الحادي عشر
العلمي والصناعي

حلول أسئلة الكتاب
الفصل الثاني

الملتقى التربوي
www.wepal.net

حلول الوحدة الرابعة: الاحتمالات والإحصاء

تمارين ومسائل: (٤ - ١)

س١:

السؤال	١	٢
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	أ

س٢: ١) المدى = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

٢) المدى = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

٣) المدى = {٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ٩، ١٢}

٤) المدى = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧ ، ٨، ٩، ١٠}

تمارين ومسائل: (٤ - ٢) التوزيع الاحتمالي

س١:

السؤال	١	٢	٣
رمز الإجابة الصحيحة	أ	د	ب

س٢: أ) قيم المتغير العشوائي υ = {٠، ١، ٢، ٣}

ب) جدول التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{٦}{٢٧}$	$\frac{١٢}{٢٧}$	$\frac{٨}{٢٧}$

س٣: جدول التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٥}{٨}$	$\frac{١٥}{٥٦}$	$\frac{٣٠}{٣٣٦}$	$\frac{٦}{٣٣٦}$

تمارين ومسائل: (٤ - ٣) التوقُّع

س١: التوزيع الاحتمالي:

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

ت (ن) = $\frac{٣٥}{١٨}$

س٢: نكتب التوزيع الاحتمالي كالآتي: {(-٢، أ)، (٣، ٠,١)، (٤، ب)} أو جدول

أ + ب = ٠,٩ ، ت(ن) = −٢أ + ٣ × ٠,١ + ٤ب = ١,٥ ، نحل المعادلتين فينتج: ب = ٠,٥

ل (س=٤) = ٠,٥

س٣: قيمة: أ = $\frac{١٢}{٢٥}$

(ت(٥٠ ن) = ٥٠ × $\frac{٢٣}{٢٥}$ = ٤٦

توقع مجموع الإجازات خلال ٥٠ يوم عمل = ٤٦ .

تمارين ومسائل: (٤ - ٤) التوزيع ذو الحدين

س١:

السؤال	١	٢	٣
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	ب	د

س٢: أ) ل(٠) = $\binom{٦}{٠}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٠}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

ل(١) = $\binom{٦}{١}\left(\frac{١}{٣}\right)^{١}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

ل(س≤١) = ١ − ل(٠) = ١ − $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦}$

ب) ت (ن) = ٢

س٣: $ن = ٦$ ، $أ = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، $(١ - أ) = \frac{٢}{٣}$

أ) ل (عدد يقبل القسمة على ٣ في ٣ رميات فقط) $= \binom{٦}{٣} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$.

ب) ل (عدد يقبل القسمة على ٣ في ٥ رميات على الأقل) = ل(س $\geq$ ٥) = ل(٥) + ل(٦)

$= \binom{٦}{٥} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} + \binom{٦}{٦} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٦} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠}$

س٤: (احتمال اللون الأبيض) ل(ب) $= \frac{٣}{٤}$، (احتمال اللون الأحمر) ل(ع) $= \frac{١}{٤}$

أ) احتمال أن تكون بذرتان فقط ذات لون أبيض: ل(س=٢) $= \binom{٨}{٢} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٤}\right)^{٦}$

ب) توقع عدد الكرات الحمراء $= ٨ \times \frac{١}{٤} = ٢$

س٥: (معطى ل (ص)= ٢ل(ع) ونعلم أن ل(ص) + ل(ع)= ١) ومنها نستنتج أنّ :

ل (أصفر) $= \frac{٢}{٣}$ ، ل (أحمر) $= \frac{١}{٣}$

ل(س $\leq$ ١) $= \frac{٢١١}{٢٤٣} \Leftarrow$ ١ - ل (٠) $= \frac{٢١١}{٢٤٣} \Leftarrow$ ل (٠) $= \binom{ن}{٠} \left(\frac{١}{٣}\right)^{٠} \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن} = \frac{٢١١}{٢٤٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}$

$\Leftarrow ن = ٥$ بذرات

تمارين ومسائل: (٤ - ٥) العلامة المعيارية

س١: $ع = \frac{س - \overline{س}}{\sigma}$ ، $ع_{٥٧} = \frac{٥٧ - ٦٥}{٨} = \frac{-٨}{٨} = -١$ ، $ع_{٩١} = \frac{٩١ - ٦٥}{٨} = \frac{٢٦}{٨} = ٣,٢٥$

س٢: علامة سارة المعيارية في الكيمياء: $ع_{٧٢} = \frac{٧٢ - ٦٠}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

علامة سارة المعيارية في الفيزياء: $ع_{٧٥} = \frac{٧٥ - ٧٠}{٢} = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$

علامة سارة المعيارية في الأحياء: ع$_{٦٩}$ = $\frac{٦٨ - ٦٩}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ = ٠,٢٥

أداء سارة في الكيمياء أفضل من الفيزياء وأفضل من الأحياء ، وأداء سارة في الفيزياء أفضل من الأحياء.

س٣: مجموع العلامات المعيارية للتوزيع = صفر

∴ ٣ + ٢ل + −١ + ل + −٥ = صفر ⟸ ل = ١

س٤: أ) ع$_{٧٥}$ = $\frac{٧٥ - ٧٠}{٥}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

ب) الوسط الحسابي بعد التعديل = −٢(٧٠) + ٣ = −١٣٧

الانحراف المعياري بعد التعديل = ٢(٥) = ١٠

العلامة ٧٥ بعد التعديل = −٢(٧٥) + ٣ = −١٤٧

إذن: العلامة المعيارية للقيمة ٧٥ بعد هذا التعديل = ع = $\frac{-١٤٧ + ١٣٧}{١٠}$ = $\frac{-١٠}{١٠}$ = −١

أو مباشرة العلامة المعيارية لا تتأثر بالجمع، ولكن تتأثر بالضرب في عدد سالب. (تتغير إشارة العلامة المعيارية فقط)

إذن: العلامة المعيارية للقيمة ٧٥ بعد هذا التعديل = −١

تمارين ومسائل: (٤ - ٦) التوزيع الطبيعي (المعتدل)

س١: أ) ل(ع ⩽ ١,٢٥) = ٠,٨٩٤٤

ب) ل(ع > ٢,٤٨) = ١ − ٠,٩٩٣٤ = ٠,٠٠٦٦

ج) ل(ع < −١,٤٦) = ل(ع > ١,٤٦) = ٠,٩٢٧٩

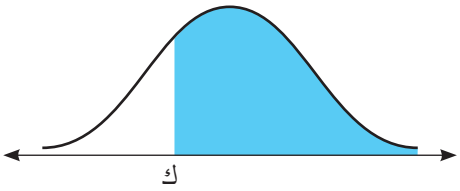
د) ل(−٢,٣٧ ⩽ ع ⩽ ١,٧) = ٠,٩٥٥٤ − ٠,٠٠٨٩ = ٠,٩٤٦٥

س٢: أ) ك تقع في الفترة الموجبة

ل(ع ⩽ ك) = ٠,٩٩٠٩ نبحث في الجدول عن المساحة ٠,٩٩٠٩ لنجد: ك = ٢,٣٦

الملتقى التربوي
www.wepal.net

ب) ك تقع في الفترة السالبة، كما هو موضّح في الشكل المقابل.



ل(ع > ك) = ٠,٩٤٩٥ ومنها

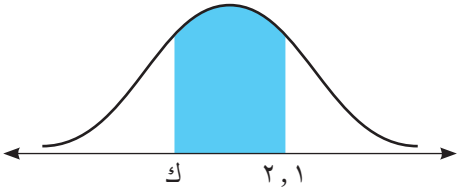
ل(ع < ك) = ١ – ٠,٩٤٩٦ = ٠,٠٥٠٥

نبحث في الجدول عن العدد ٠,٠٥٠٥ فنجد ك = –١,٦٤

ج) ك تقع في الفترة السالبة

ل(ع ⩽ ك)=٠,١٩٧٧ نبحث في الجدول عن المساحة ٠,١٩٧٧ لنجد ك= –٠,٨٥

د) ل(ك ⩽ ع ⩽ ١,٢) =٠,٢٩٠٦



ل(ع < ١,٢)– ل(ع < ك)= ٠,٢٩٠٦

ل(ع > ك) = ٠,٩٨٢١ – ٠,٢٩٠٦ =٠,٦٩١٥

ومنها: ك = ٠,٥

س٣: ل(ع ⩽ ك) = ٠,١٧٣٦ ومنها: ك = –٠,٩٤

ل(ك ⩽ ع ⩽ ١,٧)= ل(–٠,٩٤ ⩽ ع ⩽ ١,٧)= ل(ع < ١,٧) – ل (ع < –٠,٩٤)

= ٠,٩٥٥٤ – ٠,١٧٣٦ =٠,٧٨١٨

س٤: أ) ل(س ⩽ ٥٠) = ل(ع ⩽ $\frac{٥٠ + ٦٠}{٥}$)= ل(ع ⩽ –٢) =٠,٠٢٢٨

ب) ل(٥٥ ⩽ س ⩽ ٧٥) = ل(–١ ⩽ ع ⩽ ٣) = ل(ع ⩽ ٣)– ل(ع ⩽ –١)

= ٠,٩٩٨٧ – ٠,١٥٨٧ =٠,٨٤

س٥: ل(س<٧٨) = ٠,٠٢٢٨ ومنها: ل(ع < $\frac{\mu - ٧٨}{٢}$) =٠,٠٢٢٨

ل(ع < $\frac{\mu - ٧٨}{٢}$) = ١ – ٠,٠٢٢٨ = ٠,٩٧٧٢

ومن الجدول نجد: ع = ٢

٢ = $\frac{\mu - ٧٨}{٢}$ ومنها: ٤ = μ – ٧٨ ومنها: μ = ٧٤

س٦: أ) ل(ع ⩽ ك) = ٠,١٠٥٦ ومنها: ل(ع ⩾ ك) = ١ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٨٩٤٤

ك = ١,٢٥

ب) ل(س ⩾ ١٢) = ل(ع ⩾ $\frac{١٢ - ٨}{٢}$) = ل(ع ⩾ ٢) = ٠,٩٧٧٢

تمارين ومسائل: (٤ - ٧) التطبيقات

س١: (احتمال أن تقل علامات الطلبة المعيارية عن - ٢,١٥) = ل(ع < -٢,١٥) = ٠,٠١٥٨

عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم المعيارية عن - ٢,١٥ = الاحتمال × العدد الكلي

= ٠,٠١٥٨ × ١٠٠٠ = ١٥,٨ = ١٦ طالباً

س٢: أ) ل(س > ٧٥) = ل(ع > $\frac{٧٥ - ٦٩}{٤}$) = ل(ع > ١,٥) = ١ - ل(ع < ١,٥)

= ١ - ٠,٩٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

ب) ل(٦٠ < س < ٧٠) = ل(-٢,٢٥ < ع < ٠,٢٥) = ل(ع < ٠,٢٥) - ل(ع < -٢,٢٥)

= ٠,٥٩٨٧ - ٠,٠١٢٢ = ٠,٥٨٦٥

ج) ل(س < ٦٩) = ل(ع < ٠) = ٠,٥ ،

ومنها: نسبة الطلاب الذين يحصلون على أقل من ٦٩ علامة = الاحتمال × ١٠٠٪ = ٠,٥ × ١٠٠٪ = ٥٠٪

س٣: أ) ل(س > ٢٢٠) = ل(ع > $\frac{٢٢٠ - ٢٠٠}{١٠}$) = ل(ع > ٢) = ١ - ل(ع < ٢)

= ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

عدد الأسر التي تحصل على دخل شهري أعلى من ٢٢٠ ديناراً = ٢٠٠ × ٠,٠٢٢٨ = ٥ أسر .

ب) ل(س < ك) = ١٠٪ = ٠,١٠٠٠

ل(ع < $\frac{ك - ٢٠٠}{١٠}$) = ٠,١٠٠٠ ، $\frac{ك - ٢٠٠}{١٠}$ = -١,٢٨ ومنها : ك = ١٨٧,٢ ديناراً

الملتقى التربوي
www.wepal.net

س٤: ل(س ⩽ ك) = ٠,٠٥٠٠ ⟸ ل(ع ⩽ $\frac{\mu - ك}{\sigma}$) = ٠,٠٥٠٠

⟸ ١-ل(ع > $\frac{\mu - ك}{\sigma}$) = ٠,٠٥٠٠ ⟸ ل(ع > $\frac{\mu - ك}{\sigma}$) = ٠,٩٥٠٠

$\frac{ك - ٧٠}{١٠}$ = ١,٦٥ ⟸ ك = ٨٦,٥

تمارين عامة الوحدة الرابعة

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة الصحيحة	أ	ب	د	ب	د

س٢: إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ن هو:

س	٣	٨	٩	١٢	١٥
ل (س)	أ	ب	٠,٣	٣ب	أ٢

أ٣ + ٤ب + ٠,٣ = ١ ⟸ أ٣ + ٤ب = ٠,٧٠

ت (ن) = أ٣ + ٨ب + ٢,٧ + ٣٦ب + ١٣٠

ت (ن) = أ٣٣ + ٤٤ب + ٢,٧

ت (ن) = ١١ × (أ٣ + ٤ب) + ٢,٧

ت (ن) = ١١ × ٠,٧ + ٢,٧ = ١٠,٤

س٣: ل(ص*) = ٢ل (ك*) ، ل (ص*) + ل (ك*) = ١ ومنها: ل(ص*) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ك*) = $\frac{١}{٣}$

ل(٠) = ل (ك* ك) = $\frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٦}$

ل(١) = ل (ص* ك) + ل(ك* ص) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦}$

ل(٢) = ل (ص* ص) = $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٦}$

س	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٣}{٦}$	$\frac{٢}{٦}$

ت (ن) = ٠ × $\frac{١}{٦}$ + ١ × $\frac{٣}{٦}$ + ٢ × $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{٧}{٦}$

ت (١٠ن) = ١٠ × $\frac{٧}{٦}$ = $\frac{٧٠}{٦}$

س٤: ل(س ⩽ ١) ⩾ ٠,٧٩ ⟸ ١ − ل (٠) ⩾ ٠,٧٩ ⟸ ١ − $\binom{ن}{٠}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ ⩾ ٠,٧٩

$\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$ ⩽ ٠,٢١ ، يتحقق عندما: ن ⩾ ٣.

س٥: ع = $\frac{\mu - ١٨٠}{٨}$ = ١,٢٥ ⟸ ١٨٠ − μ = ١٠ ⟸ μ = ١٧٠

س٦: ل(٢٠ < س < ٢٤) = $\left(\frac{٢٠ - ١٧,٥}{٣\frac{١}{٣}} < ع < \frac{٢٤ - ١٧,٥}{٣\frac{١}{٣}}\right)$

= ل (٠,٧٥ < س < ١,٩٥)

= ل (ع < ١,٩ × ٥) − ل (ع < ٠,٧٥)

= ٠,٩٧٤٤ − ٠,٧٧٣٤ = ٠,٢٠١٠

س٧: μ = ٧٦، σ = ٩

ل (س < ك) = ٠,٨٦٤٣

ل (ع < $\frac{ك - ٧٦}{٩}$) = ٠,٨٦٤٣

$\frac{ك - ٧٦}{٩}$ = ١,١

ك − ٧٦ = ٩,٩ ومنها ك = ٨٥,٩ ⟸ ك ≈ ٨٦

الملتقى التربوي
www.wepal.net

تمارين ومسائل: (٥ - ١)

س١: بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ينتج أنّ :

أ) $ع_1 = -٤ ، ع_2 = ١١ ، ع_3 = ٣٦ ، ع_4 = ٧١ ، ع_5 = ١١٦$

المتتالية : $(-٤ ، ١١ ، ٣٦ ، ٧١ ، ١١٦)$

ب) $ع_1 = ٣ ، ع_2 = -١ ، ع_3 = -٣ ، ع_4 = ٣ ، ع_5 = -٩$

المتتالية : $(٣ ، -١ ، -٣ ، ٣ ، -٩)$

س٢: أ) $ع_ن = \frac{ن + ١}{ن}$ حيث $ن \in ص^+$

ب) $ع_ن = ن^٣ + ١$ حيث $ن \in ص^+$

ج) $ع_ن = (-٢)^{ن+١}$ حيث $ن \in \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

س٣: $\because (ع_5)^2 = (٣ \times ٢^{٥-٥})^2 = ٩$

$ع_8 \times ع_2 = (٣ \times ٢^{٨-٥}) (٣ \times ٢^{٢-٥}) = ٢٤ \times \frac{٣}{٨} = ٩$

$\therefore (ع_5)^2 = ع_8 \times ع_2$

س٤: أ) متتالية عدد الشرائح غير المبيعة: ٩٢، ٨٣، ٧٣، ٦٢، ٥٠، ٣٧، ٢٣، ٨.

ب) اليوم الذي لا يحقق هذا النمط هو اليوم التاسع.

الملتقى التربوي
www.wepal.net

س١: أ) $ن = \infty$، $ع_ر = ك^{ر^٣}$ ، ∴ المتسلسلة هي: $\sum_{ر=١}^{\infty} ك^{ر^٣}$

ب) $ن = ٩٨$، $ع_ر = \frac{ر+٢}{ر+٣}$ ، ∴ المتسلسلة هي: $\sum_{ر=١}^{٩٨} \frac{ر+٢}{ر+٣}$

س٢: $\frac{٢ن+١}{٣} \sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{٢ن+١}{٣} \times \frac{ن(ن+١)}{٢} = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦} = \sum_{ر=١}^{ن} ر^٢$

س٣: أ) ∵ $\sum_{ر=١}^{٩٩٩} \left(لو \frac{ر}{ر+١} \right) = \sum_{ر=١}^{٩٩٩} \left(لو ر - لو(ر+١) \right) = (لو١ - لو٢) + (لو٢ - لو٣) + \ldots$

$+ (لو٩٨٩ - لو٩٩٩) + (لو٩٩٩ - لو١٠٠٠) = لو١ - لو١٠٠٠ = ٠ - ٣ = -٣$

ب) $\sum_{ر=١}^{١٠٠} \left(\frac{١}{ر} - \frac{١}{ر+١} \right) = \left(١ - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}\right) + \ldots + \left(\frac{١}{١٠٠} - \frac{١}{١٠١}\right) = ١ - \frac{١}{١٠١} = \frac{١٠٠}{١٠١}$

س٤: أ) $\sum_{ر=١}^{٣} (ر^٢ + ٢ر + ٥) = \frac{٣(٣+١)(٢\times٣+١)}{٦} + ٢ \times \frac{٤\times٣}{٢} + ٣ \times ٥ = ٤١$

يمكن التعويض مباشرة

ب) $\sum_{ر=١}^{٨٥} (-١)^ر = (-١) + (١) + (-١) + \ldots + (-١)^{٨٥} = -١$

ج) $\dfrac{\sum_{ر=1}^{٤٠} ر^{٢}}{\sum_{ر=1}^{٤٠} ٢ر} = \dfrac{\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}}{\frac{ن(ن+١)}{٢}} = \dfrac{(١+ن٢)}{٦} = \dfrac{(١+٤٠\times٢)}{٦} = \dfrac{٨١}{٦} = ١٣,٥$

د) $\sum_{ر=1}^{٤٠} \left(\dfrac{ر}{٢}\right) = \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{٤٠(٤٠+١)}{٢} = ٤١٠$

س٥: أ) المتسلسلة هي: $(١^{٢}+١٠)+(٢^{٢}+١٠)+(٣^{٢}+١٠)+\ldots+(٢ن^{٢}+١٠) = \sum_{ر=1}^{ن}(ر^{٢}+١٠)$

ب) ما قطعه في الدقائق الخمس الأولى:

$\sum_{ر=1}^{٥}(ر^{٢}+١٠) = (١^{٢}+١٠)+(٢^{٢}+١٠)+(٣^{٢}+١٠)+(٤^{٢}+١٠)+(٥^{٢}+١٠) = ١١+١٤+١٩+٢٦+٣٥ = ١٠٥$م

ما قطعه في الدقيقة العاشرة = $(١٠^{٢}+١٠) = ١١٠$م .

أي أنّ ما قطعه في الدقائق الخمس الأولى < ما قطعه في الدقيقة العاشرة.

تمارين ومسائل: (٥ - ٣) المتتاليات الحسابية (العددية)

س١: أ) $\because ع_{٤} = -٣٣ \Longleftarrow ا + ٣ء = -٣٣$ ..... (١)

$\because ع_{٩} = -١٣ \Longleftarrow ا + ٨ء = -١٣$ ..... (٢)

من (١)، (٢) بالطرح ينتج أنّ:

$٥ء = ٢٠$ ، ومنها: $ء = ٤$ بالتعويض في المعادلة (١) ينتـــج أنّ:

$ا + ١٢ = -٣٣ \quad ا = -٤٥$

المتتالية : $-٤٥، -٤١، -٣٧، \ldots\ldots\ldots\ldots$

ب) $ع_ن > ٠ \Leftarrow ا + (ن-١)د > ٠$

$\Leftarrow -٤٥ + (ن-١) ٤ > ٠ \Leftarrow -٤٥ + ٤ن - ٤ > ٠$

$\Leftarrow ٤ن - ٤٩ > ٠ \Leftarrow ٤ن > ٤٩ \Leftarrow ن > ١٢\frac{١}{٤}$ ∴ $ع_{١٣}$ هو أول حد موجب.

س٢: ∵ $ع_٢ + ع_٣ = ١٥٢ \Leftarrow ا + د + ا + ٢د = ١٥٢$

$\Leftarrow ٢ا + ٣د = ١٥٢$ .....(١)

∵ $ع_٦ - ع_٨ = ٨ \Leftarrow ا + ٥د - ا - ٧د = ٨$

$\Leftarrow -٢د = ٨$ ∴ $د = -٤$

بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ :

$٢ا - ١٢ = ١٥٢ \Leftarrow ٢ا = ١٥٢ + ١٢ = ١٦٤ \Leftarrow ا = ٨٢$

∴ المتتالية هي: ٨٢ ، ٧٨ ، ٧٤ ، .....

س٣: أ) $س - ٧ = ١٢٣ - (١٠س + ٩) \Leftarrow س - ٧ = ١٢٣ - ١٠س - ٩$

$\Leftarrow ١١ س = ١٣٠ - ٩ \Leftarrow ١١س = ١٢١ \Leftarrow س = ١١$

ب) $ع_ن = ا + (ن-١)د = ١٢٣$

$\Leftarrow ٧ + (ن-١) \times ٤ = ١٢٣ \Leftarrow ٧ + ٤ن - ٤ = ١٢٣$

$\Leftarrow ٤ن = ١٢٠ \Leftarrow ن = ٣٠$

س٤: أ) متتالية كميات في يومياً هي : ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٠٠٠٠٠

بفرض أن عدد الأيام الذي يكون فيه ما تبقى من الرمل ١١٢م^٣ هو (ر) يوماً

∵ ٨ر = ٢٠٠ - ١١٢ = ٨٨ $\Leftarrow$ ر = ١١ يوماً

ب) بوضع ٨ر = ٢٠٠ $\Leftarrow$ ر = ٢٥ يوماً

الملتقى التربوي
www.wepal.net

س٥: ∵ $\frac{س_{٥}}{س_{ن-٢}} = \frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٤}{٧} = \frac{١ + ٥ء}{١ + (ن-٢)ء}$ ⟸ ٤ + ٤ء ن = ٧ + ٥ء = ٣٥ + ٧ = ٨ء − ٤ء ن

⟸ ٤ء ن − ٤٣ء = ٣ ..... (١)

ع ن+٢ = ١ + (ن+١)ء = ٣٧

⟸ ء ن + ء = ٣٦ ..... (٢)

بضرب المعادلة رقم (٢) في −٤ وجمعها مع المعادله (١) ينتج أنّ:

⟸ ٤ء ن − ٤٣ء = ٣

−٤ء ن + −٤ء = −١٤٤

−٤٧ء = −١٤١ ⟸ ء = ٣

بالتعويض في المعادلة (٢) ينتج أنّ: ٣ن + ٣ = ٣٦ ومنها ٣ن = ٣٣ ن = ١١ . ، ء = ٣

للتحقق : ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ١٩، ٢٢، ٢٥، ٢٨، ٣١، ٣٤، ٣٧

تمارين ومسائل: (٥ - ٤) مجموع المتسلسلة الحسابية

س١: ∵ أ = ٣٠ ، ء = ٢٧ − ٣٠ = −٣ ، ن = ٢٠

جـ٢٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن−١)ء]

= ١٠ × (٦٠ + ١٩ × −٣) = ٣٠ .

س٢: جـ١٠ الأولى = $\frac{١٠}{٢}$ (٢أ + ٩ء) = ١٢٠

⟸ ٢أ + ٩ د = ٢٤ ..... (١)

جـ٦ التالية = $\frac{٦}{٢}$ (٢ع١١ + ٥ء) = ١٦٨

٣(٢)(أ + ١٠ ء) + ٥ء) = ١٦٨

٦ أ + ٧٥ء = ١٦٨ ÷ ٣

⟸ ٢أ + ٢٥ء = ٥٦ .....(٢)

من (١)، (٢) بالطـــــرح ينتـــــــــج أنّ:

١٦ء = ٣٢ ⟸ ء = ٢ ، نعوض في المعادلة (١) أ = ٣

المتسلسلة هـي : ٣ + ٥ + ٧ + ...

س٣: $أ = ٧ ، ل = -١٢ ، جـ_ن = -٥٠$

$\because$ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل) \Longleftarrow \frac{ن}{٢}(٧ - ١٢) = -٥٠$

$\Longleftarrow -٥ن = -١٠٠ \Longleftarrow ن = ٢٠$ عدد حدود المتتالية ٢٠ حداً

$ع_{٢٠} = أ + ١٩ء = -١٢ \Longleftarrow ٧ + ١٩ء = -١٢$

$١٩ء = -١٩ \Longleftarrow ء = -١$

المتسلسلة هي : $٧ + ٦ + ٥ + ... + -١٢$

س٤: $ن = ٢٥$ ، الحد الأوسط هو: $ع_{١٣} = ٣٨$ ، $ع_{٢٥} + ع_{٢٤} + ع_{٢٣} = ٢١٣$

$\because$ $ع_{١٣} = ٣٨ \Longleftarrow أ + ١٢ء = ٣٨$ ..... (١)

$ع_{٢٥} + ع_{٢٤} + ع_{٢٣} = أ + ٢٤ء + أ + ٢٣ء + أ + ٢٢ء = ٢١٣$

$\Longleftarrow (٣أ + ٦٩ء = ٢١٣) / ٣$

$\Longleftarrow أ + ٢٣ء = ٧١$ ..... (٢)

من (٢)، (١) بالطرح ينتـج أنّ:

$١١ء = ٣٣$ ومنها: $ء = ٣$ بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ:

$أ + ١٢ \times ٣ = ٣٨ \Longleftarrow أ = ٣٨ - ٣٦ = ٢$

المتسلسلة هي: $٢ + ٥ + ٨ + ... + ٧٤$

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل) = \frac{٢٥}{٢}(٢ + ٧٤) = ٧٦ \times \frac{٢٥}{٢} = ٩٥٠$ **أو**

$\because$ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}(٢أ + (ن-١)ء) = \frac{٢٥}{٢}(٢ \times ٢ + ٢٤ \times ٣) = ٧٦ \times \frac{٢٥}{٢} = ٩٥٠$

س٥:

$$\frac{\sum_{ر=١}^{٢ن} (٦ + ٤ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} (١ + ٢ر)} = \frac{(٦ \times ٢ن) + \frac{٤ \times ٢ن(٢ن + ١)}{٢}}{ن + \frac{٢ن(ن + ١)}{٢}}$$

$$= \frac{٨ن^{٢} + ١٦ن}{ن^{٢} + ٢ن} = \frac{٨(ن^{٢} + ٢ن)}{ن^{٢} + ٢ن} = ٨$$

الملتقى التربوي
www.wepal.net

حل آخر:

البسط = $\sum_{ر=١}^{٢ن}$ (٦ + ٤ر) = ١٠ + ١٤ + ١٨ + ... + (٦ + ٨ن) مجموع متتالية حسابية

فيها: أ = ١٠ ، ء = ٤ ، عدد حدودها: ٢ن

⟸ البسط = $\frac{٢ن}{٢}$ (أ+ل) = $\frac{٢ن}{٢}$ (١٠ + ٦ + ٨ن) = ن (١٦ + ٨ن) = ٨ن (٢ + ن) ..... (١)

المقام = $\sum_{ر=١}^{ن}$ (١ + ٢ر) = ٣ + ٥ + ٧ + ... + (١ + ٢ن) =

$\frac{ن}{٢}$ (أ+ل) = $\frac{ن}{٢}$ (٣ + ١ + ٢ن) = $\frac{ن}{٢}$ (٤ + ٢ن) = ن (٢ + ن) ..... (٢)

من (١)، (٢) ينتـج أنّ المقدار: $\frac{\sum_{ر=١}^{٢ن} (٦ + ٤ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} (١ + ٢ر)}$ = $\frac{٨ن (٢ + ن)}{ن (٢ + ن)}$ = ٨

تمارين ومسائل: (٥ - ٥) المتتالية الهندسية

س١: ∵ أ = ٣ ، ر = $\frac{-٩}{٣}$ = -٣، ع$_٧$ = أ ×ر^٦ = ٣ × (-٣)^٦ = ٢١٨٧

س٢: ∵ ع$_١$ + ع$_٢$ = ١٢ ⟸ أ + أر = ١٢ ⟸ أ(١ + ر) = ١٢ .....(١)

∵ ع$_٣$ + ع$_٤$ = ١٠٨ ⟸ أر^٢ + أر^٣ = ١٢ ⟸ أر^٢ (١ + ر) = ١٠٨ .....(٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج أنّ: ⟸ $\frac{أر^٢ (١ + ر)}{أ (١ + ر)}$ = $\frac{١٠٨}{١٢}$ ⟸ ر = ± ٣

أولاً: عندما: ر = ٣ ⟸ أ + أ٣ = ١٢ ⟸ أ٤ = ١٢ ⟸ أ = ٣

المتتالية هي : ٣، ٩، ٢٧، .....

ثانياً: عندما: ر = -٣ ⟸ أ -أ٣ = ١٢ ⟸ -أ٢ = ١٢ ⟸ أ = -٦

المتتالية هي : -٦، ١٨، -٥٤، .....

س٣: بفرض أنّ هذه الأعداد هي : أ، أر، أر^{٢}

∵ أ + أر + أر^{٢} = ٣٥

أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٣٥ .....(١)

∵ أ، أر+٦ ، أر^{٢} +٧ في توالٍ حسابي.

∵ أر + ٦ = $\frac{\text{أ} + \text{أر}^{٢} + ٧}{٢}$ ⟸ أ +أر^{٢} +٧ = ٢أر + ١٢

⟸ أر^{٢} – ٢أر + أ = ٥ ⟸ أ (ر^{٢} – ٢ر + ١) = ٥ ..... (٢)

من (٢)، (١) بالقسمة ينتج أنّ:

$\frac{\cancel{\text{أ}}\ (ر^{٢} - ٢ر + ١)}{\cancel{\text{أ}}\ (ر^{٢} + ر + ١)} = \frac{\cancel{٥}^{١}}{\cancel{٣٥}^{٧}}$ ⟸ $\frac{(ر^{٢} - ٢ر + ١)}{(ر^{٢} + ر + ١)} = \frac{١}{٧}$ ⟸ ٧ × (ر^{٢} – ٢ر +١) = ١×(ر^{٢} + ر + ١)

٧ر^{٢} – ١٤ر +٧ = ر^{٢} + ر + ١ ⟸ ٦ر^{٢} – ١٥ر + ٦ = ٠

(٦ر – ٣) (ر – ٢) = ٠ ⟸ ر = $\frac{١}{٢}$ ، ر = ٢

بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ:

أولاً: عندما: ر = $\frac{١}{٢}$

أ (١ + $\frac{١}{٢}$ + ($\frac{١}{٢}$)^{٢}) = ٣٥ ⟸ $\frac{٧}{٤}$ أ = ٣٥ ⟸ أ = ٢٠

∴ الأعداد هي: ٢٠ ، ١٠ ، ٥

ثانياً: عندما: ر= ٢ بالتعويض في المعادلة رقم (١) ينتج أنّ :

أ (١ + ٢ + ٤) = ٣٥ ⟸ ٧أ = ٣٥ ⟸ أ = ٥

∴ الأعداد هي: ٥ ، ١٠ ، ٢٠

س٤: العامل الأول

تكون متتالية حسابية فيها: أ = ٥٠٠٠ ، ء = ٥٠

راتب العامل الأول في السنة الخامسة والعشرين هو:

ع$_{٢٥}$ = أ + ٢٤ء = ٥٠٠٠ + ٢٤ × ٥٠ = ٦٢٠٠ دينار .

الموظف الثاني

تكون متتالية هندسية فيها: أ = ٥٠٠٠ ، ر = ١,٠٥

راتب العامل الثاني في السنة الخامسة والعشرين هو:

ع$_{٢٥}$ = أ × ر^{٢٤} = ٥٠٠٠ × (١,٠٥)^{٢٤} = ١٦١٢٥,٥ دينار

ثانياً: بفرض أنّ ($\overline{ع}$) هي مقدار العلاوة السنوية التي تجعل راتب العامل الأول = راتب العامل الثاني في السنه الخامسة العشرين.

$\Leftarrow$ أ + ٢٤ $\overline{ع}$ = ١٦١٢٦,٥ $\Leftarrow$ ٥٠٠٠ + ٢٤ $\overline{ع}$ = ١٦١٢٦,٥

$\Leftarrow$ $\overline{ع}$ = ٤٦٣,٦ دينار

تمارين ومسائل: (٥ - ٦) المتتالية الهندسية المنتهية ومجموعها

س١: أ = ١، ل = ٦٤ ، جـ$_ن$ = ٨٥

$\because$ جـ$_ن$ = $\frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ $\Leftarrow$ ٨٥ = $\frac{٦٤ ر - أ}{ر - ١}$ $\Leftarrow$ ٨٥ ر - ٨٥ = ٦٤ ر - أ = ٨٥ - ١

$\Leftarrow$ ٢١ ر = ٨٤ $\therefore$ ر = ٤

س٢: جـ$_ن$ = ٣٩٠٥ ، ل = ٣١٢٥ ، ر = ٥ ، أ = ؟ ، ن = ؟

١) $\because$ جـ$_ن$ = $\frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ $\Leftarrow$ ٣٩٠٥ = $\frac{٣١٢٥ \times ٥ - أ}{٥ - ١}$ $\Leftarrow$ ١٥٦٢٥ - أ = ١٥٦٢٠ $\Leftarrow$ أ = ٥

٢) $\because$ ل = أ ر$^{ن-١}$ $\Leftarrow$ ٣١٢٥ = ٥ × ٥$^{ن-١}$ $\Leftarrow$ ٣١٢٥ = ٥^{ن} $\Leftarrow$ ٥^{٥} = ٥^{ن} $\Leftarrow$ ن = ٥

س٣: $\because$ $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٣ ر$^{-٨}$ = ٣$^{-٧}$ + ٣$^{-٦}$ + ٣$^{-٥}$ + ... + ٣^{٢} متسلسلة هندسية فيها:

أ = ٣$^{-٧}$ ، ر = ٣ ، ن = ١٠

$\because$ جـ$_ن$ = $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ = $\frac{٣^{-٧}(٣^{١٠} - ١)}{٣ - ١}$ = $\frac{٣^{-٧} \times ٥٩٠٤٨}{٢}$ ≈ ١٣,٥

س٤: $\because$ $\frac{أ ر + أ ر^{٢}}{٢}$ = ٥ $\Leftarrow$ أ ر (١ + ر^{٢}) = ١٠ ..... (١)

$\because$ $\sqrt{أ ر \times أ ر^{٣}}$ = ٤ $\Leftarrow$ أ ر^{٢} = ٤ ..... (٢)

من (١)، (٢) بالقسمة ينتج أنّ:

$$\frac{\cancel{أ}\,ر(١+ر^{٢})}{\cancel{أ}\,ر^{٢}} = \frac{\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{٢٤}} \Leftarrow \frac{(١+ر^{٢})}{ر} = \frac{٥}{٢} \Leftarrow ٢ر^{٢} + ٢ = ٥ر$$

$$\Leftarrow ٢ر^{٢} - ٥ر + ٢ = ٠ \Leftarrow (٢ر-١)(ر-٢) = ٠ \text{ ومنها: } ر = \frac{١}{٢} ، ر = ٢$$

أولاً: عندما $ر = \frac{١}{٢}$ بالتعويض في المعادلة رقم (٢) ينتج أنّ: $أ = ١٦$

المتسلسلة هي: ١٦ + ٨ + ٤ + ...

$$جـ_{١٠} = \frac{أ\,(ر^{١٠}-١)}{ر-١} = \frac{١٦((\frac{١}{٢})^{١٠}-١)}{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١٠٢٣}{٣٢}$$

ثانياً: $ر = ٢$ بالتعويض في المعادلة رقم (٢) ينتج أنّ: $أ = ١$

المتسلسلة هي : ١ + ٢ + ٤ + ٠٠٠٠٠٠

$$جـ_{١٠} = \frac{أ\,(ر^{١٠}-١)}{ر-١} = \frac{١((٢)^{١٠}-١)}{٢-١} = ١٠٢٣$$

س٥: أ) متتالية ارتفاعات الكرة بعد الصدمات ٦، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، .... تكون متسلسلة هندسية فيه $أ = ٦$، $ر = \frac{٣}{٤}$

ارتفاع الكرة بعد الصدمة السادسة: $ع_{٦} = أر^{٥} = ٦(\frac{٣}{٤})^{٥} = \frac{٧٢٩}{٥١٢}$.

متتالية الارتفاعات: ٨، ٦، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٢٧}{٨}$ ، $\frac{٨١}{٣٢}$

ب) $جـ_{ن} = \frac{٨((\frac{٣}{٤})^{ن}-١)}{\frac{٣}{٤}-١} = \frac{٧٨١}{٣٢}$ ومنها : $(\frac{٣}{٤})^{ن} = (\frac{٣}{٤})^{٥} \Leftarrow$ ن = ٥ وهي بعد الصدمة الرابعة.

س٥: متسلسلة التأرجح هي : ١,٨ ، ٢,٧ ، ٠,٩ ، ٠,٣ ، ..... متسلسلة هندسية $أ = ١,٨$، $ر = \frac{١}{٣}$

$$جـ_{٥} = \frac{١,٨((\frac{١}{٣})^{٥}-١)}{\frac{١}{٣}-١} = ١٢,١ \text{ سم.}$$

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة الصحيحة	ب	ب	ج	أ	ب	أ	د	ب	ج	ج

س٢: $أ = ٣$، $ل = ١٥٣٦$ ، $جـ_ن = ٣٠٦٩$

$\because جـ_ن = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} \Leftarrow ٣٠٦٩ = \frac{١٥٣٦ ر - ٣}{ر - ١} \Leftarrow ٣٠٦٩ ر - ٣٠٦٩ = ١٥٣٦ ر - ٣$

$\Leftarrow ٣٠٦٩ ر - ١٥٣٦ ر = ٣٠٦٩ - ٣ \Leftarrow ١٥٣٣ ر = ٣٠٦٦ \Leftarrow \therefore ر = ٢$

س٣: $أ = ٢$ ، $ر = ٢$ ، $ع_٥ = ٣٢$ ، $ن = ٨$

$جـ_٨ = \frac{ع_٥ (ر^٨ - ١)}{ر - ١} = \frac{٣٢ (٢^٨ - ١)}{٢ - ١} = ٨١٦٠$

س٤: ب وسط حسابي بين أ، جـ ∴ أ، ب، جـ في توالٍ حسابي

∴ ب = أ + ء ، جـ = أ + ٢ ء

∴ المقدار: $\frac{ب + ٢أ}{ب - جـ} + \frac{ب + ٢ جـ}{أ - ب} = \frac{أ + ء + ٢أ}{أ - ٢ء - أ + ء} + \frac{أ + ٢ء + ٢أ + ٤ء}{أ - ء - أ} = \frac{٣أ + ٣ء}{-ء} + \frac{٣أ + ٥ء}{ء} = \frac{٤ء}{ء} = ٤$

س٥: الحدود فردية الرتبة (٣، ٧، ١١، .....، ٥١) ١٣ حداً

الحدود زوجية الرتبة (١١، ٢١، ٣١، .....، ١٢١) ١٢ حداً

$جـ_{٢٥}$ = ($جـ_{١٣}$ للحدود الفردية الرتبة) + ($جـ_{١٢}$ للحدود الزوجية الرتبة)

$= \frac{١٣}{٢} (٣ + ٥١) + \frac{١٢}{٢} (١١ + ١٢١) = ١١٤٣$

س٦: $\because و_٤ - و_٢ = ٨٤ \Longleftarrow ا ر^٤ - ا ر^٢ = ٨٤$

$\Longleftarrow ا ر^٢ (ر^٢ - ١) = ٨٤$ ..... (١)

$\because و_٣ \Longleftarrow ا ر^٣ = ٥٦$ ..... (٢)

بقسمة (١) على (٢) ينتج أنّ: $\frac{ا ر^٢ (ر^٢ - ١)}{ا ر^٣} = \frac{٨٤}{٥٦} \Longleftarrow \frac{(ر^٢ - ١)}{ر} = \frac{٣}{٢} \Longleftarrow ٢ ر^٢ - ٢ = ٣ ر$

$\Longleftarrow ٢ ر^٢ - ٣ ر - ٢ = ٠ \Longleftarrow (ر - ٢)(٢ ر + ١) = ٠ \Longleftarrow ر = ٢ ، ر = -\frac{١}{٢}$

أولاً : عندما ر = ٢ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ: ٨ ا = ٥٦

ا = ٧ ∴ الأوساط هي: ١٤، ٢٨، ٥٦، ١١٢

ثانياً: عندما: $ر = -\frac{١}{٢}$ بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أنّ:

$ا \times (-\frac{١}{٢})^٣ = ٥٦ \Longleftarrow ا = -٨ \times ٥٦ = -٤٤٨$

$\Longleftarrow$ الأوساط هي: ٢٢٤، -١١٢، ٥٦، -٢٨

س٧: $\because$ جـ$_٦$ الأولى = ٩ جـ$_٣$ الأولى

$\frac{ا \times (ر^٦ - ١)}{ر - ١} = ٩ \frac{ا \times (ر^٣ - ١)}{ر - ١} \Longleftarrow (ر^٦ - ١) = ٩ (ر^٣ - ١) \Longleftarrow (ر^٣ - ١)(ر^٣ + ١) = ٩ (ر^٣ - ١)$

$\Longleftarrow ر^٣ = ٨ \Longleftarrow ر = ٢$

$\because ع_{١٠} = ا \times ٢^٩ = ٦٤ \Longleftarrow ا = \frac{١}{٨}$

المتتالية هي: $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، .....

س٨: المتبقي: ٥٠ ، ٤٠ ، ٣٢ ، ..... متتالية هندسية ا = ٥٠ ، $ر = \frac{٤}{٥}$

$\because ع_٦ = ا \times ر^٥ = ٥٠ (٠,٨)^٥ = ١٦,٣٨٤$

حلول الوحدة السادسة: القطوع المخروطية

تمارين ومسائل: (٦ - ١) القطع المكافئ

س١: أ) ص^{٢} = −٤س هذا قطع مكافئ مفتوح لليسار ، فيه: −٤أ = −٤ ، أ = ١ ، إحداثيات الرأس (٠ ، ٠)، البؤرة (−١ ، ٠)، معادلة الدليل س = ١ ، معادلة محور التماثل ص = ٠ (محور السينات).

ب) س^{٢} = −٨ ص هذا قطع مكافئ مفتوح للأسفل ، فيه: −٤أ = −٨ ، أ = ٢، إحداثيات الرأس (٠ ، ٠)، البؤرة (٠ ، − ٢)، معادلة الدليل ص = ٢ ، معادلة محور التماثل س = ٠ (محور الصادات).

س٢: القطع يمر بالنقطة (−٣ ، ٦) ومحور تماثله محور السينات ⟵ مفتوح جهة اليسار

معادلته ص^{٢} = −٤أ س ، يمر منحناه بالنقطة (−٣ ، ٦)

إذن: ٣٦ = ١٢أ ، ومنها: أ = ٣ المعادلة ص^{٢} = −١٢س

س٣: معادلة هذا القطع المكافئ هي: ص^{٢} = ٤أ س، إحداثيات البؤرة (أ ، ٠)

ف^{٢} =(س$_{١}$ −أ)^{٢} + (٦ − ٠)^{٢} = ١٠٠ ، إذن: (س$_{١}$ −أ)^{٢}= ٦٤ ،

(س$_{١}$ −أ)= ± ٨

س$_{١}$= أ ± ٨

لكن: (٦)^{٢} = ٤ أ س$_{١}$

إما: ٣٦ = ٤ أ (أ + ٨) ومنها: أ^{٢}+ ٨ أ −٩ = ٠ ، (أ+٩) (أ−١) = ٠

أ = −٩ (قيمة مرفوضة) ، أ = ١ (مقبولة) ، إذن: ص^{٢} = ٤س

أو: ٣٦ = ٤ أ (أ − ٨) ومنها: أ^{٢} − ٨ أ −٩ = ٠ ، (أ−٩) (أ+١)=٠

أ = −١ (قيمة مرفوضة) ، أ = ٩ (مقبولة) ، إذن: ص^{٢} = ٣٦س

س٤: منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطة (٢، ٨) وهي في الربع الأول وهناك احتمالان:

مفتوح لأعلى ، مفتوح جهة اليمين

أولاً: مفتوح لأعلى

س^{٢} = ٤ أ ص ⟵ ٤ = ٣٢أ ⟵ أ = $\frac{١}{٨}$ معادلة القطع المكافئ هي: س^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ص

ثانياً: مفتوح جهة اليمين

ص^{٢} = ٤ أ س ⟵ ٦٤ = ٨أ ⟵ أ = ٨ معادلة القطع المكافئ هي: ص^{٢} = ٣٢ س

س٥: س = $\frac{٤}{\text{ظا}^{٢}(٢\text{هـ}) + ١} = \frac{٤}{\text{قا}^{٢}(٢\text{هـ})} = ٤\,\text{جتا}^{٢}(٢\text{هـ})$ ..... (١)

ص = ١ − ٢ جا^{٢}هـ = جتا (٢هـ) بالتربيع ⟵ ص^{٢} = جتا^{٢} (٢هـ) ..... (٢) من (١) ، (٢) ينتج أن

س = ٤ص^{٢} ⟵ ص^{٢} = $\frac{١}{٤}$ س

تمارين ومسائل: (٦ - ٢) القطع الناقص

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	أ	ب

س٢: نكتب القطع على الصورة القياسية: $\frac{\text{س}^{٢}}{\frac{١}{٤}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\frac{١}{٩}} = ١$ ، إذن: هذا قطع ناقص سيني، فيه:

أ = $\frac{١}{٢}$، ب = $\frac{١}{٣}$، جـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٦}$

إحداثيات الرأسين ($\pm\frac{١}{٢}$، ٠)، إحداثيات البؤرتين ($\pm\frac{\sqrt{٥}}{٦}$، ٠)

طول المحور الأكبر = ٢أ = ١ ، طول المحور الأصغر = ٢ب = $\frac{٢}{٣}$

معادلة المحور الأكبر (محور السينات) ⟵ ص = صفر

معادلة المحور الأصغر (محور الصادات) ⟵ س = صفر

س٣: البُعد بين الرأس القريب والبؤرة = أ − جـ = ٢

البعد بين الرأس البعيد والبؤرة = أ + جـ = ٨

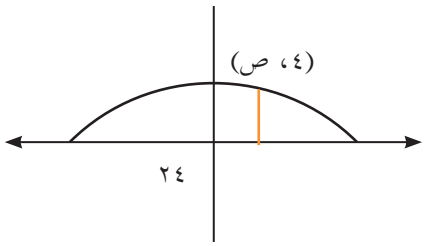
بحل هذا النظام ينتج أنّ: أ = ٥ ، جـ = ٣ ، ب = ٤

معادلة القطع الناقص الصادي: $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} + \frac{\text{س}^{٢}}{١٦} = ١$

س٤: المحل الهندسي هو قطع ناقص سيني، في: ٢ أ = ١٢ ومنها: أ = ٦، البؤرتان (± ٥، ٠) ، ومنها: جـ = ٥، إذن: ب = $\sqrt{١١}$

معادلة هذا القطع هي: $\frac{س^{٢}}{٣٦} + \frac{ص^{٢}}{١١} = ١$

س٥: المحور الأكبر أفقي ← قطع ناقص سيني



٢ أ = ٢٤ ← أ^{٢} = ١٤٤

أعلى نقطة تبعد ٦ م ← ب = ٦ ، ب^{٢} = ٣٦

معادلة القطع الناقص السيني: $\frac{س^{٢}}{١٤٤} + \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$

عندما: س = ٤ ← $\frac{٤^{٢}}{١٤٤} + \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$ ← ص^{٢} = ٣٢ ← ص = $\sqrt{٣٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ متر.

تمارين ومسائل: (٦ - ٣) القطع الزائد

س١: أ) ٩س^{٢} − ص^{٢} = ٣٦ ومنها: $\frac{س^{٢}}{٤} - \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$ وهذا قطع زائد سيني فيه:

أ = ٢ ، ب = ٦ ، جـ = $\sqrt{٤٠}$ ، البؤرتان (± $\sqrt{٤٠}$ ، ٠) ،

الرأسان (± ٢، ٠) ، طول المحور القاطع = ٢أ = ٤ ، طول المحور المرافق = ٢ب = ١٢

الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١٠ \times ٢}}{٢} = \sqrt{١٠}$

ب) ٦ص^{٢} − ٢س^{٢} = ٣ ومنها: $\frac{ص^{٢}}{\frac{١}{٢}} - \frac{س^{٢}}{\frac{٣}{٢}} = ١$ ،وهذا قطع زائد صادي فيه:

أ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ب = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ، جـ^{٢} = $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢}$ = ٢ ، جـ = $\sqrt{٢}$

الرأسان: (٠، ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)، البؤرتان: (٠، ± $\sqrt{٢}$) طول المحور القاطع = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ وحدة طول ،

طول المحور المرافق = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٦}$ وحدة طول، الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = ٢

ج) ٩س^{٢} −١٦ص^{٢}= ١ ومنها: $\frac{\text{س}^{٢}}{\frac{١}{٩}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\frac{١}{١٦}} = ١$ قطع زائد سيني

الرأسان: ($\pm\frac{١}{٣}$، ٠)، البؤرتان: ($\pm\frac{٥}{١٢}$، ٠) طول المحور القاطع = $\frac{٢}{٣}$ وحدة طول ،

طول المحور المرافق = $\frac{١}{٢}$ وحدة طول ، الاختلاف المركزي = هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٤}$

س٢: النقطة ($\frac{\sqrt{٧٣}}{٢}$، ٢) تقع على منحنى القطع الزائد، الفرق المطلق بين النقطة والبؤرتين يعني: ٢أ ،

١٦س^{٢} − ٩ ص^{٢} − ١٤٤ = صفر، ومنها: $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$، أي أنّ: أ = ٣

إذن: الفرق المطلق = ٦ .

س٣: بؤرة القطع المكافئ س^{٢}=٢٠ ص، هي (٠، ٥) إذن: القطع الزائد صادي فيه جـ = ٥

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٣}$ اذن $\frac{٥}{\text{أ}} = \frac{٥}{٣}$، ومنها: أ = ٣ ، ب = ٤

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{\text{ص}^{٢}}{٩} - \frac{\text{س}^{٢}}{١٦} = ١$

س٤: طول المحور القاطع = ٢أ = ٨ ومنها: أ = ٤، هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٥}{٤}$ ← جـ = ٥

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} ← ب^{٢} = جـ^{٢} − أ^{٢} = ٢٥ − ١٦ = ٩

معادلة القطع الزائد السيني: $\frac{\text{س}^{٢}}{١٦} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$

معادلة القطع الزائد الصادي: $\frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} - \frac{\text{س}^{٢}}{٩} = ١$

س٥: $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ك}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}-٤} = ١$، حيث إن: ٤ < ك < ٠ فإن: ٤ − ك > ٠؛ ولذلك قطع زائد سيني

أ^{٢} = ك ، ب^{٢} = ٤ − ك ← جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ٤ ، ومنها: جـ = ٢

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٢} = \frac{٢}{\text{أ}}$ ومنها: أ = $\frac{٤}{٣}$ ← الفرق المطلق = ٢ × أ = ٢ × $\frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

س١:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة الصحيحة	ب	د	أ	أ	د

س٢: $\frac{ص^{٢}}{٢٥ - ع} - \frac{س^{٢}}{١٦ - ع} = ١$ قطع زائد صادي

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ٩ ومنها جـ = ٣ ، البؤرتان هما: (٠، ±٣)

س٣: هذا قطع زائد صادي معادلته: $\frac{ص^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ يمر منحناه بالنقطتين: (٤، ٦)، (١، -٣)

بتعويض النقطة الاولى ينتج: ٣٦ب^{٢} - ١٦أ^{٢} = أ^{٢}ب^{٢} ..... (١)

بتعويض النقطة الثانية ينتج: ٩ب^{٢} - أ^{٢} = أ^{٢}ب^{٢} ..... (٢) بطرح ٢ من:

٢٧ب^{٢} - ١٥أ^{٢} = ٠ ، أي أن: ٩ب^{٢} - ٥أ^{٢} = ٠ إذن: ٩ب^{٢} = ٥أ^{٢}

ب^{٢} = $\frac{٥}{٩}$أ^{٢} نعوض في ٢ ينتج أن : ٥أ^{٢} - أ^{٢} = $\frac{٥}{٩}$ × أ^{٢} ومنها: ٣٦ أ^{٢} = ٥أ^{٤}

أ^{٢} = $\frac{٣٦}{٥}$، ب^{٢} = ٤ ← معادلة القطع الزائد: $\frac{٥ص^{٢}}{٣٦} - \frac{س^{٢}}{٤} = ١$

س٤: س = ٢ ن^{٢} ، ص = ٦ ن ، ومنها ص^{٢} = ٣٦ ن^{٢}

ص^{٢} = ٣٦ × $\frac{١}{٢}$ س ← ص^{٢} = ١٨ س

معادلة القطع المكافئ مفتوح لليمين بؤرته ($\frac{٩}{٢}$ ، ٠)

س٥: س^{٢} = -٤أ ص من هندسة الشكل (٤ ، -٣) تقع على المنحنى

١٦ = -٤أ × -٣ ومنها: أ = $\frac{٤}{٣}$ ← س^{٢} = -$\frac{١٦}{٣}$ ص.

تمارين ومسائل: (٧ - ١) نهاية الإقتران عند نقطة

س١: $\lim_{س \to -١} (س^{٢} - ٢س) = ٣$ ، $\lim_{س \to -١^{+}} (س^{٢} - ٢س) = ٣ \leftarrow \lim_{س \to -١} (س^{٢} - ٢س) = ٣$

س٢: $\lim_{س \to ٣} \frac{|س^{٢} - ٧س + ١٢|}{س - ٣}$ ، غير موجودة (وضح ذلك باستخدام الجدول)

س٣: $ن(س) = س - \left[\frac{س}{٢}\right] = ن(س) = \begin{cases} س - ٠ & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ س - ١ & ، \ ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٢^{+}} ن(س) = ١$ ولذلك $\lim_{س \to ٢} ن(س)$ غير موجودة. (وضح بالرسم)

س٤: $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س - ٢} = ١$ (وضح بالرسم)

س٥: $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} جا س = ١$ (وضح بالرسم)

تمارين ومسائل: (٧ - ٢) نظريات النهايات

س١: أ) $\lim_{س \to ١} \frac{س \times ن(س)}{٢ هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to ١} س \times \lim_{س \to ١} ن(س)}{٢ \lim_{س \to ١} هـ(س)} = \frac{١ \times -٢}{١ \times ٢} = -١$

ب) $\lim_{س \to ١} (ن(س) + ٢س)° = (\lim_{س \to ١} ن(س) + \lim_{س \to ١} ٢س)° = (-٢ + ٢)° =$ صفر

ج) $\lim_{س \to ١} \sqrt{٣ ن(س) + ١٠} = \sqrt{\lim_{س \to ١} ٣ ن(س) + \lim_{س \to ١} ١٠} = \sqrt{٤} = ٢$

س٢: أ) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + س}{٢س^٢ + ٣} = \frac{٤ + -٢}{٨ + ٣} = \frac{٢}{١١}$.

ب) $\lim_{ص \to -١} \frac{\sqrt{ص^٢ + ٣}}{٢ص^٢ - ١} = \frac{\sqrt{٤}}{-٢} = ٢$

ج) $\lim_{ع \to ١} (ع جتا \pi ع + جا ٢\pi ع) = \lim_{س \to ٠} (جتا \pi + جا ٢\pi) = -١$.

د) $ن(س) = |س^٢ - ٦س + ٥| = \begin{cases} س^٢ - ٦س + ٥ & ، \ س \geq ١ \\ -(س^٢ - ٦س + ٥) & ، \ ١ < س < ٥ \\ س^٢ - ٦س + ٥ & ، \ س \leq ٥ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٥^+} ن(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٥^-} ن(س) = ٠$ $\leftarrow$ $\lim_{س \to ٥} ن(س) = ٠$ ولذلك $\lim_{س \to ٥} ن(س) = ٠$

س٣: $ن(س) = [\frac{١}{٣} س + ١] = \begin{cases} ٠ & ، \ -٣ \leq س < ٠ \\ ١ & ، \ ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ & ، \ ٣ \leq س < ٦ \end{cases}$ =

أ) $\lim_{س \to -٢} ن(س) = ٠$

ب) $\lim_{س \to -٣^-} ن(س) + ٢س) = \lim_{س \to -٣^-} (١ + ٢س) = ٧$

$\lim_{س \to -٣^+} ن(س) + ٢س) = \lim_{س \to -٣^+} (٢ + ٢س) = ٨$ $\leftarrow$ $\lim_{س \to ٣} ن(س) + ٢س)$ غير موجودة.

س٤: $ن(س) = |س^٢ - س - ٢| + |س + ٣|$ نعيد التعريف من خلال مهارة بحث الإشارة للاقتران:

$ن(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س - ٥ & ، \ س < -٣ \\ س^٢ + ١ & ، \ -٣ \leq س \leq -١ \\ -س^٢ + ٢س + ٥ & ، \ -١ < س < ٢ \\ س^٢ + ١ & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

أ) $\lim_{س \to ٢} ن(س) = ٥$ (لاحظ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى عند نقطة التحول س = ٢)

ب) $\lim_{س \to -٣} (ن(س) + س^٢) = ١٩$ (لاحظ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى عند نقطة التحول س = -٣).

س٥: أ) $\lim_{س \to ٢} (أ س^٢ + ٣س - ٢أ) = ١٠$ ومنها: $(٤أ + ٦ - ٢أ) = ١٠$ ومنها: $أ = ٢$

ب) $\lim_{س \to ١} ن(س) + ٣) = \lim_{س \to ١} (٢س^٢ + ٣س - ٤ + ٣) = ٤$

س٦: النهاية موجودة عند س ← ٢ ؛ ولذلك: $\lim_{س \to ٢^-} ن(س) = \lim_{س \to ٢^+} ن(س)$

$٤أ + ٧ = ٤ + ١٠أ$ ومنها: $أ = \frac{١}{٢}$

تمارين ومسائل: (٧ - ٣) النهايات والصور غير المعينة

س١: أ) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤} = \lim_{س \to -٢} \frac{س(س + ٢)}{(س+٢)(س-٢)} = \lim_{س \to -٢} \frac{س}{(س-٢)} = \frac{١}{٢}$

ب) $\lim_{س \to ٥} \frac{(س-٢)(س-٥)}{(٥ - س)} = -٣$

ج) $\lim_{س \to ٣} \frac{س(س-٣)(س-٢)}{(س - ٣)} = ٣$

د) $\lim_{س \to ٢\sqrt{}} \frac{س^٨ - ١٦}{س^٤ - ٤} = \lim_{س \to ٢\sqrt{}} \frac{(س^٤ - ٤)(س^٤ + ٤)}{(س^٤ - ٤)} = ٤ + ٤ = ٨$

هـ) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{٢س + ٦} - ٤}{٢س - ١٠} \times \frac{\sqrt{٢س + ٦} + ٤}{\sqrt{٢س + ٦} + ٤} = \lim_{س \to ٥} \frac{٢س - ١٠}{٢س - ١٠} \times \frac{١}{\sqrt{٢س + ٦} + ٤} = \frac{١}{٨}$

س٢: $\lim_{س \to ٢^-} ن(س) = \lim_{س \to ٢^+} ن(س)$ ؛ لأن النهاية موجودة

$$\text{نهـــا}_{س\to ٢^+} \frac{س^٢ + ٢س - ٨}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س\to ٢^+} \frac{أس^٢ + س - ٤}{س^٢ + ١} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ ومنها: } أ = ٨$$

س٢: $\text{نهـــا}_{س\to ٢} \frac{أس^٢ - بس - ٦}{(س - ٢)} = ٥$ أي موجودة وقيمتها معلومة.

عندما: س $\longrightarrow$ ٢ المقام = صفر؛ ولذلك حتى تكون النهاية موجودة عندما: س $\longrightarrow$ ٢ فإنّ البسط = صفر .

$٤أ - ٢ب - ٦ = ٠$ ومنها $٢أ - ب = ٣$ ..... ومنها $٢أ - ٣ = ب$

$$\text{نهـــا}_{س\to ٢} \frac{أس^٢ - (٢أ - ٣)س - ٦}{(س - ٢)} = ٥$$

$$\text{نهـــا}_{س\to ٢} \frac{(أس + ٣)(س - ٢)}{(س - ٢)} = ٥ \text{ ومنها: } ٢أ + ٣ = ٥ \text{ ومنها: } أ = ١ \text{ ، } ب = -١$$

تمارين ومسائل: (٧ - ٤) نهايات الاقترانات الدائرية

س١: أ) $\text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}^٢ ٣س}{\text{جا}^٢ ٧س} = \text{نهـــا}_{س\to ٠} \left(\frac{\text{ظا}^٢ ٣س}{س^٢} \div \frac{\text{جا}^٢ ٧س}{س^٢}\right) = \text{نهـــا}_{س\to ٠} \left(\frac{\text{ظا}٣س}{س}\right)^٢ \div \left(\frac{\text{جا}٧س}{س}\right)^٢ = \frac{٩}{٤٩}$

ب) $\text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{١}{س^٢ \text{ظتا}^٢ \pi س} = \text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}^٢ \pi س}{س^٢} = \pi^٢$

ج) $\text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{\text{ظاس جا}٥س}{٣س} = \text{نهـــا}_{س\to ٠} \text{ظاس} \times \text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٥س}{٣س} = ٠ \times \frac{٥}{٣} = ٠$

د) $\text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{-٣\text{جا}س}{٥\text{ظتا}٣س} = \text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{-٣\text{جا}س}{٥} \times \text{ظا}٣س = ٠$

س٢: أ) $\text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{\text{جتا}س - \text{جتا}٣س}{١ - \text{جتا}٧س} = \text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{\left(١ - ٢\text{جا}^٢ \frac{س}{٢}\right) - \left(١ - ٢\text{جا}^٢ \frac{٣س}{٢}\right)}{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢ \frac{٧س}{٢})} =$

$$= \text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{-٢\text{جا}^٢ \frac{س}{٢} + ٢\text{جا}^٢ \frac{٣س}{٢}}{٢\text{جا}^٢ \frac{٧س}{٢}} = \frac{-\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤}}{\frac{٤٩}{٤}} = \frac{٨}{٤٩}$$

ب) $\text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٥س}{س\text{جا}٥س} \times \frac{١ + \text{جتا}٥س}{١ + \text{جتا}٥س} = \text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^٢ ٥س}{(س\text{جا}٥س) \times (١ + \text{جتا}٥س)}$

$$= \text{نهـــا}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٥س}{س} \times \frac{\cancel{\text{جا}٥س}}{\cancel{\text{جا}٥س}} \times \frac{١}{(١ + \text{جتا}٠)} = \frac{٥}{٢}$$

س٣: $ن(س) = \frac{\sqrt{جا^{٢}س}}{س} = \frac{|جاس|}{س}$

$نهـا_{س \to ٠^-} \frac{-جاس}{س} = -١$ ، $نهـا_{س \to ٠^+} \frac{جاس}{س} = ١$، $نهـا_{س \to ٠^-} ن(س) \neq نهـا_{س \to ٠^+} ن(س)$ ← $نهـا_{س \to ٠} ن(س)$ غير موجودة

س٤: $نهـا_{س \to ٠} \frac{أ - جتاب س}{س^{٢}} = \frac{٩}{٢}$ النهاية موجودة وقيمتها معلومة.

قيمة البسط عندما س ← ٠ يساوي صفراً ، ولكي تكون النهاية موجودة قيمة المقام عندما س ← ٠ تساوي صفراً

أ - جتا ٠ = ٠ أي أ - ١ = ٠ ومنها: أ = ١

$نهـا_{س \to ٠} \frac{أ - جتاب س}{س^{٢}} = نهـا_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٢جا^{٢}\frac{ب س}{٢})}{س^{٢}} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: $نهـا_{س \to ٠} \frac{٢جا^{٢}\frac{ب س}{٢}}{س^{٢}} = \frac{٩}{٢}$

ومنها: $٢ \times \frac{ب^{٢}}{٤} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: ب = ± ٣

أو: $نهـا_{س \to ٠} \frac{١ - جتاب س}{س^{٢}} \times \frac{١ + جتاب س}{١ + جتاب س} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: $نهـا_{س \to ٠} \frac{جتا^{٢}ب س}{س^{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$

ومنها: $\frac{ب^{٢}}{٢} = \frac{٩}{٢}$ ومنها: ب = ± ٣

تمارين ومسائل: (٧ - ٥) نهاية الإقتران عند س ← ± ∞

س١: أ) $نهـا_{س \to \infty} (س^{٣} - ٢س + ٥) = نهـا_{س \to \infty} س^{٣}(١ - \frac{٢}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٣}}) = \infty \times ١ = \infty$.

ب) $نهـا_{س \to \infty} \frac{(س^{٢}+٣)(س+٥)}{(٣س^{٢}+٣)^{٢}} = نهـا_{س \to \infty} \frac{س^{٣}+٥س^{٢}+٣س+١٥}{٩س^{٤}+١٨س^{٢}+٩} = نهـا_{س \to \infty} \frac{س^{٣}(١ + \frac{٥}{س} + \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{١٥}{س^{٣}})}{س^{٤}(٩ + \frac{١٨}{س^{٢}} + \frac{٩}{س^{٤}})}$

$= نهـا_{س \to \infty} \frac{١}{س} \times \frac{١}{٩} = ٠$

ج) $نهـا_{س \to \infty} (\frac{س^{٢}-٢}{س - ١} - \frac{س+٢}{س + ١}) = نهـا_{س \to \infty} \frac{(س^{٢}-٢)(س+١) - (س+٢)(س-١)}{(س - ١)(س+١)} = نهـا_{س \to \infty} (\frac{س^{٣} - ٣س}{س^{٢} - ١})$

$= نهـا_{س \to \infty} \frac{س^{٣}(١ - \frac{٣}{س})}{س^{٢}(١ - \frac{٢}{س^{٢}})} = نهـا_{س \to \infty} س \times ١ = \infty$

د) $\text{نهـــا}_{س\to\infty}\left(\frac{س^{٢}-٢}{٣س^{٢}+٢س-٥}\right)^{٥}=\left(\text{نهـــا}_{س\to\infty}\frac{س^{٢}-٢}{٣س^{٢}+٢س-٥}\right)^{٥}=\ldots\ldots=\left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}=\frac{١}{٢٤٣}$

هـ) $\text{نهـــا}_{س\to-\infty}\frac{|٣س^{٢}-٥|}{٣س^{٢}+٣}=\text{نهـــا}_{س\to-\infty}\frac{٣س^{٢}-٥}{٣س^{٢}+٣}=\ldots\ldots\ldots=١$

س٢: $\text{نهـــا}_{س\to\infty}\frac{(أ-٢)س^{٤}+٣س^{٢}+٢س-١}{ب\,س^{٢}+٣س+٣}=-١$

النهاية موجودة ومعلومة القيمة، ودرجة المقام = ٢ ؛ ولذلك ستكون درجة البسط = ٢

ويتحقق عندما: (أ - ٢) = ٠، ومنها: (أ = ٢)

$\text{نهـــا}_{س\to\infty}\frac{٣س^{٢}+٢س-١}{ب\,س^{٢}+٣س+٣}=-١ \longleftarrow \frac{٣}{ب}=-١$ ومنها: ب = -٣

تمارين ومسائل: (٧ - ٦) الاتصال

س١: أ) ن(س) = |س^{٢} + ٢س - ١٨| + ٢س متصل عند س = ٢

لأنّ ما في داخل القيمة المطلقة كثير حدود متصل عند س = ٢، ومجموع اقترانين متصلين.

عند س = ٢ يكون متصلاً عند س = ٢

أو إعادة التعريف للقيمة المطلقة فيكون متصلاً عند س = ٢

ب) $ن(س)=س^{٢}\times[س-٢,٠] \longleftarrow ن(س)=\begin{cases}-٢س^{٢} & ،\ -١,٨\geq س>-٠,٨\\ -١س^{٢} & ،\ -٠,٨\geq س>٠,٢\end{cases}$

ن(-٠,٨)= -٠,٦٤ ، $\text{نهـــا}_{س\to-٠,٨}$ ن(س)، غير موجودة إذن: ن(س) غير متصل عند س = -٠,٨

ج) ن(س) = ظا(٢πس) - جتا(٢πس) متصل عند س = $\frac{١}{٢}$ لتحقق شروط الاتصال.

ن($\frac{١}{٢}$) = ظا(π) - جتا(π) = ١ $\longleftarrow$ $\text{نهـــا}_{س\to\frac{١}{٢}}$ ن(س) = -١ ومنها ن($\frac{١}{٢}$) = $\text{نهـــا}_{س\to\frac{١}{٢}}$ ن(س) = ١

س٢: $\text{نهـــا}_{س\to٣}\frac{(\sqrt{٥س+١}-٤)}{س-٣}\times\frac{(\sqrt{٥س+١}+٤)}{(\sqrt{٥س+١}+٤)}=\text{نهـــا}_{س\to٣}\frac{٥س+١-١٦}{((س-٣)(\sqrt{٥س+١}+٤))}$

$=\text{نهـــا}_{س\to٣}\frac{٥(س-٣)}{((س-٣)(\sqrt{٥س+١}+٤))}=\frac{٥}{٨}$

ن(٣) = ٢ ومنها: ن(س) غير متصل عند س = ٣ ؛لأنّ: ن(٣) $\neq$ $\text{نهـــا}_{س\to٣}$ ن(س).

س٣: أ) ن(س) = جا٢س + | ٣س − ٣| متصل ∀ س ∈ ع؛لأنه مجموع اقترانين متصلين على ع.

ن$_{١}$(س) = جا٢س متصل على ع، ن$_{٢}$(س) = | ٣س − ٣| ما في داخل القيمة المطلقة متصل على ع.

ب) ن(س) = [١ − $\frac{س}{٣}$] ، س ∈ [−٣، ٥]

$$ن(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad س = -٣ \\ ١ & ، \quad -٣ < س \leq ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ < س \leq ٣ \\ -١ & ، \quad ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$$

ن(س) متصل على الفترات]−٣، ٠[،]٠، ٣[،]٣، ٥] كثيرات حدود

من خلال بحث شروط الاتصال ن(س) منفصل عند س = ٠، ٣. يمين س = -٣

ن(س) متصل على]-٣، ٥] - { ٠ ، ٣}

س٤: ن(س) متصل على مجاله ⟵ ن(س) متصل عند نقاط التحول، وهي: س = ١، س = ٣

ن(١) = $\lim_{س \to ١^-}$ ن(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ ن(س) ومنها: أ = ٢

ن(٣) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ن(س) = $\lim_{س \to ٣^+}$ ن(س) ومنها: ب = ١٠

س٥: أ) ن(س) منفصل عند س = − ١، ١.

ب) ن(س) متصل ∀ س ∈ [−٢، −١] من الرسم متصل وكذلك متصل من الجهتين: اليمنى واليسرى.

ج) ن(س) غير متصل على الفترة [−١، ∞[؛ لأنه غير متصل عند س= − ١، ١.

د) ن(س) متصل ∀ س ∈]−∞، −٢]؛ لتحقق شروط الاتصال من الرسم.

هـ) ن(س) غير متصل على مجاله ⟵ ن(س) متصل ∀ س ∈ ع− {−١، ١}

تمارين ومسائل: (٧ - ٧) بلزانو

س١: تتحقق شروط بلزانو على الفترتين، [−٣ ، −١]، [٤ ، ٥] يمكن الجزم بوجود صفري اقتران

ولكن ن(٠) = ٠ إذن: يوجد صفر ثالث ⟵ أقل عدد من الأصفار يمكن التحقق من وجودها ٣.

س٢: $ن(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٢$ متصل على الفترة $[-٢ ، ٤]$ ؛ لأنه اقتران كثير حدود.

$ن(-٢) > ٠ ، ن(٤) < ٠$

$ن(-٢) \times ن(٤) < ٠$

تتحقق شروط بلزانو، يوجد على الأقل جـ $\in]-٢ ، ٤[$ بحيث: $ن(جـ) = ٠$

التقريب الأول $جـ_{١} = \frac{-٢ + ٤}{٢} = ١$ ، $ن(١) = ١ > ٠$

بالمثل تنطبق بلزانو على الفترة $[-٢ ، ١]$

يوجد على الأقل جـ $\in]-٢ ، ١[$ بحيث $ن(جـ) = ٠$

التقريب الثاني $جـ_{٢} = \frac{-٢ + ١}{٢} = -\frac{١}{٢}$ ، $ن(-\frac{١}{٢}) > ٠$

بالمثل تنطبق بلزانو على الفترة: $[-٢ ، -\frac{١}{٢}]$

يوجد على الأقل جـ $\in]-٢ ، -\frac{١}{٢}[$ بحيث $ن(جـ) = ٠$

التقريب الثاني $جـ_{٣} = \frac{-٢ + -٠,٥}{٢} = -١,٢٥$

س٣: $ن(س) = \begin{cases} |س + ٢| & ، \ ١ \geq س > ٢ \\ ٨ - س^{٢} & ، \ ٢ \geq س \geq ٥ \end{cases}$ ، $ن(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، \ ١ \geq س > ٢ \\ ٨ - س^{٢} & ، \ ٢ \geq س \geq ٥ \end{cases}$

$ن(س)$ متصل على $[١ ، ٢[$، وكذلك على الفترة $]٢ ، ٥]$ كثيرات حدود.

عند س = ٢ تتحقق شروط الاتصال $ن(٢) = \lim_{س \to ٢^{+}} ن(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = ٤$ متصل عند س = ٢

ومنها: $ن(س)$ متصل على الفترة $[٢ ، ٥]$

$ن(١) \times ن(٥) < ٠$ تتحقق شروط نظرية بلزانو

يوجد على الأقل: جـ $\in]١ ، ٥[$ بحيث $ن(جـ) = ٠$

$ن(جـ) = \begin{cases} جـ + ٢ & ، \ ١ \geq جـ > ٢ \\ ٨ - جـ^{٢} & ، \ ٢ \geq جـ \geq ٥ \end{cases}$

جـ = -٢ مرفوض لا ينتمي إلى الفترة $]١ ، ٢[$

$جـ^{٢} = ٨$ ومنها: جـ $= ٢\sqrt{٢}$ $\in]٢ ، ٥[$، جـ $= -٢\sqrt{٢}$ $\notin]٢ ، ٥[$.

س٤: نفرض $ك(س) = ن(س) - ١٣ = س^{٣} + س^{٢} - ٢س - ٨$ $\forall$ س $\in [-١ ، ٣]$

$ك(س)$ متصل على الفترة $[-١ ، ٣]$ ؛ لأنه اقتران كثير حدود.

$ك(-١) \times ك(٣) < ٠$ تتحقق شروط بلزانو

يوجد على الأقل: جـ ∈]-١ ، ٣[بحيث ك(جـ) = ٠ أي ك(جـ) = ن(جـ) - ١٣ = ٠

يوجد على الأقل: جـ ∈]-١ ، ٣[بحيث: ن(جـ) = ١٣

س٥: نبحث تحقق الشروط على الاقتران هـ(س) = (س^{٢} - ٥) ن (س)

هـ(س) متصل على الفترة [١، ٧] ؛ لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين على [١، ٧]

هـ(١) = -٤ × ن(١) < ٠ لأن ن(١) موجبة ؛ لأنها تقع في الربع الأول.

هـ(٧) = ٤٤ × ن(٧) < ٠ لأن ن(٧) موجبة ؛ لأنها تقع في الربع الأول.

هـ(١) × هـ(٧) > ٠

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈]١ ، ٧[بحيث: هـ(جـ) = ٠

التقريب الأول: جـ$_{١}$ = $\frac{١ + ٧}{٢}$ = ٤

هـ(٤) = ١١ × ن(٤) < ٠ تتحقق شروط بلزانو.

التقريب الثاني: جـ$_{٢}$ = $\frac{١ + ٤}{٢}$ = ٢,٥

هـ(٢,٥) < ٠ بالمثل تتحقق بلزانو على الفترة [١ ، ٢,٥]

التقريب الثالث: جـ$_{٣}$ = $\frac{١ + ٢,٥}{٢}$ = ١,٧٥

تمارين عامة الوحدة السابعة

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
رمز الإجابة الصحيحة	د	أ	ج	ج	ب	أ	د	أ	ج	ج	ج	ب	ج

س٢: ن(س) متصل على ⟵ ع متصل عند س = ٣

ن(٣) = $\lim_{س \to ٣}$ ن(س) = ١١

$\lim_{س \to ٣}$ $\frac{س^{٢} - (٣ - ٢ب)س - ٦ب}{س - ٣}$ = ١١

$\lim_{س \to ٣}$ $\frac{(س - ٣)(س + ٢ب)}{س - ٣}$ = ١١

$\lim_{س \to ٣}$ (س + ٢ب) = ١١ ، (٣ + ٢ب) = ١١ ، ب = ٤

الملتقى التربوي
www.wepal.net

س٣: $\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{(س^{٢}+١)^{٢}}{أ س^{٢}(س+١)^{٢}} = -٢$

درجة البسط = ٤

ولذلك لكي تكون النهاية موجودة يجب أن تكون درجة المقام = ٤

ومنها: ن = ٢ ← $\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{(س^{٢}+١)^{٢}}{أ س^{٢}(س+١)^{٢}} = -٢$

$\text{نهـــا}_{س \to -\infty} \frac{س^{٤}+٢س^{٢}+١}{أ\ س^{٤}(س^{٢}+٢س+١)} = -٢$

$أ = -٢ ، \frac{١}{أ} = -\frac{١}{٢}$

س٤: نفرض ك(س) = ن(س) – هـ (س)

ك(١) = ن(١) – هـ (١) < ٠ لأن ن(١) < هـ (١) معطى

ك(٢) = ن(٢) – هـ (٢) > ٠ لأن ن(٢) > هـ (٢) معطى

ك(١) × ك(٢) < ٠

ن(س) ، هـ (س) كثيرا حدود ، إذن: متصلان على الفترة [١ ، ٢]

ك(س) = ن(س) – هـ (س)، لأنه ناتج طرح اقترانين متصلين.

تتحقق شروط نظرية بلزانو ، إذن: يوجد على الأقل جـ ∈] ١ ، ٢ [

بحيث: ك(جـ) = ٠ ومنها ن(جـ) – هـ (جـ) = ٠ ← ن(جـ) = هـ (جـ)

س٥: نفرض: ن(س) = س^{٣} – ٧

نختار الفترة [١ ، ٢] لأن ١ < ٧ < ٨ ← $\sqrt[٣]{١} < \sqrt[٣]{٧} < \sqrt[٣]{٨}$ ← ١ < $\sqrt[٣]{٧}$ < ٢

ن(س) متصل على الفترة [١ ، ٢]؛ لأنه كثير حدود .

ن(١) = -٦ < ٠

ن(٢) = ١ > ٠

ن(١) × ن(٢) < ٠

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈] ١ ، ٢ [بحيث: ن(جـ) = ٠

التقريب الأول = جـ$_{١}$ = $\frac{١+٢}{٢}$ = ١,٥

$ن(١,٥) > ٠$

نطبق بلزانو على الفترة [١,٥ ، ٢] تتحقق الشروط

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈] ١,٥ ، ٢ [بحيث: ن(جـ) = ٠

التقريب الثاني = $جـ_٢ = \frac{١,٥ + ٢}{٢} = ١,٧٥$

$ن(١,٧٥) > ٠$

نطبق بلزانو على الفترة [١,٧٥ ، ٢] تتحقق الشروط.

تتحقق شروط نظرية بلزانو إذن: يوجد على الأقل جـ ∈] ١,٧٥ ، ٢ [بحيث: ن(جـ) = ٠

التقريب الثالث = $جـ_٣ = \frac{١,٧٥ + ٢}{٢} = ١,٨٧٥$