حلول الكتاب المدرسي

الفصل الثاني

الملتقى التربوي
www.wepal.net

تمارين ومسائل (٣-١)

١ أكتب الحدود الستة الأُولى في كلّ من المتتاليات الآتية:

أ. ٨ ، ٤ ، ٢ ، .....

الحل: ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$

ب. $\frac{١}{٢ \times ٤}$ ، $\frac{٣}{٤ \times ٦}$ ، $\frac{٥}{٦ \times ٨}$ ، .....

الحل: $\frac{١}{٢ \times ٤}$ ، $\frac{٣}{٤ \times ٦}$ ، $\frac{٥}{٦ \times ٨}$ ، $\frac{٧}{٨ \times ١٠}$ ، $\frac{٩}{١٠ \times ١٢}$ ، $\frac{١١}{١٢ \times ١٤}$

ج. ع = ٣ − ٥ ن.

الحل : $ع_ن = ٣ - ٥ ن$.

$ع_١ = -٢$

$ع_٢ = -٧$

$ع_٣ = -١٢$

$ع_٤ = -١٧$

$ع_٥ = -٢٢$

$ع_٦ = -٢٧$

د. $ع_ن = \frac{ن}{ن^٢ + ١}$.

الحل: $ع_ن = \frac{ن}{ن^٢ + ١}$.

$ع_١ = \frac{١}{٢}$

$ع_٢ = \frac{٢}{٥}$

$ع_٣ = \frac{٣}{١٠}$

$ع_٤ = \frac{٤}{١٧}$

$ع_٥ = \frac{٥}{٢٦}$

$ع_٦ = \frac{٦}{٣٧}$

٥. $ك_ن = ك_{ن-١} - ٢$ ، علماً أن $ك_١ = ٣$

الحل : $ك_ن = ك_{ن-١} - ٢$

$ك_١ = ٣$

$ك_٢ = ك_{٢-١} - ٢ = ك_١ - ٢ = ٣ - ٢ = ١$

$ك_٣ = ك_{٣-١} - ٢ = ك_٢ - ٢ = ١ - ٢ = -١$

$ك_٤ = ك_{٤-١} - ٢ = ك_٣ - ٢ = -١ - ٢ = -٣$

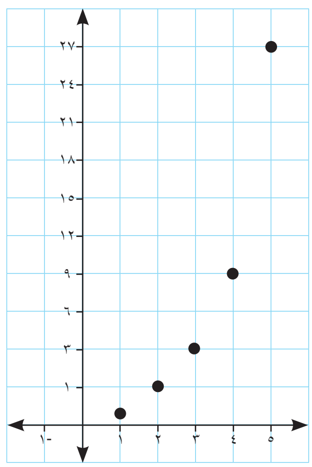
$ك_٥ = ك_{٥-١} - ٢ = ك_٤ - ٢ = -٣ - ٢ = -٥$

$ك_٦ = ك_{٦-١} - ٢ = ك_٥ - ٢ = -٥ - ٢ = -٧$

٢ أُكمل المتتاليات الآتية، ثم أُمثّلها بيانياً.

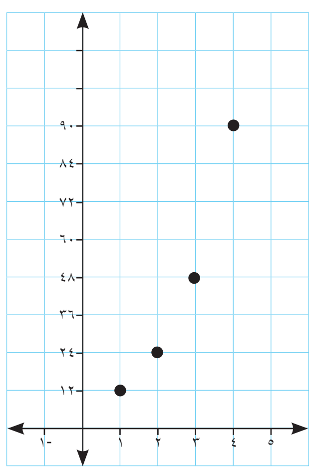
أ. $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ... ، ... ، ... ، ...

الحل: $\frac{١}{٣}$ ، ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧



ب. ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ... ، ... ، ... ، ...

الحل: ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦



٣ أَجِدْ الحد العام في كلّ من المتتاليات الآتية:

أ. ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...

الحل: $ع_ن = (ن + ١)^٢$

ب. ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...

الحل: $ع_ن = ٢^{ن+١}$

ج. $\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٣}{٤}$ ، ...

الحل: $ع_ن = \frac{٣}{ن+١}$

٤ استطاع أَحد الرياضيين مضاعفة ما ربحه ٣ مرات وذلك في كل مرحلة من مراحل المسابقة السبع التي يستطيع تجاوزها. اكتبِ المتتالية التي تمثل ربح المتسابق في كل مرحلة، ثم أَجِدْ الحد العام إذا علمت أَنّ ما كسبه في المرحلة الأُولى ١٠٠ دينار.

الحل: ١٠٠، ٣٠٠، ٩٠٠، ٢٧٠٠، ٨١٠٠، ٢٤٣٠٠، ٧٢٩٠٠

$ع_ن = ١٠٠ \times ٣^{ن-١}$

تمارين ومسائل (٣-٢)

١ اكتب الحدود الخمسة الأُولى من المتتاليات الحسابية التي:

أ. حدها الأَول ١٢ وأَساسها ٤

أ = ١٢ ، د = ٤

$ع_١ = ١٢$

$ع_٢ = ١٢ + ٤ = ١٦$

$ع_٣ = ١٢ + ٢ \times ٤ = ٢٠$

$ع_٤ = ١٢ + ٣ \times ٤ = ٢٤$

$ع_٥ = ١٢ + ٤ \times ٤ = ٢٨$

ب. حدها الأَول ٨ وأَساسها -٣

أ = ٨ ، د = -٣

$ع_١ = ٨$

$ع_٢ = ٨ + -٣ = ٥$

$ع_٣ = ٨ + ٢ \times -٣ = ٢$

$ع_٤ = ٨ + ٣ \times -٣ = -١$

$ع_٥ = ٨ + ٤ \times -٣ = -٤$

٢ أَجِد قيمة س التي تجعل س + ٨ ، ٤س+ ٦ ، ٣س متتالية حسابية.

بما أنّها متتالية حسابية فإنّ: د = الحد – الحد السابق له

٤س + ٦ – (س + ٨) = ٣س – (٤س + ٦)

٤س + ٦ – س – ٨ = ٣س – ٤س – ٦

٣س – ٢ = – س – ٦

+س +س

٤س – ٢ = – ٦

س= – ١

٣ أُدخلتْ ٦ أوساط حسابية بين العددين: ٣٠ ، ٢، أَجِدْ هذه الأَوساط.

نفرض أنّ الأوساط هي: $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$

٣٠، $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$ ، ٢

$ح_٨$ = أ + ٧ د

٢ = ٣٠ + ٧ د

–٣٠ –٣٠

$\frac{-٢٨}{٧} = \frac{٧ د}{٧}$

د = –٤

إذن المتتالية هي : ٣٠، ٢٦ ، ٢٢ ، ١٨ ، ١٤ ، ١٠ ، ٦ ، ٢

الأوساط هي : ٢٦ ، ٢٢ ، ١٨ ، ١٤ ، ١٠ ، ٦

٤ إذا كان الوسط الحسابي لعددين يساوي ٤٠ ، وكانت النسبة بين هذين العددين كنسبة ٢ : ٣. أَجِدْ العددين.

الحل: نفرض العددين: س ، ص

$\frac{س + ص}{٢} = ٤٠ \Longleftarrow س + ص = ٨٠$

$\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣} \Longleftarrow ٣س = ٢ص \Longleftarrow س = \frac{٢}{٣} ص$

نعوض في المعادلة: س+ ص= ٨٠

$\frac{٢}{٣} ص + ص = ٨٠ \Longleftarrow ٢ص + ٣ص = ٢٤٠$

$٥ص = ٢٤٠ \Longleftarrow ص = \frac{٢٤٠}{٥} = ٤٨$

$س = \frac{٢}{٣} ص = \frac{٢}{٣} \times ٤٨ = ٣٢$

٥ في سباق جري ٢٠٠٠ متر، سجّل مدرب أَوقات فريقه على النحو الآتي:

٤٠٠ متر في دقيقة و٣٢ ثانية، ٨٠٠ متر في ٣ دقائق و٤ ثوانٍ، ١٢٠٠ متر في ٤ دقائق و٣٦ ثانية، وهكذا...، علماً بأنّ السرعة ثابتة. كم يحتاج الفريق من الوقت لإنهاء السباق؟

الحل:

د : ت	د : ت	د : ت
١ : ٣٢	٣ : ٤	٤ : ٣٦
٩٢ ث	١٨٤ ث	٢٧٦ ث

$$د = ٢٧٦ - ١٨٤ = ٩٢$$

$$د = ١٨٤ - ٩٢ = ٩٢$$

السرعة ثابته

٤٠٠، ٨٠٠، ١٢٠٠، ......، ٢٠٠٠

$$أ = ٤٠٠ \quad ، \quad د = ٤٠٠$$

$$ح_{ن} = أ + (ن - ١)د$$

$$٢٠٠٠ = ٤٠٠ + (ن - ١) \times ٤٠٠$$

$$\underset{-٤٠٠}{٢٠٠٠} = \underset{-٤٠٠}{٤٠٠} + (ن - ١) \times ٤٠٠$$

$$\frac{١٦٠٠}{٤٠٠} = \frac{(ن - ١) \times ٤٠٠}{٤٠٠}$$

$$٤ = ن - ١$$

$$ن = ٥$$

يحتاج من الوقت لإنهاء السباق = ٧ دقائق و ٤٠ ثانية

تمارين ومسائل (٣-٣)

١ أَجدْ: أ) الحد السادس من المتتالية الهندسية التي فيها: أ = ٢ ، وأَساسها: $\left(\frac{-١}{٢}\right)$.

الحل: $ح_{ن} = أ \times ر^{ن-١}$

$$ح_{٦} = ٢ \times \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٦-١}$$

$$= ٢ \times \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٥}$$

$$= ٢ \times \left(\frac{-١}{٣٢}\right)$$

$$= \frac{-١}{١٦}$$

ب) الحد الأَول من المتتالية الهندسية التي $ح_{٥} = ٦٤$ ، وأَساسها $= ٢$

الحل: $ح_{٥} = أ \times ر^{ن-١}$

$٦٤ = أ \times (٢)^{٥-١}$

$٦٤ = أ \times (٢)^{٤}$

$٦٤ = أ \times ١٦$

$أ = ٤$

جـ) أَساس المتتالية الهندسية التي $ح_{٤} = ٢٥٠$ ، وحدّها الأَول $= ٢$

الحل: $ح_{٤} = أ \times ر^{ن-١}$

$٢٥٠ = ٢ \times (ر)^{٤-١}$

$٢٥٠ = ٢ \times (ر)^{٣}$

$\frac{٢٥٠}{٢} = ر^{٣}$

$١٢٥ = ر^{٣}$

$ر = ٥$

٢ أدخل ٣ أَوساط هندسية بين العددين -١٥ ، -٢٤٠

الحل: نفرض الأوساط هي: $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$

-١٥ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، -٢٤٠

$ح_{٥} = -٢٤٠$

$أ \times ر^{٥-١} = -٢٤٠$

$-١٥ \times ر^{٤} = -٢٤٠$

$ر^{٤} = ١٦$

$ر = \pm ٢$

عند $ر = -٢$

المتتالية : -١٥ ، ٣٠ ، -٦٠ ، ١٢٠ ، -٢٤٠

عند $ر = ٢$

المتتالية : -١٥ ، -٣٠ ، -٦٠ ، -١٢٠ ، -٢٤٠

٣ إذا كان الحد الثالث من متتالية هندسية هو ١٢، والحد السادس منها هو ٩٦، أَجدُ الحدود الأَربعة الأُولى من المتتاليـة.

الحل: $ح_٣ = ١٢$ ، $ح_٦ = ٩٦$

$أ ر^٢ = ١٢$ $\qquad$ $أ ر^٥ = ٩٦$

$$\frac{أ ر^٥}{أ ر^٢} = \frac{٩٦}{١٢}$$

$$ر^٣ = ٨ \Longleftarrow ر = ٢$$

$أ ر^٢ = ١٢$

$أ \times ٤ = ١٢$

$أ = ٣$

المتتالية : ٣، ٦، ١٢، ٢٤

٤ إذا كانت: س − ١ ، س ، س + ٣ ، .... متتالية هندسية، أَجِدُ حدودها الخمسة الأُولى.

الحل: $\frac{س}{س - ١} = \frac{س + ٣}{س}$

$س^٢ = (س - ١)(س + ٣)$

$س^٢ = س^٢ + ٢س - ٣$

$س^٢ - س^٢ = ٢س - ٣$

$٠ = ٢س - ٣ \Longleftarrow س = \frac{٣}{٢}$

المتتالية : $\frac{٣}{٢} - ١$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢} + ٢$

$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٢}$ ، $\frac{٨١}{٢}$

تمارين عامة

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
رمز الإجابة	ج	ب	ج	ب	ج	ب	د	ج

٢ أُمَيِّز المتتالية الحسابية من الهندسية في ما يأتي، مع ذكر السبب.

أ. ٦ ، ٦ ، ٦ ، ٦ ، ...

الحل: هندسية وحسابية؛ لأنّ: ء = ٦−٦ = ٠ أو ر = $\frac{٦}{٦}$ = ١

ب. س ، ٣ س^{٢} ، ٩ س^{٣}،.....

الحل: هندسية، ر = $\frac{٣س^{٢}}{س}$ = $\frac{٩س^{٣}}{٣س^{٢}}$ = ٣س

ج. ٣س−١، ٥س+٢ ، ٧س+ ٥

الحل: حسابية، ٥س + ٢ − ٣س + ١ = ٢س + ٣

٧س + ٥ − ٥س − ٢ = ٢س + ٣

د. $\frac{-١}{٩}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، −١ ، ...

الحل: هندسية، ر = $\frac{\frac{١}{٣}}{\frac{-١}{٩}}$ = $\frac{-١}{\frac{١}{٣}}$ = −٣

٣ أَجِدْ الحدود الأَربعة الأُولى في كل من المتتاليتين الآتيتين، ثُم أُمثّلها بيانياً.

أ. ع$_{ن}$ = $\frac{ن}{ن^{٢}+٣}$

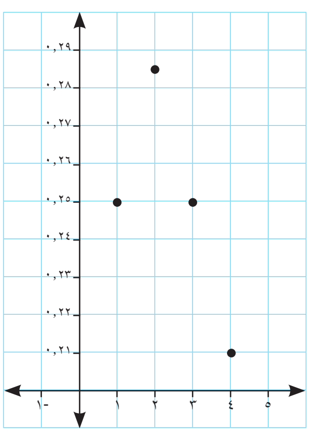
الحل: ع$_{ن}$ = $\frac{ن}{ن^{٢}+٣}$

ع$_{١}$ = $\frac{١}{١^{٢}+٣}$ = $\frac{١}{٤}$

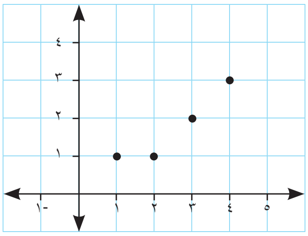
ع$_{٢}$ = $\frac{٢}{٢^{٢}+٣}$ = $\frac{٢}{٧}$

ع$_{٣}$ = $\frac{٣}{٣^{٢}+٣}$ = $\frac{٣}{١٢}$

ع$_{٤}$ = $\frac{٤}{٤^{٢}+٣}$ = $\frac{٤}{١٩}$



ب. $ع_{١} = ١$ ، $ع_{٢} = ١$ ، $ع_{ن} = ع_{ن-١} + ع_{ن-٢}$



الحل: $ع_{١} = ١$ ، $ع_{٢} = ١$

$$ع_{ن} = ع_{ن-١} + ع_{ن-٢}$$
$$ع_{٣} = ع_{٣-١} + ع_{٣-٢}$$
$$= ع_{٢} + ع_{١}$$
$$= ١ + ١ = ٢$$

$$ع_{٤} = ع_{٤-١} + ع_{٤-٢}$$
$$= ع_{٣} + ع_{٢}$$
$$= ٢ + ١ = ٣$$

٤ كم وسطاً هندسياً يُمكن إدخاله بين العددين ٧ ، ٢٢٤ حتى تتكون متتالية هندسية أَساسها ٢ ؟ أكتبُ هذه المتتالية.

الحل: $ع_{ن} = أ \times ر^{ن-١}$

$$٢٢٤ = ٧ \times ٢^{ن-١}$$
$$٣٢ = ٢^{ن-١}$$
$$٢^{٥} = ٢^{ن-١}$$
$$٥ = ن - ١$$
$$ن = ٦$$

∴ عدد الأوساط الهندسية =٤

المتتالية : ٧، $س_{١}$، $س_{٢}$، $س_{٣}$، $س_{٤}$، ٢٢٤

٧، ١٤، ٢٨، ٥٦، ١١٢، ٢٢٤

٥ ثلاثة أَعداد تكوّن متتالية حسابية مجموعها -١٢ وحاصل ضربها ٨٠، أَجِدْ الأَعداد الثلاثة.

الحل:

أفرض أن الأعداد هي أ - د، أ، أ + د

$$أ - د + أ + أ + د = -١٢$$
$$٣أ = -١٢ \Longleftarrow أ = -٤$$
$$\frac{(-٤ - د) \times -٤ \times (-٤ + د)}{-٤} = \frac{٨٠}{-٤}$$
$$(-٤ - د)(-٤ + د) = -٢٠$$
$$١٦ - د^{٢} = -٢٠ \Longleftarrow د^{٢} = ٣٦ \Longleftarrow د = \pm ٦$$

$-٤-٦ ، -٤ ، -٤+٦$ أو $-٤+٦ ، -٤ ، -٤-٦$

$-١٠ ، -٤ ، ٢$ $٢ ، -٤ ، -١٠$

٦ متتالية حسابية حدها الأَول = ٣ ، فإِذا كانت حدودها: الثاني والرابع والثامن تكوِّن متتالية هندسية، أَجِدْ هذه المتتالية الحسابية.

الحل: $أ = ٣$

$ح_٢ ، ح_٤ ، ح_٨$

$أ + ء ، أ +٣ء ، أ +٧ء$

$٣+ء ، ٣+٣ء ، ٣+٧ء$

$$\frac{٣+٣ء}{٣+ء} = \frac{٣+٧ء}{٣+٣ء}$$

$(٣+٣ء)^٢ = (٣+ء)(٣+٧ء)$

$\cancel{٩} + ١٨ء + ٩ء^٢ = \cancel{٩} + ٢٤ء + ٧ء^٢$

$٢ء^٢ - ٦ء = ٠$

$ء(٢ء - ٦) = ٠$

$ء = ٠$ أو $ء = ٣$

∴ المتتالية: ٣، ٣ ، ٣، .... أو ٣، ٦، ٩، ١٢ ، ......

٧ متتالية حسابية حدها الخامس يساوي ٢٠ و $(ح_٢)^٢ = ح_١ \times ح_٤$ أَجِدْ المتتالية.

الحد الخامس =٢٠   ∴ ٢٠=أ + ٤د

ومنه: أ=٢٠-٤د .... (١)

$(ح_٢)^٢ = ح_١ \times ح_٤$ ∴ $(أ+د)^٢ = أ \times (أ+٣د)$

بالتبسيط $د^٢ - أد = ٠$ .... (٢)

ومنه: د(د-أ)=٠   ∴ أما: د=٠، أو: د=أ

عند: د=أ   بالتعويض في (١)

د=٢٠-٤د   ومنه: د = أ = ٤

المتتالية هي: ٤، ٨، ١٢، ......

عند: د=٠   بالتعويض في (١)

∴ أ=٢٠

المتتالية هي: ٢٠، ٢٠، ٢٠، ...

٨ تبلغ مساحة إِحدى المستوطنات الصهيونية ١٢٠٠٠دونم ، فإِذا كانت نسبة التوسع فيها سنوياً تبلغ ١٠٪ من المساحة الأَصلية، فكم ستكون مساحتها في السنة الخامسة؟

الحل: $أ = ١٢٠٠٠$، $ء = \frac{١٠}{١٠٠} \times ١٢٠٠٠ = ١٢٠٠$، $ن = ٥$

$ح_٥ = ١٢٠٠٠ + (٥-١) \times ١٢٠٠ = ١٦٨٠٠$دونم

تمارين ومسائل (٤-١)

١ باستخدام طريقة الجدول أجدُ كلّاً مما يأتي :

أ. $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \; (٢س + ٣)$

الحل:

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥,٠٠٠١	٥	٤,٩٩٩٩	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
ق(س)	١٣,٢	١٣,٠٢	١٣,٠٠٢	١٣,٠٠٠٢	١٣	١٢,٩٩٩٨	١٢,٩٩٨	١٢,٩٨	١٢,٨

$\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \; (٢س + ٣) = ١٣$

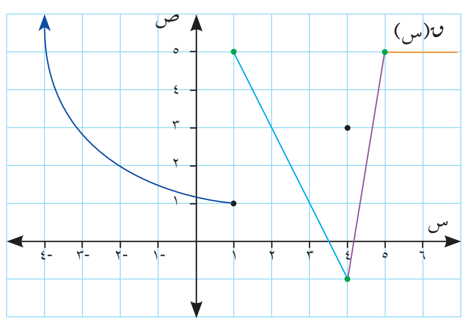
ب. $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \; \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س - ٣}$ ، $س \neq ٣$

الحل: $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \; \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \; \frac{\cancel{(س - ٣)}(س - ١)}{\cancel{(س - ٣)}} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \; (س - ١)$

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣,٠٠٠١	٣	٢,٩٩٩٩	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	٢	١,٩٩٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

$\therefore \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \; (س - ١) = ٢$

٢ إذا كان الشكل المجاور يُمثل منحنى الاقتران: ق(س).
من الرسم أجد ما يأتي:



أ. ق(−٣)

الحل: ق(−٣) = ٣

ب. $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)

الحل: $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

ج. ق(١)

الحل: ق(١) = ١

د. $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

الحل: $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ، $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥

$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٥ $\neq$ $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

إذن: $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة.

هـ. ق(٤)

الحل: ق(٤) = ٣

و. $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س)

الحل: $\underset{س \leftarrow ٤^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٤^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −١

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ق(س) = −١

ز. ق(٥)

الحل: ق(٥) غير معرفة

ح. $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)

الحل: $\lim_{س \to ٥^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٥^-}$ ق(س) = ٥

$\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = ٥

تمارين ومسائل (٤-٢)

١ إذا كان: $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = −٢، $\lim_{س \to ٢}$ ٣ هـ(س) = ٩ . أجد قيمة النهايات الآتية :

أ. $\lim_{س \to ٢}$ ٢ (ق(س) + هـ(س))

الحل: $\lim_{س \to ٢}$ ٣ هـ(س) = ٩ ، ∴ $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = ٣

$\lim_{س \to ٢}$ ٢ (ق(س) + هـ(س)) = ٢ ($\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س)) = ٢ × (−٢ + ٣) = ٢

ب. $\lim_{س \to ٢}$ (ق^{٢}(س) − هـ(س))

الحل: $\lim_{س \to ٢}$ (ق^{٢}(س) − هـ(س)) = $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) × $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) − $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س)

= $^{-}$٢ × $^{-}$٢ − ٣ = ١

ج. $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{\text{٥ ق(س)}}{\text{هـ}^{٢}\text{(س)}}$

الحل: $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{\text{٥ ق(س)}}{\text{هـ}^{٢}\text{(س)}}$ = $\frac{\text{٥ } \lim_{س \to ٢} \text{ق(س)}}{\lim_{س \to ٢} \text{هـ}^{٢}\text{(س)}}$ = $\frac{\text{٥} \times \text{−٢}}{\text{٣} \times \text{٣}}$ = $\frac{\text{−١٠}}{\text{٩}}$

د. $\lim_{س \to ٢}$ (٤ق(س) + س^{٢} −٣)

الحل: $\lim_{س \to ٢}$ (٤ق(س) + س^{٢} −٣)

٤ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to ٢}$ س^{٢} − $\lim_{س \to ٢}$ ٣ = ٤ × −٢ + ٢^{٢} − ٣ = −٧

٢ أجد قيمة النهايات الآتية :

أ. $\lim_{س \to ٨}$ (٢س − ١١)

الحل: $\lim_{س \to ٨}$ (٢س − ١١) = ٢ $\lim_{س \to ٨}$ س − $\lim_{س \to ٨}$ ١١ = ٢ × ٨ − ١١ = ٥

ب. $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} (-٢\text{س}^{٣} - ٨\text{س} + ٧)$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} (-٢\text{س}^{٣} - ٨\text{س} + ٧) = -٢ \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{س}^{٣} - ٨ \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{س} + \lim\limits_{\text{س}\to ٠} ٧$

$= -٢ \times ٠ - ٨ \times ٠ + ٧ = ٧$

ج. $\lim\limits_{\text{س}\to ٦} \left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣٦} - \frac{٦}{\text{س}^{٢} - ٣٦} \right)$ ، $\text{س} \neq \pm ٦$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to ٦} \left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣٦} - \frac{٦}{\text{س}^{٢} - ٣٦} \right) = \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \left(\frac{\text{س} - ٦}{\text{س}^{٢} - ٣٦} \right) = \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \left(\frac{\cancel{(\text{س} - ٦)}}{\cancel{(\text{س} - ٦)}(\text{س} + ٦)} \right)$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٦} \left(\frac{١}{(\text{س} + ٦)} \right) = \frac{١}{١٢}$

د. $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \left(\frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}{\text{س}^{٢} - ٩} \right)$ ، $\text{س} \neq \pm ٣$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \left(\frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}{\text{س}^{٢} - ٩} \right) = \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \left(\frac{(\text{س} - ٤)\cancel{(\text{س} + ٣)}}{(\text{س} - ٣)\cancel{(\text{س} + ٣)}} \right) = \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \frac{(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٣)} = \frac{٧}{٦}$

هـ. $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq ١$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س} - ١} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\cancel{(\text{س} - ١)}(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س} - ١)}} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} (\text{س}^{٢} + \text{س} + ١) = ٣$

و. $\lim\limits_{\text{س}\to \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س} - \sqrt{٢}}$ ، $\text{س} \neq \sqrt{٢}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to \sqrt{٢}} \frac{\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س} - \sqrt{٢}} = \lim\limits_{\text{س}\to \sqrt{٢}} \frac{\cancel{(\text{س} - \sqrt{٢})}(\text{س} + \sqrt{٢})}{\cancel{(\text{س} - \sqrt{٢})}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to \sqrt{٢}} (\text{س} + \sqrt{٢}) = ٢\sqrt{٢}$

٣ إذا كان: $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} (\text{أ}\,\text{س}^{٢} - ٣٦) = ٠$ فما قيمة أ.

الحل: $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} (\text{أ}\,\text{س}^{٢} - ٣٦) = \text{أ} \lim\limits_{\text{س}\to -٢} \text{س}^{٢} - \lim\limits_{\text{س}\to -٢} ٣٦ = ٤\,\text{أ} - ٣٦$

$\therefore$ أ = ٩

٤ أجدُ: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٢ - ١}{س^٢ + ٣س}$ ، س ≠ ٠ ، −٣.

الحل: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^٢ - ١}{س^٢ + ٣س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{((س + ١) - ١)((س + ١) + ١)}{س(س + ٣)}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{س(س + ٢)}{س(س + ٣)} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٢)}{(س + ٣)} = \frac{٢}{٣}$

تمارين ومسائل (٤-٣)

١ إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ، س \neq ١ \\ ١ & ، س = ١ \end{cases}$ ، أجد ما يأتي:

أ. ق(١).

الحل: ق(١) = ١

ب. $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$.

الحل: $\lim\limits_{س \to ١^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^-} ق(س) = ١$

٢ إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} -س^٢ & ، س \geq ٠ \\ س - ٢ & ، س < ٠ \end{cases}$ ، أجد: $\lim\limits_{س \to ٠} ق(س)$ ، إن وُجدت .

الحل: $\lim\limits_{س \to ٠^+} ق(س) = ٠$

$\lim\limits_{س \to ٠^-} ق(س) = ٠ - ٢ = -٢$

$\lim\limits_{س \to ٠^+} ق(س) \neq \lim\limits_{س \to ٠^-} ق(س)$ ، إذن $\lim\limits_{س \to ٠} ق(س)$ غير موجودة.

٣ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ٤} &، س \neq ٤ \\ ^-١ &، س = ٤ \end{cases}$ ، أجد ما يأتي :

أ. $ق(٤)$.

الحل: $ق(٤) = -١$

ب. $\lim\limits_{س \to ٤} ق(س)$.

الحل: $\lim\limits_{س \to ٤^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٤^-} ق(س) = ٣$

٤ إذا كان : $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢س - ا}{س - ٤} &، س \neq ^-٣ \\ ^-٨ &، س = ^-٣ \end{cases}$ ، وكانت: $\lim\limits_{س \to ^-٣} ق(س) = ق(^-٣)$ ،أجد قيمة الثابت ا.

الحل : $ق(^-٣) = -٨$

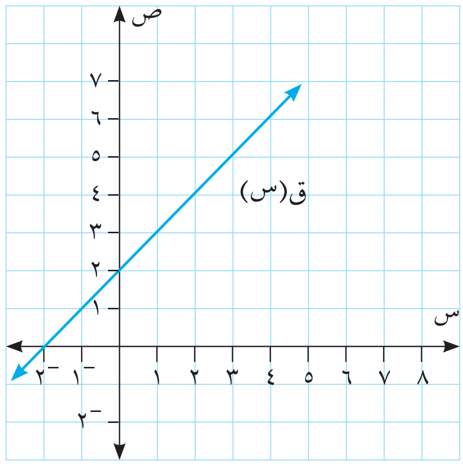
$$\lim\limits_{س \to ^-٣} ق(س) = \lim\limits_{س \to ^-٣} \frac{٢س - ا}{س - ٤} = \frac{٢ \times ^-٣ - ا}{^-٣ - ٤} = \frac{^-٦ - ا}{^-٧} = -٨$$

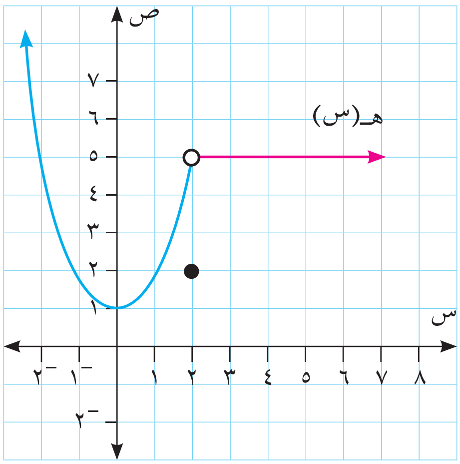
$$- ا = -٨ \times -٧ + ٦ = ٦٢$$

$$ا = - ٦٢$$

تمارين ومسائل (٤-٤)

١ أتأمل الاقترانين ق(س)، هـ(س) المرسومين في الشكلين الآتيين، ثم أجيب عن الآتي:





أ. أبحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = صفر .

الحل: ق(٠) = ٢

$$\lim_{س \leftarrow ^{+}٠} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ^{-}٠} ق(س) = ٢$$

$$\lim_{س \leftarrow ٠} ق(س) = ٢ = ق(٠)$$

∴ ق(س) متصل عند س = ٠ .

ب. أبحث في اتصال الاقتران: هـ(س) عند س = ٢ .

الحل: هـ(٢) = ٢

$$\lim_{س \leftarrow ^{+}٢} هـ(س) = \lim_{س \leftarrow ^{-}٢} هـ(س) = ٥$$

$$\lim_{س \leftarrow ٢} هـ(س) = ٥$$

$$\lim_{س \leftarrow ٢} هـ(س) \neq هـ(٢)$$

∴ هـ(س) غير متصل عند س = ٢

٢ أبحثُ في اتصال الاقترانات الآتية عند قيم س المشار إليها في كل حالة:

أ. ق(س) = ٣ س − ٦ . عند س = ١ .

الحل: ق(١) = ٣ × ١ − ٦ = −٣

نهـــا (س←١) ق(س) = ٣ × ١ − ٦ = −٣

نهـــا (س←١) ق(س) = ق(١) = −٣

∴ ق(س) متصل عند س = ١

ب. ق(س) = (س −٣) (س + ٣) عند س = ٣.

الحل: ق(٣) = ٠

نهـــا (س←٣) ق(س) = ٠

نهـــا (س←٣) ق(س) = ق(٣) = ٠

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

٣ إذا كان: ق(س) = { ٣ − س ، س < ١ ؛ س^{٢} + ١ ، س ≥ ١ } أبحثُ في اتصال الاقتران ق(س)، عند س=١ .

الحل: ق(١) = ٢

نهـــا (س←١) ق(س)

نهـــا (س←١$^{+}$) ق(س) = ١^{٢} + ١ = ٢

نهـــا (س←١$^{-}$) ق(س) = ٣ − ١ = ٢

نهـــا (س←١$^{+}$) ق(س) = نهـــا (س←١$^{-}$) ق(س) = ٢

∴ نهـــا (س←١) ق(س) = ٢ = ق(١)

∴ ق(س) متصل عند س = ١

٤ إذا كان: $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{أس} + ٥ \text{ ، س} \neq ٢ \\ ١١ \text{ ، س} = ٢ \end{cases}$ أجد قيمة أ، إذا كان الاقتران متصلاً عند س = ٢ .

الحل : الاقتران متصل عند س = ٢ ، إذن:

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \text{ق(س)} = ٢\text{أ} + ٥ = ١١$$

$$\therefore \text{أ} = ٣$$

تمارين عامة

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
رمز الإجابة	ب	د	د	ج	أ	ج	ب	أ

٢ إذا كان: $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{هـ(س)}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{س}^٢ + ٣\text{س}$، أجد ما يأتي:

أ. $٢ \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{ق(س)} + \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{هـ(س)}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{هـ(س)} = (-١)^٢ + ٣ \times -١ = -٢$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{هـ(س)} = -٢$$

$$٢ \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{ق(س)} + \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{هـ(س)} = ٢ \times -٢ + -٢ = -٦$$

ب. $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ}^٢\text{(س)} + ٦\text{س}}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ}^٢\text{(س)} + ٦\text{س}} = \dfrac{\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{ق(س)}}{\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} \text{هـ}^٢\text{(س)} + \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ^-١} ٦\text{س}} = \dfrac{-٢}{٤ + ^-٦} = +١$

٣ أجد النهايات الآتية :

أ. $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـا}}$ ٤س^٢ + ٣س − ٥

الحل: $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـا}}$ ٤س^٢ + ٣س − ٥ = ٤ $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـا}}$ س^٢ + ٣ $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـا}}$ س − $\underset{س \leftarrow -٤}{\text{نهـا}}$ ٥

= ٤ × ١٦ + ٣ × −٤ − ٥ = ٤٧

ب. $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{٣س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٧س + ١٢}$ ، س ≠ −٣، −٤

الحل: $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{٣س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٧س + ١٢} = \frac{٣\times٣^٢ - ٢\times٣ - ٣}{٣^٢ + ٧\times٣ + ١٢} = \frac{١٨}{٤٢} = \frac{٣}{٧}$

ج. $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$ ، س ≠ −٢، ٢

الحل: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س-٢)}(س^٢+٢س+٤)}{\cancel{(س-٢)}(س+٢)} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

د. $\underset{س \leftarrow ٢٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ٥}{س - ٢٥}$ ، س ≠ ∓٥

الحل: $\underset{س \leftarrow ٢٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ٥}{س - ٢٥} = \underset{س \leftarrow ٢٥}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\sqrt{س} - ٥)}}{\cancel{(\sqrt{س} - ٥)}(\sqrt{س} + ٥)} = \underset{س \leftarrow ٢٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\sqrt{س} + ٥)} = \frac{١}{١٠}$

٤ إذا كان: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{٥أس^٢ - ١}{س^٢ + س + ٢} = ١٠$ ، فما قيمة /قيم الثابت أ ؟

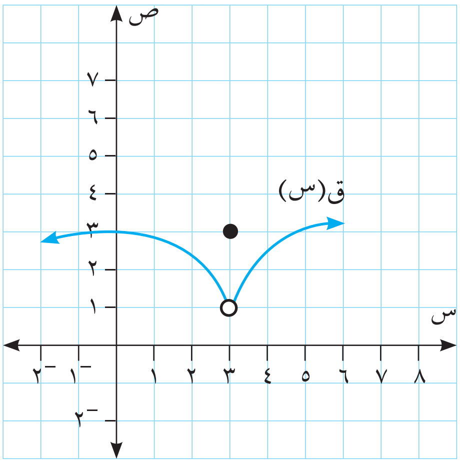
الحل: بالتعويض المباشر عن س =٢

$\frac{٥أ\times٢^٢ - ١}{٢^٢ + ٢ + ٢} = \frac{٢٠أ - ١}{٨} = ١٠$

٢٠أ − ١ = ١٠ × ٨

٢٠أ = ٨١ ∴ أ = $\frac{٨١}{٢٠}$

٥ أتأمل الشكل المجاور، ثم أجد ما يأتي :



أ. $\underset{س\leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س)   الحل: $\underset{س\leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

ب. $\underset{س\leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س)   الحل: $\underset{س\leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

ج. $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)   الحل: $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١

د. ق(٣)   الحل: ق(٣) = ٣

هـ. $\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)   الحل: $\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٣

و. ق(٠)   الحل: ق(٠) = ٣

٦ أبحث اتصال الاقتران: ق(س) = $\begin{cases} \text{٧ − س} ، & \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٣} − ٣ ، & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ ، عند س = ٢

الحل: ق(٢) = $٢^{٣}$ − ٣ = ٥

$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س)

$\underset{س\leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $٢^{٣}$ − ٣ = ٥

$\underset{س\leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٧ − ٢ = ٥

$\underset{س\leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س\leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) ، ∴ $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(٢) = ٥

∴ ق(س) متصل عند: س = ٢ .