة أسئلة، وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعها.

السؤال الأول: أنقل رمز الإجابة الصحيحة إلى دفتر الإجابة في كلٍ مما يلي: **(٣٠ علامة)**

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) $= ٢س^٢ + س + ١$ في الفترة [أ ، ٢أ] يساوي ١٣ فما قيمة/ قيم الثابت أ؟

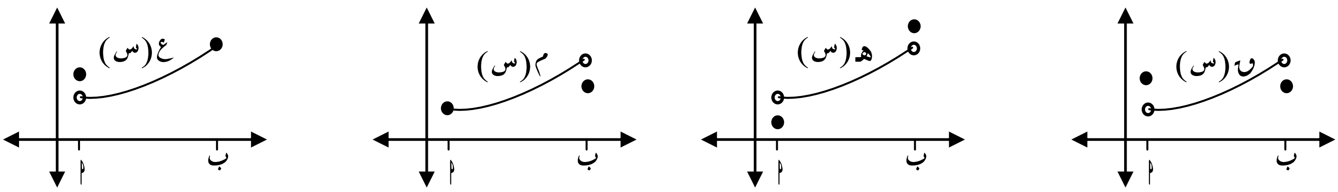
أ) صفر ب) صفر، −٢ ج) ٢ د) صفر، ٢

٢) إذا كان ص = قاس+ظاس، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، فإن $\frac{ص'}{ص}$ تساوي:

أ) −قاس ب) −قتاس ج) قاس د) قتاس

٣) منحنى الاقتران الذي يكون متزايد على [أ ، ب] هو:

أ) ق(س) ب) هـ(س) ج) م(س) د) ع(س)



٤) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية بحيث أن: $|أ_س| = -٣$ ، $|٢أ|_ص = ٣٦$، وكانت $\left|\frac{١}{\sqrt{٣}}أ\right| = -١$، فإن قيمتي س ، ص على الترتيب هما:

أ) −٣ ، ٩ ب) ١ ، −٣ ج) −١ ، ٣ د) ٣ ، −٩

٥) إذا كان ق(س) $=$ هـ$^{س-٢}$ + ٣لو$_{هـ}$(س^٢+١)، فإن ق$'$(٠) =

أ) هـ$^{-٢}$ ب) ١ ج) هـ$^{-١}$+٦ د) هـ

٦) معدل تغير مساحة المربع بالنسبة إلى محيطه عندما يكون محيطه ٢٤سم هو:

أ) ٣ سم^٢/سم ب) ٤ سم^٢/سم ج) ٦ سم^٢/سم د) ١٢ سم^٢/سم

٧) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) يساوي $س^{2}.\Delta س + (\Delta س)^{2}$ س فإن $ق'(-2) =$

أ) -2 ب) صفر ج) 2 د) 4

٨) إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات مربعة من الرتبة ن، فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة دائماً:

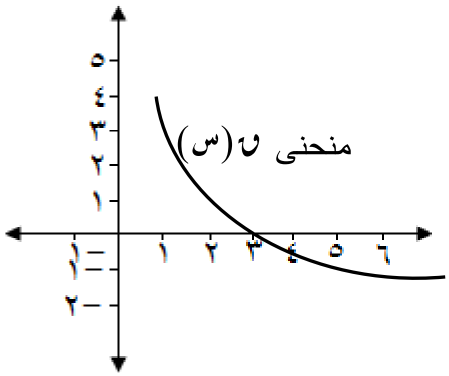
أ) إذا كانت أ·ب = أ·جـ، فإن ب = جـ. ب) إذا كان أ·ب = و، فإن أ = و أو ب = و.

ج) إذا كانت أ·ب = أ·جـ ، $|أ| \neq 0$، فإن ب = جـ. د) $|(ك أ)^{-1}| = ك^{ن} |أ^{-1}|$ ، $ك \in ح$

٩) إذا كان للاقتران $ق(س) = س^{3} + أ س^{2} + 3ب س$ نقطة انعطاف أفقية عندما $س = -1$، فإن قيمة الثابت ب تساوي:

أ) -3 ب) -1 ج) 1 د) 3

١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)، فإن العبارة الصحيحة مما يلي هي:



أ) $ق''(3) > ق'(3) > ق(3)$

ب) $ق''(3) > ق(3) > ق'(3)$

ج) $ق(3) > ق'(3) > ق''(3)$

د) $ق'(3) > ق(3) > ق''(3)$

١١) إذا كانت $ص + 2س = 7$ هي معادلة العمودي على المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ق(س) عند نقطة التماس التي إحداثها السيني $س = 2$، حيث $ق(س) \times ق'(س) = \frac{ك}{س^{2}}$ ، $ق(س) \neq 0$، فإن قيمة الثابت ك هي:

أ) $-\frac{10}{3}$ ب) $-\frac{7}{12}$ ج) $\frac{5}{12}$ د) 6

١٢) إذا كانت $\begin{vmatrix} 2جـ & 2أ \\ 4د & 4ب \end{vmatrix} = -8$، فإن $\begin{vmatrix} \frac{3}{2}د & \frac{3}{2}جـ \\ 2ب & 2أ \end{vmatrix} =$

أ) -3 ب) -1 ج) 1 د) 3

١٣) إذا كان $ق(س) = \frac{[\frac{1}{3}س]}{س - 3}$ ، $س \neq 3$، فإن $ق'\left(\frac{7}{2}\right) =$

أ) -4 ب) صفر ج) $3,5$ د) غير موجودة

١٤) إذا كان $ق(3) = 5$ ، $ق'(3) = 4$، فإن $\lim_{س \to 3} \frac{3ق(س) - س ق(3)}{س - 3}$ تساوي:

أ) 4 ب) 7 ج) 9 د) 12

١٥) إذا كان ق(س) كثير حدود بحيث أن ق″(س) $=$ (س $-$ ٢)^{٢} (س $-$ ١)^{٣} (س $-$ ٥)^{٤}. فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها نقاط انعطاف للاقتران ق(س) هي:

أ) {١ ، ٢ ، ٥}　　ب) {١}　　ج) {٢ ، ٥}　　د) {١ ، ٥}

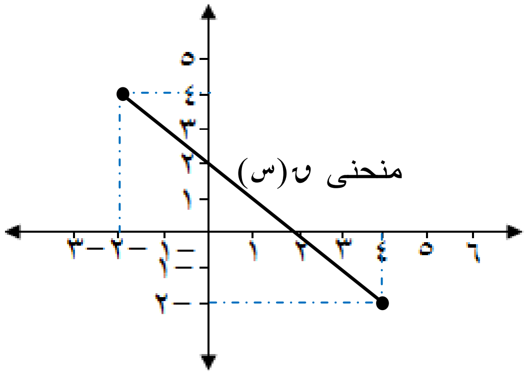
١٦) يتحرك جسيم في خط مستقيم وفق العلاقة ع $=$ أ $\sqrt{\text{ف}}$، حيث أن ع سرعة الجسم بوحدة م/ث، ف المسافة المقطوعة بالأمتار، فإذا كان تسارع الجسم يساوي ٨ م/ث^{٢} ، فإن قيمة الثابت أ الموجبة تساوي:

أ) $\frac{١}{١٦}$　　ب) $\frac{١}{٨}$　　ج) $\frac{١}{٤}$　　د) $\frac{١}{٢}$

١٧) إذا كانت (أ$^{-١}$. ب)$^{-١}$ $= \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$، وكانت ب $= \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$، فإن المصفوفة ٢أ هي:

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$　　ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$　　ج) $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$　　د) $\begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$

١٨) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على [−٢ ، ٤]، فإن قيمة جـ التي تعنيها نظرية القيمة المتوسطة هي:



أ) −١　　ب) {−٢ ، ٤}　　ج) [−٢ ، ٤]　　د)]−٢ ، ٤[

١٩) إذا كان (هـ∘ق)′(٣) $=$ ١٤٤، وكان ق′(٣) $=$ ٢ق(٣) $=$ ٤، وكان هـ(س) $=$ أ(س^{٢} $-$ س)^{٣} ، فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ١　　ب) ٣　　ج) ٤　　د) ٣٦

٢٠) إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [١ ، ٧]، وكان ق″(س) $= \dfrac{٢\text{س} - ٣}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤)^{٢}}}$ ، فإن عدد النقاط الحرجة للاقتران ق′(س) هو:

أ) ١　　ب) ٢　　ج) ٣　　د) ٤

السؤال الثاني: **(٢٠ علامة)**

أ) دون استخدام قاعدة لوبيتال، جد $\text{ق}'(\text{س})$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} \geq ٠$ باستخدام تعريف المشتقة. (٦ علامات)

ب) من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض ٥٠ م، أطلق جسم رأسياً للأعلى فكانت إزاحته ف بالأمتار عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالقاعدة: $\text{ف} = ١٥\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢}$. احسب سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض. (٦ علامات)

ج) جد المصفوفة س حيث أن : $٣\text{س} . \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \text{س} . \begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ١٦ & -٣ \end{bmatrix}$ (٨ علامات)

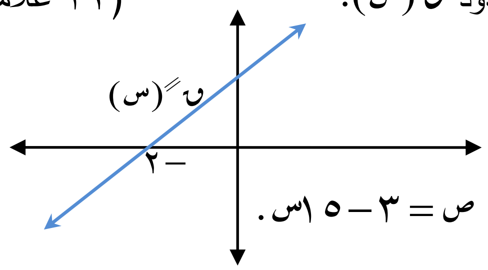
السؤال الثالث: **(٢٠ علامة)**

أ) استخدم طريقة جاوس في حل النظام الآتي: (٨ علامات)

$\text{س} - \text{ص} + \text{ع} = ٦$ ، $\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع} = ٣$ ، $٢\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = ٠$

ب) الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الثانية لمنحنى الاقتران كثير الحدود $\text{ق}(\text{س})$. (١٢ علامة)

إذا علمت أن $\text{ق}'(-٥) = \text{ق}'(١) = ٠$. جد كلاً مما يأتي:



١) فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$.

٢) قاعدة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ علماً بأن معادلة مماسه عند $\text{س} = ٠$ هي $\text{ص} = ٣ - ١٥\text{س}$.

السؤال الرابع: **(٢٠ علامة)**

أ) بين أنه يوجد مماسين متوازيين لمنحنى العلاقة $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{س}\text{ص} + ١$ عند نقطتي تقاطعها مع المستقيم الذي معادلته $\text{ص} = \text{س}$، ثم جد زاوية ميلهما؟ (٨ علامات)

ب) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}(\text{س} - ٤)^{٣}$ ، $\text{س} \in [-١ ، ٥]$ فجد ما يلي: (١٢ علامة)

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ق}(\text{س})$.

٢) القيم القصوى المحلية لمنحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ محدداً المطلقة منها إن وجدت.

القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين، وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط.

السؤال الخامس: **(١٠ علامات)**

أ) إذا كان $\text{ق}(٢\text{س}+٥) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}$ قابلاً للاشتقاق، فما قيمة $\lim\limits_{\text{ع}\to ١} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}^{٢}+٢\text{ع})+٣}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ع}^{٢}}$. (٤ علامات)

ب) في تمام الساعة الثانية عشرة ظهراً، كانت الباخرة (ب) تقع على بعد ٣٠كم شمال الباخرة (أ) وتسير شرقاً بسرعة ١٠كم/ساعة، وتحركت الباخرة (أ) بعد تحرك الباخرة (ب) بساعة واحدة، بسرعة ٢٠كم/ساعة شمالاً، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن؟ (٦ علامات)

السؤال السادس: **(١٠ علامات)**

أ) برهن باستخدام خصائص المحددات أن: $\begin{vmatrix} ١ & -١ & \text{ب} \\ ١-\text{ب} & \text{ب} & \text{ب}-١ \\ \text{ب} & -\text{ب} & ١ \end{vmatrix} = ١ - \text{ب}^{٢}$. (٤ علامات)

ب) إذا كان المستقيم $\text{ص} = \text{هـ}^{٢}$ يقطع منحنى كثير الحدود من الدرجة الثانية $\text{ك}(\text{س})$ عند $\text{س} = \text{س}_{١}$ ، $\text{س} = \text{س}_{٢}$ ، $\text{ك}(\text{س}) \succ ٠$ ، $\forall \text{س} \in \text{ح}$. بين أن الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ك}(\text{س})$ يحقق شروط نظرية رول على $[\text{س}_{١} ، \text{س}_{٢}]$، ثم جد قيمة (ى) التي تحددها النظرية. (٦ علامات)

انتهت الأسئلة مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح

لجنة مبحث الرياضيات/ مديرية جنوب الخليل

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين		الاسم :الإجابة النموذجية
وزارة التربية والتعليم العالي	State of Palestine	المبحث: الرياضيات
مديرية التربية والتعليم جنوب الخليل	دولة فلسطين	الصف: الثاني ثانوي علمي
الاختبار الموحد لمديرية جنوب الخليل		التاريخ: ٦ / ١ / ٢٠١٩م
الفرع العلمي/ الورقة الأولى	مجموع العلامات: (١٠٠) علامة	الزمن : ساعتان ونصف فقط

اختبار نهاية الفصل الدراسي الأول للعام الدراسي ٢٠١٨/٢٠١٩ م

السؤال الأول: أنقل رمز الإجابة الصحيحة إلى دفتر الإجابة في كلٍ مما يلي: **(٣٠ علامة)**

رقم الفقرة	رمز الإجابة الصحيحة	الإجابة الصحية
١)	ج	٢
٢)	ج	قاس
٣)	ب	هـ(س)
٤)	ب	١ ، −٣
٥)	أ	$هـ^{-٢}$
٦)	أ	٣ $سم^{٢}$ /سم
٧)	د	٤
٨)	ج	إذا كانت أ·ب = أ·جـ ، |أ| ≠ ٠، فإن ب = جـ.
٩)	ج	١
١٠)	ب	ن″(٣) ≺ ن(٣) ≺ ن′(٣)
١١)	د	٦
١٢)	د	٣
١٣)	أ	−٤
١٤)	ب	٧
١٥)	ب	{١}
١٦)	ج	$\frac{١}{٤}$
١٧)	ب	$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$
١٨)	د	]−٢ ، ٤[
١٩)	أ	١
٢٠)	أ	١

السؤال الثاني: **(٢٠ علامة)**

أ) دون استخدام قاعدة لوبيتال، جد $\text{ق}'(\text{س})$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} \geq ٠$ باستخدام تعريف المشتقة. (٦ علامات)

الحل:-

طريقة (١):

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ع}} - \text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{ع}\sqrt{\text{ع}} - \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\left(\text{ع}\sqrt{\text{ع}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)}{\left(\text{ع}\sqrt{\text{ع}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\left(\text{ع}\sqrt{\text{ع}}\right)^{٢} - \left(\text{س}\sqrt{\text{س}}\right)^{٢}}{\text{ع} - \text{س}} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\left(\text{ع}\sqrt{\text{ع}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{١}{\left(\text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{س}\sqrt{\text{س}}\right)}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}\left(\text{ع}^{٢} + \text{ع}\text{س} + \text{س}^{٢}\right)}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}} \times \frac{١}{٢\text{س}\sqrt{\text{س}}}$$

$$= ٣\text{س}^{٢} \times \frac{١}{٢\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \boxed{\frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}} \text{ ، } \text{س} \succ ٠$$

طريقة (٢):

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ع}} - \text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\sqrt{\text{ع}} - \text{ع}\sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\sqrt{\text{س}} - \text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\left(\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}\right)}{\left(\sqrt{\text{ع}}\right)^{٢} - \left(\sqrt{\text{س}}\right)^{٢}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}}\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\cancel{\left(\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}\right)}}{\left(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}\right)\cancel{\left(\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}\right)}} + \sqrt{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\left(\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}}\right)} + \sqrt{\text{س}} = \frac{٣\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}}} = \boxed{\frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}} \text{ ، } \text{س} \succ ٠$$

ب) من قمة برج يرتفع عن سطح الأرض ٥٠ م، أطلق جسم رأسياً للأعلى فكانت إزاحته ف بالأمتار (٦ علامات)
عن قمة البرج بعد ن ثانية تعطى بالقاعدة: $\text{ف} = ١٥\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢}$. احسب سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.

الحل:-

عند ارتطام الجسم بسطح الأرض تكون إزاحته عن سطح البناية تساوي −٥٠ م. أي أن: $\text{ف} = -٥٠\text{م}$

$$١٥\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢} = -٥٠ \Leftarrow ٥\text{ن}^{٢} - ١٥\text{ن} - ٥٠ = ٠$$
$$\Leftarrow \text{ن}^{٢} - ٣\text{ن} - ١٠ = ٠$$
$$\Leftarrow (\text{ن} - ٥)(\text{ن} + ٢) = ٠$$

$\Leftarrow$ إما $\text{ن} = ٥\text{ث}$ أو $\text{ن} = -٢\text{ث}$ (ترفض). إذن الزمن اللازم لارتطام الجسم بسطح الأرض هو: $\text{ن} = ٥\text{ث}$.

$$\text{ف} = ١٥\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢} \Leftarrow \text{ع} = ١٥ - ١٠\text{ن}$$

سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض هي: $\text{ع}(٥) = ١٥ - ١٠\times٥ = \boxed{-٣٥\text{م/ث}}$.

ج) جد المصفوفة س حيث أن : $٣\text{س}.\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \text{س}.\begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ١٦ & -٣ \end{bmatrix}$ (٨ علامات)

الحل:-

$$٣\text{س}.\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \text{س}.\begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ١٦ & -٣ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow ٣\text{س}.\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} - \text{س}.\begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ١٦ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{س}.\left(\begin{bmatrix} ١٢ & ٣ \\ ٢١ & -٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ١٦ & -٣ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow \text{س}.\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$، والآن نفرض أن $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$، ومن ثم نجد $\text{أ}^{-١}$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٣ \end{vmatrix} = ١ \text{ ، } \text{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{س}.\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix} \times \text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \text{أ}^{-١} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \boxed{\text{س} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}}$$

السؤال الثالث: (٢٠ علامة)

أ) استخدم طريقة جاوس في حل النظام الآتي: (٨ علامات)

$$س - ص + ع = ٦ \quad ، \quad س + ٢ص + ع = ٣ \quad ، \quad ٢س + ص - ع = ٠$$

الحل:-

المصفوفة الممتدة المكون منها النظام هي: $\bar{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right]$ ، ونجري العمليات الآتية:

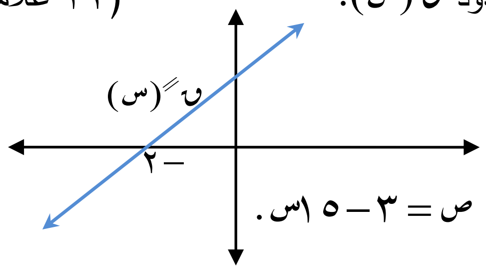
$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right] \xrightarrow[-٢ص_١+ص_٣]{-ص_١+ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٣ & -٣ & -١٢ \end{array}\right] \xrightarrow{-ص_٢+ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٠ & -٣ & -٩ \end{array}\right]$$

وبهذا حصلنا على مصفوفة مثلثية علوية، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسي كما يلي:

$-٣ع = -٩ \Leftarrow \boxed{ع = ٣}$ ، وكذلك $٣ص = -٣ \Leftarrow \boxed{ص = -١}$ ، كما أن:

$س - ص + ع = ٦ \Leftarrow س + ١ + ٣ = ٦ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$.

ب) الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الثانية لمنحنى الاقتران كثير الحدود ق(س). (١٢ علامة)



إذا علمت أن ق′(-٥) = ق′(١) = ٠. جد كلاً مما يأتي:

١) فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س).

٢) قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن معادلة مماسه عند س = ٠ هي ص = ٣ - ٥ ١ س.

الحل:-

١) فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س).

نرسم إشارة ق″(س) ——— - - - - - - - - - - • + + + + + + + + + + + ——— إشارة ق″(س)

∩ ‏ -٢ ‏ ∪

ق(س) مقعر للأسفل على الفترة]-∞ ، -٢] لأن ق″(س) < ٠ ∀ س ∈]-∞ ، -٢[.

ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [-٢ ، ∞[لأن ق″(س) > ٠ ∀ س ∈]-٢ ، ∞[.

(-٢ ، ق(-٢)) تمثل نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق(س) حيث أن:

❖ ق″(-٢) = صفر. ❖ ق(س) متصل عند س = -٢. ❖ ق(س) يغير من تقعره حول س = -٢.

٢) قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن معادلة مماسه عند س = ٠ هي ص = ٣ - ٥ ١ س.

منحنى ق″(س) هو اقتران خطي، لذلك فإن ق(س) هو كثير حدود من الدرجة الثالثة.

نفرض أن: ق(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د ⟸ { ق′(س) = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س + جـ ، ق″(س) = ٦ أ س + ٢ ب }

منحنى ق″(س) يقطع محور السينات عندما س = -٢. ∴ (-٢ ، ق(-٢)) تمثل نقطة انعطاف للاقتران ق(س)، ⟸ ق″(-٢) = ٠ ⟸ -١٢ أ + ٢ ب = ٠ ......(١)

معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند س = ٠ هي ص = ٣ - ٥ ١ س. إذن ق(٠) = ٣ & ق′(٠) = -١٥

حيث أن نقطة التماس تحقق كلاً من معادلة المماس ومعادلة الاقتران، والميل من معادلة المماس يساوي الميل من المشتقة.

ق′(٠) = -١٥ ⟸ $\boxed{\text{جـ} = -١٥}$، و ق(٠) = ٣ ⟸ $\boxed{\text{د} = ٣}$.

من المعطيات: ق′(١) = ٠ ⟸ ٣ أ + ٢ ب - ١٥ = ٠ ⟸ ٣ أ + ٢ ب = ١٥ ......(٢)

وبطرح المعادلة رقم (١) من المعادلة رقم (٢) ينتج أن: ١٥ أ = ١٥ ⟸ $\boxed{\text{أ} = ١}$. وبتعويض قيمة أ في المعادلة رقم (١) ينتج أن: -١٢ × ١ + ٢ ب = ٠ ⟸ ٢ ب = ١٢ ⟸ $\boxed{\text{ب} = ٦}$.

إذن قاعدة ق(س) هي: $\boxed{\text{ق(س)} = \text{س}^٣ + ٦\text{س}^٢ - ١٥\text{س} + ٣}$

السؤال الرابع: (٢٠ علامة)

أ) بين أنه يوجد مماسين متوازيين لمنحنى العلاقة $س^٢ + ص^٢ = س ص + ١$ عند نقطتي تقاطعها مع (٨ علامات) المستقيم الذي معادلته $ص = س$، ثم جد زاوية ميلهما؟

الحل:-

نجد نقاط تقاطع المستقيم $ص = س$ مع العلاقة $س^٢ + ص^٢ = س ص + ١$، وذلك بتعويض $ص = س$ في العلاقة:

$$س^٢ + ص^٢ = س ص + ١ \Leftarrow س^٢ + س^٢ = س^٢ + ١ \Leftarrow س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$$

عندما $س = \pm ١$ فإن $ص = \pm ١$ وذلك من خلال التعويض في معادلة المستقيم $ص = س$.

إذن هنالك نقطتي تقاطع هما: $(-١ ، -١)$ ، $(١ ، ١)$، وبذلك فإنه يوجد مماسين لمنحنى العلاقة.

$$س^٢ + ص^٢ = س ص + ١ \Leftarrow ٢س + ٢ص . \frac{ءص}{ءس} = ص + س . \frac{ءص}{ءس} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} . (٢ص - س) = ص - ٢س$$

$$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{ص - ٢س}{٢ص - س}$$

ميل المماس عند النقطة $(-١ ، -١)$ هو: $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{(-١ ، -١)} = \frac{-١ - (٢ \times -١)}{(٢ \times -١) - (-١)} = \frac{-١ + ٢}{-٢ + ١} = -١$

ميل المماس عند النقطة $(١ ، ١)$ هو: $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{(١ ، ١)} = \frac{١ - (٢ \times ١)}{(٢ \times ١) - ١} = \frac{١ - ٢}{٢ - ١} = -١$

إذن يوجد هنالك مماسان متوازيان لمنحنى العلاقة حيث أن ميلاهما متساوي ويساوي $\boxed{-١}$، حيث أن زاوية ميلاهما هي: $\boxed{١٣٥^\circ}$.

ب) إذا كان ق(س) = س(س − ٤)^٣ ، س∈[−١ ، ٥] فجد ما يلي: (١٢ علامة)

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س). ٢) القيم القصوى المحلية لِ ق(س) محددًا المطلقة منها إن وجدت.

الحل:-

ق(س) اقتران متصل على الفترة [−١ ، ٥] لأنه حاصل ضرب متصلين (كثيري حدود) على نفس الفترة.

ق(س) اقتران قابل للاشتقاق على الفترة]−١ ، ٥[لأنه حاصل ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق على نفس الفترة.

قَ(س) = (س − ٤)^٣ + ٣س(س − ٤)^٢

= (س − ٤)^٢ ((س − ٤) + ٣س)

= ٤(س − ٤)^٢ (س − ١)

قَ(س) =صفر عندما س =١ ، س = ٤ ، قَ(س) غ.م عندما س = −١ ، س = ٥

الإحداثيات السينية للنقاط الحرجة هي: {−١ ، ١ ، ٤ ، ٥}

إشارة قَ(س) ⟵ ∘ −−−−−−−−−− • +++++++++ • +++++++ ∘ ⟶

−١ ↘ ١ ↗ ٤ ↗ ٥

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

ق(س) متناقص على الفترة [−١ ، ١] لأن قَ(س) ≺ ٠ ∀ س∈]−١ ، ١[

ق(س) متزايد على الفترة [١ ، ٥] لأن قَ(س) ≻ ٠ ، ∀ س∈]١ ، ٤[،]٤ ، ٥[.

٢) القيم القصوى محدداً المطلقة منها إن وجدت.

* ق(−١) = ١٢٥ تشكل قيمة قصوى عظمى محلية ومطلقة للاقتران ق(س) حيث أن:

١. س = −١∈[−١ ، ٥] ٢. قَ(−١) غير موجودة.

٣. إشارة قَ(س) على يمين س = −١ سالبة. (بداية تناقص لمنحنى ق(س))

٤. ق(−١) = ١٢٥ ≻ ق(٥) = ٥ وبالتالي هي أعظم قيمة يتخذها الاقتران على الفترة [−١ ، ٥].

* ق(١) = −٢٧ تشكل قيمة قصوى صغرى محلية ومطلقة للاقتران ق(س) حيث أن:

١. س = ١ ∈[−١ ، ٥] ٢. قَ(١) =صفر .

٣. قَ(س) تغير من إشارتها حول س = ١ من سالب إلى موجب.

٤. ق(١) = −٢٧ هي أعظم قيمة للاقتران ق(س) في الفترة [−١ ، ٥] وبالتالي هي مطلقة.

* ق(٥) = ٥ تشكل قيمة قصوى عظمى محلية للاقتران ق(س) حيث أن:

١. س = ٥ ∈[−١ ، ٥] ٢. قَ(٥) غير موجودة.

٣. إشارة قَ(س) على يسار س= ٥ موجبة. (نهاية تزايد لمنحنى ق(س))

* ق(٤) = ٠ لا تشكل قيمة قصوى لمنحنى الاقتران ق(س) لأن قَ(س) لم تغير من إشارتها حولها.

القسم الثاني: يتكون هذا القسم من سؤالين، وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط.

السؤال الخامس: **(١٠ علامات)**

أ) إذا كان $\text{ق}(٢\text{س}+٥)=\text{س}^{٣}+٢\text{س}$ قابلاً للاشتقاق، فما قيمة $\underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{ق}\left(\text{ع}^{٢}+٢\text{ع}\right)+٣}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ع}^{٢}}$. (٤ علامات)

الحل:-

عند تعويض ع = ١ في النهاية ينتج أن: $\dfrac{\text{ق}\left((١)^{٢}+٢\times ١\right)+٣}{\text{لو}_{\text{هـ}}(١)^{٢}}=\dfrac{\text{ق}(٣)+٣}{٠}$، وللحصول على قيمة $\text{ق}(٣)$

نجعل: $٢\text{س}+٥=٣ \Leftarrow \text{س}=-١$، وبذلك فإن $\text{ق}(٣)=(-١)^{٣}+٢\times -١ \Leftarrow \text{ق}(٣)=-٣$

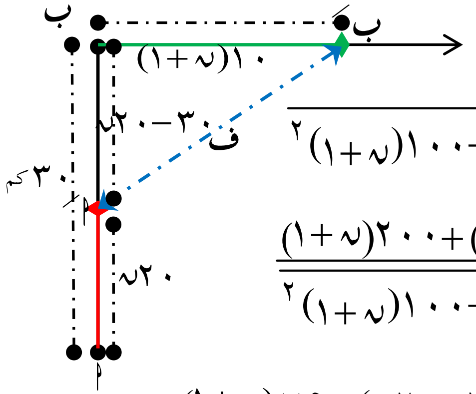
إذن: $\dfrac{\text{ق}\left((١)^{٢}+٢\times ١\right)+٣}{\text{لو}_{\text{هـ}}(١)^{٢}}=\dfrac{\text{ق}(٣)+٣}{٠}=\dfrac{-٣+٣}{٠}=\left(\dfrac{٠}{٠}\right)$ " صورة غير معينة، يمكن استخدام لوبيتال"

$\text{ق}(٢\text{س}+٥)=\text{س}^{٣}+٢\text{س} \Leftarrow ٢\text{ق}'(٢\text{س}+٥)=٣\text{س}^{٢}+٢$. وعند تعويض $\text{س}=-١$ ينتج أن:

$٢\text{ق}'(٣)=٣(-١)^{٢}+٢ \Leftarrow \text{ق}'(٣)=\frac{٥}{٢}$

$\underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}}\dfrac{\text{ق}\left(\text{ع}^{٢}+٢\text{ع}\right)+٣}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ع}^{٢}}=\underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}}\dfrac{(٢\text{ع}+٢)\text{ق}'\left(\text{ع}^{٢}+٢\text{ع}\right)}{\frac{٢}{\text{ع}}}=\dfrac{(٤)\text{ق}'(٣)}{٢}=\dfrac{٤\times\frac{٥}{٢}}{٢}=\boxed{٥}$.

ب) في تمام الساعة الثانية عشرة ظهراً، كانت الباخرة (ب) تقع على بعد ٣٠كم شمال الباخرة (أ) (٦ علامات)
وتسير شرقاً بسرعة ١٠كم/ساعة، وتحركت الباخرة (أ) بعد تحرك الباخرة (ب) بساعة واحدة، بسرعة ٢٠كم/ساعة شمالاً، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن؟



الحل:-

$$ف^2 = (30-20ن)^2 + \left((10)(ن+1)\right)^2 \Leftarrow ف = \sqrt{(30-20ن)^2 + 100(ن+1)^2}$$

$$\frac{دف}{دن} = \frac{2(30-20ن)\times -20 + 200(ن+1)}{2\sqrt{(30-20ن)^2+100(ن+1)^2}} = \frac{-40\times(30-20ن)+200(ن+1)}{2\sqrt{(30-20ن)^2+100(ن+1)^2}}$$

$\frac{دف}{دن} = 0$ عندما $-40\times(30-20ن)+200\times(ن+1)=0 \Leftarrow (30-20ن)-5\times(ن+1)=0$

$\Leftarrow 30-20ن-5ن-5=0 \Leftarrow 25ن=25 \Leftarrow ن=1$ ساعة

إشارة $\frac{دف}{دن}$: ‎− − − − − − − − − − ٠ + + + + + + + +‎ عند ١

تكون المسافة بين السفينتين أقل ما يمكن عندما $ن=1$ ساعة بعد حركة السفينة الثانية.

إذن تكون المسافة بين السفينتين أقل ما يمكن عند الساعة الثانية بعد الظهر.

السؤال السادس: (١٠ علامات)

أ) برهن باستخدام خصائص المحددات أن: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & ب \\ 1-ب & ب & ب-1 \\ ب & -ب & 1 \end{vmatrix} = 1-ب^2$. (٤ علامات)

الحل:-

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & ب \\ 1-ب & ب & ب-1 \\ ب & -ب & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[-ب ص_1+ص_3]{(ب-1)ص_1+ص_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & ب \\ 0 & 1 & ب^2-1 \\ 0 & 0 & 1-ب^2 \end{vmatrix} = 1\times1\times\left(1-ب^2\right) = \boxed{1-ب^2}$$

ب) إذا كان المستقيم $ص = هـ^٢$ يقطع منحنى كثير الحدود من الدرجة الثانية $ك(س)$ عند $س = س_١$ (٦ علامات)

، $س = س_٢$ ، $ك(س) \succ ٠$ ، $\forall س \in ح$. بين أن الاقتران $ن(س) = لـو_{هـ} ك(س)$ يحقق شروط

نظرية رول على $[س_١ ، س_٢]$، ثم جد قيمة $(ى)$ التي تحددها النظرية.

الحل:-

نبحث في تحقق شروط نظرية رول للاقتران $ن(س) = لـو_{هـ} ك(س)$ على الفترة $[س_١ ، س_٢]$.

$ن(س) = لـو_{هـ} ك(س)$ متصل على الفترة $[س_١ ، س_٢]$ لأن $ك(س)$ كثير حدود و $ك(س) \succ ٠$ ، $\forall س \in ح$.

$ن(س) = لـو_{هـ} ك(س)$ قابل للاشتقاق على الفترة $]س_١ ، س_٢[$ حيث أن: $ن'(س) = \frac{ك'(س)}{ك(س)}$.

$ن(س_١) = لـو_{هـ} ك(س_١) = لـو_{هـ} هـ^٢ = ٢$ ، $ن(س_٢) = لـو_{هـ} ك(س_٢) = لـو_{هـ} هـ^٢ = ٢$ حيث أن المستقيم

$ص = هـ^٢$ يقطع منحنى $ك(س)$ عند $س = س_١$ ، $س = س_٢$، وعند نقاط التقاطع تتساوى الاقترانات، ومن

معادلة المستقيم $ص = هـ^٢$ نجد أن:

نقاط التقاطع هما: $\left(س_١ ، ك(س_١)\right) = \left(س_١ ، هـ^٢\right)$ & $\left(س_٢ ، ك(س_٢)\right) = \left(س_٢ ، هـ^٢\right)$

إذن: $ن(س_١) = ن(س_٢) = ٢$

إذن تحققت شروط نظرية رول للاقتران $ن(س) = لـو_{هـ} ك(س)$ على الفترة $[س_١ ، س_٢]$. هذا يؤدي يوجد على

الأقل عدد مثل $ى \in]س_١ ، س_٢[$: $ن'(ى) =$صفر.

$\Leftarrow \frac{ك'(ى)}{ك(ى)} = \frac{٢أى+ب}{أى^٢+بى+جـ} = ٠$ حيث أن: $ك(س) = أس^٢ + بس+جـ$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

$\Leftarrow ٢أى+ب = ٠ \Leftarrow \boxed{ى = -\frac{ب}{٢أ}}$ قيمة $ى$ التي تحددها النظرية.

انتهت الإجابة النموذجية مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح

لجنة مبحث الرياضيات/ مديرية جنوب الخليل