الصف
12
علمي
الجزاء الاول

الممتاز
في الرياضيات

إعداد
أ.رامي عاشور

0599638419
abufadel1974@gmeil.com
Ramy Ashour

مقدمة

يسرنى ويشرفنى أن أقدم هذا العمل المتواضع لطلابى الأعزاء الذين أعتبرهم جميعاً أبنائى، وأقدمه كذلك لزملائى المعلمين الذين أعتبرهم جميعاً أساتذتى ، وأنا بهذا العمل لا أمتاز علي أحد منهم ،ولا أتفضل عليهم ، وكلى صدر رحب لاستقبال آرائهم وملاحظاتهم حول هذا الكتاب .

أقدم الطبعة الأولى من كتاب الممتاز للصف الثانى عشر (علمى وصناعى) ، وقد عمدت إلى تقديم موضوعات كتاب الوزارة حيث بدأت بالمفاهيم والنظريات والتعميمات كما وردت فى كتاب الوزارة ، وقمت بشرحها بطرق مختصرة موجزة ، وقدمت بعد كل مفهوم أو نظرية أو مهارة أمثلة توضيحية متدرجة فى الصعوبة حتى يتمكن الطالب من استيعاب ذلك المفهوم ، وفهم تلك النظرية وإتقان تلك المهارة .

ثم وضعت علي كل موضوع مجموعة من التمارين الاثرائية الهامة التى تغطى جميع جوانب المادة ، حيث أن كثيراً منها ورد فى امتحانات سابقة ، وقد أرفقت مع كل سؤال الجواب النهائى حتى يتسنى للطالب تقييم نفسه ، والحكم علي مدي تمكنه من أداء المهارة ، ومن ثم تدارك الأخطاء ومعالجتها وتجنبها فى أسئلة قادمة .

فى الختام أرجو أن يحوز هذا العمل علي إعجابكم ورضاكم ، وأن يكون حافزاً للطالب للانطلاق فى عالم الرياضيات ، ذلك العلم الذى هو أداة لتقدم الشعوب وتطورها وتقدمها إذا أرادت أن يكون لها مكان بين الأمم وأتمنى كذلك أن يكون دافعاً للطالب للتميز ، وأداة له للتقدم والتفوق والنجاح ....

أ.رامى عاشور

٢٠١٩/٨/٨

المحتويات

الوحدة الأولى	حساب التفاضل	٣
	(١ -١)متوسط التغير	٤
	(١ -٢) قواعد الاشتقاق	١١
	(١ -٣) مشتقة الاقترانات المثلثية	١٩
	(١ -٤) قاعدة لوبيتال ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي	٢٣
	(١ -٥)تطبيقات هندسية وفيزيائية	٢٨
	(١ -٦)قاعدة السلسلة	٣٧
	(١ -٧) الاشتقاق الضمني	٤٤
الوحدة الثانية	تطبيقات التفاضل	٥٠
	(٢ -١) نظريتا رول والقيمة المتوسطة	٥١
	(٢ -٢) الاقترانات المتزايدة والمتناقصة	٥٨
	(٢ -٣)القيم القصوى	٦٣
	(٢ -٤) التقعر ونقط الانعطاف	٧١
	(٢ -٥)تطبيقات عملية على القيم القصوى	٨١
الوحدة الثالثة	المصفوفات والمحددات	٨٨
	(٣ -١)المصفوفة	٨٩
	(٣ -٢)العمليات على المصفوفات	٩٢
	(٣ -٣)المحددات	٩٩
	(٣ -٤)النظير الضربي للمصفوفة	١٠٦
	(٣ -٥)حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات	١١٣

الوحدة الأولى

حساب التفاضل

١-١ متوسط التغير Rate of change

تعريف :

إذا كان $ص = ق(س)$ اقترانا وتغيرت $س$ من $س_١$ إلى $س_٢$ ، $س_١ \neq س_٢$ فإن :

- التغير في $س$ يساوي $س_٢ - س_١$ ونرمز له بالرمز $\Delta س$ ويقرأ دلتا $س$
- التغير في الاقتران $ق(س)$ اقترانا يساوي $ق(س_٢) - ق(س_١)$ ويرمز له بالرمز $\Delta ص$
- متوسط التغير في الاقتران $ص = ق(س)$ يساوي $\dfrac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

ويمكن كتابته علي الصورة $\dfrac{\Delta ص}{\Delta س} = \dfrac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$

حيث $هـ = \Delta س \neq ٠$ ونسميه اقتران متوسط التغير عند $س_١$

مثال ١: إذا كان $ق(س) = س^٢ + س - ١$ فأوجد التغير في $ص = ق(س)$ عندما تتغير س

١) من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٥$

٢) من $س_١ = ٤$ إلى $س_٢ = -٢$

٣) من $س_١ = -١$ إلى $س_٢$ بحيث $\Delta س = -٣$

الحل:

١) $\Delta ص = ق(٥) - ق(٢)$

$$= (٢٥+٥-١) - (٤+٢-١) = ٢٤$$

٢) $\Delta ص = ق(-٢) - ق(٤)$

$$= \left((-٢)^٢ + (-٢) - ١\right) - \left(٤^٢ + ٤ - ١\right)$$

$$= (٤-٢-١) - (١٦+٤-١) = -١٨$$

٣) $س_٢ = س_١ + \Delta س = -١ + -٣ = -٤$

$$\Delta ص = ق(س_٢) - ق(س_١)$$

$$= ق(-٤) - ق(-١)$$

$$= \left((-٤)^٢ + (-٤) - ١\right) - \left((-١)^٢ + (-١) - ١\right)$$

$$= (١٦-٤-١) \quad - \quad (١-١-١) \quad = ١٢$$

مثال ٢: إذا كان **هـ(س) = جتاس − جاس** ، **أوجد متوسط التغير في هـ(س)** بين $\text{س}_{١} = \frac{\pi}{٢}$ ، $\text{س}_{٢} = ٣\pi$

الحل:

متوسط التغير $= \dfrac{\text{هـ}(٣\pi) - \text{هـ}(\frac{\pi}{٢})}{٣\pi - \frac{\pi}{٢}} = \dfrac{(\text{جتا}٣\pi - \text{جا}٣\pi) - \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٢} - \text{جا}\frac{\pi}{٢}\right)}{\frac{٥\pi}{٢}}$

$= \dfrac{(-١ - ٠) - (٠ - ١)}{\frac{٥\pi}{٢}} = \dfrac{-١ + ١}{\frac{٥\pi}{٢}} = ٠$

مثال ٣: إذا كان متوسط تغير **ن(س)** عندما تتغير س من $\text{س}_{١} = ١$ إلى $\text{س}_{٢} = ٩$ مساوياً ٥ ، أوجد متوسط التغير في الاقتران $\text{ل(س)} = \text{س}^{٢}\,\text{ن}(٢\text{س} + ٥)$ بين $\text{س}_{١} = -٢$ ، $\text{س}_{٢} = ٢$

الحل:

متوسط التغير في ن(س) $= \dfrac{\text{ن}(٩) - \text{ن}(١)}{٩ - ١} = ٥$

$\text{ن}(٩) - \text{ن}(١) = ٤٠$ .... (١)

متوسط التغير في ل(س) $= \dfrac{\text{ل}(٢) - \text{ل}(-٢)}{٢ - (-٢)} = \dfrac{٢^{٢}\,\text{ن}(٢ \times ٢ + ٥) - (-٢)^{٢}\,\text{ن}(٢ \times -٢ + ٥)}{٤}$

$= \dfrac{٤\text{ن}(٩) - ٤\text{ن}(١)}{٤} = \text{ن}(٩) - \text{ن}(١) = ٤٠$

تعريف :

متوسط التغير للاقتران **ن(س)** عندما تتغير س من $\text{س}_{١}$ إلى $\text{س}_{٢}$ يساوي ميل القاطع المار بالنقطتين $(\text{س}_{١}، \text{ن}(\text{س}_{١}))$ ، $(\text{س}_{٢}، \text{ن}(\text{س}_{٢}))$ ونسمى الزاوية ي التي يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحورالسينات **بزاوية ميل المستقيم** ، ويكون (ظاي = ميل القاطع)

مثال ٤: إذا قطع مستقيم منحنى الاقتران $\text{ن(س)} = \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٦$ عند النقطتين $(٢، \text{ن}(٢))$، $(٣، \text{ن}(٣))$، جد :

١) متوسط تغير الاقتران في الفترة [٢، ٣] .

٢) قياس زاوية ميل المستقيم ل

الحل :

١) **متوسط تغير ق(س) في الفترة [٢، ٣]** = ميل المستقيم ل

$= \dfrac{\text{ن}(٣) - \text{ن}(٢)}{٣ - ٢} = \dfrac{(٣^{٢} - ٤(٣) + ٦) - (٢^{٢} - ٤(٢) + ٦)}{٣ - ٢}$

$= \dfrac{(٩ - ١٢ + ٦) - (٤ - ٨ + ٦)}{٣ - ٢} = \dfrac{٣ - ٢}{١} = ١$

٢) بما أن ميل المستقيم ل = ظاي

إذن ظاي = ١ ، ومنها ي = ظا$^{-١}$(١) = $\frac{\pi}{٤}$

مثال ٥: إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢،٥] يساوي ٦ ، احسب متوسط تغير الاقتران
هـ(س) = س^{٢}ق(س) − ٢س علما بأن هـ(س) يمر بالنقطة (٢،−١٦)

الحل : بما أن متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢،٥] يساوي ٦

إذن $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = ٦$ ⇐ ق(٥) − ق(٢) = ١٨ ....(١)

∵ هـ(س) يمر بالنقطة (٢ ، −١٦) ∴ هـ(٢) = −١٦

ومنها ٢^{٢}ق(٢) − ٢×٢ = −١٦ ⇐ ٤ق(٢) = −١٢ ⇐ ق(٢) = −٣

بالتعويض في المعادلة (١) ق(٥) − (−٣) = ١٨ ∴ ق(٥) = ١٥

متوسط تغير الاقتران هـ(س) في الفترة [٢،٥] = $\frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٥ - ٢}$

$$= \frac{(٥^{٢}ق(٥) - ٢×٥) - (٢^{٢}ق(٢) - ٢×٢)}{٥ - ٢}$$

$$= \frac{(٢٥×١٥ - ١٠) - (٤×-٣ - ٤)}{٣}$$

$$= \frac{(٣٦٥) - (-١٦)}{٣}$$

$$= \frac{٣٨١}{٣} = \boxed{١٢٧}$$

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير :

تعريف :

إذا كانت ف = ق(ن) حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم ، ن الزمن ، فإن متوسط التغير في المسافة عندما تتغير ن من ن$_{١}$ إلى ن$_{٢}$ هو $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_{٢} - ف_{١}}{ن_{٢} - ن_{١}} = \frac{ق(ن_{٢}) - ق(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$

وتسمى السرعة المتوسطة في الفترة [ن$_{١}$،ن$_{٢}$]

مثال ٦: يتحرك جسم علي خط مستقيم ، بحيث أن بعده ف بالأمتار عن النقطة و بعد ن من الثوانى يعطي بالقاعدة : $ف = ق(ن) = ٢ن^{٢} + ن - ٣$ ، جد :

١) السرعة المتوسطة فى الفترة $[٠،٢]$

٢) إذا كانت السرعة المتوسطة فى الفترة $[١،أ]$ تساوى ٢٥ م/ث . جد قيمة أ

الحــل:

١) **السرعة المتوسطة** $= \dfrac{\Delta ف}{\Delta ن} = \dfrac{ق(٢) - ق(٠)}{٢ - ٠} = \dfrac{(٢(٢)^{٢}+٢-٣)-(٢(٠)^{٢}+٠-٣)}{٢-٠}$

$$= \dfrac{٧ - (-٣)}{٢} = \dfrac{١٠}{٢} = ٥$$

٢) $\dfrac{\Delta ف}{\Delta ن} = \dfrac{ق(أ) - ق(١)}{أ - ١} = \dfrac{(٢أ^{٢} + أ - ٣) - (٢(١)^{٢} + ١ - ٣)}{أ - ١} = \dfrac{٢أ^{٢} + أ - ٣ - ٠}{أ - ١}$

إذن $\dfrac{٢أ^{٢} + أ - ٣}{أ - ١} = ٢٥$

ومنها $٢أ^{٢} + أ - ٣ = ٢٥(أ - ١)$

$$٢أ^{٢} + أ - ٣ = ٢٥أ - ٢٥$$

$$٢أ^{٢} - ٢٤أ + ٢٢ = ٠$$

$$أ^{٢} - ١٢أ + ١١ = ٠$$

$$(أ - ١)(أ - ١١) = ٠$$

إما $أ = ١$ (مرفوض) أو $أ = ١١$

مثال ٧: لتكن : $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، \quad س \geq ١ \\ ٢س - ١ & ، \quad س < ١ \end{cases}$

جد : ١) متوسط التغير فى الاقتران عندما تتغير س من ١ إلى صفر

٢) قيمة هـ الموجبة التى تجعل متوسط التغير فى الفترة $[٢،٢+هـ]$ يساوى ٧

الحــل:

١) **متوسط التغير** $= \dfrac{ق(٠) - ق(١)}{٠ - ١} = \dfrac{(٢ \times ٠ - ١) - (١)^{٢}}{-١} = \dfrac{-١ - ١}{-١} = ٢$

٢) $\dfrac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{٢ + هـ - ٢} = ٧$

$$\frac{(\text{٢}+\text{هـ})^{\text{٢}}-\text{٢}^{\text{٢}}}{\text{هـ}}=\text{٧}$$

$$\text{٤}+\text{٤هـ}+\text{هـ}^{\text{٢}}-\text{٤}=\text{٧هـ}$$

$$\text{هـ}^{\text{٢}}-\text{٣هـ}=\text{٠}$$

$$\text{هـ}(\text{هـ}-\text{٣})=\text{٠}$$

إما $\text{هـ}=\text{٠}$ (مرفوض) أو $\text{هـ}=\text{٣}$

مثال٨: إذا كان $\text{ق}(\text{س})=\frac{\text{أ}}{\text{س}}+\text{ب}$، $\text{س}\in[\text{جـ،د}]$، $\text{جـ}\neq\text{٠}$ ، $\text{د}\neq\text{٠}$ ، $\text{أ،ب}\in\text{ح}$،

أثبت أن متوسط التغير للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ في الفترة $[\text{جـ،د}]$ يساوي $\frac{-\text{أ}}{\text{جـد}}$

الحـل: متوسط تغير $\text{ق}(\text{س})$ في الفترة $[\text{جـ،د}]=\frac{\text{ق}(\text{د})-\text{ق}(\text{جـ})}{\text{د}-\text{جـ}}$

$$=\frac{\left(\frac{\text{أ}}{\text{د}}+\text{ب}\right)-\left(\frac{\text{أ}}{\text{جـ}}+\text{ب}\right)}{\text{د}-\text{جـ}}=\frac{\frac{\text{أ}}{\text{د}}-\frac{\text{أ}}{\text{جـ}}}{\text{د}-\text{جـ}}$$

$$=\frac{\frac{\text{أجـ}-\text{أد}}{\text{جـد}}}{\text{د}-\text{جـ}}=\frac{\text{أ}(\text{جـ}-\text{د})}{\text{جـد}}\times\frac{\text{١}}{\text{د}-\text{جـ}}=\frac{-\text{أ}}{\text{جـد}}$$

تمارين ١-١

١- إذا كان $\text{ق}(\text{س})=\frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}}$، جد قيمة متوسط التغير للاقتران $\text{ق}(\text{س})$عندما تتغير س من ٢ إلى ٣

الجواب: $\frac{-\text{٥}}{\text{٩}}$

٢- ليكن $\text{ق}(\text{س})=\begin{cases}\text{٣س}+\text{٤} & \text{،}\quad \text{س}<\text{٢}\\ \text{س}^{\text{٢}}+\text{٣س} & \text{،}\quad \text{س}\geq\text{٢}\end{cases}$ ، جد

أ- التغير في الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عندما تتغير س من ١ إلى ٣

الجواب ١١

ب- متوسط تغير $\text{ق}(\text{س})$ عندما تتغير س من ٢ إلى −١

الجواب ٣

٣- إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [٠،١] يساوى ٦ حيث

هـ(س) = ق(س^{٣}) − ٥س + ١، جد متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [٠،١]

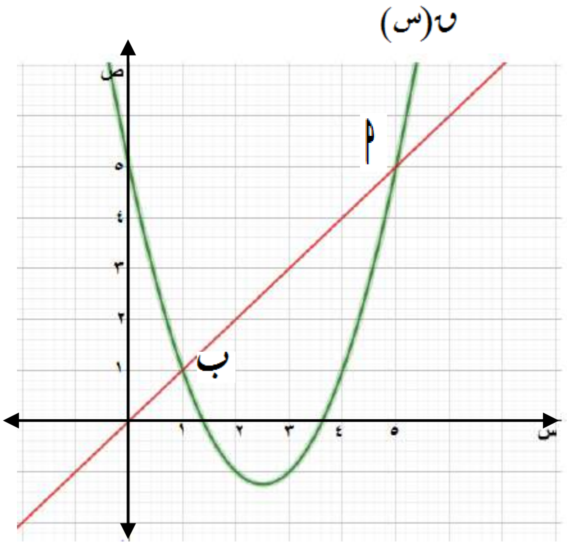
الجواب ١١

٤- يمثل الشكل المقابل منحنى ق

١- جد متوسط تغير ق(س) في الفترة [١،٥]

٢- احسب ميل العمودى علي القاطع اب

الجواب −١



٥- تحرك جسم في المستوي الاحداثي علي خط مستقيم أ(س،ص) إلى ب(٢،٥)، إذا كانت Δس = ٠,١،

Δص = ٠,٦، جد إحداثيي النقطة أ

الجواب : (١,٩،٤,٤)

٦- إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [١،٤] يساوى ٣ وكان ق(١) + ق(٤) = ٢، **جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ق^{٢}(س) علي الفترة [١،٤]**

الجواب ٦

٧- إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [٢،٥] يساوى ٧ ، وكان متوسط التغير له في الفترة [٥،٩] يساوى ١٤، جد متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [٢،٩]

الجواب ١١

٨- إذا كان $ق(س) = |٢س + ١| + [٣س]$ ، أوجد متوسط التغير في ق(س) بين $س_١ = \frac{١}{٢}$ ، $س_٢ = \frac{-٣}{٢}$

الجواب ٣

٩- إذا كان مقدار متوسط التغير في الاقتران $ق(س) = ٢س^٢ + س - ١$ يساوي ٤عندما $س = س_١ ، \Delta س = ١$ ،

جد قيمة $س_١$

الجواب $س_١ = \frac{١}{٤}$

١٠- إذا كان متوسط التغير في الاقتران $ق(س) = ٢س^٢ + ٣س$ في الفترة [أ،٣] يساوي ١١ ، أوجد قيمة أ

الجواب : $أ = ١$

١١- ما متوسط التغير في الاقتران $ق(س) = \frac{ك}{س} + جـ$ في الفترة [أ،ب] حيث أ،ب،جـ،ك $\in ح^+$

الجواب : $\frac{-ك}{أب}$

١٢- إذا كان $ق(س) = |٢س - ٦|$ ، جد متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١،٤]

الجواب : $\frac{-٢}{٣}$

١٣- إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١،ق(١)) ، (٢،٤) الواقعتين علي منحنى ق(س) يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ ء مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، جد ق(١)

الجواب ٥

١٤- إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) يعطي بالعلاقة $\Delta ص = ٣س^٢(\Delta س) + ٢(\Delta س)^٢ + أ(\Delta س)$

وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+٢هـ) - ق(٣)}{٤هـ} = ١٤$ ، ما قيمة أ ؟

الجواب $أ = ١$

١٥- إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [-١،٢] يساوي ٤ ، جد متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [-٣،٣] حيث $ق(٢س+١) = ٣هـ(س^٢ - ٢) + ٥س - ١$

الجواب $\frac{-٧}{٢}$

١-٢ قواعد الاشتقاق (Rules of Differentiation)

تعريف (١):

إذا كانت $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ اقترانا معرفا عند $\text{س}_{١}$ في مجاله ، وكانت $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$ موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمي المشتقة الأولى للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ عند $\text{س}_{١}$ ،

ونرمز لها بأحد الرموز الآتية : $\text{ق}'(\text{س}_{١})$ او $\text{ص}'|_{\text{س}=\text{س}_{١}}$ أو $\left.\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\text{س}_{١}}$ ويمكن كتابتها علي الصورة

$$\text{ق}'(\text{س}_{١}) = \underset{\text{س}\to\text{س}_{١}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س} - \text{س}_{١}}$$

تعريف (٢):

إذا كانت $\text{ق}(\text{س})$ اقترانا معرفا عند $\text{س} = \text{س}_{١}$ فإن :

$$\text{ق}'(\text{س}_{١})^{+} = \underset{\text{هـ}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_{١}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}}$$ (مشتقة $\text{ق}(\text{س})$ من يمين العدد $\text{س}_{١}$)

$$\text{ق}'(\text{س}_{١})^{-} = \underset{\text{هـ}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_{١}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{هـ}}$$ (مشتقة $\text{ق}(\text{س})$ من يسار العدد $\text{س}_{١}$)

وعندما $\text{ق}'(\text{س}_{١})^{+} = \text{ق}'(\text{س}_{١})^{-} = \text{ل}$ ، فإن ق(س) قابل للاشتقاق عند $\text{س}_{١}$ وتكون $\text{ق}'(\text{س}_{١}) = \text{ل}$

تعريف (٣) :

إذا كان الاقتران $\text{ق}(\text{س})$ معرفا علي $[\text{أ}،\text{ب}]$ فإن $\text{ق}(\text{س})$ **غير قابل للاشتقاق** عند أطراف الفترة $[\text{أ}،\text{ب}]$.
يكون $\text{ق}(\text{س})$ قابلا للاشتقاق علي $]\text{أ}،\text{ب}[$ إذا كان قابلا للاشتقاق عند كل نقطة فيها .

قاعدة (١)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ}$ حيث $\text{جـ} \in \text{ح}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = ٠$ لجميع قيم $\text{س} \in \text{ح}$

مثال ١:

جد $\text{ق}'(\text{س})$ لكل مما يلي : (١) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٣}$ (٢) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٢\pi}{٣}$

الحـــل:

(١) $\text{ق}'(\text{س}) = ٠$

(٢) $\text{ق}'(\text{س}) = ٠$

قاعدة (٢) :

إذا كان $ق(س) = س$ فإن $ق'(س) = ١$

قاعدة (٣) :

إذا كان $ق(س)$ قابلا للاشتقاق وكان $جـ \in ح$ فإن $ك(س) = جـ\, ق(س)$ قابلا للاشتقاق ويكون

$ك'(س) = جـ\, ق'(س)$

مثال ٢: إذا كان $ق(س) = -٣س$ ، جد $ق'(س)$

الحل : $ق'(س) = -٣ \times ١ = -٣$

قاعدة (٤)

إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن $ك(س) = ق(س) \pm هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق وتكون

$ك'(س) = ق'(س) \pm هـ'(س)$

ملاحظة :

تبقى القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين

مثال ٣: إذا كان $م'(٣) = ٤$ ، $ل'(٣) = -٢$ ، وكان $ق(س) = ٣م(س) - ٢ل(س)$ ، جد $ق'(٣)$

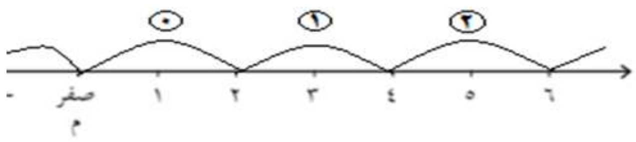
الحل : $ق'(س) = ٣م'(س) - ٢ل'(س)$

$ق'(٣) = ٣م'(٣) - ٢ل'(٣) = ٣ \times ٤ - ٢ \times -٢ = ١٦$

مثال ٤: إذا كان $ق(س) = \left[\frac{١}{٢}س\right]$ ، $س \in [٠،٤]$. جد $ق'(س)$

الحل : **نعيد تعريف $ق(س)$ كما تعلمنا سابقا**

$$ق(س) = \begin{cases} ٠ & ، ٠ \le س < ٢ \\ ١ & ، ٢ \le س < ٤ \\ ٢ & ، س = ٤ \end{cases}$$



لاحظ أن $ق(س)$ منفصلاً عند $س = ٢$ وكذلك عند $س = ٤$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٠ &، \quad ٠ < س < ٢ \\ ٠ &، \quad ٢ < س < ٤ \\ غ.م &، \quad س = ٠ ، س = ٢ ، س = ٤ \end{cases}$$

أي أن $ق'(٠)$ غير موجودة ، $ق'(٢)$ أيضا غير موجودة وكذلك $ق'(٤)$ غير موجودة

ملاحظة :

عند إيجاد المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق لابد من فحص الاتصال أولا

قاعدة (٥)

إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن $ك(س) = ق(س) \times هـ(س)$ قابل للاشتقاق

وتكون $ك'(س) = ق(س) \times هـ'(س) + ق'(س) \times هـ(س)$

مثال ٥: إذا كان $ق(س) = (٣س - ٢)(س + ٥)$ جد $ق'(١)$

الحل :

$ق'(س) = (٣س - ٢) \times ١ + ٣(س + ٥)$

ومنها $ق'(١) = (٣(١) - ٢) \times ١ + ٣(١ + ٥) = ١ + ١٨ = ١٩$

نظرية:

إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، فإن $ق'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ن \neq ١ ، ن \in ص^{+}$

مثال ٦: إذا كان $ق(س) = س^{٢} + ٢س - ٧$ ، جد $ق'(س)$ ثم $ق'(-٤)$

الحل : $ق'(س) = ٢س + ٢$ ومنها $ق'(-٤) = ٢(-٤) + ٢ = -٨ + ٢ = -٦$

ملاحظة

إذا كان $ق(س)$ كثير حدود فإنه يكون قابلا للاشتقاق

نظرية :

إذا كان $ق(س)$ قابلاً للاشتقاق عند $س = س_{١}$ فإنه يكون متصلاً عند هذه النقطة

مثال ٧:

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٢س + ١ \quad ، \quad س < ١ \\ ٢أس + ٣ \quad ، \quad س \geq ١ \end{cases}$

قابلا للاشتقاق عند $س = ١$. أوجد قيمة الثابت أ

الحـل :

بما أن $ق(س)$ قابل للاشتقاق عند $س = ١$ $\quad \therefore \quad ق(س)$ متصل عند $س = ١$

وهذا يعني أن $\lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ق(س)$

$$٢أ \times ١ + ٣ = ٣ - ٢ + ١$$

$$٢أ + ٣ = ٢ \quad \Leftarrow \quad ٢أ = ٢ - ٣ \quad \Leftarrow \quad أ = \frac{-١}{٢}$$

قاعدة (٦)

إذا كان $ك(س)$ ، $م(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن $ق(س) = \frac{ك(س)}{م(س)}$ ، $م(س) \neq ٠$ قابل للاشتقاق

وتكون $ق'(س) = \frac{م(س) \times ك'(س) - ك(س) \times م'(س)}{(م(س))^{٢}}$

نتيجة

إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، فإن $ق'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ن \in ص$ ، $س \neq ٠$

مثال ٨:

إذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢} + ٥س - ١}{٣س - ٦}$ ، $س \neq ٢$ فجد $ق'(س)$

الحـل :

$$ق'(س) = \frac{(٣س - ٦)(٢س + ٥) - (س^{٢} + ٥س - ١) \times ٣}{(٣س - ٦)^{٢}}$$

$$ق'(س) = \frac{٦س^{٢} + ١٥س - ١٢س - ٣٠ - ٣س^{٢} - ١٥س + ٣}{(٣س - ٦)^{٢}} = \frac{٣س^{٢} - ١٢س - ٢٧}{(٣س - ٦)^{٢}}$$

المشتقات العليا

إذا كانت ص = ق(س) حيث ق قابل للاشتقاق ، فإن المشتقة الأولى هي $ص' = \frac{دص}{دس} = ق'(س)$ تمثل اقترانا جديدا . وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق ، فإن مشتقتها $\frac{د}{دس}\left(\frac{دص}{دس}\right)$ تسمي المشتقة الثانية ، ويرمز لها بالرمز $ص''$ أو $ق''(س)$ أو $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ وتقرأ (دال اثنين ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة والرابعة .... ونعبر عن المشتقة من الرتبة ن بإحدي الصور الآتية :

$ص^{(ن)}$ أو $\frac{د^{ن}ص}{دس^{ن}}$ أو $ق^{(ن)}(س)$ ، حيث $ن \in ص^{+}$ ، $ن > ٢$

ملاحظة هامة:

$$\left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} \neq \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$$

مثال ٩: إذا كان $ق(س) = س^{٦} + ٢س^{٣} - ٧$ ، جد $ق''(س)$ ثم جد $ق^{(٤)}(٣)$

الحل :

$ق'(س) = ٦س^{٥} + ٦س^{٢}$

$ق''(س) = ٣٠س^{٤} + ١٢س$

$ق'''(س) = ١٢٠س^{٣} + ١٢$

$ق^{(٤)}(س) = ٣٦٠س^{٢}$

$ق^{(٤)}(٣) = ٣٦٠ \times ٣^{٢} = ٣٦٠ \times ٩ = ٣٢٤٠$

مثال ١٠: إذا كان $ص = أس^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$ ، ن عدد صحيح موجب ، أثبت أن :

$س^{٢}ص'' = ن(ن-١)ص$

الحل :

$ص = أس^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$

$= أس^{ن} + بس^{-(ن-١)}$

$= أس^{ن} + بس^{-ن+١}$

$ص' = نأس^{ن-١} + ب(١-ن)س^{-ن}$

$ص'' = نأ(ن-١)س^{ن-٢} - نب(١-ن)س^{-ن-١}$ (بالضرب في $س^{٢}$)

$س^{٢}ص'' = نأ(ن-١)س^{ن-٢} \times س^{٢} - نب(١-ن)س^{-ن-١} \times س^{٢}$

$س^{٢}ص'' = نأ(ن-١)س^{ن} - نب(١-ن)س^{-ن+١}$

$س^{٢}ص'' = ن(ن-١)\left(أس^{ن} - بس^{-ن+١}\right)$

$س^{٢}ص'' = ن(ن-١)ص$ (وهو المطلوب)

مثال ١١: إذا كان $ق(س) = س^{٢} + ٢$ ، $هـ(س) = |٤س - ٥|$ ، أوجد $(ق \times هـ)'(١)$

الحل :

$ق'(س) = ٢س$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٤\text{س} - ٥ \ ، & \text{س} \geq \frac{٥}{٤} \\ ٥ - ٤\text{س} \ ، & \text{س} < \frac{٥}{٤} \end{cases}$$

$$\text{هـ}'(\text{س}) = \begin{cases} ٤ \ ، & \text{س} > \frac{٥}{٤} \\ -٤ \ ، & \text{س} < \frac{٥}{٤} \\ \text{غ.م} \ ، & \text{س} = \frac{٥}{٤} \end{cases}$$

$$(\text{ن} \times \text{هـ})'(١) = \text{ن}'(١) \times \text{هـ}(١) + \text{ن}(١) \times \text{هـ}'(١)$$

$$= ٢(١) \times (٥ - ٤ \times ١) + (١^{٢} + ٢) \times (-٤)$$

$$= ٢ + (-١٢) = -١٠$$

مثال١٢: إذا كان $\text{ن}(\text{س})$ كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان $\text{ن}(\text{س}) + \text{ن}''(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}$ ، جد $\text{ن}'(١)$

الحـل : $\because \text{ن}(\text{س})$ كثير حدود من الدرجة الثالثة

$$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \text{أس}^{٣} + \text{بس}^{٢} + \text{جـس} + \text{د}$$

$$\text{ن}'(\text{س}) = ٣\text{أس}^{٢} + ٢\text{بس} + \text{جـ}$$

$$\text{ن}''(\text{س}) = ٦\text{أس} + ٢\text{ب}$$

$$\because \text{ن}(\text{س}) + \text{ن}''(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}$$

$$\therefore \text{أس}^{٣} + \text{بس}^{٢} + \text{جـس} + \text{د} + ٦\text{أس} + ٢\text{ب} = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}$$

$$\therefore \text{أس}^{٣} + \text{بس}^{٢} + (\text{جـ} + ٦\text{أ})\text{س} + ٢\text{ب} + \text{د} = ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}$$

بمقارنة المعاملات $\boxed{\text{أ} = ٢}$ ، $\boxed{\text{ب} = ٠}$ ، $\text{جـ} + ٦\text{أ} = -٣$ ومنها $\text{جـ} + ١٢ = -٣ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = -١٥}$

$$٢\text{ب} + \text{د} = -٣ \Leftarrow ٢(٠) + \text{د} = -٣ \Leftarrow \boxed{\text{د} = -٣}$$

$$\therefore \text{ن}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - ١٥\text{س} - ٣$$

$$\therefore \text{ن}'(\text{س}) = ٦\text{س}^{٢} - ١٥$$

ومنها $\text{ن}'(١) = ٦(١)^{٢} - ١٥ = -٩$

تمارين ١-٢

١- ليكن $ق(س) = \frac{س^{٣}+١}{هـ(س)}$ ، $ق(١) = ٢$ ، $هـ'(١) = ٤$ ، جد $ق'(١)$

الجواب -٥

٢- إذا كان $ق(١) = ١$ ، $ق'(١) = ٣$ ، $ك(١) = -٢$ ، $ك'(١) = -١$ أوجد :

$\frac{د}{دس}\left(ق(س) \times ك(س)\right)$ عندما $س = ١$

الجواب -٧

٣- إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، وكان $ق''(س) = ١٢ س^{ن-٢}$ ، جد قيمة $ن$

الجواب ٤

٤- جد المشتقة الثانية للاقتران $ص = |س|(س^{٢} + س)$

الجواب: $ص'' = \begin{cases} ٦س + ٢ & ، \quad س > ٠ \\ -٦س - ٢ & ، \quad س < ٠ \\ غ.م & ، \quad س = ٠ \end{cases}$

٥- إذا كان $ق(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س)}$ ، هـ ، ل قابلان للاشتقاق عند $س = أ$ وكان $ق'(أ) = ٠$ ،

أثبت أن $ق(أ) = \frac{هـ'(أ)}{ل'(أ)}$

٦- إذا كان $ق(س) = ٨س - ٤(م - ٣)س^{٢}$ ، جد قيم الثابت م التي تجعل $ق''(س) < ٠$

الجواب $م > ٣$

٧- إذا كان ل ، هـ ، ق اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان $هـ(س) = ل(س) \times ق(س)$ ،

$ل'(س) \times ق'(س) = جـ$ ، حيث جـ عدد ثابت ، أثبت أن :

$$هـ'''(س) = ل(س) \times ق'''(س) + ق(س) \times ل'''(س)$$

٨- إذا كان $\Delta ص = س^{٣} \Delta س - ٥س^{٢}(\Delta س)^{٣}$ ، أوجد $ق'(٣)$

الجواب : ٢٧

٩- إذا كان ق(س) = س هـ(س) وكان هـ$^{(١٠٠)}$(٢) = ٣ ، هـ$^{(٩٩)}$(٢) = −٤ ، جد ق$^{(١٠٠)}$(٢)

الجواب -٦

١٠- إذا كان ق(س) = س^{٤} |س| ، جد ق$'$(−٢)

الجواب : −٨٠

١١- إذا كان ق(س) = ٤س^{٣} − [٢س + ١] ، جد ق$'$(٠,٦)

الجواب : ٤,٣٢

١٢- جد ق$'$(س) للاقتران ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] − |س| عند س = −١

الجواب : ٤

١٣- جد ق$'$$\left(\frac{٧}{٢}\right)$ حيث ق(س) = $\dfrac{\left[\frac{س}{٣}\right]}{س − ٣}$

الجواب : -٤

١٤- إذا كان ق(س) = س^{٤} + أس^{٣} − ٣ ، وكان ق$^{(٣)}$(٢) = ١٨ ، ما قيمة أ ؟

الجواب أ = −٥

١-٣ مشتقة الاقترانات المثلثية :

قاعدة (١) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، س بالتقدير الدائرى فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}$

قاعدة (٢) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ ، س بالتقدير الدائرى فإن $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس}$

مثال ١ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\text{جتاس} - \text{جاس}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$ ثم $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^{٢} \times -\text{جاس} + ٢\text{س}\,\text{جتاس} - \text{جتاس}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = -\text{س}^{٢}\,\text{جاس} + ٢\text{س}\,\text{جتاس} - \text{جتاس}$$

$$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = -\left(\frac{\pi}{٢}\right)^{٢} \times \text{جا}\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ٢\left(\frac{\pi}{٢}\right)\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}\right) - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{٢}\right)^{٢} \times ١ + ٢\left(\frac{\pi}{٢}\right) \times ٠ - ٠ \quad = -\frac{\pi^{٢}}{٤}$$

قاعدة (٣) :

- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^{٢}\text{س}$.
- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظتاس}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{قتا}^{٢}\text{س}$.
- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{قاس}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قاس}\,\text{ظاس}$.
- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{قتاس}\,\text{ظتاس}$.

نشاط ٢ : إذا كان $\text{س}\Delta\text{ص} = \Delta\text{س}\,\text{ظاس} - ٢(\Delta\text{س})^{٢}$ ، حيث $\Delta\text{س} \neq ٠$ ، جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$

الحل :

$\text{س}\Delta\text{ص} = \Delta\text{س}\,\text{ظاس} - ٢(\Delta\text{س})^{٢}$ (بقسمة طرفي المعادلة علي $\Delta\text{س}$)

$$\text{س}\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\Delta\text{س}\,\text{ظاس} - ٢(\Delta\text{س})^{٢}}{\Delta\text{س}}$$

$$\text{س}\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \text{ظاس} - ٢(\Delta\text{س})$$

بقسمة طرفي المعادلة علي س $\quad \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} - \frac{٢(\Delta\text{س})}{\text{س}}$

لكن $\frac{دص}{دس} = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{\Delta س \to 0} \left(\frac{ظاس}{س} - \frac{2(\Delta س)}{س} \right) = \frac{ظاس}{س}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{4}} = \frac{ظا\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$

مثال ٢: إذا كان $ق(س) = جاس - جتاس$ ، أوجد قيمة س التي تجعل $ق''(س) = 0$ حيث $[0 ، 2\pi]$

الحل:

$ق'(س) = جتاس + جاس$

$ق''(س) = -جاس + جتاس$

بوضع $ق''(س) = 0 \Leftarrow -جاس + جتاس = 0 \Leftarrow جاس = جتاس$

ومنها $ظاس = 1$ $\therefore س = \frac{\pi}{4}$ أو $س = \frac{5\pi}{4}$

مثال ٣: إذا كان $ق(س) = س^2 ظاس$ ، جد $ق'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

الحل:

$ق'(س) = 2س ظاس + س^2 قا^2 س$

$ق'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) ظا\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 قا^2 \frac{\pi}{4}$

$= 2 \times \frac{\pi}{4} \times 1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{4\pi + \pi^2}{8}$

مثال ٤: إذا كان $ص = أجاس + بجتاس$ ، $أ ، ب \in ح$ أثبت أن $(ص')^2 + ص^2 = أ^2 + ب^2$

الحل:

$ص' = أجتاس - بجاس$

$(ص')^2 + ص^2 = \left(أجتاس - بجاس\right)^2 + \left(أجاس + بجتاس\right)^2$

$= أ^2 جتا^2 س - 2أب جاس جتاس + ب^2 جا^2 س + أ^2 جا^2 س + 2أب جاس جتاس + ب^2 جتا^2 س$

$= أ^2 جتا^2 س + ب^2 جتا^2 س + أ^2 جا^2 س + ب^2 جا^2 س$

$= جتا^2 س \left(أ^2 + ب^2\right) + جا^2 س \left(أ^2 + ب^2\right)$

$= \left(أ^2 + ب^2\right)\left(جتا^2 س + جا^2 س\right)$

$= \left(أ^2 + ب^2\right) \times 1 = أ^2 + ب^2$

مثال ٥ : جد $\underset{هـ \leftarrow 0}{نهـا} \frac{ظا(س^{٣} + هـ) - ظاس^{٣}}{هـ}$

الحل : نفرض ص $=$ س^{٣} ، ق(ص) $=$ ظاص

$$\underset{هـ \leftarrow 0}{نهـا} \frac{ظا(س^{٣} + هـ) - ظاس^{٣}}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow 0}{نهـا} \frac{ظا(ص + هـ) - ظاص}{هـ} = ق^{\prime}(ص) = قا^{٢}ص = قا^{٢}س^{٣}$$

مثال ٦: إذا كان ق(س) $=$ قاس $+$ ظاس . أثبت أن : $ق^{\prime}(س) = \frac{١}{١ - جاس}$

الحل :

$$ق^{\prime}(س) = قاس ظاس + قا^{٢}س$$

$$ق^{\prime}(س) = قاس\left(ظاس + قاس\right)$$

$$= \frac{١}{جتاس}\left(\frac{جاس}{جتاس} + \frac{١}{جتاس}\right)$$

$$= \frac{جاس + ١}{جتا^{٢}س} = \frac{جاس + ١}{١ - جا^{٢}س} = \frac{١ + جاس}{\left(١ - جاس\right)\left(١ + جاس\right)} = \frac{١}{١ - جاس}$$

تمارين ١-٣

١- أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ. ص $=$ ٣جاس $-$ جتاس

الجواب: $\frac{دص}{دس} =$ ٣جتاس$+$جاس

ب. ص $=$ ظاس $- \sqrt{٣\pi}$ س

الجواب: $ص^{\prime} = قا^{٢}س - \sqrt{٣\pi}$

ج. ص $=$ جا^{٢}س$+$جتا^{٢}س

د. $ص = \frac{س}{جاس}$

الجواب $\frac{دص}{دس} = \frac{جاس - س جتاس}{جا^{٢}س}$

هـ. ص $=$ قاس $-$ س ظاس

الجواب: $\frac{دص}{دس} =$ قاس ظاس $-$ ظاس $-$ س قا^{٢}س

٢- إذا كانت $ص = س^٢ ظتاس$ جد $\frac{ءص}{ءس}$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = ٢س ظتاس - س^٢ قتا^٢ س$

٣- إذا كان $ص = ا جاس + ب جتاس$ ، $ا، ب \in ع$ أثبت أن $ص'' + ص = ٠$

٤- جد قيم س في الفترة $[-٢\pi، ٢\pi]$ التي تحقق المعادلة $ق'(س) = ٠$ في كل مما يلي :

أ- $ق(س) = س + جتاس$

الجواب : مجموعة الحل = $\left\{\frac{-٣\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right\}$

ب- $ص = قاس$

الجواب : مجموعة الحل = $\{-٢\pi، -\pi، ٠، \pi، ٢\pi\}$

٥- إذا كان $هـ(س) = قاس + ظاس$ فأثبت أن $هـ'(س) = قاس \cdot هـ(س)$

٦- إذا كان $ق(س) = جتاس - \frac{١}{٢}س$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$. جد قيمة/قيم س التي تجعل المماس لمنحنى $ق(س)$ أفقياً

مجموعة الحل = $\left\{\frac{٧\pi}{٦}، \frac{١١\pi}{٦}\right\}$

٧- جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{قتا(س^٣ + هـ) - قتاس^٣}{هـ}$

الجواب : $-قتاس^٣ ظتاس^٣$

١-٤ قاعدة لوبيتال ، ومشتقة الاقتران الأسى واللوغاريتمي :

أولا : قاعدة لوبيتال

وضع العالم لوبيتال طريقة تستخدم لحساب بعض النهايات المعقدة والتي تحتاج الى خطوات عديدة

قاعدة لوبيتال :

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ قابلين للاشتقاق عند النقطة $\text{س} = \text{أ}$ ، $\text{ل} \in \text{ح}$، وكانت $\frac{\text{ق}(\text{أ})}{\text{هـ}(\text{أ})} = \frac{٠}{٠}$ ،

$\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{هـ}'(\text{س})} = \text{ل}$ فإن $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = \text{ل}$

مثال ١ : جد $\lim\limits_{\text{س}\to٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ باستخدام قاعدة لوبيتال

الحل : من خلال التعويض المباشر تكون $\lim\limits_{\text{س}\to٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = \frac{\text{ظا}٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$ ، ومنها تطبيق قاعدة لوبيتال فتكون

$$\lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{١} = \frac{\text{قا}^٢(٠)}{١} = \frac{١^٢}{١} = ١$$

مثال ٢ : جد $\lim\limits_{\text{س}\to٠} \frac{١-\text{جتاس}}{\text{س}}$ بطريقتين مختلفتين

الحل : طريقة(١): من تعريف المشتقة عند نقطة

$$\lim_{\text{س}\to٠} \frac{١-\text{جتاس}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جتا}٠-\text{جتاس}}{\text{س}-٠} = -\lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جتاس}-\text{جتا}٠}{\text{س}-٠}$$ باعتبار $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$

تصبح النهاية علي الصورة $-\lim\limits_{\text{س}\to٠} \frac{\text{ق}(\text{س})-\text{ق}(٠)}{\text{س}-٠} = -\text{ق}'(٠) = -\text{جا}(٠) = ٠$

طريقة(٢): قاعدة لوبيتال

$$\lim_{\text{س}\to٠} \frac{١-\text{جتاس}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to٠} \frac{\text{جاس}}{١} = \frac{\text{جا}(٠)}{١} = ٠$$

ملاحظة :

عند استخدام قاعدة لوبيتال ، إذا كانت $\frac{\text{ق}'(\text{أ})}{\text{هـ}'(\text{أ})} = \frac{٠}{٠}$ فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل علي عدد حقيقي

مثال ٣ : جد $\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}}\ \dfrac{١-\text{قاس}}{\text{س}^٢}$

الحـل : من خلال التعويض المباشر تكون $\dfrac{١-\text{قا}(\cdot)}{(\cdot)^٢}=\dfrac{\cdot}{\cdot}$

$$\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}}\ \dfrac{١-\text{قاس}}{\text{س}^٢}=\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}}\ \dfrac{-\text{قاس ظاس}}{٢\text{س}}=\dfrac{\cdot}{\cdot}$$

نطبق قاعدة لوبيتال مرة أخري :

$$\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}}\ \dfrac{-\text{قاس ظاس}}{٢\text{س}}=\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}}\ \dfrac{-\left(\text{قاس قا}^٢\text{س}+\text{قاس}\times\text{قاس ظاس}\right)}{٢}=\dfrac{-\left(١\times١^٢+\cdot\right)}{٢}=-\dfrac{١}{٢}$$

ثانيا : مشتقة الاقتران الأسى واللوغاريتمى :

تعريف :

العدد النيبيرى هو العدد الحقيقي ، الذى قيمته التقريبية $\text{هـ}\simeq ٢,٧١٨٢٨١٨$ ويحقق العلاقة $\underset{\text{س}\to\cdot}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}-١}{\text{س}}=١$

بعض خصائص الاقتران الأسى واللوغاريتمى :

الاقتران الأسى الطبيعي / مجاله ح

١) $\text{هـ}^{\text{س}}\times\text{هـ}^{\text{ص}}=\text{هـ}^{\text{س}+\text{ص}}$

٢) $\dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}}=\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}$

٣) $\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right)^{\text{ص}}=\text{هـ}^{\text{سص}}$

٤) $\text{هـ}^{\cdot}=١$

٥) $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}=\text{س}$ ، $\text{س}>\cdot$.

الاقتران اللوغاريتمى الطبيعي مجاله ح^{+}

١) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ص}=\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}=\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

٣) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\text{ن}}=\text{ن لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{س}>\cdot$.

٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}}=\text{س}$

قاعدة (١) :

إذا كان $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$، فإن $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}=\text{س}$ ، $\text{س}>\cdot$.

مثال ٤: إذا كان $\text{ن}(\text{س})=\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}+\text{س})$ وتغيرت س من ٠ إلى هـ ، فما قيمة متوسط التغير للاقتران $\text{ن}(\text{س})$

الحـل : متوسط التغير $=\dfrac{\text{ن}(\text{هـ})-\text{ن}(\cdot)}{\text{هـ}-\cdot}=\dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{هـ})-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}}{\text{هـ}}=\dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}٢+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}-\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}}{\text{هـ}}=\dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}٢}{\text{هـ}}$

قاعدة(٣)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

قاعدة(٤)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، $\text{س} > ٠$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}}$

مثال ٥ : جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند النقطة إزاء كل منها :

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - \text{س}$ عند $\text{س} = \text{هـ}^{٢}$

٢) $\text{ع}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٦}$ عند $\text{س} = ٣$

الحـل :

١) $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} \times \dfrac{١}{\text{س}} + ١ \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ١$

$= ١ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - ١ = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

$\text{ق}'(\text{هـ}^{٢}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٢} = ٢\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ٢$

٢) بما أن $\text{ع}(\text{س}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{٦}$ ومنها $\text{ع}(\text{س}) = ٦\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

إذن $\text{ع}'(\text{س}) = ٦ \times \dfrac{١}{\text{س}} = \dfrac{٦}{\text{س}}$ ومنها $\text{ع}'(٣) = \dfrac{٦}{٣} = ٢$

مثال٦: باستخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن $\displaystyle\text{نهـا}_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{م} \times \text{أ}^{\text{م}-١}$

الحـل : بالتعويض المباشر نجد أن : $\displaystyle\text{نهـا}_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{أ}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ} - \text{أ}} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام قاعدة لوبيتال $\displaystyle\text{نهـا}_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{نهـا}_{\text{س}\to\text{أ}} \frac{\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}}{١} = \text{م} \times \text{أ}^{\text{م}-١}$

مثال ٧ : إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ أوجد قيمة س التي تجعل $(\text{ص}')^{٢} = ٦ - ٥\text{ص}$

الحـل : $\text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow (\text{ص}')^{٢} = \text{هـ}^{٢\text{س}}$

$\because (\text{ص}')^{٢} = ٦ - ٥\text{ص}$

$\therefore$ $هـ^{٢س} = ٦ - ٥هـ^{س}$

$\therefore$ $هـ^{٢س} + ٥هـ^{س} - ٦ = ٠$

$(هـ^{س} + ٦)(هـ^{س} - ١) = ٠$

إما $هـ^{س} = -٦$ (مرفوض) أو $هـ^{س} = ١$ ومنها $س = ٠$

مثال٨ : إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ٢} = ٦$ ، فما قيمة أ

الحـل : بالتعويض المباشر عن قيمة **س = ٢** في البسط (لابد أن تكون قيمة البسط تساوى صفراً عندما **س = ٢**)

$٢^{٢} + ٢أ + ب = ٠$

$٢أ + ب = -٤$ .... (١)

$\because$ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ٢} = ٦$

باستخدام لوبيتال $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢س + أ}{١} = ٦$

ومنها $٢(٢) + أ = ٦$

$\therefore$ $أ = ٦ - ٤ = ٢$

بالتعويض فى المعادلة (١) $٢(٢) + ب = -٤$ ومنها $ب = -٤ - ٤ = -٨$

تمارين ١-٤

(١) جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل مما يلي :

أ- $\text{ص} = \text{س}^{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

الجواب: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}$

ب- $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$

الجواب: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{٣\text{س}}$

ج- $\text{ص} = \left(\text{هـ}^{\text{س}} + ١\right)^{٢}$

الجواب: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{هـ}^{\text{س}} + ١\right)$

(٢) إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس}$ ، $\text{س} \in [٠،٢\pi]$ ، جد قيم س حيث $\text{ص} = \text{ص}'$

الجواب: $\left\{\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}\right\}$

(٣) أوجد قيمة كلا من النهايات الآتية :

أ- $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ الجواب: هـ

ب- $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$ الجواب: -١

ج- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{١ - \text{هـ}^{\text{س}}}$ الجواب: -١

د- $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}\left(١+\text{جتاس}\right)}$ الجواب: $\frac{١}{٢}$

(٤) إذا كان $\text{ن}(٢) = ٤$ ، $\text{ن}'(٢) = -١$ ، أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٣}\text{ن}(\text{س}) - ٨\text{ن}(٢)}{\text{س} - ٢}$

الجواب: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{٣\text{س}}$

(٥) إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{٣\text{س}^{٣} + \text{أس}^{٢} + ٤\text{س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٤} = ٤$ ، أوجد قيمة أ بطريقتين مختلفتين

الجواب -٦

(٦) جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ظا}(٢\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ظا}٢\text{س}}{\text{هـ}^{٢} + ٢\text{هـ}}$ بطريقتين مختلفتين .

الجواب : $\text{قا}^{٢}٢\text{س}$

١-٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية :

أولاً: تطبيقات هندسية :

تعريف :

إذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقترانا قابلا للاشتقاق عند النقطة $\left(\text{س}_١ ، \text{ق}(\text{س}_١)\right)$ ، $\left(\text{س}_٢ ، \text{ق}(\text{س}_٢)\right)$ ، فإن ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$ ، ويساوى $\text{ق}'(\text{س})$

ويعرف العمودى علي منحنى الاقتران ، بأنه العمودى علي المماس للمنحنى عند نقطة التماس

قاعدة :

معادلة المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$ عند النقطة $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ هي

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١) \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_١) = \text{ق}'(\text{س}_١)(\text{س} - \text{س}_١)$$

وتكون معادلة العمودى لمنحنى $\text{ق}(\text{س})$ عند النقطة $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ هي

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{-١}{\text{م}}(\text{س} - \text{س}_١) \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_١) = \frac{-١}{\text{ق}'(\text{س}_١)}(\text{س} - \text{س}_١)$$

مثال ١ : جد ميل منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ - ٤\text{س}$ عند $\text{س} = ٢$ ، ثم جد معادلتى المماس والعمودى علي المماس عند تلك النقطة .

الحـل : **ميل المنحنى عند** $\text{س} = ٢$ **يساوى** $\text{ق}'(٢)$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ - ٤$$

$$\text{ق}'(٢) = ٣(٢)^٢ - ٤ = ٨$$

ولكن نقطة التماس هي $\left(٢ ، \text{ق}(٢)\right) = \left(٢ ، ٢^٣ - ٤ \times ٢\right) = (٢ ، ٠)$

معادلة المماس هي :

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$$

$\text{ص} - ٠ = ٨(\text{س} - ٢)$ ومنها $\boxed{\text{ص} = ٨\text{س} - ١٦}$

ميل العمودى علي المماس $= \frac{-١}{\text{م}} = \frac{-١}{٨}$

ومنها تكون معادلة العمودى هي : $\text{ص} - ٠ = \frac{-١}{٨}(\text{س} - ٢) \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \frac{-١}{٨}\text{س} + \frac{١}{٤}}$

مثال ٢: أوجد معادلة العمودى علي المماس لمنحنى $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ عند النقطة التي يصنع المماس عندها زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ ء مع الاتجاه الموجب لمحور السينات الموجب .

الحل : نفرض أن نقطة التماس هى $\left(\text{س}_{١}،\ \text{ن}(\text{س}_{١})\right)$

$\because$ ميل المماس $\text{ن}'(\text{س}_{١}) = ٢\text{س}_{١}$ $\quad \therefore\ ٢\text{س}_{١} = \text{ظا}\frac{٣\pi}{٤}$

ومنها $٢\text{س}_{١} = -١ \Leftarrow \text{س}_{١} = \frac{-١}{٢}$

إذن نقطة التماس هى $\left(\frac{-١}{٢}،\ \text{ن}\left(\frac{-١}{٢}\right)\right) = \left(\frac{-١}{٢}،\ \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢}\right) = \left(\frac{-١}{٢}،\ \frac{١}{٤}\right)$

وحيث أن ميل العمودى علي المماس = $\frac{-١}{\text{م}} = -(-١) = ١$

إذن معادلة العمودى علي المماس هى :

$$\text{ص} - \frac{١}{٤} = ١\left(\text{س} - \left(\frac{-١}{٢}\right)\right)$$

$$\text{ص} - \frac{١}{٤} = \text{س} + \frac{١}{٢} \Leftarrow \boxed{\text{ص} = \text{س} + \frac{٣}{٤}}$$

مثال ٣ : إذا كان المستقيم $\text{ص} = ١٠\text{س} - ٧$ يمس منحنى الاقتران $\text{ن}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ٢٠$،
جد نقطة / نقط التماس

الحل : نفرض أن $\left(\text{س}_{١}،\text{ص}_{١}\right)$ هى نقطة التماس ، $\text{ن}'(\text{س}) = ٦\text{س} - ٨$

بما أن ميل المماس = ميل المنحنى

$\therefore\ ١٠ = ٦\text{س}_{١} - ٨ \Leftarrow ٦\text{س}_{١} = ١٨ \Leftarrow \text{س}_{١} = ٣$

إذن نقطة التماس هى $\left(\text{س}_{١}،\ \text{ن}(\text{س}_{١})\right) = \left(٣،\ \text{ن}(٣)\right) = (٣،٢٣)$

مثال ٤: إذا كان المستقيم $\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$ يمس منحنى الاقتران $\text{ن}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{جـ}\text{س}^{٢}$ عند النقطة $(٢،١٢)$
فما قيم أ،ب،جـ؟

الحل : $\because$ النقطة $(٢،١٢)$ تحقق معادلة المنحنى $\quad \therefore\ \text{ن}(٢) = ١٢$

$$٢^{٣} - \text{جـ} \times ٢^{٢} = ١٢ \Leftarrow ٨ - ٤\text{جـ} = ١٢ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = -١}$$

أيضا النقطة $(٢،١٢)$ تحقق معادلة المستقيم $\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$

$\therefore\ ١٢ = ٢\text{أ} + \text{ب}$ .... (١)

وحيث أن $ق(س) = س^{٣} - جس^{٢} = س^{٣} + س^{٢}$

إذن $ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢س$

ومنها $ق'(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) = ١٦$

بما أن ميل المماس $= أ$ إذن $أ = ١٦$

بالتعويض في المعادلة (١) :

$١٢ = ٢(١٦) + ب \quad \Leftarrow \quad ب = ١٢ - ٣٢ = -٢٠$

مثال٥: ليكن $ق(س) = |٣س - ٥|$، أوجد ميل العمودي علي المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $س = ٢$

الحـل :

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س - ٥ \quad ، \quad س \geq \frac{٥}{٣} \\ ٥ - ٣س \quad ، \quad س < \frac{٥}{٣} \end{cases}$$

لاحظ أن $ق(س)$ متصل عند $س = ٢$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٣ \quad ، \quad س > \frac{٥}{٣} \\ -٣ \quad ، \quad س < \frac{٥}{٣} \\ غ.م \quad ، \quad س = \frac{٥}{٣} \end{cases}$$

$\because$ ميل المماس عند $(س = ٢) = ق'(٢) = ٣$

$\therefore$ **ميل العمودي عند $(س=٢) = -\frac{١}{٣}$**

مثال٦: بين أن لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٦س + ١٢$ مماساً أفقياً عند النقطة $(٣،٣)$

الحـل :

يكون المماس أفقياً عندما $ق'(س) = ٠$

$\because ق'(س) = ٢س - ٦$

بوضع $ق'(س) = ٠$ يكون $٢س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٣$

$\therefore$ يوجد لمنحنى $ق(س)$ مماساً أفقياً عند النقطة $(٣، ق(٣))$

وحيث أن $ق(٣) = ٣^{٢} - ٦(٣) + ١٢ = ٣$ $\therefore$ يوجد مماس أفقي عند النقطة $(٣،٣)$

مثال٧: جد معادلة المماس والعمودى علي المماس لمنحنى ق(س) $=$ ٣ظتاس $+$ قا^{٢}س عند س $= \frac{\pi}{٤}$

الحـل :

ق(س) $=$ ٣ظتاس$+$قاس$\times$قاس

ق$'$(س) $= -$٣قتا^{٢}س$+$٢قاس$\times$قاس ظاس

$= -$٣قتا^{٢}س $+$ ٢قا^{٢}س ظاس

$\because$ ميل المماس $=$ ق$'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -$٣قتا$^{٢}\left(\frac{\pi}{٤}\right)+$٢قا$^{٢}\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ظا$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

$= -٣\left(\sqrt{٢}\right)^{٢} + ٢\left(\sqrt{٢}\right)^{٢} \times ١$

$= -٦ + ٤ = -٢$

$\because$ ق$\left(\frac{\pi}{٤}\right) =$ ٣ظتا$\left(\frac{\pi}{٤}\right) +$ قا$^{٢}\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٣ + ٢ = ٥$

$\therefore$ ق(س) يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٤}،٥\right)$، وميله $= -٢$

تكون معادلة المماس ص $- ٥ = -٢$(س $- \frac{\pi}{٤}$)

ومنها $\boxed{\text{ص} = -٢\text{س} + \frac{\pi}{٢} + ٥}$

ميل العمودى عند س $= \frac{\pi}{٤}$ هو $\frac{١}{٢}$

تكون معادلة العمودى : ص $- ٥ = \frac{١}{٢}$(س $- \frac{\pi}{٤}$) ومنها ص $= \frac{١}{٢}$س $- \frac{\pi}{٨} + ٥$

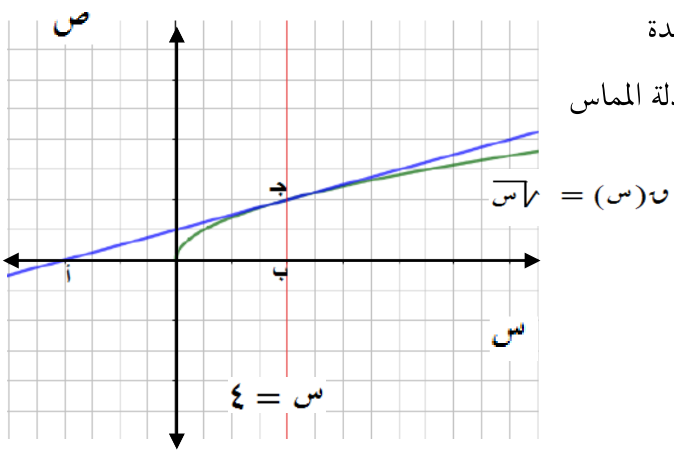
مثال٨ : جد مساحة المثلث القائم الزاوية ، المكون من المماس المرسوم لمنحنى ق(س) $= \sqrt{\text{س}}$ ، س > ٠ عند النقطة (٤،٢) ومحور السينات والمستقيم س $= ٤$

الحـل :

لدينا المثلث أبجـ حيث طول بجـ $= ٢$ وحدة

ولمعرفة احداثيات النقطة أ لابد من إيجاد معادلة المماس

عند النقطة (٤،٢)



ق$'$(س) $= \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

ميل المماس $=$ ق$'$(٤) $= \frac{١}{٢\times٢} = \frac{١}{٤}$

$\therefore$ المماس يمر بالنقطة (٤،٢) وميله $= \frac{١}{٤}$

$\therefore$ معادلة المماس : $\text{ص} - ٢ = \frac{١}{٤}(\text{س} - ٤)$

$$\text{ص} = \frac{١}{٤}(\text{س} - ٤) + ٢$$

$$\text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س} + ١$$

لمعرفة نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع $\text{ص} = ٠$ و منها $\frac{١}{٤}\text{س} + ١ = ٠$ فيكون $\text{س} = -٤$

$\therefore$ المثلث أبجـ فيه طول $\text{أب} = ٨$ وحدة ، طول $\text{بجـ} = ٢$ وحدة

$\therefore$ **مساحة المثلث** أبجـ $= \frac{١}{٢} \times |\text{أب}||\text{بجـ}| = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢ = ٨$ **وحدة مساحة**

ثانيا: تطبيقات فيزيائية

تعريف :

السرعة اللحظية ع عند الزمن ن هي $\text{ع}(\text{ن}) = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{ف}'$

التسارع اللحظى (ت) عند الزمن ن هي $\text{ت}(\text{ن}) = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{د}^٢\text{ع}}{\text{دن}^٢} = \text{ف}''$

مثال ٩ : تحرك جسم علي خط مستقيم ، بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة $\text{ف} = ٢\text{ن}^٣ - ٤\text{ن}^٢ + ٥$

حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد :

(أ) سرعة الجسم وتسارعه بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة

(ب) المسافة التي يقطعها الجسم قبل ان يغير إتجاه حركته

الحـل :

(أ) $\text{ف}'(\text{ن}) = \text{ع}(\text{ن}) = ٦\text{ن}^٢ - ٨\text{ن}$

$$\text{ع}(٣) = ٦(٣)^٢ - ٨(٣) = ٦ \times ٩ - ٢٤ = ٣٠ \text{ م/ث}$$

التسارع = $\text{ف}''(\text{ن}) = \text{ت}(\text{ن}) = ١٢\text{ن} - ٨$

$$\text{ت}(٣) = ١٢(٣) - ٨ = ٣٦ - ٨ = ٢٦ \text{ م/ث}^٢$$

(ب) يعكس الجسم حركته في اللحظة التي تتغير فيها إشارة ع

أي عندما $\text{ع}(\text{ن}) = ٠$ ومنها $٦\text{ن}^٢ - ٨\text{ن} = ٠$

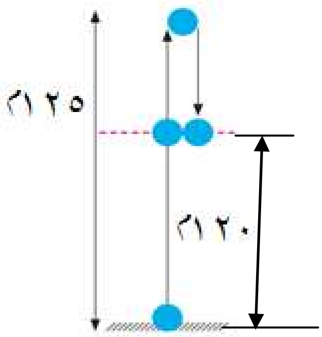
$٢\text{ن}(٣\text{ن} - ٤) = ٠$ ومنها $\text{ن} = \frac{٤}{٣}$ ثانية

$$\text{ف}\left(\frac{٤}{٣}\right) = ٢\left(\frac{٤}{٣}\right)^٣ - ٤\left(\frac{٤}{٣}\right)^٢ + ٥ = \frac{٧١}{٢٧}$$

مثال١٠: قذف جسم رأسيا للأعلي فكانت العلاقة بين ارتفاعه ف بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته ن هى

ف = ٥٠ن – ٥ن^{٢} ، جد أقصي ارتفاع يصل إليه الجسم والمسافة التى قطعها الجسم فى الثوانى الست الأولى .

الحـل : عندما يصل الجسم إلى أقصي ارتفاع تكون ع(ن) = ٠



ع(ن) = ٥٠ – ١٠ن = ٠ أى أن ن = ٥ ثانية

إذن أقصي ارتفاع ف(٥) = ٥٠(٥) – ٥(٥)^{٢}

= ٢٥٠ – ١٢٥ = ١٢٥ م

نحسب ارتفاع الجسم بعد مرور ٦ ثوانى من بدء الحركة

ف(٦) = ٥٠(٦) – ٥(٦)^{٢} = ٣٠٠ – ١٨٠ = ١٢٠م

المسافة التى قطعها الجسم فى الثوانى الست الأولى = ١٢٥ + ٥ = ١٣٠م

مثال١١: أطلق جسم للأعلي من قمة برج بحيث أن ارتفاعه بالأمتار عن سطح الأرض بعد ن ثانية يعطي بالعلاقة

ف = ٢٤ – ٦٤ن – ١٦ن^{٢} ، جد أقصي ارتفاع عن قمة البرج يصل إليه الجسم .

الحـل :

ارتفاع الجسم عن سطح الأرض يعطي بالعلاقة **ف = ٢٤ – ٦٤ن – ١٦ن^{٢}** .... (١)

يكون الجسم علي أقصي ارتفاع عن سطح الأرض عندما ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٦٤ – ٣٢ن = ٠ أى أن ن = ٢ ثانية

أى أن الجسم يصل إلى أقصي ارتفاع عن سطح الأرض بعد مرور ٢ ثانية من بدء الحركة

أقصي ارتفاع عن سطح الأرض = ف(٢) = ٢٤ – ٦٤(٢) – ١٦(٢)^{٢} = ٨٨م

لمعرفة ارتفاع البرج نعوض فى المعادلة (١) عن ن = ٠

ارتفاع البرج = ف(٠) = ٢٤ – ٦٤(٠) – ١٦(٠)^{٢} = ٢٤م

أقصي ارتفاع عن قمة البرج يصل إليه الجسم = أقصي ارتفاع عن سطح الأرض – ارتفاع البرج

= ٨٨ – ٢٤ = ٦٤ م

مثال١٢: قذف جسيم رأسياً إلى أعلي بحيث أن المسافة ف بالأمتار معطاة بالعلاقة : **ف = ٣٠ن – أن^{٢}** ، ن بالثوانى ،

أوجد سرعة الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة إذا كان أقصي ارتفاع يصل إليه الجسيم ٤٥ متراً.

الحـل : ع = $\frac{دف}{دن}$ = ٣٠ – ٢أن .... (١)

يصل الجسيم إلى أقصي ارتفاع عندما $ع = ٠$ ومنها $٣٠ - ٢أن = ٠$ $\Leftarrow$ $أن = ١٥$ .... (٢)

بالتعويض من (٢) فى معادلة الحركة : $ف = ٣٠ن - أن^{٢}$ $\Leftarrow$ $٤٥ = ٣٠ن - \frac{١٥}{ن} \times ن^{٢}$

$\therefore$ $٤٥ = ٣٠ن - ١٥ن$ $\Leftarrow$ $٤٥ = ١٥ن$ $\Leftarrow$ $ن = ٣$ ث

بالتعويض فى المعادلة (٢) : $أ \times ٣ = ١٥$ ومنها $\boxed{أ = ٥}$

بالتعويض فى المعادلة (١) :

$$ع = ٣٠ - ٢ \times ٥ن = ٣٠ - ١٠ن$$

$\therefore$ **سرعة الجسيم بعد ٢ ث من بدء الحركة** $= ع(٢) = ٣٠ - ١٠ \times ٢ = ١٠$ م/ث

مثال١٣:

قذف جسمان معا رأسيا إلى أعلي ،الأول يتحرك وفق العلاقة $ف = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$ ،والثانى وفقا لعلاقة $ف = ١٠ن - ٥ن^{٢}$ ،حيث ف بالأمتار ، ن بالثوانى، أوجد ارتفاع الجسم الثانى عندما يصل الأول لأقصي ارتفاع له .

الحـل :

نحسب زمن أقصي ارتفاع للجسم الأول حيث $ف = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$

ومنها $ع = \frac{دف}{دن} = ٢٠ - ١٠ن$ .... (١)

عندما يصل الجسم الأول إلى أقصي تكون $ع = ٠$

ومنها $٢٠ - ١٠ن = ٠$

$\therefore$ $ن = ٢$ ث

ارتفاع الجسم الثانى $= ف(٢) = ١٠ \times ٢ - ٥ \times ٢^{٢} = ٢٠ - ٢٠ = ٠$

أى أن الجسم الثانى يكون قد وصل إلى سطح الأرض بعد مرور ٢ ثانية

(١) جد معادلة المماس للمنحنى $ق(س) = س^٣ - ٤س$ عند النقطة $(١، -٣)$

الجواب : $ص = -س - ٢$

(٢) جد معادلة العمودى علي المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{١}{٢} + جا^٢ س$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$

الجواب : $ص = -س + \frac{\pi}{٤} + ١$

(٣) أوجد معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = لـو_هـ \left(\frac{س}{٢}\right)$ عند النقطة $(٢هـ، ١)$

الجواب : $ص = \frac{١}{٢هـ} س$

(٤) إذا كان ميل العمودى علي المماس لمنحنى الاقتران $ق(س)$ عند النقطة $(١، -٣)$ الواقعة عليه يساوى $\frac{١}{٢}$، أوجد معادلة المماس لمنحنى $ق(س)$ عند تلك النقطة .

الجواب : $ص = -٢س - ١$

(٥) يتحرك جسيم فى خط مستقيم حسب العلاقة $ف = ن^٣ - ٢ن^٢ + ٧$، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى ، أوجد سرعة الجسم وتسارعه بعد ثانيتين من بدء الحركة .

٤م/ث , ٨م/ث^٢

(٦) إذا كانت معادلة العمودى علي منحنى ق(س) عند النقطة (٣، ٠) هى $٢س - ٣ص = ٦$، أوجد $ق'(٣)$

الجواب: $\frac{-٣}{٢}$

(٧) قذف جسم رأسيا إلى أعلي وفق العلاقة $ف = ٦٠ن - ٥ن^٢$، حيث ف ارتفاعه بالأمتار ، ن بالثوانى . جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠مترا .

ع=٤٠م/ث أو ع = -٤٠م/ث

(٨) قذف جسم رأسياً للأعلي من نقطة علي سطح الأرض وكان ارتفاعه يعطي بالقاعدة $ف = ٣٠ن - ٥ن^٢$، ن الزمن بالثوانى.

أ. جد السرعة الابتدائية للجسم — الجواب: ٣٠متر/ثانية

ب. أثبت أن زمن الصعود = زمن الهبوط

ج. جد المسافة الكلية التى قطعها الجسم فى الثوانى الأربع الأولى — الجواب: ٥٠متر

(٩) إذا كان المستقيم $ص = س + ٦$ مماس المنحنى الاقتران $ل(س)$ عندما س = ٢ وكان $ق(س) = (س \times ل(س))$

، جد $ق'(٢)$.

الجواب: ١٠

(١٠) إذا كان $ق(س) = س^٢$ ، $هـ(س) = س^٢ - ٢س + ١$ ، جد النقطة التي يكون عندها مماسا منحنيي الاقترانين

ق،هـ متعامدين .

الجواب: $\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}\right)$

(١١) بين أن لمنحنى الاقتران $ق(س) = جا^٢س$ مماساً أفقياً في الفترة $[٠، \pi]$

(١٢) جد قيمة كلاً من الثابتين ب ، جـ اللذين يجعلان المستقيم الذى معادلته $ص - س - ٢ = ٠$ مماساً لمنحنى

$ق(س) = س^٢ + ب س + جـ$ عند النقطة $(٠، ٢)$

الجواب : جـ = ٢ ، ب = ١

(١٣) قذف جسم رأسياً إلى أعلي من نقطة علي ارتفاع ٦٠ متراً عن سطح الأرض وفق العلاقة $ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^٢$

حيث ن الزمن بالثوانى ، ف المسافة بالأمتار ، جد ما يلى :

أ. الزمن الذى يستغرقه الجسم حتى يعود إلى نقطة القذف .

الجواب: ٨ث

ب. الزمن الذى يستغرقه الجسم حتى يعود إلى سطح الأرض .

الجواب: $٤ + ٢\sqrt{٧}$ث

ج. أقصي ارتفاع يصل إليه الجسم .

الجواب: ١٤٠ متر

د. متى تصبح سرعة الجسم ٣٠ متر/ث

الجواب: ن=١ث

ه. متى يكون ارتفاع الجسم ١٣٥ متراً عن سطح الأرض

الجواب: ن=٣ث أو ٥ث

(١٤) * أسقط جسم من ارتفاع ١٢٠ متراً من سطح الأرض سقوطاً حراً ، حيث أن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هى

$ف_١(ن) = ٥ن^٢$ ، وفى الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلي حيث أن المسافة التى يقطعها

$ف_٢(ن) = ٦٠ن - ٥ن^٢$ ، جد اللحظة التى يكون لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض .

الجواب: بعد ٢ ث من بدء الحركة

(١٥) أسقط جسم للأسفل من سطح بناية سقوطا حراً وفق العلاقة $ف_١(ن) = ١٦ن^٢$ وفى نفس الوقت رمى جسم آخر ليسقط عمودياً إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م/ث وفق العلاقة $ف_٢(ن) = ٢٠ن + ١٦ن^٢$ ، فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من ارتطام الجسم الثانى بالأرض ، جد :

أ- سرعة كلاً من الجسمين لحظة ارتطامهما بالأرض .

الجواب: ٤٨م/ث ، ٥٢م/ث

ب- ارتفاع البناية .

الجواب: ٣٦ متر

(١٦) قذف جسم رأسياً لأعلي من سطح بناية فكان ارتفاعه عن قمة البناية يعطي بالعلاقة $ف(ن) = ٦ن - ن^٢$ ، ف : المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى ، إذا كانت سرعة ارتطام الجسم بالأرض -١٤م/ث . **ما ارتفاع البناية ؟**

الجواب: ٤٠متر

١-٦ قاعدة السلسلة

تذكر أن :

$(ق \circ هـ)(س) = ق\big(هـ(س)\big)$ هو الاقتران المركب من ق ، هـ

قاعدة السلسلة :

إذا كانت $ص = ق(ع)$ ، $ع = هـ(س)$ وكان $هـ(س)$ قابلا للاشتقاق

$ق(س)$ قابلا للاشتقاق عند $هـ(س)$ ، مدي هـ $\subseteq$ مجال ق فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ أي أن

$$(ق \circ هـ)'(س) = ق'\big(هـ(س)\big) \times هـ'(س)$$

مثال ١ : إذا كان $ق(س) = ٢س^{٣} - ٣س + ١$ ، $هـ(س) = س^{٢} + س$ فجد :

(١) $(ق \circ هـ)'(س)$

(٢) $(هـ \circ ق)'(س)$

(٣) $(هـ \circ هـ)'(-١)$

الحـل:

$ق'(س) = ٦س^{٢} - ٣$ ، $هـ'(س) = ٢س + ١$

(١) $(ق \circ هـ)'(س) = ق'\big(هـ(س)\big) \times هـ'(س)$

$= ق'\big(س^{٢} + س\big) \times (٢س + ١)$

$= \big(٦(س^{٢} + س)^{٢} - ٣\big) \times (٢س + ١)$

(٢) $(هـ \circ ق)'(س) = هـ'\big(ق(س)\big) \times ق'(س)$

$= \Big(٢\big(٢س^{٣} - ٣س + ١\big) + ١\Big)\big(٦س^{٢} - ٣\big)$

$= \big(٤س^{٣} - ٦س + ٣\big)\big(٦س^{٢} - ٣\big)$

(٣) $(هـ \circ هـ)'(-١) = هـ'\big(هـ(-١)\big) \times هـ'(-١)$

$= هـ'\big((-١)^{٢} + (-١)\big) \times \big(٢(-١) + ١\big)$

$= هـ'(٠) \times (-١)$

$= ١ \times -١$

$= -١$

مثال٢: إذا كان $\text{ص} = \text{ع}^{٢} + ٣\text{ع}$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٣} - ٤$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (٢\text{ع}+٣)(٣\text{س}^{٢})$$

$$= \left(٢(\text{س}^{٣}-٤)+٣\right)(٣\text{س}^{٢})$$

$$= (٢\text{س}^{٣}-٥)(٣\text{س}^{٢})$$

$$= ٦\text{س}^{٥} - ١٥\text{س}^{٢}$$

نتيجة :

إذا كان $\text{ص} = (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}}$ ، وكان $\text{هـ}(\text{س})$ قابلا للاشتقاق ، $\text{ن} \in \text{ص}$

فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$

مثال٣: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{(\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢)^{٤}}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل :

$$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢)^{-٤}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\times-٤(\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢)^{-٥} \times (٢\text{س}-٥) = \frac{-١٢(٢\text{س}-٥)}{(\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٢)^{٥}}$$

نشاط (٢) صفحة ٤٦ من الكتاب المدرسي : إذا كان $\text{ص} = (\text{قاس}+\text{ظاس})^{\text{ن}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ن}(\text{قاس}+\text{ظاس})^{\text{ن}-١}(\text{قاس ظاس}+\text{قا}^{٢}\text{س})$$

$$= \text{ن قاس}\left(\text{قاس}+\text{ظاس}\right)^{\text{ن}-١}\left(\text{ظاس}+\text{قاس}\right)$$

$$= \text{ن قاس}\left(\text{قاس}+\text{ظاس}\right)^{\text{ن}}$$

$$= \text{ن قاس ص}$$

ملاحظة :

يمكن تعميم قاعدة السلسلة لتشمل أكثر من اقترانين

مثال ٤: إذا كان $\text{ع} = \text{ل}^{٣} + ٢\text{ل}^{٢} + ٣$ ، $\text{ل} = \text{ص}^{٢} - \text{ص} + ٥$ ، $\text{ص} = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ، جد $\left.\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=٠}$

الحل :

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءل}} \times \frac{\text{ءل}}{\text{ءص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

$$= \left(٣\text{ل}^{٢} + ٤\text{ل}\right)\left(٢\text{ص} - ١\right)\left(٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣\right)$$

وعندما $\text{س} = ٠$ فإن $\text{ص} = ٠$ ، $\text{ل} = ٥$

$$\left.\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=٠} = \left(٣\times٢٥ + ٤\times٥\right)\left(-١\right)\left(٣\right) = -٢٨٥$$

قاعدة:

إذا كان $\text{ك}(\text{س})$ اقترانا قابلا للاشتقاق فإن :

- $\text{ن}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{ك}(\text{س})}$ قابل للاشتقاق ، وتكون $\text{ن}'(\text{س}) = \text{ك}'(\text{س})\,\text{هـ}^{\text{ك}(\text{س})}$
- $\text{م}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك}(\text{س})$ ، $\text{ك}(\text{س}) > ٠$ قابل للاشتقاق وتكون $\text{م}'(\text{س}) = \frac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$

مثال ٥: إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{جاس}\right)$ ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{جاس}} \times \text{جتاس} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس} \Leftarrow \left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{٦}} = \text{ظتا}\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \sqrt{٣}$$

نشاط صفحة ٤٧ من الكتاب المدرسي:

إذا كانت $\text{ص} = \frac{(\text{س}+١)^{٥}(\text{س}+٢)^{٤}}{(\text{س}^{٢}+١)}$ فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل: بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{(\text{س}+١)^{٥}(\text{س}+٢)^{٤}}{(\text{س}^{٢}+١)}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١) + ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٢}+١\right)$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \frac{\text{٥}}{(\text{س}+\text{١})} + \frac{\text{٤}}{\text{س}+\text{٢}} - \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}$$

$$\text{ص}' = \text{ص}\left(\frac{\text{٥}}{(\text{س}+\text{١})} + \frac{\text{٤}}{\text{س}+\text{٢}} - \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}}\right)$$

مثال ٦: جد مشتقة كلا من الاقترانات الآتية

أ- $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{١}}{(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}}$

ب- $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}$

الحل :

أ- $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}+\text{٢})^{-\text{٢}} = -\text{٢لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{٢})$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{٢}}{\text{س}+\text{٢}}$$

ب- $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} \times \text{٢جاسجتاس} = \text{هـ}^{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\ \text{جا٢س}$

مثال ٧: إذا كان ص = $\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}$ ، أثبت أن : $\text{ص}'' = \text{٢}(\text{١}+\text{ص})(\text{١}+\text{٣ص})$

الحل :

$\text{ص}' = \text{٢ظاسقا}^{\text{٢}}\text{س}$

$= \text{٢ظاس}(\text{١}+\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س})$

$= \text{٢}(\text{ظاس}+\text{ظا}^{\text{٣}}\text{س})$

$\text{ص}'' = \text{٢}(\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}+\text{٣ظا}^{\text{٢}}\text{سقا}^{\text{٢}}\text{س})$

$= \text{٢قا}^{\text{٢}}\text{س}(\text{١}+\text{٣ظا}^{\text{٢}}\text{س})$

$= \text{٢}(\text{١}+\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س})(\text{١}+\text{٣ظا}^{\text{٢}}\text{س})$

$= \text{٢}(\text{١}+\text{ص})(\text{١}+\text{٣ص})$

مثال ٨: أوجد قيمة $\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}(\text{٢س}+\text{هـ}) - \text{جتا٢س}}{\text{هـ}}$

الحل:

بالتعويض المباشر

$$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}(\text{٢س}+\text{هـ}) - \text{جتا٢س}}{\text{هـ}} = \frac{\text{جتا}(\text{٢س}+\text{٠}) - \text{جتا٢س}}{\text{٠}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$$

نطبق قاعدة لوبيتال $= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}(\text{٢س}+\text{هـ}) - \text{٠}}{\text{١}} = \frac{-\text{جا}(\text{٢س}+\text{٠})}{\text{١}} = -\text{جا٢س}$

مثال ٩: إذا كان $\text{ق}\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right) = (|\text{س}|)^{٣}$, جد $\text{ق}''(-١)$

الحـل:

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \ \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س} & ، \ \text{س} < ٠ \end{cases} \Leftarrow |\text{س}|^{٣} = \begin{cases} \text{س}^{٣} & ، \ \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}^{٣} & ، \ \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$\because \ \text{ق}\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right) = (|\text{س}|)^{٣} = -\text{س}^{٣} \ ، \ \text{س} < ٠$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$$\text{ق}'\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right) \times \frac{١}{٢} = -٣\text{س}^{٢} \Leftarrow \text{ق}'\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right) = -٦\text{س}^{٢}$$

$$\Leftarrow \text{ق}''\left(\frac{١}{٢}\text{س}\right) \times \frac{١}{٢} = -١٢\text{س}^{٢}$$

نعوض عن $\text{س} = -٢$ $\Leftarrow \text{ق}''\left(\frac{١}{٢} \times -٢\right) \times \frac{١}{٢} = -١٢(-٢)^{٢}$

$$\Leftarrow \text{ق}''(-١) = ٢ \times -١٢ \times ٤ \Leftarrow \boxed{\text{ق}''(-١) = -٤٨}$$

تمارين ١-٦

(١) جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $\text{س} = ١$ لكل مايلي :

أ- $\text{ص} = \dfrac{١}{(٢\text{س}^{٣} - \text{س})^{٤}}$

الجواب: -٢٠

ب- $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٣}\text{س}\right)}$

الجواب: $\frac{-\sqrt{٣}\,\text{هـ}\,\pi}{٦}$

جـ- $\text{ص} = \text{ع}^{٢} + ٣\text{ع} + ١$ ، $\text{ع} = \text{س}^{٣} + ٢\text{س} - ٣$

الجواب: ١٥

د- $\text{ص} = \text{ظا}\left(\frac{\pi}{\text{س}}\right) - \text{جا}^{٢}(\pi\text{س})$ ، $\text{س} \neq ٠$

الجواب : $-\pi$

(٢) إذا كان ق(س) = ٢سهـ$^{م(س)}$ ، م(١) = ٢ ، م$'$(١) = ٢ ، جد ق$'$(١)

الجواب: ٦هـ^{٢}

(٣) بالاعتماد علي الجدول المقابل ليكن ل(س) = س ق(س^{٢}) ، أوجد قيمة الاقتران ل ومشتقته الأولى والثانية عند س = ١ ، س = ٢

س	١	٢	٤
ق(س)	١	٣	٦
ق$'$(س)	١	٢	٣
ق$''$(س)	٢	١	٠

الجواب:

ل(١) = ١	ل$'$(١) = ٣	ل$''$(١) = ١٤
ل(٢) = ١٢	ل$'$(٢) = ٣٠	ل$''$(٢) = ٣٦

(٤) إذا كانت ص = ظاس جا٢س ، أثبت أن $\frac{دص}{دس}$ = ٢جا٢س

(٥) أوجد قيمة كلا من النهايات الآتية :

أ- $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{٣(١+هـ)^{٦} - ٣}{هـ}$

الجواب : ١٨

ب- $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{جتا(٢س+هـ) - جتا٢س}{هـ}$

الجواب : −جا٢س

ج- $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ظا^{٣}(س+٣هـ) - ظا^{٣}س}{٣هـ}$

الجواب : ٣قا^{٢}س ظا^{٢}س

(٦) إذا كان ق(س) = ٢س^{٤} − أس^{٣} ، وكانت $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ق'(١) - ق'(١+هـ)}{٢هـ}$ = ٢١ ، فما قيمة أ؟

الجواب : أ = ١١

(٧) إذا كان (ق∘هـ)$'$(٣) = ١٥ ، ق(س) = س^{٢} − ٩ ، هـ$'$(٣) = ٥ ، ما قيمة هـ(٣) ؟

الجواب $\frac{٣}{٢}$

(٨) إذا كان $ق(س) = س^{٣} + ٢س$ ، $هـ(س) = س^{٢}$ ، أوجد $(ق \circ هـ)'(١)$

الجواب: ١٢

(٩) إذا كان $(م \circ ل)(س) = س$ وكان م ، ل قابلين للاشتقاق حيث $م'(س) = \frac{١}{س}$ ، جد $ل'(س)$

الجواب ل(س)

(١٠) إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان $(ق \circ هـ)'(٣) = ١٠$ ، $(ق' \circ هـ)(٣) = ٤$
أوجد $٢هـ'(٣)$

الجواب : $٢هـ'(٣) = ٥$

(١١) إذا كان $ق(س) = ١ + ظاس$ ، $هـ(س) = \frac{ب}{س + ٢}$ وكان $(هـ \circ ق)'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{٣}{٨}$ ، جد قيمة ب

الجواب : $ب = -٣$

(١٢) إذا كان $ل(س) = ظا^{٣}س$ ؛ جد $ل'(س)$

الجواب: $ل'(س) = ٣ظا^{٢}س قا^{٢}س$

(١٣) إذا كان $هـ(س) = ق(جا٢س)$ وكان $ق'\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) = ٨$ ، جد $هـ'\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

الجواب: $هـ'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = ٨$

(١٤) إذا كان $ق(س)$ ، اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان $ق(جا٢س) = قتا٢س$ حيث $س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٣}\right]$ ، جد $ق'\left(\frac{١}{٢}\right)$

الجواب: $ق'\left(\frac{١}{٢}\right) = -٤$

(١٥) إذا كان $ق(س) = ٢ظاس$ ، $هـ(س) = \frac{أ}{٢س + ١}$ كان $(هـ \circ ق)'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{٨}{٢٥}$ ، ما قيمة أ ؟

الجواب : $أ = -١$

١-٧ الاشتقاق الضمني

مثال ١ : إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$

الحـل : نشتق طرفي العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س :

$$٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$$

$$٢ص \frac{ءص}{ءس} = -٢س \quad \text{ومنها} \quad \frac{ءص}{ءس} = \frac{-س}{ص}$$

مثال ٢ : إذا كان $س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٣س ص$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة $(-١،١)$

الحـل : بالاشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س:

$$٢س + ٤ص \frac{ءص}{ءس} = ٣ص + ٣س \frac{ءص}{ءس} \quad .... \quad (١)$$

بالتعويض بالنقطة $(-١،١)$ في العلاقة (١)

$$٢(-١) + ٤(١) \frac{ءص}{ءس} = ٣(١) + ٣(-١) \frac{ءص}{ءس}$$

$$-٢ + ٤ \frac{ءص}{ءس} = ٣ - ٣ \frac{ءص}{ءس}$$

$$٤ \frac{ءص}{ءس} + ٣ \frac{ءص}{ءس} = ٣ + ٢ \quad \text{ومنها} \quad \boxed{\frac{ءص}{ءس} = \frac{٥}{٧}}$$

مثال ٣ : إذا كان $\frac{٢ص}{س} - \frac{س}{ص} = ١$ ، $س \neq ٠، ص \neq ٠$ ، $ص > ٠$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما $س = ٢$

الحـل : بضرب طرفي العلاقة في $س ص$

$$\frac{٢ص}{س} \times س ص - \frac{س}{ص} \times س ص = ١ \times س ص$$

$$٢ص^{٢} - س^{٢} = س ص \quad .... \quad (١)$$

بالاشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س تصبح العلاقة $٤ص \frac{ءص}{ءس} - ٢س = س \times \frac{ءص}{ءس} + ١ \times ص$ .... (٢)

نعوض في العلاقة (١) عن قيمة س=٢ فتصبح المعادلة $٢ص^{٢} - ٢^{٢} = ٢ص$

إذن $ص^{٢} - ص - ٢ = ٠ \Leftarrow (ص-٢)(ص+١) = ٠ \Leftarrow ص = ٢$ أو $ص = -١$ (مرفوض)

بالتعويض في العلاقة (٢) عن قيمتي س ، ص نحصل علي $٤(٢) \frac{ءص}{ءس} - ٢(٢) = ٢ \times \frac{ءص}{ءس} + ١ \times ٢$

$$٨ \frac{ءص}{ءس} - ٤ = ٢ \frac{ءص}{ءس} + ٢$$

$$٨ \frac{ءص}{ءس} - ٢ \frac{ءص}{ءس} = ٢ + ٤ \quad \text{ومنها} \quad ٦ \frac{ءص}{ءس} = ٦ \quad \text{أي أن} \quad \frac{ءص}{ءس} = ١$$

قاعدة :

إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$، $\text{م} \in \text{ص}$ ، $\text{ن} \neq ٠$ ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-١}$

نتيجة :

إذا كان $\text{ع}(\text{س}) = (\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \in \text{ح}$

وكان هـ(س) قابلاً للاشتقاق فإن $\text{ع}'(\text{س}) = \text{ن}(\text{هـ}(\text{س}))^{\text{ن}-١} \times \text{هـ}'(\text{س})$

مثال ٤ : إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$$\text{ص}' = \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٢}{٣}-١} = \frac{٢}{٣}\text{س}^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣\text{س}^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س}}}$$

مثال ٥ : إذا كانت $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٢}$ ، جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١}$

الحل :

$$\text{ص} = \left(\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٢\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٣}\left(\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٢\right)^{\frac{١}{٣}-١}(٢\text{س}+٥)$$

$$= \frac{١}{٣}\left(\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٢\right)^{-\frac{٢}{٣}}(٢\text{س}+٥)$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١} = \frac{١}{٣}(١+٥+٢)^{-\frac{٢}{٣}}(٢+٥)$$

$$= \frac{١}{٣}(٨)^{-\frac{٢}{٣}} \times ٧ = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} \times ٧ = \frac{٧}{١٢}$$

مثال ٦ : أوجد $\lim\limits_{\text{س}\to٢} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+٣٠}-٢}{\text{س}-٢}$

الحل : نحسب النهاية بالتعويض المباشر

$$\lim_{\text{س}\to٢} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+٣٠}-٢}{\text{س}-٢} = \lim_{\text{س}\to٢} \frac{\sqrt[٥]{٢+٣٠}-٢}{٢-٢} = \lim_{\text{س}\to٢} \frac{\sqrt[٥]{٣٢}-٢}{٢-٢} = \frac{٠}{٠}$$

نستخدم قاعدة لوبيتال : $\lim\limits_{\text{س}\to٢} \frac{\sqrt[٥]{\text{س}+٣٠}-٢}{\text{س}-٢} = \lim\limits_{\text{س}\to٢} \frac{(\text{س}+٣٠)^{\frac{١}{٥}}-٢}{\text{س}-٢}$

$$= \lim_{\text{س}\to٢} \frac{\frac{١}{٥}(\text{س}+٣٠)^{-\frac{٤}{٥}}}{١} = \frac{\frac{١}{٥}(٢+٣٠)^{-\frac{٤}{٥}}}{١} = \frac{١}{٥}(٣٢)^{-\frac{٤}{٥}} = \frac{١}{٥} \times \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٨٠}$$

مثال ٧ : جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى $ص = جا(س ص)$ عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٢}، ١\right)$

الحل : نعوض بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٢}، ١\right)$ في العلاقة المعطاة : $١ = جا\left(\frac{\pi}{٢} \times ١\right)$ (عبارة صحيحة)

إذن النقطة $\left(\frac{\pi}{٢}، ١\right)$ هي نقطة التماس

لحساب الميل نشتق الطرفين ضمنياً

$ص' = جتا(س ص)[١ \times ص + س \times ص']$ .... (١)

نعوض بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٢}، ١\right)$ في العلاقة (١) فنحصل علي

$ص' = جتا\left(\frac{\pi}{٢} \times ١\right)\left[١ \times ١ + \frac{\pi}{٢} \times ص'\right] = صفر$ $\therefore$ الميل $= ٠$

تكون معادلة المماس $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ١ = ٠ \Leftarrow ص = ١$

مثال ٨ : يسير جسم في خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ا جتا(بن + جـ)$ ، $ا، ب، جـ$ ثوابت .

أثبت أن تسارع الجسم = $= -ب^٢ ف$ ، علماً بأن الإزاحة ف بالأمتار ، ن الزمن بالثواني

الحل : $ف = ا جتا(بن + جـ)$

$ع = \frac{ءف}{ءن} = ا \times -جا(بن + جـ) \times ب$

$= -ا ب جا(بن + جـ)$

$ت = \frac{ءع}{ءن} = -ا ب \times ب جتا(بن + جـ)$

$= -ب^٢ ا جتا(بن + جـ) = -ب^٢ ف$

مثال ٩ : إذا كانت $ن(٢) = ٤$ ، $ن'(٢) = ٦$ ، وكان $س^٢ = ن(٢ص)$ ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة $(٢، ١)$

الحل : $س^٢ = ن(٢ص)$ بالاشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س

$٢س = ن'(٢ص) \times ٢ \frac{ءص}{ءس}$ .... (١)

بالتعويض بالنقطة $(٢، ١)$ في المعادلة (١)

$٢ \times ٢ = ن'(٢) \times ٢ \frac{ءص}{ءس}$

ومنها $٤ = ٦ \times ٢ \frac{ءص}{ءس}$.

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

مثال ١٠: إذا كان المستقيم المار بالنقطة (٠،٢) يمس منحنى العلاقة $\text{ص}^{٢} - ١٦\text{س} = ٠$ ، جد نقطة/نقاط التماس .

الحـل : نفرض المستقيم يمس المنحنى عند النقطة $(\text{س}_{١}، \text{ص}_{١})$

∵ ميل المستقيم من المشتقة = ميل المستقيم من النقطتين

لحساب ميل المستقيم من المشتقة نشتق معادلة المنحنى ضمنياً : $٢\text{ص}\text{ص}' - ١٦ = ٠$

ومنها $\boxed{\text{ص}' = \dfrac{٨}{\text{ص}}}$ .... (١)

ميل المستقيم من النقطتين = $\dfrac{\text{ص}_{١} - ٢}{\text{س}_{١} - ٠}$ أي أن $\boxed{\text{م} = \dfrac{\text{ص}_{١} - ٢}{\text{س}_{١}}}$ .... (٢)

∵ $\text{ص}' = \text{م}$ ∴ $\dfrac{\text{ص}_{١} - ٢}{\text{س}_{١}} = \dfrac{٨}{\text{ص}_{١}}$

ومنها $\text{ص}_{١}^{٢} - ٢\text{ص}_{١} = ٨\text{س}_{١}$ .... (٣)

من معادلة المنحنى $\text{س}_{١} = \dfrac{\text{ص}_{١}^{٢}}{١٦}$

بالتعويض في المعادلة (٣) عن قيمة $\text{س}_{١}$

$$\text{ص}_{١}^{٢} - ٢\text{ص}_{١} = ٨ \times \dfrac{\text{ص}_{١}^{٢}}{١٦}$$

بالضرب في ٢ : $٢\text{ص}_{١}^{٢} - ٤\text{ص}_{١} = \text{ص}_{١}^{٢} \Leftarrow \text{ص}_{١}^{٢} - ٤\text{ص}_{١} = ٠ \Leftarrow \text{ص}_{١}(\text{ص}_{١} - ٤) = ٠$

إما $\text{ص}_{١} = ٠$ (مرفوض) أو $\text{ص}_{١} = ٤$

∴ $\text{س}_{١} = \dfrac{١٦}{١٦} = ١$ ومنها نقطة التماس هي (١،٤)

مثال ١١: إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}\text{س} + \dfrac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س}$ ، برهن أن $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٤}\text{س}$

الحـل :

$$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س} + ٣ \times \dfrac{١}{٣}\text{ظا}^{٢}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س}$$

$$= \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{ظا}^{٢}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س}$$

$$= \text{قا}^{٢}\text{س}(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})$$

$$= \text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س}$$

$$= \text{قا}^{٤}\text{س}$$

(١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل ممايلي :

أ ـ $\sqrt{سص} = ١$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س}$

ب ـ ص = جتا $\sqrt{س^٢ + ١}$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-س جا \sqrt{س^٢+١}}{\sqrt{س^٢+١}}$

جـ ـ ص = قا $\sqrt{\pi + س}$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{قا \sqrt{\pi+س} ظا \sqrt{\pi+س}}{٢\sqrt{\pi+س}}$

د ـ $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٤$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤ص-١}{١-٤س}$

(٢) إذا كانت ص = ٣ + جا م ، م = ٥ + جتا ٣س ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = -٣$جتا م جا ٣س

(٣) إذا كانت ف = جا٣ن + جتا٢ن هى العلاقة بين الازاحة ف بالأمتار ، والزمن ن باثوانى لجسم يتحرك فى خط مستقيم . أوجد سرعة وتسارع هذا الجسم عندما ن = $\frac{\pi}{٦}$

الجواب: ع = $-\sqrt{٣}$ م/ث ، ت = ١١- م/ث^٢

(٤) إذا كان س = قاص في الفترة $\left[\frac{٣\pi}{٤}، \frac{٥\pi}{٦}\right]$ ، أثبت أن ص$'$ = $\frac{\sqrt{س^٢-١}}{س^٣-س}$.

(٥) إذا كان المستقيم ص = س مماساً للقطع المكافئ ص = س^٢ + أ ، ما قيمة أ ؟

الجواب: أ = $\frac{١}{٤}$

(٦) لتكن $\sqrt{ص}$ = لـوهـ (س ص) ، جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (هـ،١)

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢}{هـ}$

(٧) إذا كان س ص = ظتا (س ص) ، أثبت أن س ص$'$ + ص = ٠

(٨) إذا كان ٤ص^٢ ــ جتا ص = س^٢ ، جد ص$'$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{٨ص + جاص}$

(٩) إذا كان $(س - ص)^{٥} = س^{٢}$ ، جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (١،٠)

الجواب: $\frac{٣}{٥}$

(١٠) إذا كانت $س = جتا٣ن$ ، $ص = جتا٣ن$ ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند $ن = \frac{\pi}{٢}$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{ن=\frac{\pi}{٢}} = ١$

(١١) جد النقطة علي منحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي يكون عندها المماس أفقياً .

الجواب: (٩،٠)

(١٢) إذا كان $هـ^{٢س} = لـو_{هـ}(س + ٢ص)$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة $\left(٠، \frac{هـ}{٢}\right)$

الجواب: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢هـ - ١}{٢}$

(١٣) إذا كان $ص^{٢} + ٥ = س^{٣} + س$ ، حيث $ص > ٠$ ، وكان $\frac{ءص}{ءم} = ٢$ ، جد $\frac{ءس}{ءم}$ عند $س = ٣$

الجواب $\frac{ءس}{ءم} = \frac{٥}{٧}$

(١٤) إذا كان $ص = (ع - ١)^{٣}$ ، $س = \frac{١}{ع + ١}$ ، أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند $ع = ٠$

الجواب $\frac{ءص}{ءس} = -٣$

(١٥) إذا كان $جا^{٢}\sqrt{ص} - جتا^{٢}\sqrt{ص} = س$ ، أثبت أن $ص' = \sqrt{ص}(قتا٢\sqrt{ص})$

(١٦) إذا كان المماس لمنحنى $ص^{٢} = ٢أس + ب$ عند النقطة (١، ٢) الواقعة عليه يميل بزاوية ظلها = ٣ مع محولر السينات الموجب ، جد قيمة كلاً من أ،ب.

الجواب: $أ = ٦$ ، $ب = -٨$

(١٧) إذا كانت $ص^{٢} = \sqrt{س^{٢} + ص}$ ، أثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{٤ص^{٣} - ١}$.

الوحدة الثانية

تطبيقات التفاضل

أولا / نظرية رول:

إذا كان ن(س) اقترانا متصلا في الفترة [أ،ب] ، وقابلاً للاشتقاق في الفترة]أ،ب[، وكان ن(أ) = ن(ب) فإنه يوجد عدد حقيقي واحد علي الأقل جـ∈]أ،ب[بحيث ن′(جـ)=٠

مثال ١: بين أن الاقتران ن(س) = س^{٢} – ٥س + ٤ يحقق شروط نظرية رول في الفترة [٢،٣] ، ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تعينها النظرية .

الحل : ١) **نبحث في تحقق شروط نظرية رول علي الاقتران ن(س) في الفترة [٢،٣]**

ن(س) متصل في الفترة [٢،٣] وقابل للاشتقاق في الفترة]٢،٣[لأنه كثير حدود

ن(٢) = ٢^{٢} – ٥(٢) + ٤ = ٤ – ١٠ + ٤ = –٢

ن(٣) = ٣^{٢} – ٥(٣) + ٤ = ٩ – ١٥ + ٤ = –٢

إذن تحققت نظرية رول ∴ يوجد عدد حقيقي جـ∈]٢،٣[بحيث ن′(جـ)=٠

٢) **نجد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية حيث** ن′(س)=٢س – ٥

ومنها ن′(جـ)=٢جـ – ٥ ∴ ٢جـ – ٥ = ٠ ومنها جـ = $\frac{٥}{٢}$ ∈]٢،٣[

مثال ٢ : إذا علمت أن الاقتران ن(س) = س^{٣} – ٤س + ١ يحقق شروط نظرية رول في الفترة [–٢،أ]

فما قيمة الثابت أ ؟

الحل : ∵ ن(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [–٢،أ]

∴ ن(–٢) = ن(أ) ومنها (–٢)^{٣} – ٤(–٢) + ١ = أ^{٣} – ٤أ + ١

أ^{٣} – ٤أ = ٠ ⟸ أ(أ^{٢} – ٤) = ٠

إما أ = ٠ أو أ = ٢

مثال ٣ : إذا كان ن(س) = $\begin{cases} ٥ - س^{٢} & ،\ -٣ \le س \le ١ \\ ٦ - ٢س & ،\ ١ < س \le ٥ \end{cases}$

ابحث في تحقق شروط نظرية رول علي الفترة [–٣،٥]

الحل : ١) ن(س) متصل في الفترة [–٣،١] لأنه كثير حدود

ن(س) متصل في الفترة]١،٥] لأنه كثير حدود

ولمعرفة فيما إذا كان ن(س) متصل عند س = ١ نحسب

$\lim\limits_{س \to ١^{-}}$ ق(س) = ٥ − ١^{٢} = ٤ ، $\lim\limits_{س \to ١^{+}}$ ق(س) = ٦ − ٢ × ١ = ٤ ، ق(١) = ٥ − ١^{٢} = ٤

∴ ق(س) متصل عند س = ١ ∴ ق(س) متصل علي الفترة [−٣،٥]

٢) ق′(س) = $\begin{cases} −٢س & ،\ −٣ < س < ١ \\ −٢ & ،\ ١ < س < ٥ \\ غ.م & ،\ س = −٣، س = ٥ \end{cases}$

∵ ق(س)متصل عند س = ١، ق′(١)$^{+}$ = ق′(١)$^{-}$ ∴ ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١

أى أن ق(س) قابل للاشتقاق فى الفترة]−٣،٥[

٣) ق(−٣) = ٥ − ٣^{٢} = −٤ ، ق(٥) = ٦ − ٢ × ٥ = −٤

∴ ق(س) يحقق شروط نظرية رول فى الفترة [−٣،٥]

نحسب قيمة جـ :

أ) إذا كانت −٣ < جـ < ١ فإن −٢جـ = ٠ ومنها جـ = ٠ (مقبول)

ب) إذا كانت ١ < جـ < ٥ فإن ق′(جـ) = ٠ ومنها −٢ = ٠ وهذا مستحيل

∴ قيمة جـ التي تعينها النظرية هى جـ = ٠

مثال ٤: إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق علي الفترة]أ،ب[وكان ق(أ) = هـ(أ) ، ق(ب) = هـ(ب) ، أثبت أنه يوجد علي الأقل عدد مثل جـ∈]أ،ب[بحيث أن المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند جـ يوازى المماس المرسوم لمنحنى هـ(س) عند جـ

الحـل : نفرض أن ع(س) = ق(س) − هـ(س)

∵ ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق علي]أ،ب[∴ ق(س) ، هـ(س)متصلين علي [أ،ب]

ع(س) متصل علي [أ،ب] لأنه فرق بين اقترانين متصلين

كذلك ع(س) قابل للاشتقاق علي]أ،ب[لأنه فرق بين اقترانين قابلين للاشتقاق

ع(أ) = ق(أ) − هـ(أ) = ٠ & ع(ب) = ق(ب) − هـ(ب) = ٠

∴ ع(س) يحقق شروط رول علي الفترة [أ،ب]

∴ يوجد عدد مثل جـ∈]أ،ب[بحيث ع′(جـ) = ٠ ⟸ ق′(جـ) − هـ′(جـ) = ٠

ومنها ق′(جـ) = هـ′(جـ)

∴ ميل المماس للاقتران ق(س) يساوى ميل المماس للاقتران هـ(س)عند س = جـ

∴ المماس المرسوم للاقتران ق(س) يوازى المماس المرسوم للاقتران هـ(س)عند س = جـ

مثال ٥: إذا كان ق(س) = ٤ − س^٢ ، باستخدام نظرية رول أثبت وجود عدد مثل جـ ∈]−أ، أ[، أ∈ ح بحيث يكون المماس عندها أفقياً ، ثم جد قيمة/قيم جـ التي تحددها النظرية

الحـل : ق(س) = ٤ − س^٢ متصل علي الفترة [−أ، أ] لأنه كثير حدود

ق(س) قابل للاشتقاق علي الفترة]−أ، أ[لأنه كثير حدود

∵ ق(أ) = ٤ − أ^٢ ، ق(−أ) = ٤ − أ^٢

∴ ق(أ) = ق(−أ)

∴ ق(س) يحقق شروط نظرية رول

∴ يوجد جـ ∈]−أ، أ[بحيث قَ(جـ) = ٠

أى أن المماس يكون أفقياً عند س = جـ

وحيث أن قَ(س) = ٢س ∴ ٢جـ = ٠ ومنها جـ = ٠

ثانياً/ نظرية القيمة المتوسطة :

إذا كان ق(س) اقترانا متصلا فى الفترة [أ، ب] ، وقابلاً للاشتقاق فى الفترة]أ، ب[،

فإنه يوجد عدد حقيقى واحد علي الأقل جـ ∈]أ، ب[بحيث قَ(جـ) = $\frac{ق(ب) − ق(أ)}{ب − أ}$

مثال ٦ : بين أن الاقتران ق(س) = $\sqrt[3]{س}$ + ٢ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة فى الفترة [−١، ٨] ثم جد قيمة /قيم جـ التي تحقق النظرية

الحل : ق(س) متصل علي الفترة [−١، ٨] لأنه معرف علي ح

ق(س) قابل للاشتقاق فى الفترة]−١، ٨[

∴ توجد جـ ∈]−١، ٨[بحيث قَ(جـ) = $\frac{ق(٨) − ق(−١)}{٨ − (−١)}$ = $\frac{(\sqrt[3]{٨} + ٢) − (\sqrt[3]{−١} + ٢)}{٨ + ١}$ = $\frac{٤ − ١}{٩}$ = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

وحيث أن ق(س) = $\sqrt[3]{س}$ + ٢ = س^{١/٣} + ٢

∴ قَ(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{−٢/٣} ومنها قَ(جـ) = $\frac{١}{٣}$ جـ^{−٢/٣}

∴ $\frac{١}{٣}$ جـ^{−٢/٣} = $\frac{١}{٣}$ ⟸ جـ = ١ ∈]−١، ٨[

مثال ٧: بين فيما إذا كان الاقتران $ق(س)$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[-١،٣]$ ، ثم عين قيمة / قيم **جـ** التي تعينها النظرية حيث : $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢ & ، \quad س \le ١ \\ ٢س - ٣ & ، \quad س > ١ \end{cases}$

الحـل : لا بد من إعادة كتابة الاقتران $ق(س)$ حتى يتم تعريفه علي الفترة المطلوبة كما يلي :

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢ & ، \quad -١ \le س \le ١ \\ ٢س - ٣ & ، \quad ١ < س \le ٣ \end{cases}$$

أولاً : البحث في شروط النظرية :

(١) **الاتصال علي الفترة $[-١،٣]$** :

الاقتران ق متصل علي $[-١،١]$ لأنه كثير حدود & الاقتران ق متصل علي $]١،٣]$ لأنه كثير حدود .

$$\underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا} ق(س) = \underset{س \leftarrow ١^+}{نهـا} (٢س - ٣) = -١$$

$$\underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا} ق(س) = \underset{س \leftarrow ١^-}{نهـا} (س^٢ - ٢) = -١ \qquad \& \qquad ق(١) = ١ - ٢ = -١$$

$\therefore$ ق متصل علي الفترة $[-١،٣]$

(٢) **قابلية الاشتقاق علي الفترة $]-١،٣[$**

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، \quad -١ < س < ١ \\ ٢ & ، \quad ١ < س < ٣ \end{cases}$$

بما أن ق متصل عند س = ١ & $ق'(١)^+ = ٢$ & $ق'(١)^- = ٢ \times ١ = ٢$

$\therefore$ $ق'(١)$ موجود ، أي أن ق قابل للاشتقاق علي الفترة $]-١،٣[$

$\therefore$ ق يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة $[-١،٣]$

ثانياً / إيجاد قيمة **جـ** :

$$ق'(جـ) = \frac{ق(٣) - ق(-١)}{٣ - (-١)} = \frac{٣ - (-١)}{٤} = ١$$

وحيث أن $ق'(س) = ٢س$ ، $-١ < س < ١$

$\therefore$ $ق'(جـ) = ٢جـ$ ، $-١ < جـ < ١$ ومنها $جـ = \frac{١}{٢}$

وعندما $س > ١$ ، فإن $ق'(س) = ٢ \ne ١$

$\therefore$ لا توجد **جـ** تحقق النظرية عندما $س > ١$

$\therefore$ $جـ = \frac{١}{٢}$ هي القيمة الوحيدة في الفترة $]-١،٣[$ التي تعينها النظرية .

مثال ٨: جد الثوابت أ ، ب ، جـ التي تجعل الاقتران الآتي يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ & \text{، س} = ٠ \\ -\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + \text{جـ} & \text{، } ٠ < \text{س} < ١ \\ \text{أس} + \text{ب} & \text{، } ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$$

الحل : $\because$ ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٠) \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٣}$$

$\because$ ق(س) متصل عند س $= ١$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ق}(\text{س})$$

$$\text{أ} + \text{ب} = -١ + ٣ + \text{جـ} \qquad \therefore \boxed{\text{أ} + \text{ب} = ٥} \quad .... (١)$$

$\because$ ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة $]٠،٢[$

$$\therefore \text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} -٢\text{س} + ٣ & \text{، } ٠ < \text{س} < ١ \\ \text{أ} & \text{، } ١ < \text{س} < ٢ \\ \text{غ.م} & \text{، س} = ٠ \text{ أو س} = ٢ \end{cases}$$

$\text{ق}'(١)^{+} = \text{ق}'(١)^{-}$ ومنها $\text{أ} = -٢ + ٣ \quad \therefore \boxed{\text{أ} = ١}$

بالتعويض في المعادلة (١) نجد أن $\boxed{\text{ب} = ٤}$

مثال ٩: إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ، $\text{س} \in [\text{أ}،\text{ب}]$ ، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة أثبت أن المقدار $\frac{\text{ب}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{ب} - \text{أ}}$ يقع بين $٣\text{أ}^{٢}$ ، $٣\text{ب}^{٢}$ حيث $٠ < \text{أ} < \text{ب}$.

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ متصل على الفترة $[\text{أ}،\text{ب}]$ لأنه كثير حدود

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ قابل للاشتقاق على الفترة $]\text{أ}،\text{ب}[$ لأنه كثير حدود ، $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

حسب نظرية القيمة المتوسطة توجد $\text{جـ} \in]\text{أ}،\text{ب}[$ بحيث $\text{ق}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ق}(\text{ب}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ب} - \text{أ}}$

$$٣\text{جـ}^{٢} = \frac{\text{ب}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{ب} - \text{أ}} \quad .... (١)$$

$$\because \text{جـ} \in]\text{أ}،\text{ب}[\Leftarrow \text{أ} < \text{جـ} < \text{ب} \Leftarrow ٣\text{أ}^{٢} < ٣\text{جـ}^{٢} < ٣\text{ب}^{٢} \quad .... (٢)$$

بالتعويض من العلاقة (١) في العلاقة (٢) ينتج أن: $٣\text{أ}^{٢} < \frac{\text{ب}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{ب} - \text{أ}} < ٣\text{ب}^{٢}$

تمارين (٢-١)

(١) بين أياً من الاقترانات الاتية يحقق شروط نظرية رول علي الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة/قيم جـ التي تحددها النظرية :

أ. $ق(س) = \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}$ ، $س \in [٠،٢]$

لا توجد قيم ل جـ

ب. $ق(س) = س^٤ - ٢$ ، $س \in [-٢،٢]$

الجواب: جـ = صفر

ج. $ق(س) =$ جتا٢س $-$ ٢جتاس ، $س \in [٠،٢\pi]$

الجواب : $\left\{\frac{\pi}{٣}، \pi، \frac{٥\pi}{٣}\right\}$

(٢) بين أيا من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة/قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة إن وجدت :

أ. $ق(س) = \frac{١}{س^٢}$ ، $س \in [١،٤]$

الجواب: $جـ = \sqrt[٣]{\frac{٣٢}{٥}}$

ب. $ق(س) = \sqrt{س - ١}$ ، $س \in [١،١٠]$

الجواب: $جـ = \frac{١٣}{٤}$

ج. $ق(س) = س^٣ - ١$ ، $س \in [-٢،٢]$

الجواب: $جـ = \pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(٣) ابحث في تحقق شروط نظرية رول للاقتران $ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ + ٥ & ، -٢ \le س < ٠ \\ س^٣ + ٥ & ، ٠ \le س \le ٢ \end{cases}$

ثم جد قيمة/قيم جـ التي تحددها النظرية

الجواب: $جـ = ٠$

(٤) إذا كان $ق(س)$ كثير حدود ، $هـ(س)$ اقتراناً خطياً وكان منحنى $هـ(س)$ يقطع منحنى $ق(س)$ في ثلاث نقاط $س_١، س_٢، س_٣$ بحيث $س_١ < س_٢ < س_٣$ ، أثبت أنه يوجد $جـ \in]س_١، س_٣[$ بحيث $ق''(جـ) = ٠$

(٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + بس + ٢ & ، ٠ \le س < ٢ \\ ٢س + د & ، ٢ \le س \le ٤ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية رول في الفترة $[٠، ٤]$ ، جد :

١- أ ، ب ، د

الجواب: $أ = ٢$ ، $ب = -٦$ ، $د = -٦$

٢- قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية

الجواب: $جـ = \frac{٣}{٢}$

(٦) بين أن الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣ & ، ٠ \le س \le ١ \\ \frac{-٢}{س} & ، ١ < س \le ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[٠، ٢]$

ثم جد قيمة / قيم جـ التي تحددها النظرية

الجواب: $جـ = \frac{١}{٢}$ أو $\sqrt{٢}$

(٧) أثبت أن الاقتران $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - [س + ٣]س & ، ٠ \le س < ١ \\ ٢س^٢ - ٤س & ، ١ \le س \le ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية رول في الفترة $[٠، ٢]$

ثم جد قيمة جـ التي تعينها النظرية .

الجواب: $جـ = ١$

(٨) إذا كانت $ق(س) = س^٢ + أس + ب$ ، $س \in [١، ٥]$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ، وكانت معادلة المماس عند قيمة جـ التي تعينها النظرية هي $ص = ٢س - ٨$. أوجد قيمة كلاً من الثوابت أ ، ب ، جـ

الجواب: $أ = -٤$ ، $ب = ٥$ ، $جـ = ٣$

(٩) إذا كان $ق(س) = \frac{أ}{س} + س$ ، $أ \ne ٠$. $س \in [أ، ب]$ ، أثبت أنه يوجد $جـ \in]أ، ب[$ بحيث $جـ^٢ = أ \times ب$

(١٠) إذا كان $ق(س)$ كثير حدود يمر بالنقاط $(١، ٢)$ ، $(٢، ٣)$ ، $(٣، ٤)$. برهن باستخدام نظرية رول وجود عدد واحد على الأقل $جـ \in]١، ٣[$ بحيث $ق''(جـ) = ٠$

٢ – ٢ الاقترانات المتزايدة والمتناقصة :

تعريف :

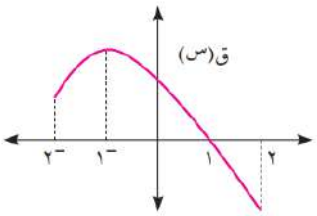
يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [أ،ب] ، س١، س٢ ∈ [أ،ب]

(١) متزايداً في [أ،ب] إذا تحقق الشرط : عندما س١ < س٢ فإن ق(س١) < ق(س٢)

(٢) متناقصاً في [أ،ب] إذا تحقق الشرط : عندما س١ < س٢ فإن ق(س١) > ق(س٢)

(٣) ثابتاً في [أ،ب] إذا تحقق الشرط : عندما س١ < س٢ فإن ق(س١) = ق(س٢)

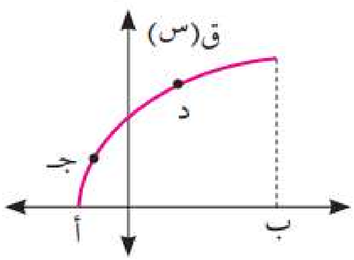
مثال ١ : في الشكل المقابل : حدد الفترات التي يكون فيها منحنى الاقتران متزايداً أو متناقصاً ، أو ثابتاً:

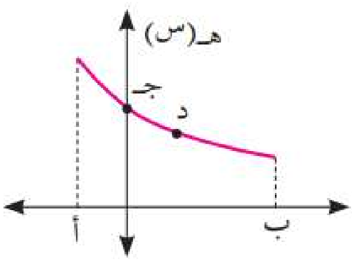


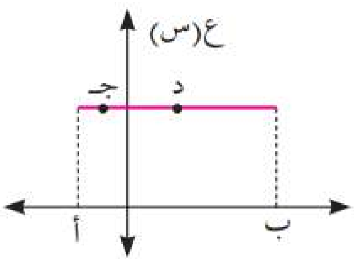
الحـل : من الرسم يتضح أن الاقتران ق(س) متزايد في الفترة [–٢،–١] & متناقص في الفترة [–١،٢]

حل نشاط(٢) صفحة ٦٧من الكتاب

(١) ق(س) متزايد في الفترة [أ،ب] ، هـ(س) متناقص في الفترة [أ،ب] ، ع(س) ثابت في الفترة [أ،ب]







(٢)زاوية ميل المماسات المرسومة عند جـ ، د للاقتران ق(س) حادة

زاوية ميل المماسات المرسومة عند جـ ، د للاقتران هـ(س) منفرجة

زاوية ميل المماسات المرسومة عند جـ ، د للاقتران ع(س) صفر

(٣)إشارة ظل زاوية ميل المماس :

إشارة قَ(س) موجب & إشارة هـَ(س) سالب & إشارة عَ(س) = صفر

(٤)عندما تكون إشارة مشتقة الاقتران موجبة يكون الاقتران متزايد

عندما تكون إشارة مشتقة الاقتران سالبة يكون الاقتران متناقص

عندما تكون إشارة مشتقة الاقتران صفر يكون الاقتران ثابت

نظرية :

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلا فى [أ،ب] وقابلاً للاشتقاق فى]أ،ب[فإن منحنى :

(١) الاقتران ق(س) يكون **متزايد** فى [أ،ب] إذا كانت ق′(س) > ٠ ، ∀س∈]أ،ب[

(٢) الاقتران ق(س) يكون **متناقص** فى [أ،ب] إذا كانت ق′(س) < ٠ ، ∀س∈]أ،ب[

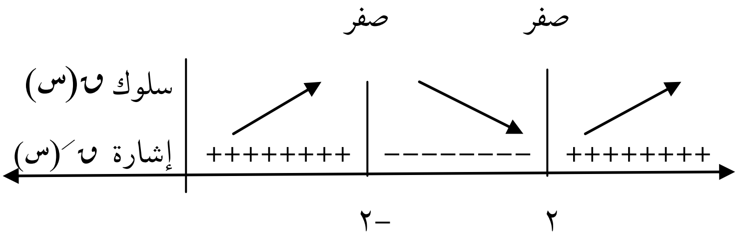
(٣) الاقتران ق(س) يكون **ثابت** فى [أ،ب] إذا كانت ق′(س) = ٠ ، ∀س∈]أ،ب[

مثال ٢ : جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^{٣} − ١٢س ، س∈ح

الحـل : ق′(س) = ٣س^{٢} − ١٢

نضع ق′(س) = ٠ ومنها ٣س^{٢} − ١٢ = ٠ ⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ±٢

نعين إشارة ق′(س) ومنها نحكم على سلوك الاقتران من حيث التزايد والتناقص ونوضح ذلك من خلال الشكل المجاور



الاقتران ق(س) متزايد فى الفترتين]−∞، −٢] ، [٢، ∞[، ومتناقص فى [−٢، ٢]

مثال ٣: عين فترات التزايد والتناقص الاقتران ق(س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} - ٤}$ ، س ≠ −٢ ، س ≠ ٢

الحـل :

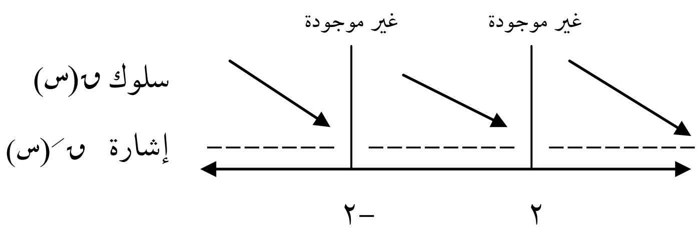
$$ق′(س) = \frac{١ \times (س^{٢} - ٤) - (س - ١) \times ٢س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{س^{٢} - ٤ - ٢س^{٢} + ٢س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{-س^{٢} + ٢س - ٤}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$$

نضع ق′(س) = ٠ ⇐ س^{٢} − ٤ − ٢س^{٢} + ٢س = ٠

⇐ −س^{٢} + ٢س − ٤ = ٠

لا يوجد لها جذور

الشكل المقابل يوضح إشارة ق´(س)



ق(س) متناقص في الفترات]−∞، −٢[،]−٢، ٢[،]٢، ∞[

ملاحظة / لا يمكن القول أن ق(س) متناقص علي ح ، لماذا ؟

مثال ٤ : عين فترات التزايد والتناقص ،الاقتران ق(س) = جتا^{٢}س − جاس ، علي الفترة [٠، π]

الحـل :

ق(س) = جتا^{٢}س − جاس متصل في الفترة [٠، π]

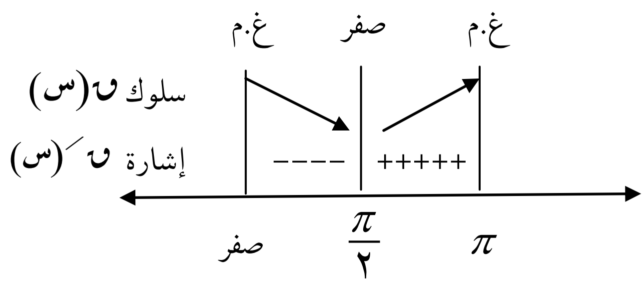
ق´(س) = −٢جتاس جاس − جتاس ، س∈]٠، π[

نضع ق´(س) = ٠ ومنها −٢جتاس جاس − جتاس = ٠

جتاس (٢جاس + ١) = ٠ ⟸ إما جتاس = ٠ أو ٢جاس + ١ = ٠

عندما جتاس = ٠ فإن س = $\frac{\pi}{٢}$

عندما جاس = $\frac{-١}{٢}$ فإن س ليس لها قيمة في الفترة [٠، π]



من اشارة ق´(س) في الشكل المقابل يكون

الاقتران ق(س) متناقص في [٠، $\frac{\pi}{٢}$] ، ومتزايد في [$\frac{\pi}{٢}$، π]

تمارين ٢-٢

(١) جد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى ق(س) في كل من الاقتراحات الآتية :

أ. ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ١٥

الجواب : متزايد في]−∞،−١] ، [٣،∞[متناقص في [−١،٣]

ب. ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}}$

الجواب: متزايد في الفترتين [−٢، $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$] ، [٢،∞[& متناقص في الفترة [$\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$،٠]

ج. ق(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$

الجواب: متزايد في الفترة [٢،∞[& متناقص في]−∞،−٣]

د. ق(س) = $\begin{cases} ٥ - \text{س} & \text{،} \quad \text{س} \leq ٢ \\ \frac{٢}{\text{س}} & \text{،} \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$

الجواب: متزايد في الفترة]−∞،٠] ، متناقص في الفترتين [٠،٢] ، [٢،∞[

هـ. ق(س) = جا^{٢}٢س ، ٠ < س < π

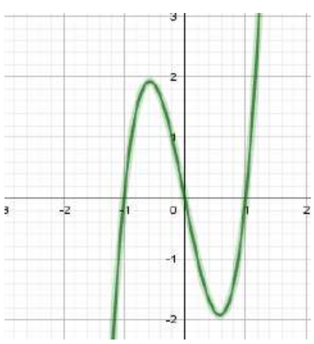
الجواب : متزايد في [٠، $\frac{\pi}{٢}$] ، متناقص في [$\frac{\pi}{٢}$، π]

(٢) إذا كان ق(س) كثير حدود متناقص علي ح ، وكان هـ(س) = ق(س^{٢} − ٢س)، حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س)

الجواب : متزايد في الفترة]−∞،١] & متناقص في الفترة [١،∞[

(٣) الشكل المقابل يوضح منحنى ق$'$(س)
حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) علي ح

ق$'$(س)



الجواب: متزايد في الفترتين [−١،٠] ، [١،∞[& متناقص في الفترتين [٠،١]،]−∞،−١]

(٤) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س} + س^٢$ ، $س \neq ٠$ ، جد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى $ق'(س)$

الجواب: متزايد في الفترتين $]-\infty ، -١]$ ، $[٠ ، \infty[$ & متناقص في الفترة ، $[-١ ، ٠[$

(٥) عين فترات التزايد والتناقص علي مجال $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٦س + ٤ & ، \quad س \leq ٠ \\ [س + ٤] & ، \quad ٠ < س < ١ \\ |٣س + ١| & ، \quad ١ \leq س \end{cases}$

الجواب : متزايد علي الفترتين $[-٣ ، ٠]$، $[١ ، \infty[$ & متناقص في الفترة $]-\infty ، -٣]$ & ثابت في الفترة $[٠ ، ١]$

(٦) إذا كان $ق(س)$ متصلاً علي الفترة $[أ ، ب]$ وقابلاً للاشتقاق علي الفترة $]أ ، ب[$ وكان $ق'(س) > ٠$ لكل $س \in]أ ، ب[$

وكان $هـ(س) = ق(س) + س^٣$. أثبت أن $هـ(س)$ متزايد علي الفترة $[أ ، ب]$

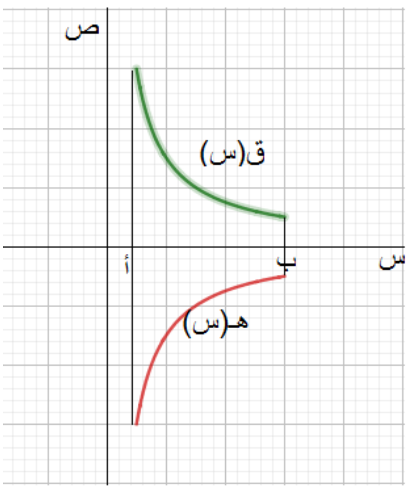
(٧) إذا كان $ق(س)$ كثير حدود متناقص علي ح ، وكان $ل(س) = ق(س^٢ + ٢س)$ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى $ل(س)$

الجواب: $ل(س)$ متزايد في الفترة $]-\infty ، -١]$ ومتناقص في الفترة $[-١ ، \infty[$

(٨) إذا كان $ق(س)$ ، $هـ(س)$ كثيرى حدود معرفتين في الفترة $[١ ، ٥]$ بحيث $ق(س)$ متزايد في مجاله ويقع في الربع الأول ، ومنحنى $هـ(س)$ متناقص في مجاله ويقع في الربع الرابع . بين هل $ق(س) \times هـ(س)$ متناقص أم متزايد في الفترة $[١ ، ٥]$

$ق(س) \times هـ(س)$ متناقص في الفترة $[١ ، ٥]$

(٩) الشكل المقابل يوضح التمثيل البياني لمنحنى كلاً من $ق(س)$ ، $هـ(س)$ في الفترة $[أ ، ب]$. أثبت أن : $(ق \times هـ)(س)$ متزايد علي الفترة $[أ ، ب]$



تعريف القيم الصغري والقصوي المحلية :

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً علي المجال ع ، ولتكن جـ∈ع ، عندها يكون للاقتران ق(س) :

(١) قيمة عظمي محلية عند س = جـ هى ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحوى جـ بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س∈(ف ∩ ع)

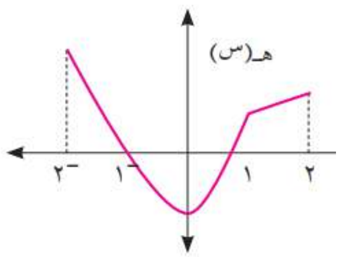
(٢) قيمة صغري محلية عند س = جـ هى ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحوى جـ بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س∈(ف ∩ ع)

(٣) قيمة عظمي مطلقة عند س = جـ هى ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س∈ع

(٤) قيمة عظمي مطلقة عند س = جـ هى ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س∈ع

مثال ١ : نشاط (٢) صفحة ٧٣ من الكتاب الوزارى :

يمثل الشكل المجاور منحنى هـ(س) فى الفترة [–٢،٢] ،



١– يوجد للاقتران هـ(س) قيمة عظمي محلية عند س = –٢

هى ق(–٢) لأنه يوجد ف =]–٣،–١[تحوى العدد –٢

بحيث أن ق(–٢) ≥ ق(س) ∀س∈ف ∩ [–٢،٢[= [–٢،–١[

ق´(–٢) غير موجودة لأن (–٢،ق(–٢)) نقطة طرفية

٢– يوجد للاقتران قيمة صغري محلية وهى مطلقة عند س = ٠ لأن ق(٠) ≤ ق(س) ∀س∈[–٢،٢]

ق´(٠) = ٠ لأن ميل المماس عند (س=٠) يساوى صفر

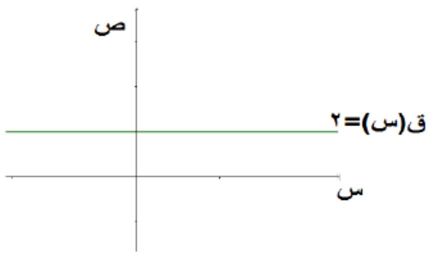
٣– يوجد قيمة عظمي محلية عند س = ٢ لأنه يوجد ف = [١،٣] تحوى العدد ٢ بحيث أن

ق(٢) ≥ ق(س) ∀س∈ف ∩ [١،٣] = [١،٢]

ق´(٢) غير موجودة لأن (٢،ق(٢)) نقطة طرفية

لاحظ أن : عند س = ١ لا توجد قيمة عظمي أو صغري محلية

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٢ ، س∈[٠،٥] . حدد القيم القصوي المحلية للاقتران ق(س)



الحـــل : ق(س) متصل فى الفترة [٠،٥] لأنه ثابت

ق´(س) = ٠ ∀س∈]٠،٥[

وحسب التعريف ∀س∈[٠،٥] يوجد قيمة عظمي محلية لأن ق(س) ≤ ٢ ∀س في تلك الفترة

كما وأنه حسب التعريف ∀س∈[٠،٥] يوجد قيمة صغري محلية هي ٢ لأن ق(س) ≥ ٢ ∀س في تلك الفترة

ملاحظة هامة :

إذا كان ق(س) = أ ، حيث أ ثابت فإن أ هي قيمة عظمي محلية ، أ هي قيمة صغري محلية

تعريف :

تسمي النقطة (أ،ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت :

١- أ∈ق(س)

٢- ق´(أ) = ٠ أو ق´(أ) غير موجودة

مثال٣ : **جد جميع قيم س التي يكون للاقتران عندها نقط حرجة حيث** ق(س) = س^{٣} − ٣س ، س∈]−٢،٥[

الحــل : ق(س) متصل علي ح لأنه كثير حدود

ق´(س) = ٣س^{٢} − ٣ ، س∈]−٢،٥[

نجعل ق´(س) = ٠ ⟸ ٣س^{٢} − ٣ = ٠ ومنها س^{٢} = ١ ⟸ س = ±١

مجموعة قيم س التي يوجد للاقتران عندها نقط حرجة هي {−١،١،٢}

لاحظ أنه لا توجد نقطة حرجة عند س = ٥ لأنها لا تنتمي إلى مجال الاقتران

مثال ٤ : جد جميع النقط الحرجة للاقتران ق(س) = |س^{٢} − ٤| ، س∈[−٣،٣]

الحــل :

ق(س) = { س^{٢} − ٤ ، −٣ ≤ س ≤ −٢
 ٤ − س^{٢} ، −٢ < س < ٢
 س^{٢} − ٤ ، ٢ ≤ س ≤ ٣

ق´(س) = { ٢س ، −٣ < س < −٢
 −٢س ، −٢ < س < ٢
 ٢س ، ٢ < س < ٣

ق´(س) غير موجودة عند س = −٢،٢

كذلك ق´(س) غير موجودة عند س = −٣،٣ لأنها نقاط طرفية

عندما س∈]−٣، −٢[⟸ ق′(س) = ٠ ⟸ ٢س = ٠ ومنها س = ٠∉]−٣، −٢[

∴ لا توجد نقط حرجة للاقتران في الفترة]−٣، −٢[

عندما س∈]−٢، ٢[⟸ ق′(س) = ٠ ⟸ −٢س = ٠ ومنها س = ٠∈]−٢، ٢[

∴ توجد نقط حرجة للاقتران عند س = ٠

لا يوجد نقطة حرجة عند س = −٣ لأنها لا تنتمي إلى مجال ق(س)

النقط الحرجة (٠، ٤)، (−٢، ٠)، (٢، ٠)، (٣، ٥)

اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى :

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ، ب] وكانت (جـ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س)، جـ∈]أ، ب[فإنه :

(١) إذا كان ق′(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ، وكان ق′(س) < ٠ عندما جـ < س < ب فإن ق(جـ) قيمة عظمي للاقتران ق(س).

(٢) إذا كان ق′(س) < ٠ عندما أ < س < جـ ، وكان ق′(س) > ٠ عندما جـ < س < ب فإن ق(جـ) قيمة صغري للاقتران ق(س).

مثال ٥: جد القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢}

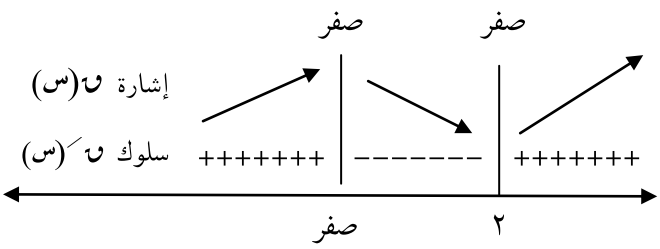
الحـل : ق(س) متصل علي ح لأنه كثير حدود

ق′(س) = ٣س^{٢} − ٦س ∀س∈ح

نجعل ق′(س) = ٠ ومنها ٣س^{٢} − ٦س = ٠

⟸ ٣س(س − ٢) = ٠ ⟸ إما س = ٠ أو س = ٢

نوضح إشارة ق′(س) في الشكل المقابل



من إشارة ق′(س)

ق(٠) = ٠ قيمة عظمي محلية

ق(٢) = ٢^{٣} − ٣(٢)^{٢} = −٤ قيمة صغري محلية

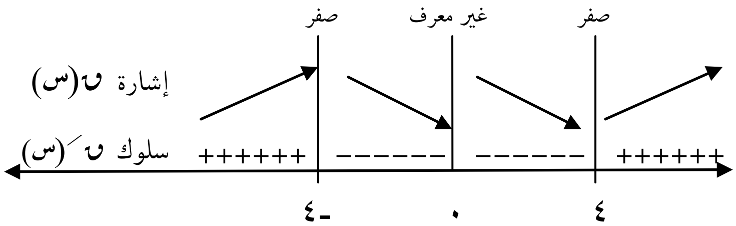
مثال ٦: جد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للاقتران $ق(س) = س + \frac{١٦}{س}$ ، $س \neq ٠$

الحـــل : $ق(س)$ متصل على $ح - \{٠\}$

$ق'(س) = ١ - \frac{١٦}{س^٢} = \frac{س^٢ - ١٦}{س^٢}$ ، $س \neq ٠$

نجعل $ق'(س) = ٠$ ومنها $\frac{س^٢ - ١٦}{س^٢} = ٠ \Leftarrow س^٢ - ١٦ = ٠$ ومنها $س = \pm ٤$

نوضح إشارة $ق'(س)$ في الشكل المقابل



من الشكل يتضح لنا أن $ق(-٤) = -٤ + \frac{١٦}{-٤} = -٨$ قيمة عظمى محلية

وكذلك $ق(٤) = ٤ + \frac{١٦}{٤} = ٨$ قيمة صغرى محلية

لاحظ أنه لا توجد نقطة حرجة عند س = ٠ لأنها لا تنتمي إلى مجال ح

اختبار أطراف الفترة :

إذا كان $ق(س)$ اقترانا متصلاً في $[أ،ب]$ فإن :

(١) $ق(أ)$ قيمة صغرى محلية ، إذا كانت $ق'(س) > ٠$ عندما $س > أ$ (بداية تزايد)

(٢) $ق(أ)$ قيمة عظمى محلية ، إذا كانت $ق'(س) < ٠$ عندما $س > أ$ (بداية تناقص)

(٣) $ق(ب)$ قيمة عظمى محلية ، إذا كانت $ق'(س) > ٠$ عندما $س < ب$ (نهاية تزايد)

(٤) $ق(ب)$ قيمة صغرى محلية ، إذا كانت $ق'(س) < ٠$ عندما $س < ب$ (نهاية تناقص)

مثال ٧: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، -١ \leq س \leq ١ \\ س - لـو_هـ س & ، ١ < س \leq ٤ \end{cases}$

(١) جد مجموعة النقط الحرجة للاقتران $ق(س)$.

(٢) جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س)$.

الحـــل : $\because$ $ق(س)$ متصل في الفترة $[-١،٤]$ (تحقق من ذلك)

$$\therefore\ \text{ن}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ،\quad -١ < \text{س} < ١ \\ ١ - \dfrac{١}{\text{س}} & ،\quad ١ < \text{س} < ٤ \\ \text{غ.م} & ،\quad \text{س} = -١،١،٤ \end{cases}$$

أولاً / عندما س$\in$]−١،١[نجعل ن´(س) = ٠ فيكون ٢س = ٠ ومنها س = ٠

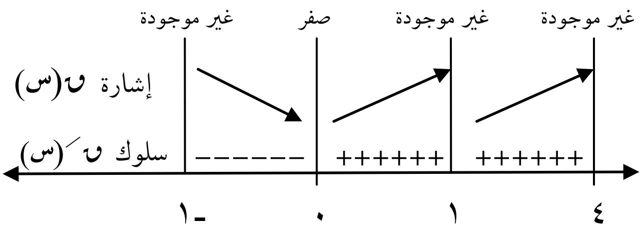
∴ توجد نقطة حرجة عند س = ٠

ثانياً / عندما س$\in$]١،٤[نجعل ن´(س) = ٠ فيكون $١ - \frac{١}{\text{س}} = ٠$ ومنها س = ١ $\notin$]١،٤[

∵ ن´(س) غير موجودة عند س = −١ ، س = ١ ، س = ٤

∴ توجد نقاط حرجة عند هذه القيم

مجموعة قيم س التي عندها نقط حرجة {−١،٠،١،٤}



من إشارة ن´(س) في الشكل السابق يتضح أن:

عند س = −١ يوجد قيمة عظمي محلية هي ن(−١) = ١ لأنها بداية تناقص

عند س = ٠ يوجد قيمة صغري محلية هي ن(٠) = ٠ وهي مطلقة

عند س = ٤ يوجد قيمة عظمي محلية هي ن(٤) = ٤ − لوھ ٤ لأنها نهاية تزايد

نظرية القيم القصوي المطلقة :

إذا كان ن(س) اقترانا متصلاً في [أ،ب] فإن ن(س) يتخذ قيمه القصوي المطلقة في الفترة [أ،ب]

مثال ٨:

إذا كان $\text{ن}(\text{س}) = \begin{cases} ٤ - ٢\text{س} & ،\quad ٠ \leq \text{س} < ١ \\ \text{س} + ١ & ،\quad ١ \leq \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

(١) جد مجموعة النقط الحرجة للاقتران ن(س)

(٢) جد القيم القصوي المحلية للاقتران ن(س)

الحــل : (١) ق(س) متصل على الفترة [٠،٢] (تحقق من ذلك)

لإيجاد النقط الحرجة :

$$ق'(س) = \begin{cases} -٢ &، \quad ٠ < س < ١ \\ ١ &، \quad ١ < س < ٢ \\ غ.م &، \quad س = ٠،١،٢ \end{cases}$$

النقط الحرجة حيث س = ٠،١،٢

ق(٠) = ٤ ، ق(١) = ٢ ، ق(٢) = ٣

بمقارنة النتائج الثلاث نستنتج أن :

ق(١) = ٢ قيمة صغرى مطلقة للاقتران ق(س)

ق(٠) = ٤ قيمة عظمى مطلقة للاقتران ق(س)

مثال ٩: أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران ق(س) = ٢س^{٣} − ٦س في الفترة $\left[\frac{-٣}{٢}،\frac{٣}{٢}\right]$

الحــل : ق(س) متصل على الفترة $\left[\frac{-٣}{٢}،\frac{٣}{٢}\right]$ لأنه كثير حدود

ق'(س) = ٦س^{٢} − ٦ ، س ∈ $\left]\frac{-٣}{٢}،\frac{٣}{٢}\right[$

عندما ق'(س) = ٠ يكون ٦س^{٢} − ٦ = ٠ ومنها س = ±١

نحسب ق(س) عند النقط الحرجة

ق(−١) = ٢(−١)^{٣} − ٦(−١) = −٢ + ٦ = ٤

ق(١) = ٢(١)^{٣} − ٦(١) = ٢ − ٦ = −٤

ق$\left(\frac{-٣}{٢}\right)$ = ٢$\left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٣}$ − ٦$\left(\frac{-٣}{٢}\right)$ = $\frac{٩}{٤}$

ق$\left(\frac{٣}{٢}\right)$ = ٢$\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣}$ − ٦$\left(\frac{٣}{٢}\right)$ = $\frac{-٩}{٤}$

∴ أكبر قيمة للاقتران = ٤ ، أصغر قيمة للاقتران = −٤

تمارين ٢ -٣

(١) جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية :

أ. $ق(س) = ٩ - س^٢$

الجواب : (٠،٩)

ب. $ق(س) = ٥$ ، $س \in [٠،٤]$

الجواب : (س،٥) $\forall$ $س \in [٠،٤]$

ج. $ق(س) = \sqrt[٣]{س - ٢}$ ، $س \in ح$

الجواب : لا توجد نقاط حرجة

د. $ق(س) = \sqrt{٤س - س^٢}$ ، $٠ \le س \le ٤$

الجواب : (٠،٠) ، (٢،٢) ، (٤،٠)

(٢) في كل ممايلي جد القيم العظمي والصغري المحلية للاقتران ق(س) (إن وجدت)

أ. $ق(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$

الجواب: كلاً من ق(−٣) = ٠ ، ق(٣) = ٠ قيمة صغري محلية ، ق(٠) = ٣ عظمي محلية وهي مطلقة

ب. $ق(س) = قا^٢س + ظا^٢س$ ، $س \in [٠،\pi]$

الجواب: توجد قيمة صغري محلية عند س = ٠ هي ق(٠) = ١ & توجد قيمة صغري محلية عند $س = \pi$ هي $ق(\pi) = ١$

ج. $ق(س) = هـ^{(س+١)^٢}$ ، $س \in ح$

الجواب: ق(−١) = ١ صغري محلية

د. $ق(س) = \left[١ - \frac{١}{٢} س \right]$ ، $س \in [٠،٢]$

الجواب : ق(س) ثابت لكل $س \in [٠،٢]$، ق(٢) = −١ صغري محلية

(٣) إذا كان للاقتران $ق(س) = أس^٣ + س^٢ + بس - ٥$ قيمة صغري محلية عند النقطة $(١، -٨)$ ،

جد قيمتى كلا من أ ، ب .

الجواب: $أ = ١$ ، $ب = -٥$

(٤) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - س + ٢ & ، -٣ \le س < ١ \\ |س - ٣| & ، ١ \le س < ٨ \end{cases}$

أوجد القيم العظمي والصغري المحلية ، وبين المطلقة منها .

الجواب: القيم العظمي المحلية هى $ق(-٣)$ ، $ق(١)$ ، $ق(٨)$ & القيم الصغري المحلية هى $ق(\frac{١}{٢})$ ، $ق(٣)$)

(٥) جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران $ق(س) = جاس - \frac{١}{٣} جا^٣ س$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

أكبر قيمة $ق(\frac{\pi}{٢}) = \frac{٢}{٣}$ & أصغر قيمة $ق(\frac{٣\pi}{٢}) = -\frac{٢}{٣}$

(٦) إذا علمت أن للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمي محلية عند النقطة $(٢،٣)$ ، بين أن للاقتران $هـ(س) = (١ - ق(س))^٣$ قيمة صغري محلية عند النقطة $(٢، -٨)$

(٧) باستخدام القيم القصوي أثبت أن المقدار $٤س^٤ - \frac{١}{٥}س^٥ + ٢$ موجب دائماً .

اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية :

إذا كان ق(س) اقترانا متصلاً فى الفترة [أ،ب] ، وكان ق″(س) معرفاً فى الفترة]أ،ب[فإن منحنى ق(س) يكون :

(١) مقعراً لأعلي فى الفترة]أ،ب[إذا كانت ق″(س) > ٠ لجميع قيم س∋]أ،ب[

(٢) مقعراً لأسفل فى الفترة]أ،ب[إذا كانت ق″(س) < ٠ لجميع قيم س∋]أ،ب[

(٣) غيرمقعرللأعلي أو للأسفل فى الفترة]أ،ب[إذا كانت ق″(س) = ٠ لجميع قيم س∋]أ،ب[

مثال ١: إذا كان ق(س) = س^{٤} – س^{٣} + ٥س ، أوجد الفترة التى يكون منحنى ق(س) فوق جميع مماساته ، والفترة التى يكون فيها ق(س) تحت جميع مماساته

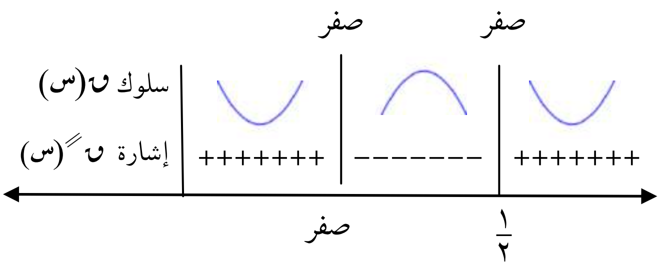
الحـــل: ق(س) متصل علي ح لأنه كثير حدود

ق′(س) = ٤س^{٣} – ٣س^{٢} + ٥

ق″(س) = ١٢ س^{٢} – ٦س

بوضع ق″(س) = ٠ نجد أن ١٢ س^{٢} – ٦س = ٠ ومنها ٦س(٢س – ١) = ٠

∴ س = ٠ أو س = $\frac{١}{٢}$



من الشكل يتضح أن ق(س) يقع فوق جميع مماساته (مقعر لأعلي) فى الفترات]–∞،٠[،]$\frac{١}{٢}$،∞[

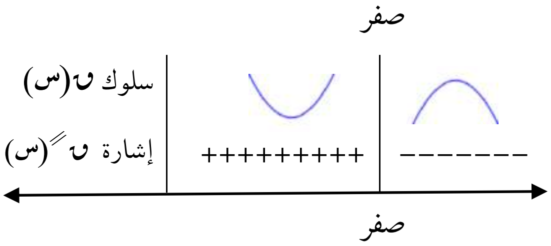
ق(س) يقع تحت جميع مماساته (مقعر لأسفل) فى الفترة]$\frac{١}{٢}$،∞[

مثال ٢: إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س}$ أوجد مجالات التقعر لأعلي والتقعر لأسفل للاقتران ق(س)

الحـــل: ق(س) متصل علي ح لأن مجال الاقتران معرف علي ح

ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ ∴ ق′(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ ومنها ق″(س) = $\frac{-٢}{٩}$ س$^{-\frac{٥}{٣}}$

نجعل ق″(س) = ٠ فيكون $\frac{-٢}{٩}$ س$^{-\frac{٥}{٣}}$ = ٠ ومنها س = ٠



من إشارة ق″(س) في الشكل السابق يتضح أن: ق(س) مقعر لأعلي في الفترة]$-\infty$،٠[

ق(س) مقعر لأسفل في الفترة]٠،∞[

تعريف :

(١) تسمي النقطة (جـ،ق(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) إذا كان :

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغير الاقتران إتجاه تقعر منحناه عند س = جـ من الأعلي إلى الأسفل أو العكس

(٢) زاوية الانعطاف : هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف

(٣) إذا كانت (جـ،ق(جـ)) نقطة انعطاف وكان ق′(جـ) = ٠ فتسمي النقطة (جـ،ق(جـ)) نقطة انعطاف أفقي

مثال٣: إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٩}$ ، أوجد مجالات التقعر لأعلي ولأسفل ونقط الانعطاف للاقتران ق(س)

الحـــل: ق(س) متصل علي ع

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١\times(\text{س}^{٢}+٩)-\text{س}(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{٩-\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}-(٩-\text{س}^{٢})(٢)(\text{س}^{٢}+٩)٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}}$$

بأخذ $-٢\text{س}(\text{س}^{٢}+٩)$ عامل مشترك في البسط

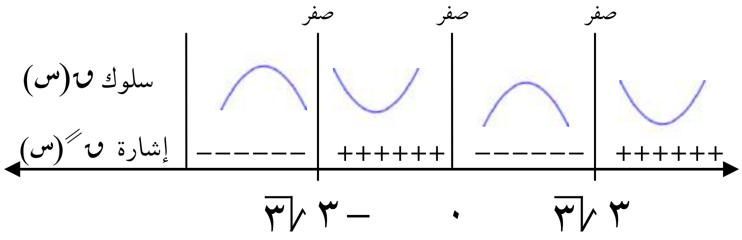
$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}(\text{س}^{٢}+٩)(\text{س}^{٢}+٩+١٨-٢\text{س}^{٢})}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}(\text{س}^{٢}+٩)(٢٧-\text{س}^{٢})}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}}$$

عندما $\text{ق}''(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \frac{-٢\text{س}(\text{س}^{٢}+٩)(٢٧-\text{س}^{٢})}{(\text{س}^{٢}+٩)^{٢}} = ٠$

ومنها $-٢س(٢٧ - س^{٢}) = ٠$ ⟸ إما $س = ٠$ أو $س^{٢} = ٢٧$

⟸ إما $س = ٠$ أو $س = ٣\sqrt{٣}$ أو $س = -٣\sqrt{٣}$



من الشكل الموضح يتضح أن : ق(س) مقعر لأسفل في الفترة $]-\infty، -٣\sqrt{٣}[$ ، $]٠، ٣\sqrt{٣}[$

ق(س) مقعر لأعلي في الفترة $]-٣\sqrt{٣}، ٠[$ ، $]٣\sqrt{٣}، \infty[$

نقط الانعطاف : $(-٣\sqrt{٣}، ق(-٣\sqrt{٣})) = (-٣\sqrt{٣}، \frac{-\sqrt{٣}}{١٢})$ وكذلك $(٠، ق(٠)) = (٠،٠)$

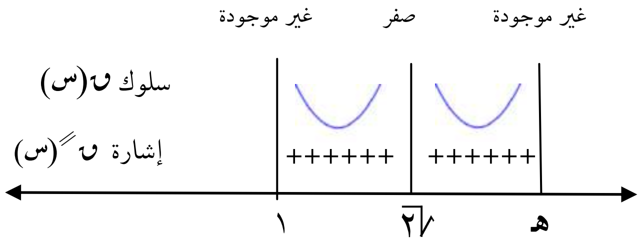
وكذلك $(٣\sqrt{٣}، ق(٣\sqrt{٣})) = (٣\sqrt{٣}، \frac{\sqrt{٣}}{١٢})$

مثال ٤: بين أنه لا توجد للاقتران $ق(س) = لو_{هـ}(٢س) + س^{٢}$ نقطة انعطاف في الفترة $[١، هـ]$ ، $س > ٠$

الحــل: $ق'(س) = \frac{٢}{٢س} + ٢س = \frac{١}{س} + ٢س$

$ق''(س) = -\frac{١}{س^{٢}} + ٢$

عندما $ق''(س) = ٠$ يكون $-\frac{١}{س^{٢}} + ٢ = ٠$ ومنها $س = \sqrt{٢}$



بما أن ق(س) لا يغير من اتجاه تقعره ، فلا توجد نقاط إنعطاف للاقتران ق(س) في الفترة [١،هـ]

مثال ٥: إذا كان $ق(س) = س - جاس$ ، $س \in [-\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}]$ ، أوجد فترات التقعر لأعلي ولأسفل للاقتران ق(س) ، ثم جد نقط الانعطاف وزوايا الانعطاف إن وجدت .

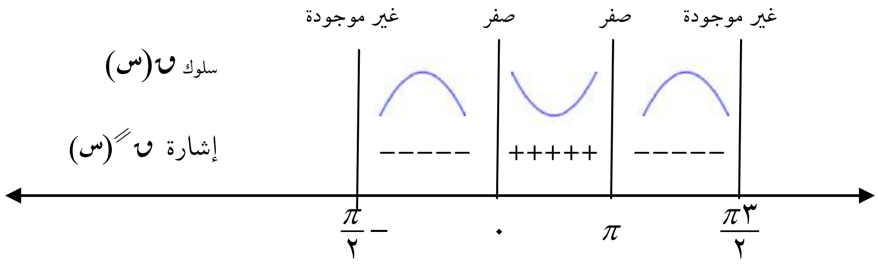
الحــل : ق(س) متصل علي $[-\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}]$ لأنه فرق اقترانين متصلين

∵ ق(س) = س − جاس

∴ ق$'$(س) = ١ − جتاس ، س ∈ $\left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right[$

ومنها ق$''$(س) = جاس ، س ∈ $\left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right[$

عندما ق$''$(س) = ٠ فإن جاس = ٠ ومنها س = π أو س = ٠



ومن إشارة ق$''$(س) في الشكل المقابل فإن :

ق(س) مقعر لأعلى في الفترة]٠، π[

ق(س) مقعر لأسفل في الفترة]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[،]$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

النقطتان (٠،٠) ، (π،π) نقطتا انعطاف

لإيجاد زوايا الانعطاف نفرض أن هـ$_١$ هي زاوية الانعطاف عند النقطة (٠،٠)

ومنها ظاهـ$_١$ = ق$'$(٠) = ٠ ⇐ هـ$_١$ = ٠

نفرض أن هـ$_٢$ هي زاوية الانعطاف عند النقطة (π،π)

ظاهـ$_٢$ = ق$'$(π) = ٢ ⇐ هـ$_٢$ = ظا$^{-١}$ ٢

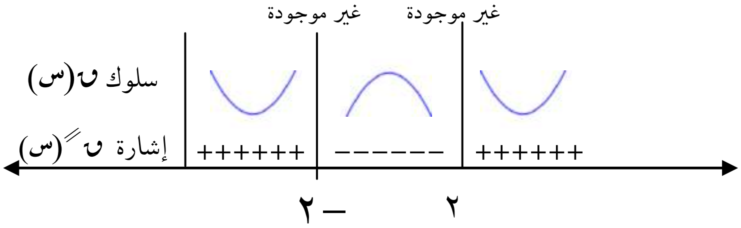
مثال ٦: عين مجالات التقعر لأعلى ولأسفل للاقتران ق(س) = |س^٢ − ٤|

الحل :

ق(س) = { س^٢ − ٤ ، س < −٢
  ٤ − س^٢ ، −٢ ≤ س ≤ ٢
  س^٢ − ٤ ، س > ٢ }

ق$'$(س) = { ٢س ، س < −٢
  −٢س ، −٢ < س < ٢
  ٢س ، س > ٢
  غ.م ، س = −٢ أو س = ٢ }

$$ق''(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad س < -٢ \\ -٢ & ، \quad -٢ < س < ٢ \\ ٢ & ، \quad س > ٢ \\ \text{غ.م} & ، \quad س = -٢ \text{ أو } س = ٢ \end{cases}$$



ومن إشارة ق″(س) في الشكل المقابل فإن :

ق(س) مقعر لأعلي في الفترتين]−∞،−٢[،]٢،∞[

ق(س) مقعر لأسفل في الفترة]−٢،٢[

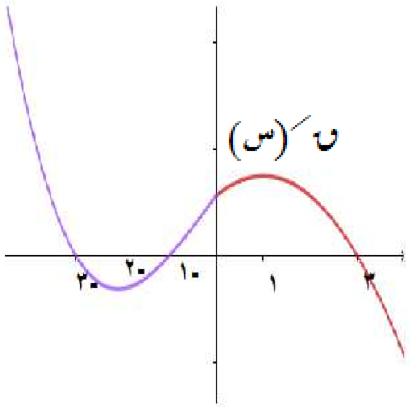
مثال٧: الشكل المجاور يمثل منحنى ق′(س) ، جد كلاً ممايلي :

(١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

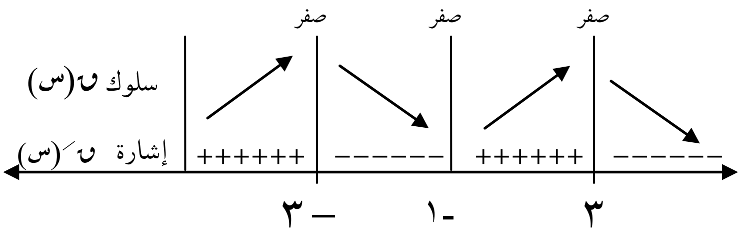
(٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

(٣) مجالات التقعر لأعلي ولأسفل

(٤) قيم س التي يكون عندها نقاط انعطاف



الحـل : (١) تمثيل إشارة ق′(س) :



من الشكل المجاور يتضح أن :

ق(س)متزايد في الفترتين]−∞، −٣] [−١،٣]

ق(س) متناقص في الفترتين [−٣،−١] [٣،∞[

من الرسم أيضاً يتضح أن :

ق(−٣) عظمي محلية ، ق(٣) عظمي محلية ، ق(−١) صغري محلية

(٢) تمثيل إشارة ق$''$(س) :

		صفر	صفر	
ق(س) سلوك	∩	∪	∩	
إشارة ق$''$(س)	-----	+++++	-----	
		٢-	١	

من الشكل يتضح أن :

ق(س) مقعر لأسفل في الفترتين]−∞،−٢[&]١،∞[

ق(س) مقعر لأعلي في الفترة]−٢،١[

توجد نقطة انعطاف عند س = −٢ & عند س = ١

،

حل نشاط (٢) صفحة ٨٥ من الكتاب الوزاري :

∵ ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة

∴ ق(س) = أس^{٣} + بس^{٢} + جـس + د

∵ ق(٠) = ٥ ⇐ د = ٥

∵ (٢،١) نقطة انعطاف أفقي

∴ ق(٢) = ١ ، ق$'$(٢) = ٠ ، ق$''$(٢) = ٠

وحيث أن ق$'$(س) = ٣أس^{٢} + ٢بس + جـ ⇐ ق$''$(س) = ٦أس + ٢ب

∵ ق$''$(٢) = ٠

∴ ٦أ(٢) + ٢ب = ٠

ومنها ٦أ + ب = ٠ .... (١)

∵ ق$'$(٢) = ٠

∴ ٣أ(٢)^{٢} + ٢ب(٢) + جـ = ٠

١٢أ + ٤ب + جـ = ٠ .... (٢)

∵ ق(٢) = ١

∴ أ × ٨ + ب × ٤ + جـ × ٢ + ٥ = ١

٨أ + ٤ب + ٢جـ = −٤

٤أ + ٢ب + جـ = −٢ .... (٣)

بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن أ = $-\frac{١}{٢}$ ، ب = ٣ ، جـ = −٦

الاقتران المطلوب $\boxed{\text{ق(س)} = -\frac{١}{٢}\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥}$

نظرية :

إذا كان $ق(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق فى فترة مفتوحة تحوى جـ وكان $ق'(جـ) = ٠$ فإن :

(١) $ق(جـ)$ قيمة عظمي محلية ، إذا كانت $ق''(جـ) < ٠$

(٢) $ق(جـ)$ قيمة صغري محلية ، إذا كانت $ق''(جـ) > ٠$

(٣) يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت $ق''(جـ) = ٠$ ، أو $ق''(جـ)$ غير موجودة.

مثال٨ : جد القيم العظمي والصغري المحلية للاقتران

$ق(س) = \frac{١}{٥} س^{٥} - ٤س^{٢} + ١$ باستخدام اختبار المشتقة الأولى إن أمكن :

الحل : ∵ $ق(س)$ متصل وقابل للاشتقاق علي ح لأنه كثير حدود

∴ $ق'(س) = س^{٤} - ٨س$

نجعل $ق'(س) = ٠$ ∴ $س^{٤} - ٨س = ٠$

ومنها $س(س^{٣} - ٨) = ٠$

$س = ٠$ أو $س = ٢$

∵ $ق''(س) = ٤س^{٣} - ٨$

∴ $ق''(٠) = ٤(٠)^{٣} - ٨ = -٨ < ٠$

$ق(٠) = ١$ قيمة عظمي محلية

وكذلك $ق''(٢) = ٤(٢)^{٣} - ٨ = ٢٤ > ٠$

∴ $ق(٢) = -\frac{٤٣}{٥}$ قيمة صغري محلية.

تمارين ٢ – ٤

(١) عين فترات التقعر لأعلي ولأسفل لمنحنى ق(س) فى الحالات الآتية :

أ. ق″(س) = (س^{٢} − ٤)(س + ١) ، س ∈ ح

مقعر لأسفل فى الفترتين]−∞، −٢[،]−١، ٢[ومقعر لأعلي فى الفترة]−٢، −١[،]٢، ∞[

ب. ق″(س) = ٣س^{٢} − ٢٧

الجواب : مقعر لأسفل فى الفترة]−∞، ٠[ومقعر لأعلي فى الفترة]٠، ∞[

ج. ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

الجواب : مقعر لأسفل فى الفترة]$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$[ومقعر لأعلي فى الفترتين]−∞، $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$[،]$\frac{١}{\sqrt{٣}}$، ∞[

د. ق(س) = جتا٢س ، س ∈ [$-\frac{\pi}{٢}$، $\frac{\pi}{٢}$]

الجواب : مقعر لأسفل فى الفترة]$-\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٤}$[ومقعر لأعلي فى الفترتين]$-\frac{\pi}{٢}$، $-\frac{\pi}{٤}$[،]$\frac{\pi}{٤}$، $\frac{\pi}{٢}$[

(٢) حدد نقاط الانعطاف لمنحنى ق(س) فى الحالات الآتية :

أ. ق(س) = $\sqrt{٨ - س^{٣}}$

الجواب : (٠، ٢$\sqrt{٢}$) نقطة انعطاف

ب. ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠، ٢π]

الجواب : نقاط الانعطاف : ($\frac{٣\pi}{٤}$، ٠) ، ($\frac{٧\pi}{٤}$، ٠)

ج. ق(س) = س^{٢} − $\frac{٢٧}{س}$ ، س ≠ ٠

الجواب: نقطة الانعطاف (٣، ٠)

(٣) إذا كان ق(س) = س^{٤} − ٦س^{٣} + أس^{٢} وكان للاقتران نقطتا انعطاف إحداهما (١، ق(١)) ، جد نقطة الانعطاف الأخرى .

الجواب : نقطة الانعطاف (٢، ١٦)

(٤) إذا كان $ق(س) = س^٣ + بس^٢ + جس + د$ حيث $ب، ج، د \in ح$ بحيث $ق(٠) = ٤$ ، وكان للاقتران $ق(س)$ نقطة انعطاف عند $س = ١$ ومعادلة المماس لمنحنى $ق(س)$ عند نقطة الانعطاف هي $٢س + ص = ٥$ ، أوجد قاعدة الاقتران $ق(س)$

الجواب : $ق(س) = س^٣ - ٣س^٢ + س + ٤$

(٥) إذا كان $ق(س)$ قابلاً للاشتقاق على $]أ، ب[$ ، $ك(س)$ كثير حدود متزايد في $[أ، ب]$ ، $ك(س) \neq ٠$ في هذه الفترة ، وكان $ق'(س) = \frac{٧}{ك(س)} - ٥س$ ، أثبت أن منحنى الاقتران $ق(س)$ مقعراً لأسفل في الفترة $]أ، ب[$.

(٦) إذا كان لمنحنى $ق(س) = س^٤ - ٦س^٣ + ١٢س^٢ - ١٠س$ ، $س \in ح$ نقطتا انعطاف :

أ. عين نقطة الانعطاف الأفقي منهما .

$(١، -٣)$

ب. عين معادلة المماس لمنحنى $ق(س)$ عند نقطة الانعطاف الثانية .

الجواب : $ص = -٢س$

(٧) جد قيم س التي يكون لمنحنى الاقتران $ق$ عندها نقط انعطاف حيث $ق(س) = ٢جاس + \frac{١}{٢}جا٢س$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

الجواب : $س = \frac{٢\pi}{٣}$ ، $س = \pi$ ، $س = \frac{٤\pi}{٣}$

(٨) استخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى للاقترانات الآتية :

أ. $ق(س) = ٨س^٢ - ٢س^٤$

الجواب: توجد قيمة صغري محلية عند $س = ٠$ ، توجد قيمة عظمي محلية عند $س = \sqrt{٢}$ ، $س = -\sqrt{٢}$

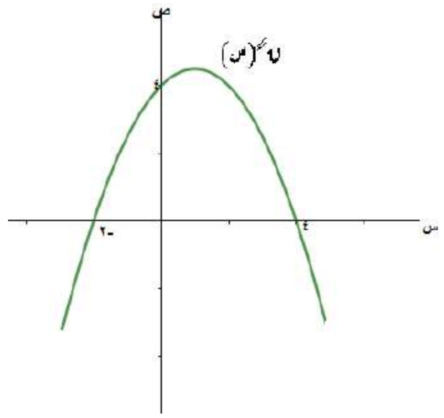
ب. $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

الجواب : $ق(-١)$ عظمي محلية & $ق(١)$ صغري محلية

(٩) الشكل المجاور يمثل منحنى $ق''(س)$ إذا علمت أن النقاط الحرجة للاقتران $ق(س)$ هي عند $س = -١$ ، ٦ ، أوجد :

أ. فترات التقعر لأعلي والتقعر لأسفل للاقتران $ق(س)$

الجواب: مقعر لأسفل في الفترتين $]-\infty، -٢]$ ، $[٤، \infty[$ ، مقعر لأعلي في الفترة $]-٢، ٤[$



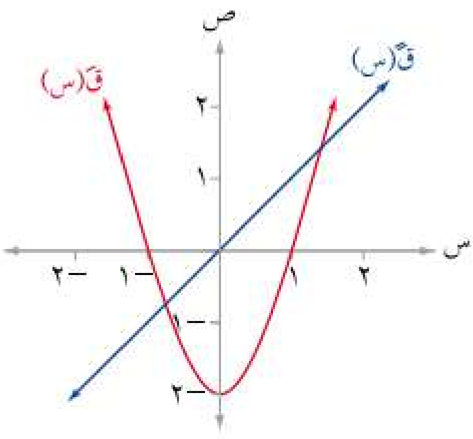
ب. نقط القيم القصوى المحلية

الجواب : ق(−١) قيمة صغرى محلية ، ق(٦) قيمة عظمى محلية

ج. نقطة/نقاط الانعطاف

الجواب: (−٢،ق(−٢)) ، (٤،ق(٤))

(١٠) يمثل الشكل المجاور منحنى ق َ(س) ، ومنحنى ق ً(س) للاقتران ق(س) المعرف على ح ، اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة الآتية :



أ. عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق .

(الجواب : متزايد في الفترتين]−∞،−١] ، [١،∞[& متناقص في [−١،١])

ب. عين قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية باستخدام:

(١) اختبار المشتقة الأولى .

(٢) اختبار المشتقة الثانية .

(الجواب : عند س=−١ توجد قيمة عظمى محلية & عند س=١ توجد قيمة صغرى محلية)

ج. عين مجالات التقعر للاقتران ق .

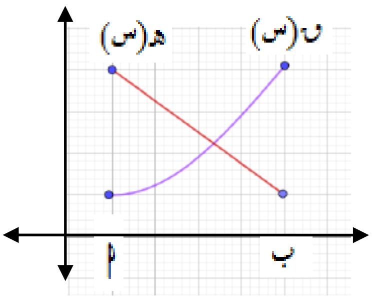
الجواب : ق(س) مقعر لأعلى في الفترة]٠،∞[& مقعر لأسفل]−∞،٠[

د. عين نقط الانعطاف للاقتران ق .

الجواب: (٠،ق(٠)) نقطة انعطاف

(١١) الشكل المجاور يبين منحنى الاقترانين ق(س) ، هـ(س) المعرفين على [أ،ب] ،

أثبت أن (ق َ∘هـ)(س) اقتران متناقص في [أ،ب]



٢ ـ ٥ تطبيقات عملية على القيم القصوى

مثال ١: ثنى سلك طوله ١٢ سم ليكون مثلثاً متساوى الساقين ، أوجد أطوال أضلاع المثلث إذا كانت مساحته أكبر ما يمكن

الحـل : نفرض أطوال أضلاع المثلث س ، س ، ٢ص (للتسهيل نفرض طول الضلع الثالث ٢ص)

∵ طول السلك = ١٢ $\quad\therefore\quad \text{س} + \text{س} + ٢\text{ص} = ١٢$

ومنها $٢\text{س} + ٢\text{ص} = ١٢ \quad\therefore\quad ٢\text{ص} = ١٢ - ٢\text{س}$

فيكون $\boxed{\text{ص} = ٦ - \text{س}}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$$= \frac{١}{٢} \times ٢\text{ص} \times \sqrt{\text{س}^٢ - \text{ص}^٢}$$

$$\text{م}(\text{س}) = (٦ - \text{س})\sqrt{\text{س}^٢ - (٣٦ - ١٢\text{س} + \text{س}^٢)}$$

$$= (٦ - \text{س}) \times \sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}$$

$$\text{م}'(\text{س}) = (٦ - \text{س}) \times \frac{١٢}{٢\sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}} - \sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}$$

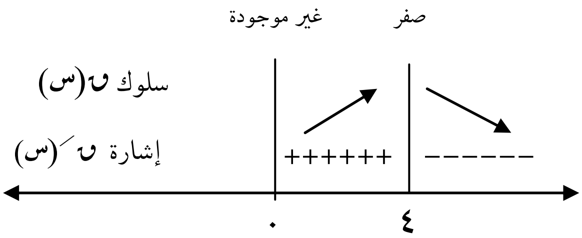
$$= \frac{٦(٦ - \text{س})}{\sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}} - \sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}$$

$$\text{م}'(\text{س}) = \frac{٦(٦ - \text{س}) - (١٢\text{س} - ٣٦)}{\sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}} = \frac{٣٦ - ٦\text{س} - ١٢\text{س} + ٣٦}{\sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}}$$

$$\therefore\ \text{م}'(\text{س}) = \frac{٧٢ - ١٨\text{س}}{\sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}}$$

نضع $\text{م}'(\text{س}) = ٠$ فيكون $\frac{٧٢ - ١٨\text{س}}{\sqrt{١٢\text{س} - ٣٦}} = ٠$ ومنها $٧٢ - ١٨\text{س} = ٠$

ومنها $١٨\text{س} = ٧٢ \quad\Leftarrow\quad \text{س} = ٤$



من الشكل المجاور يتضح أنه توجد قيمة عظمي محلية عند $\text{س} = ٤$

أى أن مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما تكون أضلاعه ٤سم ، ٤سم ، ٤سم

مثل ٢ : جد العددين اللذين مجموعهما ٢٠ ، ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن

الحـل : نفرض العددين س ، ص

بما أن مجموع العددان = ٢٠ $\quad \therefore$ $\text{س} + \text{ص} = ٢٠$ ومنها $\boxed{\text{ص} = ٢٠ - \text{س}}$ .... (١)

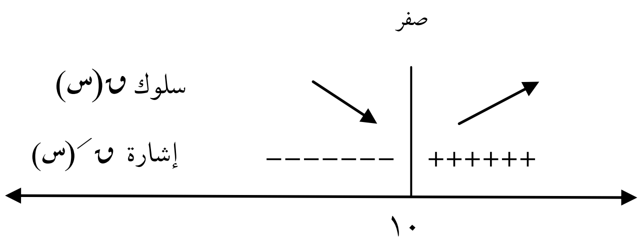
مجموع مربعى العددين = $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{س}^٢ + (٢٠ - \text{س})^٢$

أي أن $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^٢ + ٤٠٠ - ٤٠\text{س} + \text{س}^٢ = ٢\text{س}^٢ - ٤٠\text{س} + ٤٠٠$

$\text{م}(\text{س}) = ٢\text{س}^٢ - ٤٠\text{س} + ٤٠٠$

$\therefore \quad \text{م}'(\text{س}) = ٤\text{س} - ٤٠$

نجعل $\text{م}'(\text{س}) = ٠$ فيكون $٤\text{س} - ٤٠ = ٠$ ومنها $\text{س} = ١٠$

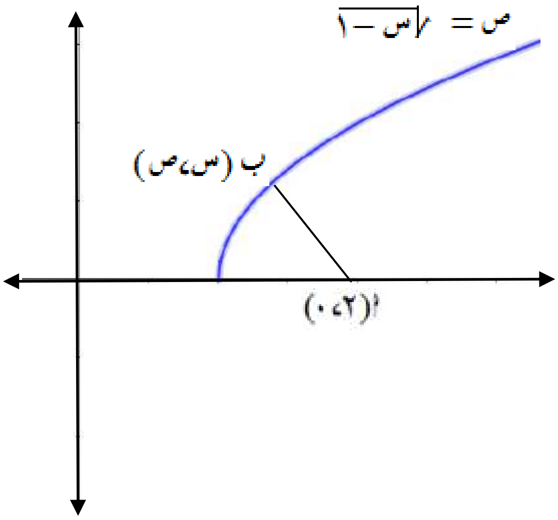


يتضح من الرسم أنه توجد قيمة صغري محلية عند $\text{س} = ١٠$

بالتعويض في المعادلة (١) نجد أن $\text{ص} = ١٠$

$\therefore$ العددان هما ١٠ ، ١٠

مثال ٣ : جد أقرب نقطة واقعة علي منحنى $\text{ص} = \sqrt{\text{س} - ١}$ إلى النقطة أ(٢،٠)



الحـل : نفرض أن النقطة ب(س،ص) نقطة ما علي المنحنى ص

المسافة $\text{أب} = \text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{ص}^٢}$ .... (١)

لكن $\text{ص} = \sqrt{\text{س} - ١}$ ومنها $\text{ص}^٢ = \text{س} - ١$

بالتعويض عن $\text{ص}^٢$ في المعادلة (١)

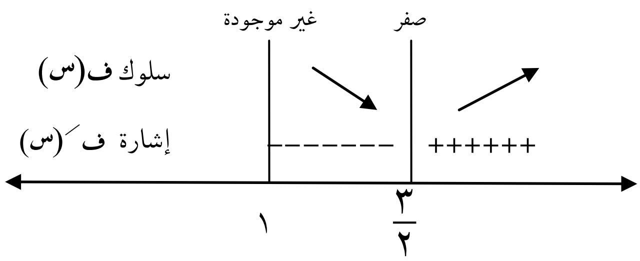
$\text{ف} = \sqrt{(\text{س} - ٢)^٢ + \text{س} - ١} = \sqrt{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ٤ + \text{س} - ١}$

$\therefore \quad \text{ف}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٣}$

$$\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ٣}{\sqrt{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٣}}$$

عندما $\frac{\text{ءف}}{\text{ءس}} = ٠$ يكون $\frac{٢\text{س} - ٣}{٢\sqrt{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٣}} = ٠ \Leftarrow ٢\text{س} - ٣ = ٠$ ومنها $\boxed{\text{س} = \frac{٣}{٢}}$

لاحظ أن $\frac{\text{دف}}{\text{دس}}$ غير موجودة عند س = ١ لأنها نقطة طرفية



من الرسم يتضح أنه توجد قيمة صغري محلية عند س = $\frac{٣}{٢}$ وهى مطلقة

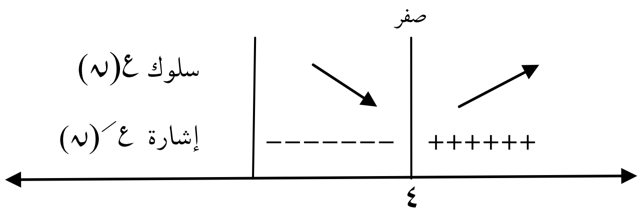
∴ أقرب نقطة واقعة علي المنحنى للنقطة أ(٢،١) هي $\left(\frac{٣}{٢}،\text{ن}\left(\frac{٣}{٢}\right)\right) = \left(\frac{٣}{٢}،\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

مثال ٤: جسم يتحرك فى خط مستقيم حسب العلاقة ف = ن^{٣} − ١٢ن^{٢} + ٨٠ن حيث ف بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى ، أوجد أقل سرعة ممكنة لهذا الجسم .

الحل : ع(ن) = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٣ن^{٢} − ٢٤ن + ٨٠ .... (١)

لحساب أقل سرعة ممكنة نحسب $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ حيث $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٦ن − ٢٤

عندما $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٠ ⟸ ٦ن − ٢٤ = ٠ ومنها ن = ٤ث



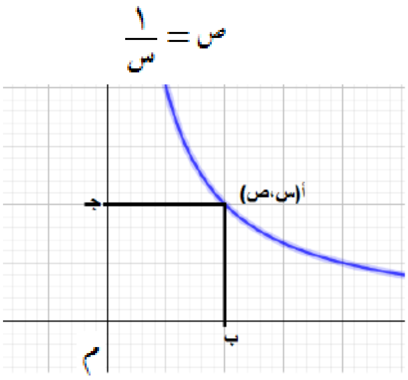
يتضح من الرسم المجاور أنه توجد قيمة صغري محلية عند ن = ٤ث

وحساب السرعة عند هذا الزمن نعوض فى المعادلة (١) :

ع(٤) = ٣(٤)^{٢} − ٢٤(٤) + ٨٠ = ٣٢م/ث

مثال ٥: من النقطة أ(س،ص) الواقعة علي منحنى ص = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ رسم العمودان أب،أجـ علي المحورين الإحداثيين ، أوجد بعدى المستطيل أب م جـ (حيث م نقطة الأصل) بحيث يكون محيطه أصغر ما يمكن .

الحل : نفرض أن أ(س،ص) نقطة علي المنحنى فتكون إحداثيات ب = (س،٠)



وإحداثيات جـ = $(٠، ص)$

∵ محيط المستطيل = مجموع أطوال أضلاعه

∴ محيط المستطيل = $٢س + ٢ص$ .... (١)

∵ $ص = \frac{١}{س}$ .... (٢)

بالتعويض من المعادلة (٢) في المعادلة (١)

$ع(س) = ٢س + \frac{٢}{س}$ حيث $ع(س)$ ترمز لمحيط المستطيل

$ع'(س) = ٢ - \frac{٢}{س^{٢}}$

عندما $ع'(س) = ٠$ تكون $٢ - \frac{٢}{س^{٢}} = ٠$

∴ $س^{٢} = ١$ ومنها $س = ١$

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوي حيث :

$ع'(س) = ٢ - ٢س^{-٢}$ ومنها $ع''(س) = ٤س^{-٣}$

$ع''(١) = ٤(١)^{-٣} = ٤ > ٠$

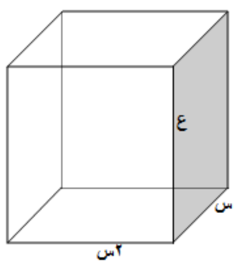
∴ توجد قيمة صغرى محلية عند $س = ١$

بالتعويض في المعادلة (٢) ⇐ $ص = \frac{١}{١} = ١$

∴ يكون محيط المستطيل أصغر ما يمكن عندما تكون أبعاده ١ سم ، ١ سم

مثال ٦ : صندوق من االصفيح علي هيئة متوازى مستطيلات مفتوح من أعلي ، فإذا كان طول قاعدته مثلى عرضها وكان حجمه ٢٨٨ سم^{٣} ، أوجد أبعاد هذا الصندوق بحيث تكون مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن .

الحـل: نفرض العرض = س ، الطول = ٢س ، الارتفاع = ع



∵ حجم متوازى المستطيلات = الطول ×العرض× الارتفاع

$= ٢س \times س \times ع = ٢س^{٢} ع$

وحيث حجم متوازى المستطيلات = ٢٨٨

∴ $٢س^{٢} ع = ٢٨٨$ ⇐ $ع = \frac{١٤٤}{س^{٢}}$ .... (١)

مساحة الصفيح المطلوب = مساحة القاعدة + مساحة الجوانب الأربعة

$= ٢س \times س + ٢ \times س \times ع + ٢ \times ٢س \times ع$

$= ٢س^{٢} + ٦س ع$ .... (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) في المعادلة (٢) عن قيمة ع

$$ق(س) = ٢س^{٢} + ٦س \times \frac{١٤٤}{س^{٢}}$$
$$= ٢س^{٢} + \frac{٨٦٤}{س}$$
$$ق'(س) = ٤س - \frac{٨٦٤}{س^{٢}}$$

بوضع $ق'(س) = ٠$ يكون $٤س - \frac{٨٦٤}{س^{٢}} = ٠$ (بالضرب في $س^{٢}$)

$٤س^{٣} - ٨٦٤ = ٠ \Leftarrow س^{٣} = ٢١٦ \quad \therefore س = ٦$

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوي حيث :

$\because ق'(س) = ٤س - ٨٦٤س^{-٢}$

$\therefore ق''(س) = ٤ + ١٧٢٨س^{-٣}$

$$ق''(٦) = ٤ + ١٧٢٨(٦)^{-٣} = ٤ + \frac{١٧٢٨}{٦^{٣}} = ٤ + \frac{١٧٢٨}{٢١٦} = ١٢ > ٠$$

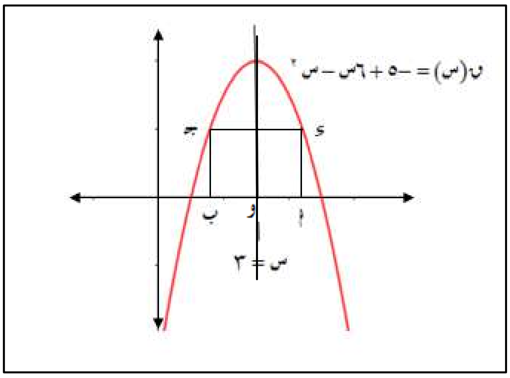
$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $س = ٦$

$\therefore ص = ٢س = ٢ \times ٦ = ١٢$سم ، $ع = \frac{١٤٤}{٦^{٢}} = \frac{١٤٤}{٣٦} = ٤$ سم

أبعاد الصندوق االتى تجعل مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن هى ٦ سم ، ١٢ سم ، ٤ سم

مثال٧: جد أبعاد المستطيل ذى المساحة الكبري والواقع فى الربع الأول بحيث تنطبق قاعدته علي محور السينات ويقع رأساه الآخران علي منحنى الاقتران $ق(س) = -٥ + ٦س - س^{٢}$

الحـل :



لرسم الاقتران نحدد احداثيات الرأس = $\left(-\frac{ب}{٢أ}, ق(-\frac{ب}{٢أ})\right)$

$$-\frac{ب}{٢أ} = -\frac{٦}{٢ \times -١} = ٣$$

$$ق(-\frac{ب}{٢أ}) = ق(٣) = -٥ + ١٨ - ٩ = ٤$$

لتحديد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع $ق(س) = ٠$

ومنها $-٥ + ٦س - س^{٢} = ٠ \quad \therefore س = ٥$ أو $س = ١$

نفرض أن أب جـ د مستطيل يقع رأساه أ ، ب علي محور السينات ورأساه د ، جـ علي منحنى ق(س)

وحيث أن احداثيات رأس المنحنى = $(٣،٤)$ $\therefore س = ٣$ هى معادلة محور تماثل القطع المكافئ

نفرض وب = س ، فيكون وأ = س

,تكون احداثيات ب = $(٣ - س،٠)$ و تكون و$(٣،٠)$ ، أ$(٣ + س،٠)$

ومنها إحداثيات جـ $= \left(٣ - س، ق(٣ - س)\right)$

$$ق(٣ - س) = -٥ + ٦(٣ - س) - (٣ - س)^{٢} = ١٣ - ٦س - ٩ + ٦س - س^{٢} = ٤ - س^{٢}$$

مساحة المستطيل = $أب \times بجـ$

$م(س) = ٢س \times (٤ - س^{٢}) = ٨س - ٢س^{٣}$ ، $م'(س) = ٨ - ٦س^{٢}$

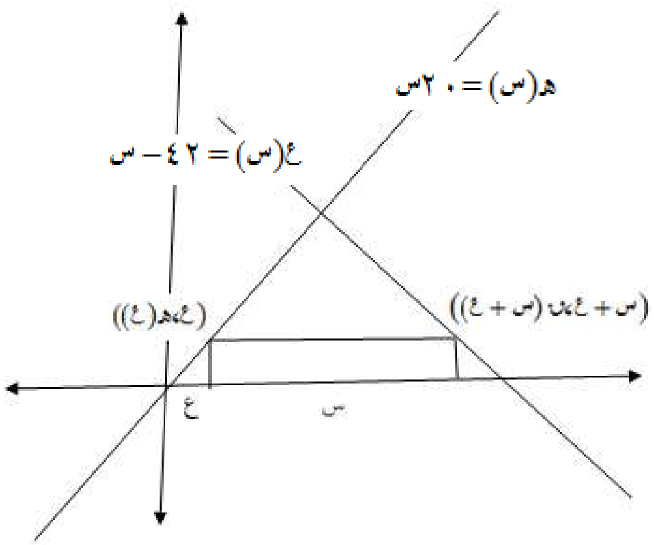
بوضع $م'(س) = ٠$ يكون $٨ - ٦س^{٢} = ٠$ ومنها $س^{٢} = \frac{٨}{٦} \Leftarrow س = \sqrt{\frac{٤}{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

$\because$ $م''(س) = -١٢س$ $\therefore$ $م''\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right) = -١٢\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right) < ٠$

$\therefore$ توجد قيمة عظمي محلية عند $س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ وعندها تكون $ص = ٤ - \left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} = \frac{٨}{٣}$

$\therefore$ أبعاد المستطيل ذو أكبر مساحة هى $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٨}{٣}$

حل نشاط (٢) صفحة ٨٩ من الكتاب الوزارى



نفرض طول المستطيل = س

عرض المستطيل = $هـ(ع) = ن(س + ع)$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$= س \times هـ(ع) = س \times ٢٠ع$

أي أن $م = ٢٠سع$ .... (١)

العرض $هـ(ع) = ن(س + ع)$

$٢٠ع = ٤٢ - (س + ع)$

$٢٠ع = ٤٢ - س - ع$

$٢٠ع + ع = ٤٢ - س \Leftarrow ٢١ع = ٤٢ - س$

ومنها $ع = ٢ - \frac{س}{٢١}$ .... (٢)

بالتعويض من المعادلة (٢) فى المعادلة (١) : $م = ٢٠س\left(٢ - \frac{س}{٢١}\right)$

$\therefore$ $م(س) = \frac{٢٠س}{٢١}(٤٢ - س)$ .... (٣)

$م'(س) = \frac{٢٠}{٢١}(٤٢ - س) + \frac{٢٠س}{٢١}(-١)$

بجعل $م'(س) = ٠$ يكون $\frac{٢٠}{٢١}(٤٢ - س) + \frac{٢٠س}{٢١}(-١) = ٠$

$٤٢ - س - س = ٠ \Leftarrow ٤٢ - ٢س = ٠ \Leftarrow س = ٢١$

يمكن التأكد أنه توجد قيمة عظمي محلية عند $س = ٢١$ وعندها تكون $ع = ٢ - \frac{٢١}{٢١} = ١$

نعوض فى المعادلة (١) للحصول علي أكبر مساحة ممكنة للمتنزه

$\therefore$ تكون مساحة أكبر متنزه $= ٢٠ \times ٢١ \times ١ = ٤٢٠$ وحدة مربعة

(١)جد العدد الذى ينتمي للفترة $\left[\frac{١}{٢}،\frac{٣}{٢}\right]$ الذى يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أكبر ما يمكن .

الجواب: أكبر مجموع عندما $س = \frac{١}{٢}$

(٢)وعاء اسطوانى الشكل مفتوح من الأعلي ، حجمه ١٠٠π سم^{٣} ، جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه .

الجواب: ٣٠٠π سم^{٢}

(٣)جد إحداثي النقطة أ(س،ص) الواقعة علي منحنى العلاقة $ص = س^{٢}$ التى بعدها عن النقطة ب(٨،١٠) أقل ما يمكن .

الجواب: أكبر بعد ممكن عندما $س = ٢$ ويساوى $\sqrt{٢٧٢}$ وحدة طول

(٤)جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣،٤) ويصنع مع المحورين الاحداثيين الموجبين مثلثاً مساحته أقل ما يمكن .

الجواب: $٤س + ٣ص = ٢٤$

(٥)جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤سم بحيث تنطبق قاعدته علي قطر الدائرة ورأساه الآخران علي الدائرة .

الجواب : ١٦سم^{٢}

(٦)جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدي قاعدتيه علي محور السينات ورأساه الآخران علي منحنى الاقتران $ن(س) = س^{٢} - ٤$.

الجواب: أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف عندما $س = \frac{٢}{٣}$ والمساحة $= \frac{٢٥٦}{٢٧}$وحدة مربعة

(٧)برهن أن أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائرى قائم يساوى $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط .

(٨)رسم مستقيم يمر بالنقطة الثابتة (أ،ب) حيث أ ، ب > ٠ فقطع محور السينات الموجب فى النقطة م ، ومحور الصادات الموجب فى النقطة ن ، أثبت أن أقل مجموع لطولى الجزأين المقطوعين وم+ون يساوى $\left(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}\right)^{٢}$ حيث و نقطة الأصل .

(٩)أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه = ٦٠ سم ، دورة كاملة حول أحد أضلاعه .

الجواب : $ع = ٤٠٠٠\pi$ سم^{٣}

(١٠) رسم مثلث داخل ربع دائرة نصف قطرها ر بحيث تنطبق قاعدة المثلث علي نصف قطر الدائرة ويقع رأسه علي محيطها ،

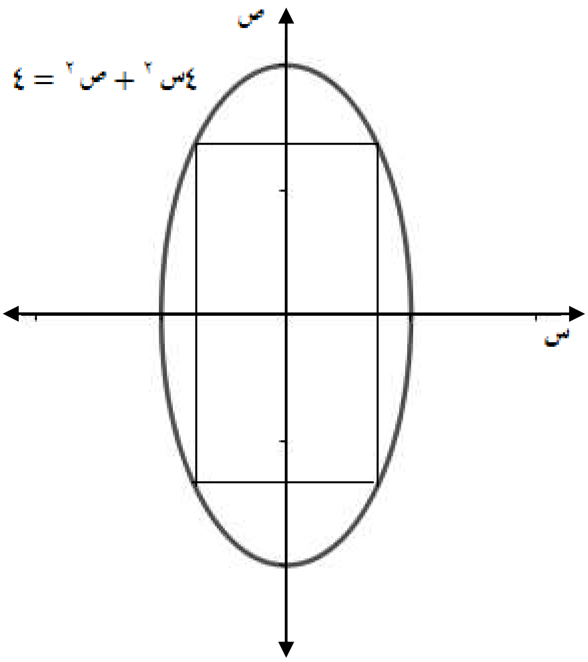
أثبت أن أكبر مساحة لهذا المثلث تساوى $\frac{١}{٢}$ ر^{٢}

(١١) رسم مستطيل داخل قطع ناقص معادلته ٤س^{٢} + ص^{٢} = ٤

بحيث تقع رؤوسه علي منحنى القطع الناقص ، وبحيث تكون أضلاع المستطيل

موازية لكل من المحورين الاحداثيين ، جد أبعاد المستطيل التي تجعل

مساحته أكبر ما يمكن .



(الجواب : ٢ ، ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

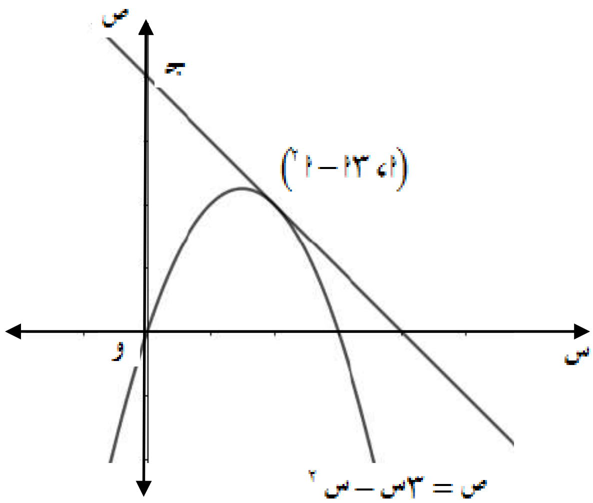
(١٢) فى الشكل المقابل : المثلث و ب جـ قائم الزاوية بحيث

ينطبق ضلعى القائمة علي محورى السينات الموجب والصادات

الموجب ، ووتر المثلث يمس منحنى الاقتران ص = ٣س − س^{٢}

عند النقطة (أ، ٣أ − أ^{٢})

، ما أصغر مساحة ممكنة لهذا المثلث ؟



(الجواب : المساحة = ٨ وحدة مربعة عندما أ = ٢)

الوحدة الثالثة

المصفوفات والمحددات

٣-١ المصفوفات

تعريف :

المصفوفة هى تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد علي هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، ....وتسمي الأعداد داخل المصفوفات مدخلات .

رتبة المصفوفة تكتب علي الصورة م × ن حيث م عدد الصفوف ، ن عدد الأعمدة

عدد مدخلات المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

مثال ١:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -١ \\ ٤ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

(١) جد رتبة كلاً من أ ، ب

(٢) جد قيمة $أ_{١٢} + ب_{٢٣} - أ_{٣١}$

الحل :

(١) رتبة أ = ٢ × ٣ رتبة ب = ٣ × ٢

(٢) $أ_{١٢} + ب_{٢٣} - أ_{٣١} = ٤ + ٦ - (-١) = ١١$

أنواع خاصة من المصفوفات :

(١) المصفوفة المربعة : يكون فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة = ن ، وتسمي مصفوفة مربعة من الرتبة ن .

(٢) مصفوفة الوحدة : ويرمز لها بالرمز م وهى مصفوفة مربعة , وتكون مدخلاتها علي النحو الآتى :

$$م_{يه} = \begin{cases} ١ & ، ي = هـ \\ ٠ & ، ي \neq هـ \end{cases}$$

(٣) المصفوفة الصفرية (و) : هى المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار ، مثل $و_{٢\times٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٤) مصفوفة الصف : هى المصفوفة المكونة من صف واحد

(٥) مصفوفة العمود : هى مصفوفة مكونة من عمود واحد .

(٦) المصفوفة القطرية : هى المصفوفة المربعة س بحيث $س_{يه} = ٠ ، \forall ي \neq هـ$

(٧) المصفوفة المثلثية العلوية : هى المصفوفة المربعة التى تكون مدخلاتها التى تحت القطر الرئيسى أصفاراً

مثال ٢:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٥ \\ -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، $ء = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

(١) حدد نوع كلاً من المصفوفات أ،ب،جـ،ء .

(٢) ما حاصل ضرب مدخلات الصف الثانى من المصفوفة ب ؟

الحـل :

(١) أ مصفوفة صفرية ، ب مصفوفة وحدة ، جـ مصفوفة عمود ، ء مصفوفة صف .

(٢) حاصل الضرب = $١ \times ٠ = ٠$

نشاط ٢ صفحة ١٠٣ من الكتاب الوزارى :

$$ك_{يهـ} = \begin{cases} ي + هـ & ، ي > هـ \\ ي - هـ & ، ي < هـ \\ \frac{ي}{ي + هـ} & ، ي = هـ \end{cases}$$

قيمة المدخلة $ك_{١٢} = ٢ - ١ = ١$ ، قيمة المدخلة $ك_{٢١} = ١ + ٢ = ٣$

$$\sum_{ي=١}^{٣} ك_{ي٣} = ك_{٣١} + ك_{٣٢} + ك_{٣٣} = ٤ + ٥ + \frac{٣}{٦} = \frac{١٩}{٢}$$

مدخلات القطر الرئيسى هى $ك_{١١}$ ، $ك_{٢٢}$ ، $ك_{٣٣}$

$$ك_{١١} = \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ك_{٢٢} = \frac{٢}{٢+٢} = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ك_{٣٣} = \frac{٣}{٣+٣} = \frac{١}{٢}$$

تساوى مصفوفتين :

تعريف :

تتساوي المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية

مثال ٣:

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ع & -١ \\ س & ص & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥س & -١ \\ ٢ص & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فما قيمة كلاً من س ، ص ، ع

الحـل :

$ع = ٥س$ .... (١) $س = ٢ص$ .... (٢) $\boxed{ص = ٤}$

$\therefore$ $س = ٢ \times ٤ = ٨$ $ع = ٥ \times ٨ = ٤٠$

مثال ٤: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س+ص & \sqrt{ل} \\ ع^{٢} & س-ص \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة / قيم كلاً من **س** ، **ص** ، **ع** ، **ل**

الحـل :

$\sqrt{ل} = ١ \Leftarrow ل = ١$

$س + ص = ٥$ .... (١)

$س - ص = ٣$ .... (٢)

$ع^{٢} = ١٦$ ومنها $ع = \pm ٤$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن $س = ٤$ ، $ص = ١$

تمارين ٣-١

(١) إذا كانت
$$أ = \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ & ٢ & ١٣ \\ ٥ & ١٠ & ١٢ & ٨ \\ ٩ & س^{٢} & ٨ & ١٢ \\ ٤ & ١٥ & ٩ & ١ \end{bmatrix}$$

(أ) ما رتبة المصفوفة أ

(ب) جد قيمة $أ_{١١} + أ_{٣٢} - أ_{٢٤}$ (الجواب: ١٤)

(جـ) ما قيمة س الموجبة حيث $أ_{٣٣} = ٣٦$ (الجواب: $س = \pm ٦$)

(٢) اكتب المصفوفة أ من الرتبة ٣×٤ حيث
$$أ_{يه} = \begin{cases} ١ & ، ي < ه \\ ٠ & ، ي = ه \\ ٢ & ، ي > ه \end{cases}$$

(الجواب: $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٢ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ & ١ & ١ \end{bmatrix}$)

(٣) كون مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية تعطي مدخلاتها حسب العلاقة $أ_{يه} = ٣^{ي-ه}$

$$أ = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

(٤) إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & س^{٢} - ٣ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & س^{٢} - ٥س \end{bmatrix}$ ، جد قيمة **س** (الجواب: $س = ٣$)

(٥) أكتب المصفوفة ب حيث $ب_{يهـ} = أ_{هـي}$ ، أ هى المصفوفة المعطاة فى السؤال (٢)

(الجواب: $ب = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{bmatrix}$)

٣-٢ العمليات على المصفوفات :

أولاً/ جمع المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من الرتبة $م \times ن$ فإن $جـ = أ + ب$ هى مصفوفة من الرتبة $م \times ن$ مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة فى كل من أ ، ب أى أن $جـ_{يهـ} = أ_{يهـ} + ب_{يهـ}$

مثال ١: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١- & ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١- \\ ٦ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، أوجد إن أمكن :

(١) $أ + ب$ (٢) $ب + أ$ (٣) $ب + جـ$

الحـــل :

(١) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٣+١- & ٤+١ & (١-)+٢ \\ ٦+٠ & ٣+٣ & ٢+٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٦ & ٧ \end{bmatrix}$

(٢) $ب + أ = \begin{bmatrix} ١-٣ & ١+٤ & ٢+١- \\ ٠+٦ & ٣+٣ & ٥+٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٦ & ٧ \end{bmatrix}$

(٣) $ب + جـ$ غير ممكنة لأن رتبة المصفوفة ب $\neq$ رتبة المصفوفة جـ

ثانياً : ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

تعريف :

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة $م \times ن$ ، وكان ك عدداً حقيقياً ، فإن $ك أ = جـ$ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة $م \times ن$ ، وتكون مدخلاتها علي النحو : $جـ_{يهـ} = ك أ_{يهـ}$ لجميع قيم ي ، هـ

مثال ٢:

إذا كان $\text{أ}=\begin{bmatrix}5&-2\\3&1\end{bmatrix}$ ، $\text{ب}=\begin{bmatrix}2&4\\1&5\end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة $2\text{أ}+6\text{ب}$

الحل :

$$2\text{أ}+6\text{ب}=2\begin{bmatrix}5&-2\\3&1\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}2&4\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-4\\6&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12&24\\6&30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22&20\\12&32\end{bmatrix}$$

ثالثاً : طرح المصفوفات

تعريف :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من نفس الرتبة $م\times ن$ فإن $\text{أ}-\text{ب}=\text{أ}+(-\text{ب})$

مثال ٣:

إذا كان $\text{أ}=\begin{bmatrix}3&2\\-1&5\end{bmatrix}$ ، $\text{ب}=\begin{bmatrix}-1&4\\2&3\end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة كلاً من :

(١) $\text{أ}-\text{ب}$ (٢) $\text{ب}-\text{أ}$

الحل :

(١) $\text{أ}-\text{ب}=\begin{bmatrix}3&2\\-1&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1&4\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-(-1)&2-4\\-1-2&5-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&2\end{bmatrix}$

(٢) $\text{ب}-\text{أ}=\begin{bmatrix}-1&4\\2&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&2\\-1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-3&4-2\\2+1&3-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2\\3&-2\end{bmatrix}$

نلاحظ أن $\text{أ}-\text{ب}=-(\text{ب}-\text{أ})$

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي :

(١) $\text{أ}+\text{ب}=\text{ب}+\text{أ}$ .... (خاصية التبديل)

(٢) $(\text{أ}+\text{ب})+\text{جـ}=\text{أ}+(\text{ب}+\text{جـ})$ .... (خاصية التجميع)

(٣) $\text{أ}+\text{و}=\text{و}+\text{أ}=\text{أ}$ .... (المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

(٤) $\text{أ}+(-\text{أ})=(-\text{أ})+\text{أ}=\text{و}$ .... (النظير الجمعي)

(٥) $\text{ك}(\text{أ}+\text{ب})=\text{ك}\text{أ}+\text{ك}\text{ب}$ .... (توزيع الضرب بعدد حقيقي علي جمع المصفوفات)

مثال ٤: حل المعادلة المصفوفية الآتية :

$$س + \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحـل: نفرض $ا = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ثم نضيف النظير الجمعي للمصفوفة ا إلى طرفي المعادلة من اليسار

$$\left(س + \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -٣ & -٥ \end{bmatrix}$$

$$س + و = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix} \Leftarrow س = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$$

رابعاً: ضرب المصفوفات

تعريف :

إذا كانت ا مصفوفة من الرتبة م×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن×ل ، فإن حاصل الضرب ا·ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ل ، وتكون مدخلات المصفوفة جـ علي النحو

$$جـ_{يهـ} = ا_{ي١} \times ب_{١هـ} + ا_{ي٢} \times ب_{٢هـ} + \cdots\cdots + ا_{ين} \times ب_{نهـ}$$

مثال ٥: إذا كانت $ا = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أوجد إن أمكن :

(١) ا·ب (٢) ب·ا

الحـل : رتبة ا هي ٢×٢ ، رتبة ب هي ٢×٣

∴ يمكن إيجاد ناتج ضرب ا×ب حيث

(١) $ا·ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣×٥+٢×٤ & ٣×٣+٢×٠ & ٣×-١+٢×٢ \\ -١×٥+٥×٤ & -١×٣+٥×٠ & -١×-١+٥×٢ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ٢٣ & ٩ & ١ \\ ١٥ & -٣ & ١١ \end{bmatrix}$$

(٢) ب·ا غير ممكنة لأن عدد الأعمدة في ب ≠ عدد الصفوف في ا

مثال ٦:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد كلاً من أ·ب ، ب·أ ، ماذا تلاحظ ؟

الحـــل :

$$أ\cdot ب = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ - ١٢ & -٣ - ٦ \\ ٠ + ٨ & ٠ + ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٩ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$ب\cdot أ = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ + ٠ & -١٥ - ٢ \\ ١٢ + ٠ & -١٢ + ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & -١٧ \\ ١٢ & -٨ \end{bmatrix}$$

نستنتج أن أ·ب ≠ ب·أ

مثال ٧:

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، $ج = [٣]$ ، أوجد إن أمكن :

(١) أ·ب (٢) ب·أ (٣) ٢ب·ج

الحـــل :

(١) $أ\cdot ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & -٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = [٢ + ٣ - ٢٠] = [-١٥]$

(٢) $ب\cdot أ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ١ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & -٥ \\ ٦ & ٣ & -١٥ \\ ٨ & ٤ & -٢٠ \end{bmatrix}$

(٣) $٢ب\cdot ج = ٢\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}[٣] = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix}[٣] = \begin{bmatrix} ٦ \\ ١٨ \\ ٢٤ \end{bmatrix}$

لاحظ أن ٢ب·ج = ب·٢ج

مثال ٨:

إذا كانت رتبة أ = ٣ × ن ، رتبة ب = ٢ × ل . فما قيمة كلاً من ن ، ل التى تجعل عمليتى ضرب المصفوفتين أ·ب ، ب·أ ممكنتين ؟

الحـــل :

ن = ٢ لكى تكون أ·ب ممكنة

ل = ٣ لكى تكون ب·أ ممكنة

مثال ٩: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $أ^٢ + ب^٢$

الحــل :

$$أ^٢ = أ.أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١+١ & ١+٠ \\ ١+٠ & ١+٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$ب^٢ = ب.ب = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠+١ & ٠+١ \\ ٠+١ & ١+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$أ^٢ + ب^٢ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

مثال ١٠: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $أ.ب$ ، ماذا تلاحظ؟

الحــل :

$$أ.ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢-١٢ & -١٨+١٨ \\ ٨-٨ & -١٢+١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = و_٢$$

نلاحظ أن حاصل الضرب $أ.ب$ = المصفوفة الصفرية $و_٢$ مع أن أياً من المصفوفتين ليست صفرية

خصائص عملة الضرب علي المصفوفات :

إذا كانت أ،ب،جـ مصفوفات حيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان ، $م$ المصفوفة المحايدة ، $ك \in ح$ فإن :

(١) $(أ.ب).جـ = أ.(ب.جـ)$ .... (خاصية التجميع)

(٢) $أ.(ب+جـ) = (أ.ب) + (أ.جـ)$ .... (توزيع الضرب علي الجمع من اليمين) .

(٣) $(أ+ب).جـ = (أ.جـ) + (ب.جـ)$ .... (توزيع الضرب علي الجمع من اليسار) .

(٤) $أ.م = م.أ = أ$ .... (العنصر المحايد لعلية ضرب المصفوفات)

(٥) $ك(أ.ب) = (كأ).ب = أ.(كب)$

مثال ١١: جد $أ^{١٠٠}$ حيث $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

الحــل :

$$أ^٢ = أ.أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = أ$$

ا^٣ = ا^٢ . ا = ا . ا = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ لأن ا^٢ = ا

∴ ا^٤ = ا^٣ . ا = ا . ا = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

وهكذا ∴ ا^{١٠٠} = ا . ا = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

تدريب: جد ا^{١٠٠} حيث ا = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

تمارين ٣ - ٢

(١) إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ & ٢ \\ -١ & -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ & ٦ \\ ٣ & ٥ & -١ \end{bmatrix}$ ، وكانت **جـ** = ا + ٢**ب** ، فأوجد **جـ**$_{٢١}$ ، **جـ**$_{٢٢}$

الجواب : ١١، ٧

(٢) إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، **جـ** = $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ، أوجد :

١) ٢ا + ب − جـ

٢) (ا + ب) − (ا + جـ)

٣) ٦ ١ا + ٦ ١ب − ٤ ١(ا + ب)

(الأجوبة: ١) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ -٣ & ١٢ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٧ & ٠ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ١٠ & ١٠ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$)

(٣) حل المعادلات المصفوفية الاتية :

أ) س + $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ = ٢س + ٣$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

(الجواب: $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٦ & ١ \end{bmatrix}$)

ب) $٣ - \left(\text{س} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \right) = ٢\text{س} + \text{م}_{٢}$

(الجواب: $\begin{bmatrix} -٢ & \frac{-٦}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{-١٣}{٥} \end{bmatrix}$)

(٤) إذا كانت $\text{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة أ بحيث $٣\text{أ} + ٢\text{جـ} = \text{و}$

(الجواب: $\begin{bmatrix} -٢ & \frac{٤}{٣} \\ \frac{-٢}{٣} & ٠ \end{bmatrix}$)

(٥) إذا كانت $\text{س} + ٢\text{ص} = \begin{bmatrix} ٨ & -١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $٢\text{س} - \text{ص} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$. جد قيمتي المصفوفتين **س،ص**

(الجواب: $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & \frac{١٣}{٥} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -١ & \frac{٦}{٥} \end{bmatrix}$)

(٦) إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س}^{٢} + \text{س} & ٢ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ + \text{س} & ٢ \\ ٣ & \text{س}^{٢} - ٢\text{س} \end{bmatrix}$ ، جد قيمة / قيم س . (-٢)

(٧) لتكن $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $\text{أ}^{٢} - \text{أ}$

(الجواب : $\begin{bmatrix} ٨ & ٠ \\ ٠ & ٨ \end{bmatrix}$)

تعريف :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإننا نرمز لمحددها بالرمز $|أ|$

(١) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = أ_{١١}$

(٢) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = أ_{١١} \times أ_{٢٢} - أ_{٢١} \times أ_{١٢}$

(٣) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$ فإن

$$|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{٢٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

مثال ١:

ليكن $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، جد كلاً ممايلي :

(١) $|أ|$ (٢) $|ب|$ (٣) $|أ + ب|$

الحـــل :

(١) $|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٥ \times ١ - ٣ \times ٢ = ٥ - ٦ = -١$

(٢) $|ب| = \begin{vmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -٢ \times -٤ - ٣ \times ٠ = ٨ - ٠ = ٨$

(٣) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

$|أ + ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ - ١٥ = -٢٤$

لاحظ أن $|أ + ب| \neq |أ| + |ب|$

نظرية :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ، فإنه يمكن إيجاد $|أ|$ بدلالة أى صف ، أو أى عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ى والعمود هـ ، إعطاء إشارة لحاصل الضرب وفق القاعدة $(-١)^{ى+هـ}$

مثال ٢:

جد قيمة $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٥ \\ ٦ & ٣ & -٢ \end{vmatrix}$

الحـــل :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٥ \\ ٦ & ٣ & -٢ \end{vmatrix} = ٣\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} - ٤\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & -٢ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(٠-١٥) - ٤(-٤-٣٠) + ٢(٦-٠)$$

$$= ٣\times -١٥ - ٤\times -٣٤ + ٢\times ٦$$

$$= -٤٥ + ١٣٦ + ١٢ = ١٠٣$$

مثال ٣:

جد قيمة المحدد باستخدام مدخلات العمود الأول : $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٥ \\ ٦ & ٣ & -٢ \end{vmatrix}$

الحـــل :

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٥ \\ ٦ & ٣ & -٢ \end{vmatrix} = ٣\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} + ٦\begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(٠-١٥) - ٢(٢-٣) + ٦(-٥-٠)$$

$$= ٣\times -١٥ - ٢\times -١ + ٦\times -٥$$

$$= -٤٥ + ٢ - ٣٠ = -٧٣$$

مثال ٤:

جد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ \text{س} & ٥ & ٠ \\ ١ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٣٠$

الحـــل :

$$٣(١٠-٠) - ٢(٢\text{س}-٠) - ١(-٣\text{س}-٥) = ٣٠$$

$$٣٠ - ٤\text{س} + ٣\text{س} + ٥ = ٣٠ \quad \Leftarrow \quad -\text{س} + ٣٥ = ٣٠ \quad \Leftarrow \quad \text{س} = ٣٥ - ٣٠ = ٥$$

بعض خصائص المحددات :

(١) عند تبديل صف مكان صف أو عمود مكان عمود آخر فإن قيمة المحدد تضرب فى (−١) .

(٢) يمكن إخراج عامل مشترك من أى صف ، أو أى عمود .

(٣) إذا أضيفت لمدخلات أى صف ، أو أى عمود مضاعفات نظائرها فى صف آخر ، فإن قيمة المحدد لا تتغير.

(٤) إذا تساوت المدخلات المتناظرة فى صفين ، أو فى عمودين فى مصفوفة فإن محددها يساوى صفراً .

(٥) إذا كانت المصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوى حاصل ضرب المدخلات علي القطر الرئيسى .

مثال ٥:

إذا كانت $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{vmatrix} = ٤$ ، فما قيمة $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{vmatrix}$

الحـــل :

$$\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{vmatrix} = -٤$$

مثال ٦:

جد قيمة ما يلى دون فك المحدد :

(١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ & ٣٠ \\ ٨ & -٤ & ١٣ \\ ٢ & -١ & ١٥ \end{vmatrix}$ (٣) $\begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ١٥ \\ ٠ & -٤ & ٤٣ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$

الحـــل :

(١) لاحظ أن مدخلات الصف الأول = مدخلات الصف الثالث

إذن قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix} = $ صفراً (خاصية ٤)

(٢) بأخذ −٢ كعامل مشترك من العمود الأول (خاصية ٢)

$$\begin{vmatrix} ٤ & -٢ & ٣٠ \\ ٨ & -٤ & ١٣ \\ ٢ & -١ & ١٥ \end{vmatrix} = -٢ \begin{vmatrix} -٢ & -٢ & ٣٠ \\ -٤ & -٤ & ١٣ \\ -١ & -١ & ١٥ \end{vmatrix} = -٢ \times ٠ = ٠$$

(٣) ∵ المحدد تمثله مصفوفة مثلثية علوية

$$\therefore \begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ١٥ \\ ٠ & -٤ & ٤٣ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times -٤ \times ٣ = -٢٤$$ (خاصية ٥)

قاعدة (١)

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن فإن $|\text{ك أ}| = \text{ك}^{\text{ن}} |\text{أ}|$ ، حيث $\text{ك} \in \text{ح}$.

مثال ٧: إذا كان $|\text{أ}| = ٥$ ، حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣ ، فأوجد $|٢\text{أ}|$ ، $|-٣\text{أ}|$

الحل :

$$|٢\text{أ}| = ٢^{٣} |\text{أ}| = ٨ \times ٥ = ٤٠$$

$$|-٣\text{أ}| = (-٣)^{٣} |\text{أ}| = -٢٧ \times ٥ = -١٣٥$$

مثال ٨: إذا كانت أ مصفوفة مربعة بحيث $|\text{أ}| = ٣$ ، $|٢\text{أ}| = ٤٨$ ما رتبة المصفوفة أ ؟

الحل :

$$|٢\text{أ}| = ٢^{\text{ن}} |\text{أ}| \quad \therefore ٢^{\text{ن}} \times ٣ = ٤٨ \quad \Leftarrow \quad ٢^{\text{ن}} = ١٦ \quad \Leftarrow \quad \text{ن} = ٤$$

أي أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة الرابعة .

قاعدة (٢) :

إذا كانت أ،ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن $|\text{أ} \cdot \text{ب}| = |\text{أ}| \cdot |\text{ب}|$

مثال ٩: ليكن $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة $|\text{أ} \cdot \text{ب}|$

الحل :

$$|\text{أ} \cdot \text{ب}| = |\text{أ}| \cdot |\text{ب}|$$

$$= (٠ + ١)(٥ + ٢) = ١ \times ٧ = ٧$$

حل نشاط (٣) صفحة ١١٨ من الكتاب الوزارى :

$$\text{س}\cdot\text{ص}=\begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\end{bmatrix} \qquad |\text{س}\cdot\text{ص}|=23$$

(١) $$\text{ص}\cdot\text{س}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10\\12 & 15\end{bmatrix}$$

(٢) $$|\text{ص}\cdot\text{س}|=8\times15-12\times10=120-120=0$$

لاحظ أن $|\text{س}\cdot\text{ص}|\neq|\text{ص}\cdot\text{س}|$

مثال ١٠: باستخدام خصائص المحددات أثبت أن :

$$\begin{vmatrix}\text{أ} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+2\text{ب}\\ \text{أ}+2\text{ب} & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب}\\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+2\text{ب} & \text{أ}\end{vmatrix}=9\text{ب}^2(\text{أ}+\text{ب})$$

الحـــل :

$$\xrightarrow{\text{ع}_1-\text{ع}_2}\begin{vmatrix}-\text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+2\text{ب}\\ 2\text{ب} & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب}\\ -\text{ب} & \text{أ}+2\text{ب} & \text{أ}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بإخراج } -\text{ب} \text{ كعامل مشترك من العمود الأول}}-\text{ب}\begin{vmatrix}1 & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+2\text{ب}\\ -2 & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب}\\ 1 & \text{أ}+2\text{ب} & \text{أ}\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ع}_2-\text{ع}_3}-\text{ب}\begin{vmatrix}1 & -\text{ب} & \text{أ}+2\text{ب}\\ -2 & -\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}\\ 1 & 2\text{ب} & \text{أ}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بإخراج } -\text{ب} \text{ كعامل مشترك من العمود الثانى}}\text{ب}^2\begin{vmatrix}1 & 1 & \text{أ}+2\text{ب}\\ -2 & 1 & \text{أ}+\text{ب}\\ 1 & -2 & \text{أ}\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_1-\text{ص}_3}\text{ب}^2\begin{vmatrix}1 & 1 & \text{أ}+2\text{ب}\\ -2 & 1 & \text{أ}+\text{ب}\\ 0 & 3 & 2\text{ب}\end{vmatrix}\xrightarrow{2\text{ص}_1+\text{ص}_2}\text{ب}^2\begin{vmatrix}1 & 1 & \text{أ}+2\text{ب}\\ 0 & 3 & 3\text{أ}+5\text{ب}\\ 0 & 3 & 2\text{ب}\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ص}_2-\text{ص}_3}\text{ب}^2\begin{vmatrix}1 & 1 & \text{أ}+2\text{ب}\\ 0 & 3 & 3\text{أ}+5\text{ب}\\ 0 & 0 & 3\text{أ}+3\text{ب}\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{بإخراج 3 كعامل مشترك من ص}_3}3\text{ب}^2\begin{vmatrix}1 & 1 & \text{أ}+2\text{ب}\\ 0 & 3 & 3\text{أ}+5\text{ب}\\ 0 & 0 & \text{أ}+\text{ب}\end{vmatrix}$$

بهذا نكون حصلنا علي الصورة المثلثية العلوية

$\therefore$ قيمة المحدد $=3\text{ب}^2\times1\times3(\text{أ}+\text{ب})=9\text{ب}^2(\text{أ}+\text{ب})$

(١) أوجد قيمة المحددات الآتية : (أ) باستخدام مدخلات الصف الأول (ب) باستخدام مدخلات العمود الثانى

$$\begin{vmatrix} ٨ & ٠ & -١ \\ ٤ & ٣ & ٧ \\ ٥ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} -٢ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{vmatrix}$$

(٥٧) ، (-٥٨)

(٢) حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ س & ٤ & ٥ \\ ٦ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٥ & ٣ \\ ٣ & س \end{vmatrix}$ (الجواب : $س = -٢$)

(٣) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ١٥ & -٢ & ٣ \\ ٢٠ & -١ & ٤ \\ ٥٥ & ٦ & ١١ \end{vmatrix} =$ صفراً

(٤) جد قيمة س فى كل مما يلى :

(أ) $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٥ & س & ٥ \\ -٢ & ١ & -١ \end{vmatrix} =$ صفر (الجواب : $س = \frac{-٥}{٢}$)

(ب) $\begin{vmatrix} ١١ & ٢ & س \\ ٩ & -٤ & ٠ \\ \frac{١}{٢}س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = -٥٠$ (الجواب : $س = \pm ٥$)

(٥) إذا كانت $\begin{vmatrix} ٢ص & ٢س \\ ٤ل & ٤ع \end{vmatrix} = -٨$ ، أوجد $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٢}ص & \frac{٣}{٢}س \\ ٢ل & ٢ع \end{vmatrix}$ (الجواب: -٣)

(٦) إذا كان أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين بحيث $|أ \cdot ب| = ١٨$ ، $|أ| + |ب| = ١١$ ، وكان $|أ| \leq |ب|$ ، ما قيمة $|أ|$؟

(الجواب: $|أ| = ٩$)

(٧) ﻫ مصفوفة مربعة بحيث $|ﻫ| = ٢$ ، $|٣ﻫ| = ٥٤$ ، ما رتبة المصفوفة ﻫ ؟ (الثالثة)

(٨) إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ن \end{vmatrix} = ٥$ ، $\begin{vmatrix} س & م + ص \\ ع & ل + ن \end{vmatrix} = ٧$ ، ما قيمة $\begin{vmatrix} س & م \\ ع & ل \end{vmatrix}$ ؟ (الجواب:٢)

(٩) بدون فك المحدد أثبت صحة كلاً مما يلى :

أ. $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ص & ع \\ صع & سع & سص \end{vmatrix} = (س - ص)(ص - ع)(ع - س)$

ب. $\begin{vmatrix} ص & س & س + ص \\ س + ص & ص & س \\ س & س + ص & ص \end{vmatrix} = ٢(س^{٣} + ص^{٣})$

ج. $\begin{vmatrix} ﻫ & ﻫ & ﻫ \\ ﻫ & ب & جـ \\ ب+جـ - ﻫ & جـ + ﻫ - ب & ﻫ + ب - جـ \end{vmatrix} =$ صفر

تعريف :

تسمي المصفوفة المربعة أ مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة **ب** من نفس الرتبة بحيث $\text{أ}\cdot\text{ب}=\text{ب}\cdot\text{أ}=\text{م}$ ، وتسمي المصفوفة **ب** نظيراً ضربياً للمصفوفة أ ، ونرمز لها بالرمز أ^{-1} ونكتب $\left(\text{ب}=\text{أ}^{-1}\right)$ ويكون $\text{أ}\cdot\text{أ}^{-1}=\text{أ}^{-1}\cdot\text{أ}=\text{م}$

مثال ١: إذا كانت $\text{أ}=\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب}=\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، بين فيما إذا كانت $\text{ب}=\text{أ}^{-1}$

الحل :

$$\text{أ}\cdot\text{ب}=\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٧-٦ & -٢١+٢١ \\ ٢-٢ & -٦+٧ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}\cdot\text{أ}=\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٧-٦ & ٣-٣ \\ -١٤+١٤ & -٦+٧ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\because \text{أ}\cdot\text{ب}=\text{ب}\cdot\text{أ}=\text{م}_{٢}$ $\qquad$ $\therefore \text{ب}=\text{أ}^{-1}$

مثال ٢: إذا كانت $\text{أ}=\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب}=\begin{bmatrix} -٢ & ٨ & -١٩ \\ ١ & -٤ & ١٠ \\ ١ & -٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ، بين هل $\text{أ}^{-1}=\text{ب}$ أم لا ؟

الحل :

$$\text{أ}\cdot\text{ب}=\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ & ٨ & -١٩ \\ ١ & -٤ & ١٠ \\ ١ & -٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -٤+١+٤ & ١٦-٤-١٢ & -٣٨+١٠+٢٨ \\ -٦+٥+١ & ٢٤-٢٠-٣ & -٥٧+٥٠+٧ \\ -٢+٢+٠ & ٨-٨-٠ & -١٩+٢٠+٠ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$ب \cdot أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٨ & -١٩ \\ ١ & -٤ & ١٠ \\ ١ & -٣ & ٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\because$ أ $\cdot$ ب $=$ ب $\cdot$ أ $= م_{٣}$ $\qquad \therefore$ $ب^{-١} =$ أ

تعريف :

المصفوفة المنفردة هى المصفوفة المربعة التى لا يوجد لها نظير ضربى

نظرية :

المصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا $|أ| = ٠$

مثال٣: بين فيما إذا كانت المصفوفات منفردة أم لا ؟

(١) $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ (٢) $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ (٣) $جـ = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

الحـل :

(١) $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٠ = ٢$ $\therefore$ أ ليست مصفوفة منفردة

(٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$ $\therefore$ ب ليست مصفوفة منفردة

(٣) $|جـ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٠ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{vmatrix} = ١(-٨-٠) + (-٦+٠) + ٢(٠-٤)$

$$= -٨ - ٦ - ٨ = -٢٢$$

أى أن $|جـ| \neq ٠$ $\therefore$ جـ ليست مصفوفة منفردة

مثال٤: جد قيمة / قيم س التى تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة :

(١) $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ (٣) $\begin{bmatrix} ٢س & ١ \\ ٤ & س-١ \end{bmatrix}$

الحـــل :

(١) بما أن المصفوفة منفردة $\therefore \begin{vmatrix} \text{س} & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$ ومنها $٣\text{س} - ١٢ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٤$

(٢) $\begin{vmatrix} \text{س} & ٨ \\ ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٢} - ١٦ = ٠ \Leftarrow \text{س} = \pm ٤$

(٣) $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ١ \\ ٤ & \text{س} - ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ٢\text{س}(\text{س} - ١) - ٤ = ٠$

$\Leftarrow ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٤ = ٠$

$\Leftarrow \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢$ أو $\text{س} = -١$

خصائص النظير الضربى :

إذا كانت أ ، **ب** مصفوفتين مربعتين ، وغير منفردتين ، ومن نفس الرتبة ، وكان **ك** عدداً حقيقياً $\neq ٠$ ، فإن :

(١) $(\text{أ}^{-١})^{-١} = \text{أ}$ (٢) $(\text{ك}\text{أ})^{-١} = \frac{١}{\text{ك}}(\text{أ}^{-١})$ (٣) $(\text{أ} \cdot \text{ب})^{-١} = \text{ب}^{-١} \cdot \text{أ}^{-١}$

إيجاد النظير الضربى للمصفوفة :

تعميم :

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{bmatrix}$ مصفوفة غير منفردة فإن $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|}\begin{bmatrix} \text{أ}_{٢٢} & -\text{أ}_{٢١} \\ -\text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١١} \end{bmatrix}$

أى أن : $\text{أ}^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محددها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسى وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

مثال٥: جد $\text{س}^{-١}$ (إن أمكن) حيث $\text{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

الحـــل : $|\text{س}| = ٢ + ١٢ = ١٤ \quad \therefore$ المصفوفة لها نظير ضربى

$$س^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-4}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

مثال٦: جد $ص^{-1}$ (إن أمكن) حيث $ص = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

الحــل : بما أن $|ص| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$ $\therefore$ المصفوفة ليس لها نظير ضربي

نتيجة(١) :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية حيث أ $^{-1}$ هو نظير المصفوفة أ ، وكان $|أ| = ك$ ، فإن

$|أ^{-1}| = \frac{1}{ك}$ ، $ك \neq 0$

الإثبات: نفرض $أ = \begin{bmatrix} ع & س \\ ل & ص \end{bmatrix}$

$$\Leftarrow أ^{-1} = \frac{1}{|أ|}\begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix} = \frac{1}{ك}\begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ل}{ك} & \frac{-ص}{ك} \\ \frac{-ع}{ك} & \frac{س}{ك} \end{bmatrix}$$

$$|أ^{-1}| = \frac{ل س}{ك^2} - \frac{ص ع}{ك^2} = \frac{1}{ك^2}(ل س - ص ع) = \frac{1}{ك^2}|أ| = \frac{1}{ك^2} \times ك = \frac{1}{ك}$$

نتيجة(٢) :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية حيث أ $^{-1}$ هو نظير المصفوفة أ، وكان $|أ| = ك$ ، فإن $(أ^{-1})^{-1} = أ$

الإثبات: نفرض $أ = \begin{bmatrix} ع & س \\ ل & ص \end{bmatrix}$ $\therefore$ $|أ^{-1}| = \frac{1}{ك}$ (من النتيجة السابقة)

وحيث أن $أ^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{ل}{ك} & \frac{-ص}{ك} \\ \frac{-ع}{ك} & \frac{س}{ك} \end{bmatrix}$

$$(\text{أ}^{-1})^{-1} = \frac{١}{|\text{أ}^{-1}|}\begin{bmatrix} \frac{\text{س}}{\text{ك}} & \frac{\text{ص}}{\text{ك}} \\ \frac{\text{ع}}{\text{ك}} & \frac{\text{ل}}{\text{ك}} \end{bmatrix} = \frac{١}{\frac{١}{\text{ك}}}\begin{bmatrix} \frac{\text{س}}{\text{ك}} & \frac{\text{ص}}{\text{ك}} \\ \frac{\text{ع}}{\text{ك}} & \frac{\text{ل}}{\text{ك}} \end{bmatrix} = \frac{\text{ك}}{١}\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

مثال٧: إذا كان $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\textbf{ب} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان $\text{أ}\cdot\textbf{جـ} = \textbf{ب}$ ، جد $\textbf{جـ}^{-١}$

الحـل : $\because$ $\text{أ}\cdot\textbf{جـ} = \textbf{ب}$ بضرب الطرفين فى $\text{أ}^{-١}$ من اليمين

$\text{أ}^{-١}\cdot\text{أ}\cdot\textbf{جـ} = \text{أ}^{-١}\cdot\textbf{ب}$ ومنها $\textbf{جـ} = \text{أ}^{-١}\cdot\textbf{ب}$

$\textbf{جـ}^{-١} = (\text{أ}^{-١}\cdot\textbf{ب})^{-١} = \textbf{ب}^{-١}\cdot(\text{أ}^{-١})^{-١}$ (من خصائص النظير الضربى)

$= \textbf{ب}^{-١}\cdot\text{أ}$ .... (١)

$$\textbf{ب}^{-١} = \frac{١}{|\textbf{ب}|}\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} = \frac{١}{-٣}\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \textbf{جـ}^{-١} = \frac{١}{-٣}\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \frac{-١}{٣}\begin{bmatrix} ١٥ & ١٢ \\ -١٣ & -١٠ \end{bmatrix}$$

تمارين ٣-٤

(١)بين أن المصفوفة ب $= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ هى النظير الضربى للمصفوفة ا $= \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$

(٢)أى المصفوفات الآتية منفردة :

$$\text{ا} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{ج} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٢ \\ ٥ & ١- & ٣ \end{bmatrix}$$

(٣)جد قيمة / قيم ك التى تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ك \\ ك-١ & ٠ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة

(الجواب: ك=٠ أو ١)

(٤) لتكن ا $= \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢}- & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، أثبت أن ا$^{-١}$ = ا

(٥)إذا كانت ا ، ب مصفوفتين غير منفردتين ومربعتين من الرتبة الثانية ، أثبت أن (اب)$^{-١}$ = ب$^{-١}$ ا$^{-١}$

(٦)إذا كانت ا مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وغير منفرد ة ، ك عدد حقيقى لا يساوى صفراً ، فأثبت أن : $(\frac{١}{ك}\text{ا})^{-١}$ = ك ا$^{-١}$

(٧) إذا كانت ا مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ك عدد حقيقى ، فأثبت أن : |ك ا| = ك^{٢} |ا|

(٨)حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times$ س $= \begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ (الجواب: س $= \begin{bmatrix} ٨- & ٦- \\ \frac{١١}{٢} & \frac{١١}{٢} \end{bmatrix}$)

(٩) إذا كانت $س \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ فما قيمة س ؟

(الجواب: $س = م_{٢}$)

(١٠) إذا كانت س ، ص مصفوفتين غير منفردتين من الرتبة ٣×٣ ، $ص = ٢س^{-١}$ ، أوجد $|٣س \times ص|$

(الجواب: ٢١٦)

(١١) إذا كان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد $(أب)^{-١}$

(الجواب: $\begin{bmatrix} ٧ & ٧ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$)

(١٢) إذا كان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أب^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ جد ب

(الجواب: $ب = \begin{bmatrix} \frac{-٢}{٧} & \frac{٥}{١٤} \\ \frac{١}{٧} & \frac{١}{١٤} \end{bmatrix}$)

(١٣) ما قيمة / قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٠ & -١ & ١ \\ س - ٢ & س & ٠ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ منفردة ؟

(الجواب : $س = ٣$)

(١٤) إذا كان $(أ + ب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ وكانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد $(٢ب)^{-١}$

(الجواب: $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$)

أولاً/طريقة النظير الضربى :

مثال١: حل النظام الآتى باستخدام طريقة النظير الضربى :

٢س + ٣ص = ١٣ ، ٣س + ٥ص = ٢١

الحـل : نضع النظام علي صورة معادلة مصفوفية كالتالى:

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٢١ \end{bmatrix} \quad \text{.................................} \quad (*)$$

وهى علي الصورة العامة $\text{أ}\,\text{ع}=\text{جـ}$ حيث أ مصفوفة المعاملات ، ع مصفوفة المتغيرات ، جـ مصفوفة الثوابت

$$|\text{أ}|=\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}=١٠-٩=١ \qquad \therefore\ \text{أ}^{-١} \text{ موجود}$$

$$\text{أ}^{-١}=\frac{١}{١}\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

بضرب طرفى المعادلة (*) من اليمين بالنظير الضربى $\text{أ}^{-١}$

$$\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٢١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٦٥-٦٣ \\ -٣٩+٤٢ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = ٣

وبوجه عام إذا كانت المعادلة المصفوفية $\text{أ}\,\text{ع}=\text{جـ}$ تمثل نظاماً من المعادلات فإن :

$$\text{ع}=\text{أ}^{-١}\,\text{جـ} \qquad \text{ومنها} \qquad \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}=\text{أ}^{-١}\,\text{جـ}$$

مثال٢: حل النظام الآتى باستخدام طريقة النظير الضربى :

س + ٢ص = −٢ ، ١١ص + ٣س − ٩ = ٠

الحـــل : نكتب المعادلتين مرتبتين كما يلي : س + ٢ص = −٢ .... (١)

$\text{٣س} + \text{١١ص} = ٩$ .... (٢)

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ وهى علي الصورة $\text{أع} = \text{جـ}$

∴ $\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$ ، $|\text{أ}| = ١١ - ٦ = ٥$

∴ $\text{أ}^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ١١ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

∵ $\text{ع} = \text{أ}^{-١} \text{جـ}$ ∴ $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ١١ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} -٢٢ - ١٨ \\ ٦ + ٩ \end{bmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} -٤٠ \\ ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٤٠}{٥} \\ \frac{١٥}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

∴ $\text{س} = -٨$ ، $\text{ص} = ٣$

مثال٣: حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix} \times \text{٢س} = \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

الحـــل : نفرض $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$ ∴ $|\text{أ}| = ١٦ - ١٨ = -٢$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $\text{أ}^{-١}$ من اليمين

$$\text{أ}^{-١} \times \text{أ} \times \text{٢س} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\text{٢س} = \frac{-١}{٢} \begin{bmatrix} -٨ - ٣٠ & ٣٢ - ١٢ \\ ٣ + ١٠ & -١٢ + ٤ \end{bmatrix} = \frac{-١}{٢} \begin{bmatrix} -٣٨ & ٢٠ \\ ١٣ & -٨ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{-١}{٤}\begin{bmatrix} -٣٨ & ٢٠ \\ ١٣ & -٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١٩}{٢} & -٥ \\ \frac{-١٣}{٤} & ٢ \end{bmatrix}$$

ثانياً / طريقة كريمر :

مثال٤: باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتى من المعادلات :

$$٣\text{س} - ٢\text{ص} = ١١ \quad ، \quad -٣\text{ص} - ٤ + ٢\text{س} = ٠$$

الحـــل : نرتب نظام المعادلات كما يلي : : $٣\text{س} - ٢\text{ص} = ١١$ .... (١)

$٢\text{س} - ٣\text{ص} = ٤$ .... (٢)

نكون المصفوفات $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $أ_{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١١ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $أ_{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٣ & ١١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ + ٤ = -٥$$

$$|أ_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ١١ & -٢ \\ ٤ & -٣ \end{vmatrix} = -٣٣ + ٨ = -٢٥$$

$$|أ_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} ٣ & ١١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ٢٢ = -١٠$$

$$\text{س} = \frac{|أ_{\text{س}}|}{|أ|} = \frac{-٢٥}{-٥} = ٥ \qquad \text{ص} = \frac{|أ_{\text{ص}}|}{|أ|} = \frac{-١٠}{-٥} = ٢$$

حل نشاط (٣) صفحة ١٢٩ من الكتاب الوزارى :

مصفوفة المعاملات $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

$$\therefore |أ_{\text{س}}| = -٥ - ٢ = -٧ \qquad أ_{\text{ص}} = ١ - ١٥ = -١٤$$

$$\text{س} = \frac{|أ_{\text{س}}|}{|أ|} = \frac{-٧}{-٧} = ١ \qquad \text{ص} = \frac{|أ_{\text{ص}}|}{|أ|} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢$$

ثالثاً / طريقة جاوس :

مثال٥: استخدم طريقة جاوس لحل النظام : $3\text{س} - \text{ص} = 9$ ، $5\text{س} + 4\text{ص} = -2$

الحـــل :

المصفوفة الممثلة للنظام هى : $\text{أ} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 9 \\ 5 & 4 & -2 \end{array}\right]$

فكرة الحل هى تحويل المصفوفة إلى مثلثية علوية باستخدام خصائص المحددات :

$$\text{أ} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 9 \\ 5 & 4 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-5\text{ص}_1 + 3\text{ص}_2]{} \text{أ} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 9 \\ 0 & 17 & -51 \end{array}\right]$$

ومنها تكون $17\text{ص} = -51 \Leftarrow \text{ص} = -3$

وبالتعويض العكسى $3\text{س} - (-3) = 9 \Leftarrow 3\text{س} = 6$ ومنها $\text{س} = 2$

مثال٦: استخدم طريقة جاوس لحل النظام :

$6\text{س} - \text{ص} + 3\text{ع} = 13$ ، $3\text{ص} - 4\text{ع} = -6$ ، $\text{س} + 7\text{ص} = 15$

الحـــل :

نكون المصفوفة الممتدة $\text{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 1 & 7 & 0 & 15 \end{array}\right]$ ونجرى العمليات الآتية :

$$\text{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 1 & 7 & 0 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{ص}_1 - 6\text{ص}_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & -43 & 3 & -77 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[43\text{ص}_2 + 3\text{ص}_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -163 & -489 \end{array}\right]$$

وبهذا نكون قد حصلنا علي مصفوفة مثلثية ، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسى

فتكون $-163\text{ع} = -489$ ومنها $\text{ع} = \frac{-489}{-163} = 3$

كذلك $3\text{ص} - 4\text{ع} = -6$ ومنها $3\text{ص} - 12 = -6$ أى أن $\text{ص} = 2$

كما أن $6\text{س} - \text{ص} + 3\text{ع} = 13$ ومنها $6\text{س} - 2 + 9 = 13$ أى أن $\text{س} = 1$

مثال٦: استخدم طريقة جاوس لحل النظام :

س − ص + ع = ١٠ ، س + ٢ص + ع = ١٦ ، ٢س + ص − ع = ٥

الحـل : نكون المصفوفة الممتدة أ = $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ١٠ \\ ١ & ٢ & ١ & ١٦ \\ ٢ & ١ & ١- & ٥ \end{array}\right]$ ونجرى العمليات الآتية :

$$أ = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ١٠ \\ ١ & ٢ & ١ & ١٦ \\ ٢ & ١ & ١- & ٥ \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ص}_١ - \text{ص}_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ١٠ \\ ٠ & ٣- & ٠ & ٦- \\ ٢ & ١ & ١- & ٥ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{٢\text{ص}_١ - \text{ص}_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ١٠ \\ ٠ & ٣- & ٠ & ٦- \\ ٠ & ٣- & ٣ & ١٥ \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ص}_٢ - \text{ص}_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & ١- & ١ & ١٠ \\ ٠ & ٣- & ٠ & ٦- \\ ٠ & ٠ & ٣- & ٢١- \end{array}\right]$$

وبهذا نكون قد حصلنا علي مصفوفة مثلثية ، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسى

فتكون −٣ع = −٢١ ومنها ع = ٧ وكذلك −٣ص = −٦ ومنها ص = ٢

كما أن س − ص + ع = ١٠ ومنها س = ٥

تمارين ٣-٥

(١) حل أنظمة كلاً من المصفوفات باستخدام طريقة النظير الضربى :

(أ) س + ص = ٢ ، س + ٣ص = ٥

(الجواب: س = $\frac{١}{٢}$، ص = $\frac{٣}{٢}$)

(ب) ٣س + ٥ص = ١١ ، ٢س − ٣ص = −١٨

(الجواب: س = −٣، ص = ٤)

(٢) حل أنظمة كلاً من المصفوفات بطريقة كريمر :

(أ) س = ص + ١ ، ٢س + ص = ٢

(الجواب: س = ١، ص = ٠)

(ب) ٢س + ٣ص = ١٩ ، ٥س + ٢ص = ٢٠

(الجواب: س = ٢، ص = ٥)

(٣)عند حل نظام من معادلتين خطيتين فى متغيرين وجد أن $|أ_{س}| = ٢|أ| = \frac{-١}{٢}|أ_{ص}|$ ، ما قيمة كلاً من **س،ص** ؟

(الجواب: س = ٢ ، ص = −٤)

(٤)حل أنظمة المعادلات الآتية بطريقة جاوس :

(أ) ٣س + ٧ص = ١٠ ، س + ص = ٢

(الجواب: س = ١، ص = ١)

(ب) س + ص + ع = ١ ، س − ص + ع = ٤ ، س − ص − ع = −١

(الجواب : س = ٠ ، ص = $\frac{-٣}{٢}$ ، ع = $\frac{٥}{٢}$)

(ج) س − ص + ٤ع = ٩ ، ٣ص + س − ع = −٤ ، ٢س + ٣ص + ٢ع = ٢

(الجواب : س = ٣ ، ص = −٢ ، ع = ١)

إصدارات سلسلة الممتاز في الرياضيات

- ✓ الممتاز – شرح وتحليل لمحتوى المنهاج وتمارين إثرائية

- ✓ الممتاز – حلول جميع تمارين الكتاب المدرسي

- ✓ الممتاز – نماذج اختبارات مع حلولها

- ✓ الممتاز – تمارين مميزة

الصف
12
علمي
الجزاء الاول

الممتاز
في الرياضيات

إعداد
أ.رامي عاشور

0599638419
abufadel1974@gmeil.com
Ramy Ashour