سلسلة النخبة التعليمية

12

حسب المنهاج الجديد

# الكامل

## ::....مبحث الرياضيات ....:::

**للصف الثاني عشر - الفرع العلمي والصناعي**


إعداد

بلال أبو غلوة — سليم السيقلي

آلاء الجزار — آلاء البرعي

إشراف

نبيل سلمن — صلاح البتان — عوض الواوي

بلال الكخن — سامي بدر — محمد الفرا

نعيم ابو غلوة — عدنان شعت — رنا زيادة

زياد عمرو — كمال شلبي


الفصل الأول

2019-2018

## اعداد


أ.سليم السيقلي
خان يونس/ ٠٥٩٩٨٠٩٦٢٨

أ.بلال ابو غلوة
شمال غزة / ٠٥٩٩٨٣٣٧٨٨

أ.الاء فايز الجزار
غزة/ ٠٥٩٧٨٠٦١٧١

أ.الاء البرعي
الوسطى- دير البلح/ ٠٥٩٧٢٣٨٨٤٣


## اشراف


أ.نبيل سلمن / غزة
ج/٠٥٩٥٦٢٥٨٢٥

أ. صلاح البتان / طولكرم
ج/٠٥٩٨١٢١٨٢٢

أ. عوض الواوي / طولكرم
ج/٠٥٩٩٩٢٥٥٨٥٣

أ.بلال الكخن / نابلس
ج/٠٥٩٩٣٨٢٦٠٧

أ. سامي بدر /غزة
ج/٠٥٩٧٧٥٢٣٥٠

أ. محمد الفرا / خان يونس

أ.عدنان شعت /رفح
ج/٠٥٩٨٩٨٣٤٧٥

د. نعيم أبو غلوة / شمال غزة
ج/٠٥٩٥٤٤٤٤٧٤

أ.رنا زيادة /غزة
ج/٠٥٩٩٨٥٢٠٣٠

أ. كمال شلبي/ طولكرم
ج/٠٥٩٩٥٤٤٨٧٤

أ. زياد عمرو / الخليل
ج/٠٥٩٧٣١٢٢٢٠



الملتقى التربوي
www.wepal.net


المنهاج الجديد
٢٠١٨-٢٠١٩

# المحـــــتويات


**الوحدة ١**

**حساب التفاضل** ١-٦٥

| | | |
|---|---|---|
| ١-١ | متوسط التغير | ١ |
| ١-٢ | المشتقة الأولى | ٩ |
| ١-٣ | قواعد الاشتقاق | ١٨ |
| ١-٤ | مشتقة الاقترانات المثلثية | ٢٧ |
| ١-٥ | قاعدة لوبيتال ومشتقة الاقتران الاسي واللوغارتيمي | ٣٢ |
| ١-٦ | تطبيقات هندسية وفيزيائية | ٣٧ |
| ١-٧ | قاعدة السلسلة | ٤٦ |
| ١-٨ | الاشتقاق الضمني | ٥٧ |
| | تمارين عامة | ٦٥ |

**الوحدة ٢**

**تطبيقات التفاضل** ٨٢-١٨٣

| | | |
|---|---|---|
| ٢-١ | نظريتا رول والقيمة المتوسطة | ٨٢ |
| ٢-٢ | الاقترانات المتزايدة والمتناقصة | ٩٤ |
| ٢-٣ | القيم القصوى | ١٠٢ |
| ٢-٤ | التقعر ونقط الانعطاف | ١١٣ |
| ٢-٥ | تطبيقات عملية على القيم القصوى | ١٢٨ |
| | تمارين عامة | ١٣٨ |

**الوحدة ٣**

**المصفوفات والمحددات** ١٥٣-١٦٠

| | | |
|---|---|---|
| ٣-١ | المصفوفة | ١٥٣ |
| ٣-٢ | العمليات على المصفوفة | ١٥٩ |
| ٣-٣ | المحددات | ١٧٢ |
| ٣-٤ | النظير الضربي للمصفوفة المربعة | ١٨٠ |
| ٣-٥ | حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات | ١٨٧ |
| | تمارين عامة | ١٩٤ |

# الوحدة الأولى

١

# حساب التفاضل

# الوحدة الاولى / حساب التفاضل

## الدرس الاول /متوسط التغير

### القسم الأول : الملخص

**تعريف :**

١ـ متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[\ س_١ ، س_٢\ ]$ $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

٢ـ السرعة المتوسطة على الفترة $[\ ن_١ ، ن_٢\ ]$ $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

**ملاحظة :**

- متوسط التغير = ميل القاطع ( المستقيم ) $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$
- الميل = ظا هـ حيث هـ الزاوية المحصورة بين المستقيم ومحور السينات الموجب .

**احذف من قاموسك هذه الكلمات نهائياً**
**" لا أستطيع ، لا أقدر ، لن أنجح ، سوف أفشل .....**
**وما إلى ذلك "**

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول** : إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س} + س^{٢}$ ، جد :

فرع أ : مقدار التغير في الاقتران ق(س )عندما تتغير س من ٣ إلى ٥

**الحل** $\Delta ص = ق(س_{٢}) - ق(س_{١}) = ن(٥) - ن(٣) = (٢٥ + \frac{٣}{٥}) - (٩ + \frac{٣}{٣}) = \frac{٧٨}{٥}$

فرع ب : متوسط التغير في الاقتران ق(س )عندما تتغير س من ٤ إلى ١

**الحل** المتوسط = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(٤) - ن(١)}{-٣} = \frac{١٦ - \frac{٣}{٤} - ١ + ٣}{-٣} = \frac{١٧}{٤}$

**السؤال الثاني**: إذا كان ق(س) = جتا س - ٣جاس جد متوسط التغير في الاقتران ق(س )في الفترة $\left[\frac{\pi}{٢}، \pi\right]$

**الحل**

متوسط التغير لِ ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(\frac{\pi}{٢}) - ق(\pi)}{\frac{\pi}{٢} - \pi}$

$= \frac{(جتا\pi - ٣جا\pi) - (جتا\frac{\pi}{٢} - ٣جا\frac{\pi}{٢})}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$

**السؤال الثالث** : إذا كان ن(س) = $\begin{cases} ٦ - س ، & س > ٢ \\ س^{٢} + أس ، & ٢ \geq س \end{cases}$

وكان متوسط التغير للاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى أ(أ $\neq$ ٢) يساوي ٩ ، احسب قيمة أ ؟

**الحل** $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(أ) - ن(١)}{أ - ١} = ٩$

$\frac{أ^{٢} + أ - ٥}{أ - ١} = ٩$ (بالضرب التبادلي )

$أ^{٢} + ٩أ - ٥ = ٩أ - ٩$

$أ^{٢} + ٩أ - ٩أ + ٤ = ٠$

$(أ^{٢} - ١)(أ - ٤) = ٠ \Leftarrow$ أ = $\frac{١}{٢}$ (مرفوض لأن أ < ٢ ) أو $\boxed{أ = ٤}$

**السؤال الرابع** : إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س )في الفترة $[1،3]$ ، يساوي ٤ ، وكان ك(س) $= س^{2} + 3ب(س)$، جد متوسط التغير للاقتران ك(س )في نفس الفترة ؟

**الحل**

متوسط التغير للاقتران ق(س)=٤

$$٤ = \frac{ب(١) - ب(٣)}{١ - ٣} \quad \Leftarrow \quad \boxed{٨ = ب(١) - ب(٣)} \ ..... (١)$$

متوسط التغير للاقتران ك(س)(حيث : ك(س) $= س^{2} + 3ب(س)$ )

$$= \frac{\Delta ك}{\Delta س} = \frac{ك(١) - ك(٣)}{١ - ٣}$$

$$= \frac{[٩ + 3ب(٣)] - [١ + 3ب(١)]}{٢}$$

$$= \frac{٩ + 3ب(٣) - ١ - 3ب(١)}{٢}$$ (بأخذ ٣ عامل مشترك )

$$= \frac{٣[ب(٣) - ب(١)] + ٨}{٢}$$ ( بالتعويض من ١ )

$$= \frac{٣ \times ٨ + ٨}{٢} = ١٦$$

---

**السؤال الخامس** : إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س )في النقطتين (١ ، أ) ، ( ٣، ب )وصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، احسب متوسط التغير في الاقتران هـ (س) = ٣ ق(س ) $+ س^{2} - ١$ في الفترة $[1،3]$

**الحل**

متوسط التغير للاقتران ق(س) (الميل ) = ظا ١٣٥

$$ظا ١٣٥° = \frac{ب(١) - ب(٣)}{١ - ٣}$$

$$-١ = \frac{ب(١) - ب(٣)}{٢} \quad \Leftarrow \quad \boxed{ب(١) - ب(٣) = -٢} \ ..... (١)$$

متوسط التغير في الاقتران هـ(س) $= \frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(١) - هـ(٣)}{١ - ٣}$

$$= \frac{(١ - ١ + 3ب(١)) - (١ - ٩ + 3ب(٣))}{٢}$$

$$= \frac{٨ + 3ب(١) - 3ب(٣)}{٢}$$

$$= \frac{٨ + ٣[ب(١) - ب(٣)]}{٢} = \frac{٨ + ٢ - \times ٣}{٢} = ١$$

**السؤال السادس :** يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن بعده ف بالأمتار عن نقطة الانطلاق بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ق(ن) = $ن^{٢} + ب ن$ وكانت السرعة المتوسطة في الفترة $[١،٣]$ تساوي ٦ م/ث .

فما قيمة الثابت ب؟

**الحل**

السرعة المتوسطة= $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١} = ٦$

$$\frac{(٩ + ٣ب) - (١ + ب)}{٢} = ٦$$

$$\frac{٩ + ٣ب - ١ - ب}{٢} = ٦$$

$$\frac{٨ + ٢ب}{٢} = ٦ \quad \text{(بالضرب التبادلي )}$$

$$\Leftarrow ٢ ب + ٨ = ١٢ \Leftarrow ٢ب = ٤ \Leftarrow \boxed{ب = ٢}$$

---

**السؤال السابع :** إذا كان ق(س) = $أ س^{٢} + ب س + جـ$ .أثبت أن متوسط التغير للاقتران ق(س )عندما تتغير س من ٢ إلى ن يساوي $أ(ن + ٢) + ب$ ؟

**الحل**

متوسط التغير للاقتران ق(س) $= \frac{ق(ن) - ق(٢)}{ن - ١}$

$$= \frac{(أ(ن^{٢}) + نب + جـ) - (٤أ + ٢ب + جـ)}{ن - ٢}$$

$$= \frac{أن^{٢} + نب + جـ - ٤أ - ٢ب - جـ}{ن - ٢}$$

$$= \frac{أن^{٢} - ٤أ + ب ن - ٢ب}{ن - ٢}$$ (أخذ أ عامل مشترك ،أخذ ب عامل مشترك)

$$= \frac{أ(ن^{٢} - ٤) + ب(ن - ٢)}{ن - ٢}$$ (فرق بين مربعين )

$$= \frac{أ(ن - ٢)(ن + ٢) + ب(ن - ٢)}{ن - ٢}$$ (أخذ (ن-٢)عامل مشترك)

$$= \frac{(ن - ٢)[أ(ن + ٢) + ب]}{ن - ٢}$$

$$= أ(ن + ٢) + ب$$

**السؤال الثامن :**

**فرع أ : إذا كان ق(س) = س + هـ$^{س+1}$ جد متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١ ، ( هـ العدد النيبيري)**

**الحل**

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{ق(1)-ق(0)}{1-0}$

$= (1+هـ^{1+1})-(0+هـ^{1+0})$

$= 1+هـ^{2}-هـ^{1}$

$= هـ^{2}-هـ^{1}+1$

---

**فرع ب : إذا كان متوسط التغير للاقتران ق (س) = س + لـوهـ س$^{ن}$ عندما تتغير س من ١ إلى هـ يساوي $\frac{3-هـ}{1-هـ}$ ، احسب قيمة ن؟**

**الحل**

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{3-هـ}{1-هـ}$

$\frac{3-هـ}{1-هـ} = \frac{ق(هـ)-ق(1)}{هـ-1}$

$\frac{3-هـ}{1-هـ} = \frac{(هـ+لـوهـ^{ن})-(1+لـوهـ^{ن}1)}{هـ-1}$

$\frac{3-هـ}{1-هـ} = \frac{هـ+ن-1}{هـ-1}$

$\frac{3-هـ}{-1\times(هـ-1)} = \frac{هـ+ن-1}{هـ-1}$ بضرب الطرفين ب (هـ – ١)

$هـ+ن-1=3-هـ \Leftarrow \boxed{ن=-2}$

**ملاحظة :**

$لـوهـ^{ن} = ن لـوهـ = ن\times1 = ن$

$لـوهـ1^{ن} = ن لـوهـ 1 = ن\times0 = 0$

## القسم الثالث: أسئلة اثرائية

# متوسط التغير

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) في الفترة [ ١ ، ١٦ ] يساوي ٩ ، فإن متوسط تغير الاقتران ق ($س^{٢}$) في الفترة [ ١ ، ٤ ] هو :<br>أ) ٩ ب) ٣ ج) ٤٥ د) ١٥ | جـ |
| ٢ | إذا كان متوسط التغير للاقتران ق (س) في الفترة [ ١ ، ٤ ] يساوي ٥<br>ق (١) = ٢ ، فإن ق (٤) يساوي :<br>أ) ١٧ ب) ١٦ ج) ١٥ د) ١٣ | أ |
| ٣ | إذا كان ق(س) اقتراناً بحيث ق(٣) = ق(٥) + أ وكان متوسط تغير ق(س) في الفترة [ ٣ ، ٥ ] يساوي ١٠ فإن قيمة أ هي :<br>أ) ٢٠ ب) ـ ٥ ج) ـ ١٠ د) ـ ٢٠ | د |
| ٤ | إذا كان ق(س) = ٢ ـ $س^{٢}$ معرفاً على [ ١ ، ب ] بحيث كان متوسط تغير ق (س) في تلك الفترة يساوي ـ ٣ فإن قيمة ب هي :<br>أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٣ | أ |

| | | |
|---|---|---|
| ٥ | إذا علمت أن متوسط التغير للاقتران ق (س) في الفترة [ ٢ ، ١٧ ] يساوي ٩ ، فان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ق( س$^{٢}$ + ١) في الفترة [ ١ ، ٤ ] يساوى<br>أ) ٣ ب) ٤٩ ج) ١٥ د) ٤٥ | د |
| ٦ | إذا كان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س بين س = ١ ، س = ٩ ، مساويا ٥ فان متوسط تغير الاقتران ل ( س) = س$^{٢}$ ق ( ٢س + ٥) بين س = ـ٢ ، س = ٢ يساوى :<br>أ) ١٠ ب) ٤٠ ج) ٢٠ د) ـ ٤٠ | ب |
| ٧ | اذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = س$^{٢}$ – ٥ في الفترة [١ ، ١+هـ] يساوي ٩ ، فأن قيمة أ هي :<br>أ) صفر ب) ٣ ج) ٧ د) ٩ | ج |
| | القسم الثاني / أجب عن الأسئلة التالية | |
| ١ | ليكن ق (س) = { ٣س + ٤ ، س < ٢ ; س$^{٢}$ +٣س ، س > ٢ } ،أوجد متوسط تغير ق (س) عندما تتغير س من ٢ الى ـ١ | ٣ |
| ٢ | إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في النقطتين ( ١ ، ق(١) ) ، ( ٣ ، ٥) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب . احسب متوسط التغير للاقتران هـ (س) = $\frac{٢}{\text{ق (س)}}$ في الفترة [ ١ ، ٣ ] | $\frac{٢}{٣٥}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ٣ | إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\sqrt{٤س+١}$ في الفترة [ ٠ ، ب ] يساوي ١ ، فما قيمة الثابت ب ؟ | ٢ |
| ٤ | إذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) على [ ـ ٢ ، ٢ ] يساوي ٥ ، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣ ق(س) − ٢س | ١٣ |
| ٥ | إذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) في الفترة [ ١ ، ٢ ] يساوي ٤ ، ومتوسط تغير ق(س) في الفترة [ ٢ ، ٥ ] يساوي ٨ ، فما متوسط تغير ق(س) في الفترة [ ١ ، ٥ ] | ٧ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية : | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في $[٢، ٥]$ يساوي ٨ ، وكان ه(٥) = ٨ − ه(٢) ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٨س + ه$^{٢}$(س) في $[٢، ٥]$ ؟ | ٧٢ |
| ٢ | اذا كان ه(س) = ٢هـ(س) − $\frac{أ}{س}$ وكان متوسط التغير في الاقتران ق(س) في $[١، ٣]$ يساوي ٦ ومقدار التغيرفي الاقتران هـ(س) في الفترة نفسها يساوي ٤ ، جد قيمة أ ؟ | ٦ |
| ٣ | اذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) في $[٢، ٥]$ يساوي ٦ ، أحسب متوسط تغير الاقتران هـ(س) = س$^{٢}$ ه(س) − ٢س في $[٢، ٥]$ علما بأن هـ(س) يمر بالنقطة $(٢، -١٦)$ ؟ | ١٢٧ |

## الدرس الثاني / المشتقة الاولى

### القسم الأول : الملخص

**تعريف :**

معدل التغير للاقتران ق(س) أو المشتقة الأولى للاقتران ق(س) عند النقطة $(س_١ ، ق(س_١))$ :

$$قَ(س_١) = \lim_{س \to س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$$

**يجوز استخدام أي قانون من القوانين الثلاثة عند التطبيق على تعريف المشتقة الأولى**

$$قَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

**ملاحظة :**

- المشتقة الأولى تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق (س) في الفترة $[س_١ ، س_١ + هـ]$ عندما تؤول هـ الى الصفر ، أي أن :

$$قَ(س_١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

- المشتقة الأولى = ميل المماس

كلما تذكرت أن الدعاء قد يغير القدر أتفاءل وأرتاح نفسياً
فيا رب وكلتك أمرى فإنى لا أحسن التدبير.

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول :** اذا كانت ص = ق(س) وتغيرت س من -١ الى -١+هـ بحيث أن $\Delta ص = ٢هـ - هـ^{٢}$ ، فجد قيمة $ق'(-١)$؟

**الحل**

$$\Delta س = س_{٢} - س_{١}$$

$$= (-١ + هـ) - (-١) = هـ \quad \text{ومنها} \quad \boxed{\Delta س = هـ} \text{ ، } \boxed{\Delta ص = ٢هـ - هـ^{٢}}$$

$$ق'(-١) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} \quad \text{(بالتعويض بقيم كل من } \Delta س، \Delta ص \text{ )}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ - هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٢ - هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} (٢ - هـ) = ٢$$

---

**السؤال الثاني :** جد باستخدام تعريف المشتقة عند قيم س في كل حالة مما يأتي :

فرع أ : $ص = س + س^{٢}$ عند س=٤

**الحل**

$$\frac{ء ص}{ء س} = \lim_{س \to ٤} \frac{ن(س) - ن(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س + س^{٢} - ٢٠}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} + س - ٢٠}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٥)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٥) = ٩$$

---

فرع ب : $ص = \frac{١}{س}$ ، عند س = ٣

**الحل**

$$\frac{ء ص}{ء س} = \lim_{س \to ٣} \frac{ن(س) - ن(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{ن(س) - ن(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣ - س}{٣س} \times \frac{١}{(س - ٣)} = \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{٣س} = \frac{-١}{٩}$$

---

فرع جـ : $ص = [س] \times س^{٢}$ ، عند س= ٠ ، وعند س = $\frac{١}{٢}$

**الحل**

$$[س] = \begin{cases} -١ & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ \leq س < ١ \end{cases} \Leftarrow ص = [س] س^{٢} = \begin{cases} -س^{٢} & ، \quad -١ \leq س < ٠ \\ ٠ & ، \quad ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

عندما س = ٠ ( نقطة تحول )

أولاً : من جهة اليمين $\text{ق}'(0^+) = \lim_{س \to 0^+} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(0)}{س - 0} = \lim_{س \to 0^+} \frac{0 - 0}{س - 0} = \lim_{س \to 0^+} \frac{0}{س} = 0$

ثانياً : من جهة اليسار $\text{ق}'(0^-) = \lim_{س \to 0^-} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(0)}{س - 0} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-س^2 - 0}{س - 0} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-س^2}{س} = \lim_{س \to 0^-} -س = 0$

$\text{ق}'(0) = 0$ ( لأنه $\text{ق}'(0^+) \neq \text{ق}'(0^-)$ )

عندما $س = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow \text{ق}'(\frac{1}{2}) = \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(\frac{1}{2})}{س - \frac{1}{2}} = \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{0 - 0}{س - \frac{1}{2}} = \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{0}{س - \frac{1}{2}} = 0$

---

السؤال الثالث : إذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} 2\sqrt{س+3} & ، \ -1 \leq س \leq 1 \\ \frac{4}{س} & ، \ 1 \leq س \leq 4 \end{cases}$ جد $\text{ق}'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

أولاً : $\text{ق}'(س)$ على $]-1,1[$

$$\text{ق}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{2\sqrt{ع+3} - 2\sqrt{س+3}}{ع - س}$$ ( بأخذ ٢عامل مشترك ثم الضرب في المرافق )

$$= 2 \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع+3} - \sqrt{س+3}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع+3} + \sqrt{س+3}}{\sqrt{ع+3} + \sqrt{س+3}}$$

$$= 2 \lim_{ع \to س} \frac{(ع+3) - (س+3)}{(ع - س)(\sqrt{ع+3} + \sqrt{س+3})}$$

$$= 2 \lim_{ع \to س} \frac{ع + 3 - س - 3}{(ع - س)(\sqrt{ع+3} + \sqrt{س+3})}$$

$$= 2 \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{ع+3} + \sqrt{س+3})}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{س+3}} = \frac{1}{\sqrt{س+3}}$$

ثانياً : قَ(س) على ]١،٤[

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع) - ن(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٤}{ع} - \frac{٤}{س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤س - ٤ع}{ع س} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤(س - ع)}{ع س} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٤}{ع س} = \frac{-٤}{س^{٢}}$$

ومنها : $$قَ(س) = \begin{cases} \frac{١}{\sqrt{٣ + س}} & ، -١ < س < ١ \\ \frac{-٤}{س^{٢}} & ، ١ < س < ٤ \end{cases}$$

$$قَ^{+}(١) = \frac{-٤}{(١)^{٢}} = -٤ \quad ، \quad قَ^{-}(١) = \frac{١}{\sqrt{٣ + (١)}} = \frac{١}{٢}$$

قَ(١) غير موجودة

---

**السؤال الرابع : صفيحة على شكل مستطيل طولها يساوي ٣ أمثال عرضها ، تتمدد بالتسخين بحيث تحتفظ بشكلها وبنفس النسبة بين أبعادها ، احسب معدل التغير في مساحة الصفيحة بالنسبة لعرضها عندما يكون العرض ٦ سم.**

الحل

نفرض أن العرض = س ⟸ الطول = ٣ × العرض = ٣س

المساحة ( م ) = الطول × العرض = س × ٣س = ٣س$^{٢}$

معدل التغير في المساحة بالنسبة للعرض $\frac{د م}{د س} = \lim_{س \to ٦} \frac{م(س) - م(٦)}{س - ٦}$

$$= \lim_{س \to ٦} \frac{٣س^{٢} - ٣(٦)^{٢}}{س - ٦}$$ (بأخذ ٣ عامل مشترك )

$$= \lim_{ع \to ٦} \frac{٣(ع^{٢} - ٦^{٢})}{ع - ٦}$$ (فرق بين مربعين)

$$= \lim_{ع \to ٦} \frac{٣(ع-٦)(ع+٦)}{ع-٦}$$

$$= ٣ \lim_{ع \to ٦} (ع+٦) = ٣ \times ١٢ = ٣٦ \text{ سم}$$

---

السؤال الخامس: اذا كان $ن'(١) = -٢$ ، $ن(٣) = -٢$ ، $ن'(٣) = ٤$ ، جد قيمة النهايات الاتية :

فرع أ : $$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+٥هـ) - ن(٣)}{١٠هـ}$$

الحل

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+٥هـ) - ن(٣)}{١٠هـ}$$ نفرض $٥هـ = و \Leftarrow هـ = \frac{و}{٥}$ ، $هـ \to ٠ \Leftarrow و \to ٠$

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{ن(٣+و) - ن(٣)}{\frac{١}{٥}و}$$

$$= \frac{٥}{١٠} \lim_{و \to ٠} \frac{ن(٣+و) - ن(٣)}{و}$$

$$= \frac{١}{٢} ق'(٣) = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$$

---

فرع ب $$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{ن(١) - ن(س)}$$

الحل

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{ن(١) - ن(س)} = -١ \times \lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١}{ن(س) - ن(١)}$$

$$= -١ \times \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+١)}{ن(س) - ن(١)}$$ ( توزيع النهايات )

$$= -١ \times \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)}{ن(س) - ن(١)} \times \lim_{س \to ١} (س+١)$$

$$= -١ \times \frac{١}{ق'(١)} \times ٢$$

$$= -١ \times \frac{١}{-٢} \times ٢ = ١$$

فرع جـ : $\lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1+9هـ)-ن(1)}{\sqrt{1+هـ}-1}$

الحل

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1+9هـ)-ن(1)}{\sqrt{1+هـ}-1} \times \frac{\sqrt{1+هـ}+1}{\sqrt{1+هـ}+1}$ ( بالضرب في مرافق المقام )

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{[ن(1+9هـ)-ن(1)][\sqrt{1+هـ}+1]}{1+هـ-1}$ ( توزيع النهايات )

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1+9هـ)-ن(1)}{هـ} \times \lim_{هـ\to 0} \sqrt{1+هـ}+1$

( نفرض $9هـ = و \Leftarrow هـ = \frac{و}{9}$ ، $هـ \to 0 \Leftarrow و \to 0$ )

$= \lim_{و\to 0} \frac{ن(1+و)-ن(1)}{\frac{و}{9}} = 2 \times 9 = ق(1) \times 9 \times 2 = 2 \times 2 - \times 9 = -36$

---

فرع د : $\lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1+3هـ)-ن(1-3هـ)}{10هـ}$

الحل

$\lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1+3هـ)-ن(1-3هـ)}{10هـ}$ ( بإضافة وطرح ن(1) إلى البسط)

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1+3هـ)-ن(1)-ن(1)+ن(1-3هـ)}{10هـ}$ ( توزيع النهايات )

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1+3هـ)-ن(1)}{10هـ} - \lim_{هـ\to 0} \frac{ن(1-3هـ)-ن(1)}{10هـ}$

( نفرض $-3هـ = و \Leftarrow هـ = \frac{و}{-3}$ ، $هـ \to 0 \Leftarrow و \to 0$ // $3هـ = ع \Leftarrow هـ = \frac{ع}{3}$ ، $هـ \to 0 \Leftarrow ع \to 0$ )

$= \lim_{و\to 0} \frac{ن(1+و)-ن(1)}{\frac{و}{3} \times 10} - \lim_{ع\to 0} \frac{ن(1+ع)-ن(1)}{\frac{ع}{-3} \times 10}$

$= \frac{3}{10} \times ق(1) - \frac{-3}{10} \times ق(1)$

$= \frac{3}{10} \times -2 + \frac{3}{10} \times 2 -$

$= \frac{-12}{10} = \frac{-6}{5}$

فرع هـ : $\lim_{س\to ٠} \frac{س ن(٣) - ٣ن(س)}{س - ٣}$ بإضافة وطرح ٣ن(٣) للبسط

الحل

$$\lim_{س\to ٣} \frac{س ن(٣) - ٣ن(٣) - ٣ن(س) + ٣ن(٣)}{س - ٣}$$

$$\lim_{س\to ٣} \frac{س ن(٣) - ٣ن(٣)}{س - ٣} - \lim_{س\to ٣} \frac{٣ن(س) - ٣ن(٣)}{س - ٣}$$

$$\lim_{س\to ٣} \frac{ن(٣)[س - ٣]}{س - ٣} - ٣\lim_{س\to ٣} \left[\frac{ن(س) - ن(٣)}{س - ٣}\right]$$

$$ن(٣) - ٣ \times ن'(٣) = -٢ + ٣ \times ٤ = ١٤$$

## القسم الثالث :اسئلة اثرائية

## المشتقة الأولى

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا ق/( ٥) = ٣ فأوجد $\lim_{س\to ٤} \frac{ق(٣س - ٧) - ق(٥)}{٢س - ٨}$ | $\frac{٩}{٢}$ |
| ٢ | استخدم تعريف المشتقة الأولى في إيجاد المشتقة للاقتران<br>ق (س) = $\frac{س - ١}{س + ١}$ عند س =٢ | $\frac{٢}{٩}$ |
| ٣ | استخدم تعريف المشتقة الأولى في إيجاد مشتقة الاقتران<br>ل(س) = ق ( ٣س) + ٢ عندما س = ١ ، علماً بأن ق/( ٣) = ٥ . | ١٥ |
| ٤ | استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة لإيجاد مشتقة الاقتران $و(س) = \sqrt{٢س - ٣}$<br>عند س=٦ | $\frac{١}{٣}$ |
| ٥ | إذا علمت أن ك(س) =٢س ق(س) - ٤ ، وأن -٢ق(٢) =٣قَ(٢) =٦<br>أوجد كَ(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة. | ٢ |

| | | |
|---|---|---|
| ٦ | إذا كان ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ، س $\neq$ ٢ ، فأوجد ق$'$ ( س) باستخدام تعريف المشتقة | $\frac{-٢}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$ |
| ٧ | إذا كان ق(س) = س + $\frac{١١}{\text{س}}$ فأوجد ق$'$ (١١) باستخدام تعريف المشتقة | $\frac{١٠}{١١}$ |
| ٨ | إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - ٤ & ، ١ \leq \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} - \text{س} & ، ٢ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$ فأوجد ق$'$ (٢) باستخدام تعريف المشتقة | ٣ |
| ٩ | احسب : $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س ق (س)} - \text{ق(١)}}{\text{س} - ١}$ ، علماً بأن ق(١) = ٣ ، ق$'$ ( ١) = ٤ | ٧ |

| | | |
|---|---|---|
| ١٠ | اذا كان التغير في الاقتران ص = ق(س) يساوي ٥س$^{٢}$هـ + ٣هـ$^{٢}$س فان $\text{ق}'(٣)$ | ٤٥ |
| ١١ | جد $\lim_{\text{ع} \to ٢} \frac{\text{ب}(\sqrt{٧ + \text{ع}}) - \text{ب}(٣)}{\text{ع} - ٢}$ علما بان $\text{ق}'(٣) = ٤$ | $\frac{٢}{٣}$ |
| ١٢ | $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}\|\text{س}\| + ٣ & ، -١ < \text{س} < ١ \\ [\text{س}] + ٣ & ، ١ \leq \text{س} < ٢ \end{cases}$ جد ان امكن $\text{ق}'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة | غ.م |
| ١٣ | اذا كان متوسط تغير يساوي $(٣\text{س} + ٤\text{س}^{٢}\text{هـ})$ فجد $\text{ق}'(٣)$ | ٩ |
| ١٤ | جد $\lim_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{ب}(\sqrt{\text{س}}) - \text{ب}(٢)}{\text{س} - ٤}$ | $\frac{١}{٤}\text{ق}'(٢)$ |
| ١٥ | اذا كانت $\text{ق}'(٤) = ٦$ فجد $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ب}(٤ - ٢\text{هـ}) - \text{ب}(٤ + ٥\text{هـ})}{\text{هـ}}$ | -٤٢ |

| | | |
|---|---|---|
| ١٦ | اذا كان $ق(س) = (س-٢)^{٢}$ ، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة | $٢(س-٢)$ |
| ١٧ | اذا كان التغير في الاقتران ص=ق(س) يساوي $٥س^{٢}هـ - ٣هـ^{٢}س$ فأن $ق'(٣) =$<br>أ) ٤٥ ب) ٣٦ جـ) ٣٠ د) ٢١ | أ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية : | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اثبت ان $\lim_{ع \to س} \frac{\frac{ب(ع)}{س} - \frac{ب(س)}{ع}}{ع - س} = \frac{ق'(س)}{س} + \frac{ق(س)}{س^{٢}}$ | |
| ٢ | اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) يعطي بالعلاقة<br>$\Delta ص = ٣س^{٢}\Delta س + ٢(\Delta س)^{٢} + أ\Delta س$ ، وكانت<br>$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ب(٣+٢هـ) - ب(٣)}{٤هـ} = ١٤$ ، جد قيمة الثابت أ ؟ | ١ |
| ٣ | اذا كان $ق(س+هـ) + هـس^{٢} + ١٠هـ = ق(س) + ٦س هـ$ ، جد $ق'(٢)$ ؟ | ٢- |
| ٤ | اذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق على ح وكان<br>$ق(س+هـ) = س^{٣}هـ^{٢} + س^{٢}هـ + ق(س)$ جد $ق'(٢)$ | ٤ |

## الدرس الثالث / قواعد الاشتقاق

### القسم الأول : الملخص

**قاعدة : اذا كان**

١- ق(س) = جـ ( جـ عدد ثابت ) فإن قَ(س) = ٠

٢- ق(س) = س فإن قَ(س) = ١

٣- ق(س) = س$^{ن}$ فإن قَ(س) = نـ س$^{ن-١}$ ، س ≠ ٠ ، ن ∈ ص

٤- ق(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق

**فإن :**

أ - لـ(س) = ق(س) ± هـ(س) قابلاً للاشتقاق

وتكون $\text{لَ}(س) = \text{قَ}(س) \pm \text{هَ}(س)$

ب - لـ(س) = ق(س) × هـ(س) قابلاً للاشتقاق

وتكون $\text{لَ}(س) = \text{ق}(س) \times \text{هَ}(س) + \text{هـ}(س) \times \text{قَ}(س)$

جـ - $\text{لـ}(س) = \frac{\text{ق}(س)}{\text{هـ}(س)}$ قابلاً للاشتقاق

وتكون $\text{لَ}(س) = \frac{\text{هـ}(س) \times \text{قَ}(س) - \text{ق}(س) \times \text{هَ}(س)}{(\text{هـ}(س))^{٢}}$

كن جميل الخلق تهواك القلوب

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول :** جد $ق'(س)$ في كل مما يأتي عند قيم س إزاء كل منها :

فرع أ : $ق(س) = س^{٥} - س^{٢} + جـ$ حيث جـ عدد ثابت ، عندما س = -١

الحل $ق(س) = س^{٥} - س^{٢} + جـ$ ، $س = -١$

$ق'(س) = ٥س^{٤} - ٢س = ٥(-١)^{٤} - ٢(-١) \Leftarrow ق'(-١) = ٥ + ٢ = ٧$

فرع ب : $ق(س) = (س^{٣} - ١)(٢س + ١)$ ، عندما س=٣ ( يوجد ضرب )

الحل $ق'(س) = (س^{٣} - ١) + (٢س + ١)(٣س^{٢})$

$ق'(٣) = (٢٧ - ١) + (٦ + ١)(٩ \times ٣) = ٤٣١$

فرع جـ : $ق(س) = \frac{س^{٢}}{٥ - س^{٢}}$ ، عندما س=-٢ ( يوجد قسمة )

الحل $ق'(س) = \frac{[(٥ - س^{٢}) \times ٢س] - [س^{٢} \times (-٢س)]}{(٥ - س^{٢})^{٢}}$

$ق'(-٢) = \frac{(٥ - ٤) \times ٤ - ٤ \times ٤}{(٥ - ٤)^{٢}} = -٢٠$

**السؤال الثاني :** بالاعتماد على المعطيات الواردة في الجدول المجاور ، جد ما يأتي :

| $ن(١)$ | $ن'(١)$ | $هـ(١)$ | $هـ'(١)$ |
|---|---|---|---|
| ٢ | ٣ | -١ | -٣ |

فرع أ : $(ن + هـ^{٢})'(١)$

الحل $(ن + هـ^{٢})'(س) = (ن + هـ \times هـ)'(س)$

$= (ن' + هـ \times هـ' + هـ \times هـ')(س)$

$= ن'(س) + ٢هـ(س) \times هـ'(س)$

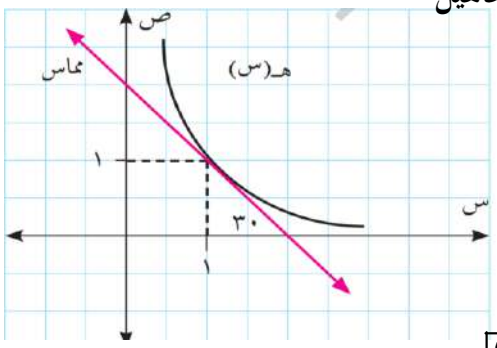
$(ن + هـ^{٢})'(١) = ن'(١) + ٢هـ(١) \times هـ'(١) = ٣ + ٢ \times -١ \times -٣ = ٣ + ٦ = ٩$

فرع ب : $\left(س^{٢} ن(س) - \frac{٣}{هـ(س)}\right)'(١)$ ( يوجد ضرب وقسمة )

الحل $= \left[٢س ن(س) + س^{٢} ن'(س) - \frac{-٣هـ'(س)}{هـ^{٢}(س)}\right]$

$= ٢ \times ١ \times ن(١) + ن'(١) + \frac{٣هـ'(١)}{هـ^{٢}(١)} = ٢ \times ١ \times ٢ + ٣ + \frac{٣ \times -٣}{١} = ٤ + ٣ - ٩ = -٢$

**السؤال الثالث :** اذا كان $ن(س) = \frac{س}{س^{٢}+١}$ وكان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران هـ(س) فجد $\left(\frac{ن}{هـ}\right)'(١)$




**الحل**

$$\left(\frac{ن}{هـ}\right)'(١) = \frac{هـ(١)\times ن'(١) - ن(١)\times هـ'(١)}{(هـ(١))^{٢}}$$ بإيجاد المجاهيل

$$ن(س) = \frac{س}{س^{٢}+١} \Leftarrow \boxed{ن(١) = \frac{١}{٢}} \rightarrow \boxed{١}$$

$$ن'(س) = \frac{(س^{٢}+١) - س(٢س)}{(س^{٢}+١)^{٢}} \Leftarrow \boxed{ن'(١) = ٠} \rightarrow \boxed{٢}$$

من الرسم يتضح أن النقطة (١،١) تنتمي الى المنحنى $\Leftarrow \boxed{هـ(١) = ١} \rightarrow \boxed{٣}$

زاوية ميل المماس = ١٥٠ ( زاوية المماس هي الزاوية المحصورة بين محور السينات الموجب والمماس

هـ = ١٨٠ - ٣٠ = ١٥٠ )

ميل المماس = $ظا ١٥٠ = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

ميل المماس = $\boxed{هـ'(١) = \frac{-١}{\sqrt{٣}}} \rightarrow \boxed{٤}$

الان بالتعويض من ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

$$\left(\frac{ن}{هـ}\right)'(١) = \frac{هـ(١)\times ن'(١) - ن(١)\times هـ'(١)}{(هـ(١))^{٢}} \Leftarrow \left(\frac{ن}{هـ}\right)'(١) = \frac{١\times ٠ - \frac{١}{٢}\times\frac{-١}{\sqrt{٣}}}{١} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$$

---

**السؤال الرابع :**

فرع أ : اذا كانت ص = $\frac{س}{س+١}$ ، أثبت أن $٢ص ص' + س ص'' = ٠$

**الحل**

ص = $\frac{س}{س+١} \Leftarrow ص' = \frac{١\times(س+١) - س}{(س+١)^{٢}} \Leftarrow \frac{١}{(س+١)^{٢}}$

$$\boxed{ص' = \frac{١}{(س+١)^{٢}}} \rightarrow \boxed{١}$$

$$\Leftarrow ص'' = \frac{٠\times(س+١)^{٢} - ٢(س+١)}{(س+١)^{٤}} \Leftarrow \frac{-٢}{(س+١)^{٣}}$$

$$\boxed{ص'' = \frac{-٢}{(س+١)^{٣}}} \rightarrow \boxed{٢}$$

بالتعويض من ١ ، ٢ في المعادلة $\boxed{٢ص ص' + س ص''}$

$$= ٢\times\frac{س}{س+١}\times\frac{١}{(س+١)^{٢}} + س\times\frac{-٢}{(س+١)^{٣}} = \frac{٢س}{(س+١)^{٣}} + \frac{-٢س}{(س+١)^{٣}} = ٠$$

فرع ب : اذا كانت ص = أ س$^{٥}$ + $\frac{٥}{س^{٤}}$ ، أثبت أن ص$''$ = $\frac{٢٠ ص}{س^{٢}}$

الحل ص = أ س$^{٥}$ + ٥ س$^{-٤}$ ⇐ ص$'$ = ٥ أ س$^{٤}$ + − ٢٠ س$^{-٥}$

ص$''$ = ٢٠ أ س$^{٣}$ + ٢٠ أ س$^{-٦}$ بضرب الطرفين في س$^{٢}$

س$^{٢}$ ص$''$ = ٢٠ أ س$^{٥}$ + ٢٠ أ س$^{-٤}$ بأخذ ٢٠ عامل مشترك

س$^{٢}$ ص$''$ = ٢٠ (أ س$^{٥}$ + $\frac{٥}{س^{٤}}$) ⇐ س$^{٢}$ ص$''$ = ٢٠ ص ⇐ ص$''$ = $\frac{٢٠ ص}{س^{٢}}$

---

**السؤال الخامس**: اذا كان ق(س) = (١ − س)(١ + س)(١ + س$^{٢}$)(١ + س$^{٤}$)(١ + س$^{٨}$) ، جد ق$'$(١)

الحل ق(س) = (١ − س$^{٢}$)(١ + س$^{٢}$)(١ + س$^{٤}$)(١ + س$^{٨}$) ( يوجد فرق بين مربعين )

= (١ − س$^{٤}$)(١ + س$^{٤}$)(١ + س$^{٨}$) = (١ − س$^{٨}$)(١ + س$^{٨}$) ( يوجد فرق بين مربعين )

ق(س) = (١ − س$^{١٦}$)

∴ ق$'$(س) = − ١٦ س$^{١٥}$ ⇐ ق$'$(١) = − ١٦

---

**السؤال السادس**: إذا كانت ق(س) = س$^{٢}$ ، هـ(س) = [٢س] :

الحل ق(س) = س$^{٢}$ ⇐ ق$'$(س) = ٢س

إعادة تعريف هـ(س)

هـ(س) = [٢س] ..... طول الدرجة = $\frac{١}{٢}$ ، صفر الاقتران هـ(س) = ٠

⇐ هـ(س) = { − ١ ، $\frac{-١}{٢}$ ≤ س < ٠ ؛ ٠ ، ٠ ≤ س < $\frac{١}{٢}$ }

أولا : فرع أ : جد ق$'$(٠)

الحل ق$'$(٠) = ٢ × ٠ = ٠

فرع ب : جد هـ$'$(س)

الحل هـ$'$(٠) غير موجودة لأنه غير متصل عند س = ٠

فرع جـ : جد $(ن \times هـ)(س)$

**الحل** $(ن \times هـ)(س) = س^{٢}[٢س] = \begin{cases} -س^{٢} & ، \quad ٠ > س \geq -\frac{١}{٢} \\ ٠ & ، \quad \frac{١}{٢} > س \geq ٠ \end{cases}$ متصل عند س=٠

---

فرع د : جد $(ن \times هـ)^{-}(٠)$

**الحل** $(ن \times هـ)^{-}(س) = \begin{cases} -٢س & ، \quad ٠ > س > -\frac{١}{٢} \\ ٠ & ، \quad \frac{١}{٢} > س \geq ٠ \end{cases}$

$(ن \times هـ)'(٠^{-}) = ٠$ ، $(ن \times هـ)'(٠^{+}) = ٠ \Leftarrow (ن \times هـ)'(٠) = ٠$

---

ثانيا / **هل هذا يتناقض مع قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين؟ فسر اجابتك**

**الحل** لا يتناقض مع القاعدة المذكورة ، لأن تطبيق القاعدة يكون فقط اذا كان كلا من هـ(س)،ن(س) قابلين للاشتقاق عند س=٠ وهذا ليس متحققا في السؤال لأن هـ(س) غير متصل عند س=٠ وبالتالي غير قابل لاشتقاق . أي أنه لا يمكن تطبيق القاعدة لعدم توفر الشروط.

---

**السؤال السابع:** إذا كان $ن(س) = س^{٤} + ا س^{٣} - ٣$ جد قيمة ا ، حيث $ن''(٢) = ١٨$

**الحل** $ن'(س) = ٤س^{٣} + ٣ا س^{٢} \Leftarrow ن''(س) = ١٢ س^{٢} + ٦ا س$

$ن''(س) = ٢٤ س + ٦ا$

$ن''(٢) = ١٨ \Leftarrow ٢٤ \times ٢ + ٦ا = ١٨ \Leftarrow ٦ا = -٣٠ \Leftarrow \boxed{ا = -٥}$

---

**السؤال الثامن** : اذا كان $ن(س) = س^{ن}$ ، $ن \ni ص$ ، وكان $ن''(س) = ا س$ ، جد قيمة ا ؟

**الحل** $ن'(س) = ن س^{ن-١} \Leftarrow ن''(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$\Leftarrow ن''(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣}$ من المعطى $ن''(س) = ا س$

$ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣} = ا س$ ( حيث ن عدد ثابت )

من التساوي نجد أن $ن(ن-١)(ن-٢) = ا \leftarrow$ [١]

$س^{ن-٣} = س^{١} \Leftarrow ن-٣ = ١ \Leftarrow$ [ن = ٤] بالتعويض في المعادلة [١]

$ا = ٤ \times (٤-١) \times (٤-٢) = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$

---

السؤال التاسع : اذا كانت $ق'(٢) = ٣$ ، $ق''(٢) = ٥$ ، جد $\lim_{س \to ١} \frac{ق'(٢س) - ق'(٢)}{س - ١}$

الحل بفرض أن $ص = ٢س \Leftarrow س = \frac{١}{٢} ص$ $\quad س \to ١ \Leftarrow ص \to ٢$

$$\lim_{س \to ١} \frac{ق'(٢س) - ق'(٢)}{س - ١} = \lim_{ص \to ٢} \frac{ق'(ص) - ق'(٢)}{\frac{ص}{٢} - ١}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{ق'(ص) - ق'(٢)}{\frac{ص - ٢}{٢}} = ٢ \times \lim_{ص \to ٢} \frac{ق'(ص) - ق'(٢)}{ص - ٢} = ٢ \times ق''(٢) = ٢ \times ٥ = ١٠$$

## القسم الثالث : أسئلة اثرائية

# قواعد الاشتقاق

| # | اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كانت ق (س) = ٢س$^{٢}$ + ٤ فإن $\lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣}$ =<br>أ) ـ ٢٢ ب) ـ ١٢ جـ) ١٢ د) ٢٢ | ب |
| ٢ | إذا كان ق (س) = س$^{٣}$ ـ س$^{٢}$ ، فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(١ + هـ) - ق'(١)}{هـ}$<br>أ) صفر ب) ١ ج) ٤ د) غير موجودة | ج |
| ٣ | ادا كان ق (س) = س$^{٥}$ ـ ٢أ س$^{٢}$ + ٨س ، وكان ق″ (ـ١) = أ فان قيمة الثابت أ تساوى<br>أ) ٤ ب) $\frac{-٢٠}{٣}$ جـ) ـ ٤ د) $\frac{٢٠}{٣}$ | ج |
| ٤ | إذا كان ق (س) = ٣ ـ ٢س$^{٢}$ فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{٢هـ}$ =<br>أ) ١ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ـ ١ د) ـ ٢ | د |
| ٥ | إذا كان ق ( س) = [ س + ٠,٨ ] فإن ق$'$ (٥) =<br>أ) صفر ب) ١ جـ) ٥ د) غير موجودة | أ |
| ٦ | إذا علمت أن ق (س) = $\left[\frac{١}{٣}س + ٥\right]$ ، فإن قَ ( ١٢ ) =<br>أ) ٤ ب) ١ ج) صفر د) غير موجودة | د |

| | | |
|---|---|---|
| ٧ | اذا كان هـ(س) = $\frac{[٢س+١]}{ل(س)}$ وكان هـ$\left(\frac{١}{٣}\right)$ = ٢، هـ$'\left(\frac{١}{٣}\right)$ = −١ فأن ل$'\left(\frac{١}{٣}\right)$<br>أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{-١}{٤}$ جـ) $\frac{١}{٩}$ د) $\frac{-١}{٩}$ | أ |

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان ق(س) = $\frac{١}{٣+أ س}$، س ≠ $\frac{-٣}{أ}$ وكانت قَ(١) = ٢ فجد قيمة الثابت أ ؟ | $\left\{٢-، \frac{-٩}{٢}\right\}$ |
| ٢ | ق(س) = س$^{٢}$ هـ(س) − ٢ (س)، هـ(٢) = ٣، هـ$'$(٢) = ٢، ٢$'$(٢) = ٨ جد قَ(٢)؟ | $\frac{٨}{3}$ |
| ٣ | اذا كان ق(١) = −٣، ق$'$(١) = ٢ فجد $\left(\sqrt{أ س}.ق(س)\right)'$(١) | $\frac{١}{٢}$ |
| ٤ | ق(س) = $\frac{س|١-٢س|}{س+١}$ فجد قَ(٠) | ١ |
| ٥ | ق(س) = [س] × \|س\|، س ∈ ]−٣، −٢[ جد قَ$\left(\frac{-٥}{٢}\right)$ | ٣ |
| ٦ | ق(س) = أس$^{٣}$ + ١، هـ(س) = ٢س، (ق − ٣هـ)$'$(١) = ٠ ماقيمة أ ؟ | ٢ |
| ٧ | إذا كان ق(س) = $\frac{\|س^{٢}-٢س+٤\|}{س(س-١)}$ فجد قَ(س) | |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كان $ق'(٢)=٥،ل(٢)=٢،هـ(٢)=٣،هـ'(٢)=٤$ وكان $ق(س)=\frac{٢هـ(س)-٢س}{س^{٢}\,ل(س)}$ ، جد $ل'(٢)$؟ | $-٣٦$ |
| ٢ | اذا كان $ل(س)=ق(س)\times هـ(س)$ وكانت $ق'(س)\times هـ'(س)=جـ،جـ\neq ٠$ وكانت $ق''(س)،هـ''(س)$ موجودة ، اثبت ان $\frac{ل''}{ل}=\frac{ق''}{ق}+\frac{هـ''}{هـ}$ | |
| ٣ | $ق(س)$ اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث $ق(-١)=٠،ق'(-١)=٣$ $ق''(-١)=-٢،ق''(-١)=٦$ ، جد قاعدة الاقتران $ق(س)$؟ | $ق(س)$ $=س^{٣}+٢س^{٢}+٤س+٣$ |

## الدرس الرابع/ مشتقة الاقترانات المثلثية

### القسم الأول : الملخص

**قاعدة :إذا كان :**

١- ق(س) =جاس فإن قَ(س) =جتاس

٢- ق(س) =جتاس فإن قَ(س) = –جاس

٣- ق(س) =ظاس فإن قَ(س) =قا$^{٢}$س

٤- ق(س) =قاس فإن قَ(س) =قاسظاس

٥- ق(س) =ظتاس فإن قَ(س) = –قتا$^{٢}$س

٦- ق(س) =قتاس فإن قَ(س) = –قتاسظتاس

إن الاتجاه الذي يبدأ مع التعلم سوف يكون من شأنه
أن يحدد حياه المرء في المستقبل

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول :** جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي :

فرع أ : $ص = ٢جتاس - ٢ظاس$

**الحل** $ص' = -٢جاس - ٢قا^٢ س$

---

فرع ب : $\frac{١ - قاس}{١ + قاس}$

**الحل** $ص' = \frac{(١+قاس)(-قاس \times ظاس) - (١-قاس)(قاس \times ظاس)}{(١+قاس)^٢}$

$= \frac{-قاس \times ظاس - قا^٢ س \times ظاس - قاس \times ظاس + قا^٢ س \times ظاس}{(١+قاس)^٢} \Leftarrow = \frac{-٢قاس \times ظاس}{(١+قاس)^٢}$

---

فرع جـ : $ص = \frac{س}{قتاس + ظتاس}$

**الحل** $ص' = \frac{(قتاس+ظتاس) \times ١ - س(-قتاس \times ظتاس + -قتا^٢ س)}{(قتاس+ظتاس)^٢}$

$= \frac{قتاس+ظتاس + س قتاس \times ظتاس + س قتا^٢ س}{(قتاس+ظتاس)^٢} = \frac{(ظتاس + س قتاس ظتاس) + (قتاس + س قتا^٢ س)}{(قتاس+ظتاس)^٢}$

$= \frac{ظتاس(١ + س قتاس) + قتاس(١ + س قتاس)}{(قتاس+ظتاس)^٢} = \frac{(١ + س قتاس)(قتاس+ظتاس)}{(قتاس+ظتاس)^٢} = \frac{١ + س قتاس}{قتاس+ظتاس}$

(حل اخر باستخدام اولا الضرب التبادلي ثم الاشتقاق )

---

فرع د : $ص = س^٢ قاس$

**الحل** $ص' = س^٢ قاس ظاس + ٢س قاس \Leftarrow ص' = قاس(٢س + س^٢ ظاس)$

السؤال الثاني : اذا كانت ص =ظاس ، س زاوية حادة ، أثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٢ص(١+ص^{٢})$

الحل ص َ =قا$^{٢}$س =قاس×قاس

ص ً=قاس×قاس ظاس+قاس×قاس ظاس =٢قا$^{٢}$س ظاس

متطابقة قا$^{٢}$س = ١+ظا$^{٢}$س

=٢(١+ظا$^{٢}$س) ظاس بالتعويض عن المعطى ص=ظاس

=٢ص(١+ص$^{٢}$)

---

السؤال الثالث : إذا كانت ص = $\frac{جاس}{س}$ ، س ≠ ٠ أثبت أن ص ً+ $\frac{٢}{س}$ ص َ+ ص = ٠

الحل ص = $\frac{جاس}{س}$ (بالضرب التبادلي)

ص س =جاس (بالاشتقاق)

ص+س ص َ= جتاس (بالاشتقاق)

ص َ+س ص ً+ص َ= −جاس (حيث ص س =جاس)

٢ص َ+س ص ً= −ص س

س ص ً+٢ص َ+ص س = ٠ (بالقسمة على س، س ≠ ٠)

ص ً+ ٢ $\frac{ص َ}{س}$ + ص = ٠

---

السؤال الرابع : اذا كان ق(س) = $\frac{١}{٢}$س$^{٢}$ −جتاس ، س ∈ [−٢π، ٢π] جد مجموعة قيم س التي تجعل ق ً(س) = ٠

الحل ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{٢}$ −جتاس

ق َ(س) = س+جاس

ق ً(س) = ١+جتاس

بوضع ق ً(س) = ٠ ⟸ ١+جتاس = ٠

⟸ جتاس = −١

⟸ س = π َ، −π َ حيث س ∈ ]−٢π، ٢π[

السؤال الخامس : جد $\lim_{هـ \to 0} \frac{قا(س^{٢} + هـ) - قاس^{٢}}{هـ}$

الحل

$\lim_{هـ \to 0} \frac{قا(س^{٢} + هـ) - قاس^{٢}}{هـ}$

بفرض ص = س$^{٢}$

$= \lim_{هـ \to 0} \frac{قا(ص + هـ) - قاص}{هـ}$

$= قا'(ص) = قاص ظاص = قاس^{٢} ظاس^{٢}$

## القسم الثالث :اسئلة اثرائية

### مشتقة الاقترنات المثلثية

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | أوجد $\lim_{هـ \to 0} \frac{جتا(٢س - هـ) - جتا٢س}{هـ}$<br>أ) ـ ٢ جا ٢س ب) جا ٢س جـ) ٢ جا ٢س د) ـ جا ٢س | ب |
| ٢ | إذا كان ق (س) = جتا ٢س ، فإن ق$''$ (س) + ٥ ق (س) تساوي :<br>أ) جتا ٢س ب) ٩ جتا ٢س جـ) ـ ٩ جتا ٢س د) ـ جتا ٢س | أ |
| ٣ | إذا كان ص = قا س + ظا س ، فإن $\frac{ص'}{ص}$ تساوي :<br>أ) قاس ب) قتا س جـ) ـ قا س د) ـ قتاس | أ |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كانت ص = ١ ـ جا س ، أثبت أن $\frac{د}{د س}(\frac{جتا س}{ص}) = \frac{١}{ص}$ ، حيث ص ≠ صفر | |

| | | |
|---|---|---|
| ٢ | إذا كان ص = جا هـ ، س = قتا هـ ، أثبت أن : $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ ص \frac{د ص}{دس} =$ صفر | |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كانت المسافة التي يقطعها جسم يتحرك في خط مستقيم بعد ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقانون ف $=$ جا$^{٢}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ ن، ن $\in [٠ ، \pi]$ ، جد السرعة والتسارع عندما ف $=$ ٠,٣٦ م | ع $=$ ٠,١٢<br>ت $=$ ٠,١٤ |
| ٢ | اذا كان م(س) $=$ جاس $+$ ا جتا ا س، جتا ا س $\neq$ ٠ ، وكان م$''$(س) $=$ $-$ م(س) ، جد قيمة / قيم ا ؟ | $\{١، ١-، ٠\}$ |
| ٣ | اذا كان ق(س) $=$ س $\lvert$جاس$\rvert$ ، س $\in [٠ ، ٢\pi]$ ، جد ق$''$(س) | ق$''$(س) $=$ $\begin{cases} -س جاس + ٢ جتاس & ، ٠ < س < \pi \\ س جاس - ٢ جتاس & ، \pi < س < ٢\pi \\ غ.م & ، س = ٠، \pi، ٢\pi \end{cases}$ |

## الدرس الخامس/ قاعدة لوبيتال ومشتقة الاقتران الاسي واللوغاريتمي

### القسم الأول : الملخص

**١ ـ قاعدة لوبيتال :**

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند النقطة س = أ ، ل ∈ ح وكانت :

$$\text{نهـا}_{س\to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{٠}{٠} \quad ، \quad \text{نهـا}_{س\to أ} \frac{ق'(س)}{هـ'(س)} = ل \quad \text{فإن} \quad \text{نهـا}_{س\to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = ل$$

**٢ ـ إذا كان :**

أ ـ ص = هـ$^{س}$ فإن ص$'$ = هـ$^{س}$

ب ـ ص = لـو س ، س > ٠ فإن ص$'$ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠

جـ ـ ص = هـ$^{ق(س)}$ فإن ص$'$ = ق$'$(س) هـ$^{ق(س)}$

د ـ ص = لـو$_{هـ}$ ق(س) ، ق(س) > ٠ فإن ص$'$ = $\frac{ق'(س)}{ق(س)}$ ، ق(س) ≠ ٠

حيث جـ ، د موجود صفحة ٤٧ من درس قاعدة السلسلة

***التعليم ليس إعداداً للحياة ... بل هو الحياة نفسها***

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول :** احسب النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

فرع أ : $\lim_{س\to1} \frac{هـ^{س-1} - س}{لـو_{هـ} س}$ ( بالتعويض المباشر $\xrightarrow{ص}$ نستخدم قاعدة لوبيتال )

الحل $= \lim_{س\to1} \frac{هـ^{س-1} \times 1 - 1}{\frac{1}{س}}$

$= \lim_{س\to1} (هـ^{س-1} - 1) \times س = (هـ^{1-1} - 1) \times 1 = (1-1) = 0$

---

فرع ب : $\lim_{س\to0} \frac{٤س}{ظاس}$ ( بالتعويض المباشر $\xrightarrow{ص}$ نستخدم قاعدة لوبيتال )

الحل $= \lim_{س\to0} \frac{٤}{قا^{٢}س} = \lim_{س\to0} ٤جتا^{٢}س = ٤ \times 1 = ٤$

---

فرع جـ: $\lim_{س\to0} \frac{س - جاس}{س^{٣}}$ ( بالتعويض المباشر $\xrightarrow{ص}$ نستخدم قاعدة لوبيتال )

الحل $= \lim_{س\to0} \frac{1 - جتاس}{٣س^{٢}}$ ( بالتعويض المباشر $\xrightarrow{ص}$ نستخدم قاعدة لوبيتال )

$= \lim_{س\to0} \frac{جاس}{٦س}$ ( بالتعويض المباشر $\xrightarrow{ص}$ نستخدم قاعدة لوبيتال )

$= \lim_{س\to0} \frac{جتاس}{٦} = \boxed{\frac{1}{٦}}$

---

**السؤال الثاني:** جد $\frac{ء ص}{ء س}$ في كل مما يأتي

فرع أ : $ص = هـ^{س} جتاس$

الحل $\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{س} \times -جاس + هـ^{س} \times جتاس$

$= هـ^{س} \times (جتاس - جاس)$

---

فرع ب : $ص = لـو_{هـ} \sqrt{س}$ ، $س > 0$

الحل $ص = لـو_{هـ} س^{\frac{1}{٢}} = \frac{1}{٢} لـو_{هـ} س$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{1}{٢} \times \frac{1}{س} = \frac{1}{٢س}$

فرع جـ : $ص = لـو_{هـ} \sqrt{\frac{س^{٣}}{س^{٨}}}$ ، $س > ٠$

**الحل** $ص = لـو_{هـ} \left(\frac{س^{٣}}{س^{٨}}\right)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} \left(\frac{١}{س^{٥}}\right) = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} (س^{-٥})^{\frac{١}{٢}} = \boxed{-\frac{٥}{٢} لـو_{هـ} س}$

$$\frac{ء ص}{ء س} = = \frac{-٥}{٢س}$$

حل إخر فرع جـ :

**الحل** $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} \left(\frac{١}{س^{٥}}\right) = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} ١ - \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س^{٥} = - - \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س^{٥} = \frac{-٥}{٢س}$

---

فرع د : $ص = (هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} + ٢)$ ( فرق بين مربعين )

**الحل** $ص = (هـ^{٢س} - ٤)$

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٢هـ^{٢س}$$

---

**السؤال الثالث :** اذا كان $ص = أ س هـ^{-س}$ ، وكان متوسط التغير للاقتران ص عندما تتغير س من ٠ الى ٢ يساوي $\frac{٢}{هـ}$

احسب قيمة الثابت أ

**الحل** $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٢}{هـ} \Leftarrow \frac{ن(٢) - ن(٠)}{٢ - ٠} = \frac{٢}{هـ}$

$\frac{٢أهـ^{-١} - ٠}{٢} = \frac{٢}{هـ} \Leftarrow \frac{أ}{هـ} = \frac{١}{هـ}$ $\therefore \boxed{أ = ٢}$

---

**السؤال الرابع :** اذا كانت $ص = س^{٢} + هـ^{س} + ١$ ، فجد قيمة / قيم س التي تجعل $ص = ص$

**الحل** $ص = ٢س + هـ^{س}$ ( نعوض بالمعطى )

بما أن $ص = ص$ ( بالمعطى )

$\Leftarrow س^{٢} + هـ^{س} + ١ = ٢س + هـ^{س}$

$\Leftarrow س^{٢} + هـ^{س} + ١ - ٢س - هـ^{س} = ٠$

$س^{٢} - ٢س + ١ = ٠ \Leftarrow (س - ١)(س - ١) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

السؤال الخامس : أثبت باستخدام قاعدة لوبيتال أن : $\lim_{س\to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$ ، $أ \neq ٠$

الحل $\lim_{س\to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \lim_{س\to أ} \frac{ن س^{ن-١} - ٠}{م س^{م-١} - ٠}$ ( نعوض بقيمة س = أ )

$= \frac{ن أ^{ن-١}}{م أ^{م-١}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$

ملاحظة : عند القسمة نطرح الأسس

---

السؤال السادس : جد $\lim_{س\to ١} \frac{س ق(١) - ق(س)}{س - ١}$ باستخدام قاعدة لوبيتال علما بأن $ق'(١) = ٣$ ، $ق(١) = ٦$

الحل $\lim_{س\to ١} \frac{س ق(١) - ق(س)}{س - ١}$ ( بالتعويض المباشر $\xrightarrow{غير}$ نستخدم قاعدة لوبيتال )

$= \lim_{س\to ١} \frac{١ \times ق(١) - ق'(س)}{١} = ق(١) - ق'(١) = ٦ - ٣ = \boxed{٣}$

---

## القسم الثالث :اسئلة اثرائية

### قاعدة لوبيتال ، ومشتقة الاقتران الاسي واللوغاريتمي

| # | اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان ق (س) = $هـ^{س}$ + لـو$_{هـ}$ ($س^{٢}$ +١) ، فإن ق/ (٠) = <br> أ) ـ ٤ ب) ١ ج) ٣ د) هـ | ب |
| ٢ | إذا كان ق (س) =لـو$_{هـ}$ $هـ^{س}$ –لـو$_{هـ}$ ($هـ^{س}$ +١) ، فإن ق/ ( ٠ ) = <br> أ) $\frac{١}{هـ + ١}$ ب)١ –لـو$_{هـ}$ ٢ ج) ـ ١ د) $\frac{١}{٢}$ | د |
| ٣ | إذا كان ص =لـو$_{هـ}$ (لـو$_{هـ}$ س) فان $\frac{دص}{دس}$ عندما س = هـ <br> أ) هـ ب) ١ ج) $\frac{١}{هـ}$ د) $\frac{١}{هـ^{٢}}$ | ج |

| | | |
|---|---|---|
| ٤ | $\text{نهـا}_{س\to -\frac{١}{٢}} \frac{١-٤س^{٢}}{٢س+١} =$<br>أ) ٢ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{-١}{٢}$ د) -٢ | أ |

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كانت $\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٢س^{٣}+أس^{٢}-٢٠}{س^{٢}-٤} = ١$ جد قيمة أ؟ | -٥ |
| ٢ | اذا كانت $\text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{٣س^{٢}-(٦-م)-٢م}{س^{٢}-٤} = -٢$ جد قيمة م؟ | -١٤ |
| ٣ | أوجد $\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{(\text{جاس}+\text{جتاس})-٤}{\text{جا}٢س-١}$ | $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | جد النهايات التالية علما بان $ق(٠)=٠، ق''(س)=٦$<br>أ) $\text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{ق'(س)\,\text{جا}٥س}{٣س^{٢}}$ ب) $\text{نهـا}_{هـ\to ٠} \frac{ق(س+هـ)-ق(س-هـ)}{٢هـ}$<br>ج) $\text{نهـا}_{هـ\to ٠} \frac{ق(\frac{١}{س}+هـ)-ق(\frac{١}{س})}{٥هـ}$ | ١٠<br>$ق'(س)$<br>$\frac{١}{٥}ق'(\frac{١}{س})$ |
| ٢ | اذا كان $\text{نهـا}_{هـ\to ٠} \frac{(س+أ)^{٥}-٣٢أ^{٥}}{(س+أ)^{٣}-٨أ^{٣}} = \frac{٢٠}{٣}$ جد قيمة أ؟ | $أ = \pm ١$ |

## الدرس السادس تطبيقات هندسية وفيزيائية

### القسم الأول : الملخص

١. اذا كان الاقتران ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند النقطة (س١، ن(س١))فان ميل المنحنى عند فالنقطة أ هو ميل المماس ، ويساوي ن´(س١) ويعرف العمودي على منحنى الاقتران بانه العمودي على المماس للمنحنى عند نقطة التماس.

٢. ميل المماس × ميل العمودي = −١

٣. اذا كانت معادلة المستقيم أ س + ب ص + ج = صفر فان ميل المماس = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

٤. ميل المماس = ن´(س) =ظاهـ حيث هـ الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٥. ميل العمودى المرسوم لمنحنى الاقتران ص =(س) عند النقطة (س١،ص١) الواقعة عليه يساوي $\frac{-١}{م}$

ومعادلته هي : ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$(س − س١) ، حيث م = قَ(س١) ، ص١ = (س١)

٦. معادلة المماس بمعلومية الميل ( م ) ونقطة التماس (س١، ص١) ⇐ ص − ص١ = م(س − س١)

٧. السرعة اللحظية (ع) عند الزمن ن هي ع (ن ) = $\frac{\text{ى ف}}{\text{ى ن}}$ = ف ´

٨. التسارع اللحظي (ت) عند الزمن ن هي ت (ن ) = $\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ن}}$ = $\frac{\text{ى}^{٢}\text{ ف}}{\text{ى ن}^{٢}}$ = ف ´´

**لكي ننجح علينا أولاً أن نؤمن أنه بمقدرونا تحقيق النجاح.**

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول: جد النقطة / النقاط على منحنى $ن(س) = س^{٢} - ٢س + ١$، التي يكون عندها المماس للمنحنى عموديا على المستقيم $س + ٢ص + ٤ = ٠$**

**الحل** لايجاد ميل المماس يجب ايجاد ميل العمودي

من معادلة المستقيم $س + ٢ص + ٤ = ٠$

ميل العمودي $= \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٢} \Leftarrow$ ميل المستقيم $= \frac{-١}{\text{ميل العمودي}} \Leftarrow$ ميل المستقيم $= \frac{-١}{(\frac{-١}{٢})} = ٢$

$ن(س) = س^{٢} - ٢س + ١$

$ن'(س) = ٢س - ٢ = ٢$

$\Leftarrow ٢س = ٤$

$س = ٢$

بالتعويض في معادلة المنحنى ص $= (٢)^{٢} - ٢ \times ٢ + ١ = ١ \Leftarrow$ النقطة هي (٢ ، ق(٢)) = (٢، ١)

---

**السؤال الثاني: جد معادلة المماس لمنحنى $ن(س) = ٣ - ظا^{٢}س$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$**

**الحل** عندما $س = \frac{\pi}{٤}$ بالتعويض

ص $= ٣ - ظا^{٢}\frac{\pi}{٤} = ٣ - ١ = ٢ \Leftarrow$ نقطة التماس هي $(س، ص) = (\frac{\pi}{٤}، ٢)$

الميل $= ن'(س) = -٢ظاس \times قا^{٢}س$ بالتعويض عن $س = \frac{\pi}{٤}$

ميل المماس $= ن'(\frac{\pi}{٤}) = -٢ظا\frac{\pi}{٤} \times قا^{٢}\frac{\pi}{٤}$

$= -٢ \times ١ \times (\frac{١}{جتا\frac{\pi}{٤}})^{٢} = -٢ \times ١ \times ٢ = -٤$

معادلة المماس هي : $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

بالتعويض عن النقطة والميل : $ص - ٢ = -٤(س - \frac{\pi}{٤})$

$$ص = -٤س + \pi + ٢$$

**السؤال الثالث:** اذا كان المماس لمنحنى $ق(س) = لـو_{هـ} \frac{س}{٢}$ عندما س = ٢ يقطع محوري السينات والصادات في النقطتين ب ،جـ على الترتيب ، جد مساحة المثلث م ب جـ ، حيث م نقطة الأصل .

**الحل**

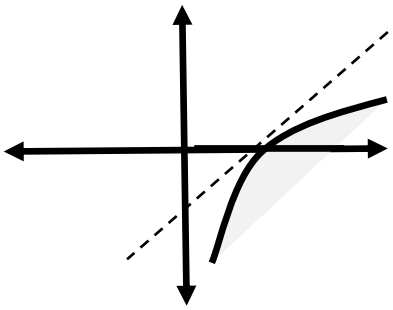
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ ×القاعدة ×الارتفاع

$ق(س) = لـو_{هـ} س - لـو_{هـ} ٢$ بالتعويض عن س = ٢ $\Leftarrow$ ص= $لـو_{هـ} \frac{٢}{٢} = لـو_{هـ} ١ = ٠ \Leftarrow$ النقطة =(٢، ٠)

$ق'(س) = \frac{١}{س} \Leftarrow ق'(٢) = \frac{١}{٢} \Leftarrow$ ميل المماس = $\frac{١}{٢}$"

معادلة المماس هي : $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$ ، بالتعويض عن النقطة والميل : $ص - ٠ = \frac{١}{٢}(س - ٢)$

$ص = \frac{١}{٢} س - ١$ .....[١]



لايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات ( المقطع السيني) نضع ص = ٠

$٠ = \frac{١}{٢} س - ١$ ومنها النقطة (٢، ٠)

$س = ٢$

لايجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات ( المقطع الصادي) نضع س = ٠

$ص = \frac{١}{٢} \times ٠ - ١$ ومنها النقطة (٠، -١)

$ص = -١$

مساحة المثلث = نصف القاعدة ×الارتفاع = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة مساحة

---

**السؤال الرابع:** اذا كان المستقيم $س = ا - ٦ص$ يمس منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{٣س}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$ ، جد قيم ا ؟

**الحل** لايجاد قيم ا يجب ايجاد قيم ( س،ص) من خلال مماسا يمس $\Leftarrow$ ميل المماس = ميل المستقيم

أولا : ايجاد ميل المماس

$ق'(س) = \frac{٣س - ٦ - ٣س}{(س - ٢)^{٢}} = \frac{-٦}{(س - ٢)^{٢}}$ .....[١]

ثانيا : ايجاد ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٦}$ .....[٢] حيث $س + ٦ص = ا$

من المعادلتين [١]،[٢] ميل المماس = ميل المستقيم

$(س_{١} - ٢)^{٢} = ٣٦ \leftarrow س_{١} - ٢ = \pm ٦ \Leftarrow$ $س_{١} = ٨ ، -٤$

عندما س = ٨ فان

$$ت(س) = ت(٨) = \frac{٣ \times ٨}{٢ - ٨} = ٤$$

وبالتالي النقطة (٨، ٤) وهي تحقق معادلة المستقيم

س = ا – ٦ص

اذن : $٨ = ا - ٦ \times ٤ \Leftrightarrow \boxed{ا = ٣٢}$

وعندما س١ = – ٤ فان

$$ت(س) = ت(-٤) = \frac{٣ \times -٤}{٢ - -٤} = ٢$$

وبالتالي النقطة (٨، ٤) وهي تحقق معادلة المستقيم

س = ا – ٦ص

اذن : $-٤ = ا - ٦ \times ٢ \Leftrightarrow \boxed{ا = ٨}$

---

السؤال الخامس: قذف جسم رأسيا الى أعلى وفق العلاقة ف = ٠ ٤ن – ٥ن$^{٢}$ ، حيث ف ارتفاعه بالأمتار ، ن بالثواني ، جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠ م

الحل لايجاد السرعة يجب ايجاد الزمن من خلال المسافة الكلية ف = ١٠٠ م

ولكن يجب فصل زمن الصعود عن زمن الهبوط ، لايجاد زمن الصعود من خلال أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم ع(ن)= ٠

$$ف(ن) = ٠ ٤ن - ٥ن^{٢}$$

$$ع(ن) = ف\acute{} = ٠ ٤ - ١٠ن \Leftarrow ع(ن) = ٠ ٤ - ١٠ن = ٠$$

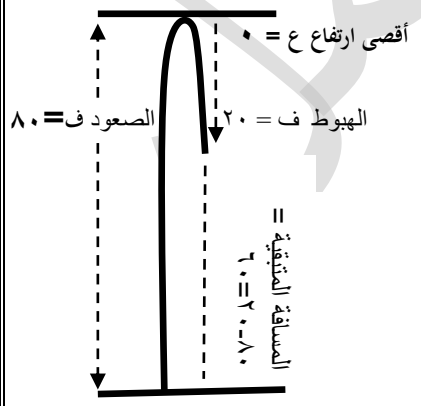
$$\Leftarrow -٠ ٤ = -١٠ن$$

$$\Leftarrow ن = ٤ ث \text{ ( زمن الصعود )}$$

$$ف(ن) = ٠ ٤(٤) - ٥(٤)^{٢} = ١٦٠ - ٨٠ = ٨٠ م$$

$$\Leftarrow \text{ الصعود (عند ن = ٤ ث ، ف= ٨٠ م )} \Leftarrow \text{ الهبوط = ١٠٠ – ٨٠ = ٢٠ م}$$

ولكن المطلوب هو سرعة الجسم عند ف = ١٠٠ م و من ملاحظة الشكل فان السرعة عندما المسافة = ١٠٠ م مساوية للسرعة عندما المسافة المتبقية = الصعود – الهبوط = ٨٠–٢٠=٦٠ م




السرعة عندما ف = ١٠٠ = السرعة عندما ف = ٦٠ ولكن بعكس الإشارة

$$-٦٠ = ٠ ٤ن - ٥ن^{٢} \Leftarrow -٦٠ = ٠ ٤ن - ٥ن^{٢}$$

$$\Leftarrow ٠ ٤ن - ٥ن^{٢} - ٦٠ = ٠$$

$$\Leftarrow ن^{٢} - ٨ن - ١٢ = ٠$$

$$\Leftarrow (ن - ٦)(ن - ٢) = ٠ \Leftarrow ن = ٦ \text{ ، } ن = ٢ \text{ مرفوضة}$$

$$ن = ٦ \Leftarrow ع = ٠ ٤ - ١٠ \times ٦ = -٢٠ م/ث$$

**السؤال السادس: من نقطة على سطح الأرض قذف جسم رأسيا الى أعلى ، وكان ارتفاعه ف بالأمتار بعد ن من الثواني يعطى بالعلاقة ف = ٣٠ن – ٥ن$^{٢}$ ، فسقط على سطح بناية ترتفع ٤٠ م ، جد :**

فرع أ : **أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم**

**الحل**

أقصى ارتفاع وهي عندما ع(ن) = ٠

ع(ن) = ف$'$ = ٣٠ – ١٠ن

ع(ن) = ٠ ⇐ ٣٠ – ١٠ن = ٠

⇐ ١٠ن = ٣٠ ⇐ ن = ٣ ث

أقصى ارتفاع وهي عندما ن = ٣ ⇐ ف = ٣٠(٣) – ٥(٣)$^{٢}$ = ٩٠ – ٤٥ = ٤٥ م

---

فرع ب : **سرعة ارتطام الجسم بسطح العمارة**

**الحل**

ف = ٤٠ ⇐ ٣٠ن – ٥ن$^{٢}$ = ٤٠

٣٠ن – ٥ن$^{٢}$ – ٤٠ = ٠ ⇐ ن$^{٢}$ – ٦ن + ٨ = ٠

⇐ (ن – ٢)(ن – ٤) = ٠

⇐ ن = ٢ ، ن = ٤

ن = ٤ ⇐ ع$_{١}$ = – ١٠ م/ث في لحظة النزول

---

## القسم الثالث :اسئلة اثرائية

### تطبيقات هندسية وفيزيائية

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٠،٣) هي : ٢س-٣ص=٦ فإن ق$'$(٣)= أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٢}{٣}$ جـ) $-\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{-٢}{٣}$ | جـ |
| ٢ | إذا كان المستقيم ص= س مماسا لمنحنى ص = س$^{٢}$ + أ فإن قيمة أ تساوي أ) ٢ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) صفر | جـ |

| | | |
|---|---|---|
| ٣ | إذا كانت معادلة العمودي على ماس منحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (٣،١) هي ص $= \frac{١}{٩}$ س فإن ق$'$(١)<br>أ) ٣ ب) -٣ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $-\frac{١}{٣}$ | د |
| ٤ | إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة ( ١٢ ، ب ) هي أ ص = س ، وكانت ق$'$ ( ١٢ ) = ٦ ، فإن الثابت ب =<br>أ) ـ ٦ ب) ـ ٢ ج) ٢ د) ٦ | ب |
| ٥ | إذا كانت معادلة العمودي على منحنى الاقتران ق (س) عند النقطة ( ١ ، ٢) الواقعة عليه هي : س +٢ ص = ٥ فإن ق$'$ ( ١) تساوي :<br>أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) ٢ د) ـ ٢ | جـ |
| ٦ | إذا كان المستقيم ص = ٣ س ـ ١ مماساً لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة ( ٢ ، ٥ ) ،فان $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ٥}{هـ}$ =<br>أ) ٣ ب) ٤ جـ) صفر د) ٥ | أ |
| ٧ | إذا كان المستقيم ص = س مماساً لمنحنى ص = $\frac{س^٢}{٤}$ + جـ ، فإن قيمة جـ =<br>أ) ـ ٢ ب) ـ ١ ج) ١ د) ٢ | ج |
| ٨ | قذف جسم رأسياً إلى أعلى بحيث يقاس ارتفاعه حسب العلاقة ف = ٤ أ ن ـ ٢ن$^٢$ ، أ > ٠ إذا كان أقصى ارتفاع وصله الجسم ٣٢ متراً ، فإن قيمة أ هي :<br>أ) ٤ ب) ٨ ج) ١٦ د) ٣٢ | أ |
| ٩ | إذا كان المستقيم ص = ١ـ ٥س مماساً لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة ( ٢ ، ـ ٩ ) ، فإن : $\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + ٣هـ) + ٩}{هـ}$ =<br>أ) ـ ١٥ ب) ـ٥ جـ) ٥ د) ١٥ | أ |

| | | |
|---|---|---|
| ١٠ | إذا كان المستقيم ص = ٥س+ ب مماساً لمنحنى الاقتران ق(س)=٢س$^{٢}$ + س - ١ فأن قيمة ب هي :<br>أ) - ٣ ب) -١ جـ) ١ د) ٣ | أ |
| ١١ | اذا كان المستقيم ص-٣س-٢=٠ مماسا لمنحنى ق(س) عند النقطة $(١، ق(١))$<br>فان $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+٥هـ)-٥}{هـ}$<br>أ)٢٥ ب)١٥ جـ)٠ د)-٥ | ب |
| ١٢ | قذف جسم رأسيا للاعلى ، وكان ارتفاعه ف بالامتار في أي لحظة يعطي بالعلاقة ، ف = ٨٠ن – ٦ن$^{٢}$<br>حيث ن الزمن بالثواني ، ان زمن وصول الجسم لأقصى ارتفاع يساوي :<br>أ)٥ ثانية ب)٤ ثانية جـ)٣,٥ ثانية د) ٢,٥ ثانية | د |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كان المستقيم ٤س – ٢ص = ٨ يمس منحنى ق(س) عند النقطة $(٣، ٢)$ وكان المستقيم ٩ص + ٣س = ٠ عموديا على مماس المنحنى ل عند النقطة $(-١، ٣)$، جد هـ`(٣) حيث هـ(س) = $\frac{ق(س)+٣س}{س^{٢} ل(س)}$ | $\frac{-٩٢}{٢٧}$ |
| ٢ | اذا كان ق(س) = س$^{٢}$ + أس + ب يقطع منحنى هـ(س) = س$^{٣}$ – جـس عند النقطة $(١، ٢)$ ولهما نفس المماس عند تلك النقطة ، ما قيم أ،ب،جـ ؟ | ٢، -١، -١ |
| ٣ | جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة $(٠، ١)$ لمنحنى الاقتران ق(س) = س$^{٣}$ + ٣ والعمودي على المماس عند نقطة التماس والمستقيم ص=١؟ | ١٥ |
| ٤ | اسقط جسم سقوطا حر من على برج ارتفاعه (١٨٠م) حسب العلاقة ف$_{١}$ = ٥ن$^{٢}$ ، وعندما كانت سرعته (١٠م/ث) اسقط جسم اخر من نفس الارتفاع وبسرعة أ م/ث وحسب العلاقة ف$_{٢}$ = أن + ٥ن$^{٢}$ اذا وصل الجسمان سطح الارض في نفس اللحظة ، جد قيمة أ ؟ | ١١ |

| | | |
|---|---|---|
| ٥ | اسقط جسم للاسفل من سطح عمارة سقوطا حرا وفق العلاقة ف$_{١}$ = ١٦ ن$^{٢}$ وفي اللحظة نفسها رمى جسم اخر للاسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م/ث وفق العلاقة ف$_{٢}$ = ٢٠ ن + ١٦ ن$^{٢}$ ، اذا ارتطم الجسم الاول بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالارض ،جد :<br>١) سرعة كل من الجسمين لحظة ارتطامهما بالارض .<br>٢) ارتفاع العمارة. | ١. ع$_{١}$ = ٤٨ قدم<br>ع$_{٢}$ = ٥٢ قدم<br>٢. ٣٦ قدم |
| ٦ | من نقطة على سطح الارض اطلق جسم لاعلى حسب العلاقة ف = ١٠ ن – ٨ ن$^{٢}$ فسقط على سطح بناية ارتفاعها (٢٤م) سطح الارض جد :<br>١) اقصى ارتفاع يصله الجسم من سطح العمارة<br>٢) سرعة ارتطام الجسم بسطح البناية . | ١. ١ م<br>٢. –٢ م/ث |

## الدرس السابع / قاعدة السلسلة

### القسم الأول : الملخص

١- اذا كانت ص = ق (ع) ، ع = هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، ص = ق (هـ (س)) ، وبالتالي :

فان $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

**٢- قاعدة السلسلة :**

اذا كان هـ(س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س ، وكان ق (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند هـ (س) فأن الاقتران المركب يكون قابلا للاشتقاق عن س ، ويكون

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)).هـ'(س)$

٣- اذا كان ص= $(هـ(س))^{ن}$ ، وكان هـ(س) قابل للاشتقاق ، ن ∈ ص ، فان $\frac{د ص}{د س} = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

٤- اذا كان ك (س) اقتران قابلا للاشتقاق ، فان :

أ) $ق(س) = هـ^{ك(س)}$ وتكون $ق'(س) = ك'(س).هـ^{ك(س)}$

ب) $م(س) = لـو_{هـ} ك(س)$ ، ك(س) > ٠ قابل للاشتقاق وتكون $م'(س) = \frac{ك'(س)}{ك(س)}$

*كل من توقف عن التعليم فهو كهل ،*
*ولا يهم إن كان في العشرين أو في الثمانين من عمره ،*
*بينما كل من لا ينفك يتعلم يظل شاباً*

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

السؤال الأول: جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١ لكل مما يأتي :

فرع أ : $ص = (س^{٢} + س + ١)^{-٣}$ بحل مشتقة القوس

الحل

$ص = (س^{٢} + س + ١)^{-٣}$

$\frac{د ص}{د س} = -٣(س^{٢} + س + ١)^{-٤} \times (٢س + ١)$ بالتعويض عن س=١

ينتج $\frac{د ص}{د س} = -٣(٣)^{-٤} \times (٣) = \frac{-٩}{٨١} = \frac{-١}{٩}$

---

فرع ب : $ص = س^{٢} قا\frac{\pi}{س}$ ، $س \neq ٠$ حاصل ضرب اقترانين

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \left(س^{٢} \times قا\frac{\pi}{س} \times ظا\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}}\right) + \left(قا\frac{\pi}{س} \times ٢س\right)$

بالتعويض عند س = ١ فان $\frac{د ص}{د س} = \left((١)^{٢} \times قا\pi \times ظا\pi \times -\pi\right) + \left(٢ \times قا\pi\right)$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = ٠ + (-١ \times ٢) = -٢$

---

فرع جـ: $ص = ٥ع^{٢} - ٧$ ، $ع = \frac{١}{س^{٢} + ١}$ قاعدة السلسلة

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = ١٠ع \times \frac{-٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = \frac{١٠}{س^{٢} + ١} \times \frac{-٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = \boxed{\frac{-٢٠س}{(س^{٢} + ١)^{٣}}}$

بالتعويض عند س = ١ فان $\frac{د ص}{د س} = \frac{-٢٠}{(٢)^{٣}} = \frac{-٢٠}{٨} = \frac{-٥}{٢}$

فرع د : ص $= \text{ظا}\frac{\pi}{س} + \text{جتا}^{٢}(\pi س)$ ، س $\neq ٠$

**الحل** $\frac{د ص}{د س} = \text{قا}^{٢}\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}} + (-٢\text{جتا}\pi س \times \text{جا}\pi س \times \pi)$

عندما س=١ فان $\frac{د ص}{د س} = \text{قا}^{٢}\pi \times -\pi + (-٢\text{جتا}\pi \times \text{جا}\pi \times \pi) = \boxed{-\pi}$

---

فرع هـ : ص $= (\text{لـو}_{هـ} س)^{٣}$ ، س $> ٠$

**الحل** بالاشتقاق ينتج $\frac{د ص}{د س} = ٣(\text{لـو}_{هـ} س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

بالتعويض عن س=١ ينتج $\frac{د ص}{د س} = ٣(\text{لـو}_{هـ} ١)^{٢} \times ١ = \boxed{٠}$

---

**السؤال الثاني** : اذا كان ن$(س) = \frac{\text{لـو}_{هـ} م(س)}{٢س}$ وكان م$(١) = هـ^{٢}$ ، م$'(١) = ٢هـ$ جد ن$'(١)$

**الحل** ن$'(س) = \frac{٢س \times \frac{م'(س)}{م(س)} - \text{لـو}_{هـ} م(س) \times ٢}{(٢س)^{٢}}$ ( يوجد قسمة ومشتقة لوغاريتم )

بالتعويض س=١ ينتج ن$'(١) = \frac{٢ \times \frac{م'(١)}{م(١)} - \text{لـو}_{هـ} م(١) \times ٢}{(٢)^{٢}} = \frac{٢ \times \frac{٢هـ}{هـ^{٢}} - ٢\text{لـو}_{هـ} هـ^{٢}}{(٢)^{٢}}$

$= \frac{\frac{٤}{هـ} - ٤\text{لـو}_{هـ} هـ}{٤} = \frac{٤(\frac{١}{هـ} - ١)}{٤} = \frac{١}{هـ} - ١$

$\Leftarrow \boxed{ن'(١) = \frac{١}{هـ} - ١}$

---

**السؤال الثالث** : جد مشتقة كل من الاقترانات الاتية :

فرع أ : ن$(س) = هـ^{س^{٢}+س}$

**الحل** ن$'(س) = (٢س + ١)هـ^{س^{٢}+س}$

فرع ب : ع(س)=لـو$_{\text{هـ}}$ (س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$) ، س > ٣

**الحل** ع$'$(س) = $\frac{\text{٣س}^{٢} - \text{٦س}}{\text{س}^{٣} - \text{٣س}^{٢}}$

---

**السؤال الرابع** : اذا كان ق(س) = س$^{٢}$ م(س$^{٢}$ + ١) ، باستخدام الجدول جد ق$''$(١)

| م(٢) | م$'$(٢) | م$''$(٢) |
|---|---|---|
| ٥ | ١- | ١ |

**الحل**

ق$'$(س) = س$^{٢}$ × م$'$(س$^{٢}$ + ١) × ٢س + ٢س م(س$^{٢}$ + ١)

= ٢س$^{٣}$ × م$'$(س$^{٢}$ + ١) + ٢س م(س$^{٢}$ + ١)

ق$''$(س) = [٢س$^{٣}$ × م$''$(س$^{٢}$ + ١) × ٢س + م$'$(س$^{٢}$ + ١) × ٦س$^{٢}$] + [٢س × م$'$(س$^{٢}$ + ١) × ٢س + م(س$^{٢}$ + ١) × ٢]

ق$''$(س) = ٤س$^{٤}$ × م$''$(س$^{٢}$ + ١) + ٦س$^{٢}$ م$'$(س$^{٢}$ + ١) + ٤س$^{٢}$ × م$'$(س$^{٢}$ + ١) + ٢م(س$^{٢}$ + ١)

ق$''$(١) = ٤م$''$(٢) + ٦م$'$(٢) + ٤م$'$(٢) + ٢م(٢) = ٤م$''$(٢) + ١٠م$'$(٢) + ٢م(٢)

ق$''$(١) = ٤ × ١ + ١٠ × ١ − ٤ = ٥ × ٢ + ١٠ + ١٠

⇐ ق$''$(١) = ٤

---

**السؤال الخامس** : إذا كان ص = ق$^{٣}$(س) − ق(س$^{٣}$) ، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س=٢ ،علما بأن

ق(٢) = ١ ، ق$'$(٢) = −٢ ، ق$'$(٨) = ٢ ؟

**الحل** $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ق$^{٢}$(س) × ق$'$(س) − ق$'$(س$^{٣}$) × ٣س$^{٢}$ ، بالتعويض عن س=٢

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ق$^{٢}$(٢) × ق$'$(٢) − ق$'$(٨) × ١٢ = ٣(١)$^{٢}$ × −٢ − (١٢ × ٢) = −٦ − ٢٤ = **−٣٠**

الملتقى التربوي
www.wepal.net

**السؤال السادس :** جد معادلة العمودي على المماس المرسوم لمنحنى $ق(س) = ٤ - ظتاس$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$ ؟

**الحل** الميل $ق'(س) = قتا^{٢} س$ ، ← ميل المماس $= ق'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = قتا^{٢}\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}} = ٢$

∴ ميل العمودي $= \frac{-١}{\text{الماس}} = \frac{-١}{٢}$ ، نقطة التماس $= \left(\frac{\pi}{٤}، ق\left(\frac{\pi}{٤}\right)\right) = (\frac{\pi}{٤}، ٣)$

معادلة العمودي على المماس: $ص - ص_{١} = م(س - س_{١}) \Leftarrow ص - ٣ = \frac{-١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$

$$\Leftarrow ص - ٣ = \frac{-١}{٢}س + \frac{\pi}{٨} \Leftarrow \boxed{ص = \frac{-١}{٢}س + \frac{\pi}{٨} + ٣}$$

---

**السؤال السابع :** اذا كان $ص = ن^{٢} + ٥ن$ وكانت $\left(\frac{دن}{دس}\right)_{ن=١} = ٢$ ، جد $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{ن=١}$ ؟

**الحل** $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} = \frac{دن}{دس} \times (٢ن + ٥) = \frac{دص}{دس} \leftarrow \left(\frac{دص}{دس}\right)_{ن=١} = ٧ \times \left(\frac{دن}{دس}\right)_{ن=١} = ٧ \times ٢ = ١٤$

---

**السؤال الثامن :** اذا كانت $\boxed{ص = أ جتاس^{٢} + ب جاس^{٢}}$ ، أثبت أن $س ص'' = -٤س^{٣} ص + ص'$

$$\boxed{ص'' = -٢أ س جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}}$$

$ص'' = \left(-أ جاس^{٢} \times ٢\right) + \left(٢س \times -٢أ س جتاس^{٢}\right) + \left(-٢ب س جاس^{٢} \times ٢س\right) + \left(جتاس^{٢} \times ٢ب\right)$

$ص'' = -٢أ جاس^{٢} - ٤أ س^{٢} جتاس^{٢} - ٤ب س^{٢} جاس^{٢} + ٢ب جتاس^{٢}$ الطرف الأيمن

$س ص'' = -٢أ س جاس^{٢} - ٤أ س^{٣} جتاس^{٢} - ٤ب س^{٣} جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}$

$= -٤س^{٣}\left(أ جتاس^{٢} + ب جاس^{٢}\right) + -٢أ س جاس^{٢} + ٢ب س جتاس$

$= -٤س^{٣} ص + ص'$ = الطرف الايسر

---

**السؤال التاسع :** $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $هـ(س) = جتاس$ ، أثبت $(ق \circ هـ)'(س) = جا^{٣} س قا^{٢} س$

**الحل** $ق'(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $هـ'(س) = -جاس$

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= و'(جتاس) \times -جاس = \left(-1 - \frac{1}{جتا^{٢}س}\right) \times -جاس$

$= \left(\frac{جتا^{٢}س - ١}{جتا^{٢}س}\right) \times -جاس = \frac{-جا^{٢}س}{جتا^{٢}س} \times -جاس$

$= \frac{جا^{٣}س}{جتا^{٢}س} = جا^{٣}س \times قا^{٢}س$

**المتطابقة : $جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س$**

---

**السؤال العاشر** : جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٢س + هـ) - ظا٢س}{هـ}$

**الحل** نفرض ص $= ٢س$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(ص + هـ) - ظاص}{هـ} = (ظاص)' = قا^{٢}ص = قا^{٢}٢س$

---

**السؤال الحادي عشر** : **اذا كانت ق(س) ، هـ(س) اقترانيين قابلين للاشتقاق وكانت**

$ص = (و(س))^{م} \times (هـ(س))^{م}$ ، أثبت أن : $\frac{ص'}{ص} = م\left(\frac{و'}{و} + \frac{هـ'}{هـ}\right)$ ، حيث م $\neq ٠$ ، ق(س) ، هـ(س) $\neq ٠$

**الحل** $ص = (و(س))^{م} \times (هـ(س))^{م}$

$ص = (و(س) \times هـ(س))^{م}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين .

$لـو_{هـ} ص = لـو_{هـ}[(و(س) \times هـ(س))^{م}]$

$= م لـو_{هـ}[و(س) \times هـ(س)]$

$لـو_{هـ} ص = م لـو_{هـ}(و(س)) + م لـو_{هـ}(هـ(س))$

$\frac{ص'}{ص} = م\frac{و'}{و} + م\frac{هـ'}{هـ}$ (بإشتقاق الطرفين)

$\frac{ص'}{ص} = م\left[\frac{و'}{و} + \frac{هـ'}{هـ}\right]$

**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

## قاعدة السلسلة

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ (س) = ٢س$^{٢}$ ـ ١ فإن ( ق ٥ هـ)$'$ ( ١ ) =<br>أ) ـ ٤ ب) ـ ١ جـ) ١ د) ٤ | أ |
| ٢ | إذا كان ق (س) = ٢س$^{٢}$ + س ـ ١، هـ (س) = $\sqrt{س}$ فإن(ق٥هـ)($\frac{١}{٤}$)=<br>أ) -٣ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ٣ | د |
| ٣ | إذا كان ق (س) قابلاً للاشتقاق وكان ق ( س$^{٣}$ +١) ـ س = صفر ، فإن ق$'$ ( ٩ ) =<br>أ) $\frac{1}{12}$ ب) ١ـ جـ) صفر د) ٣٣ | أ |
| ٤ | إذا كان ق (س) = س$^{٢}$ ، فإن ( ق٥ ق$'$ )$'$ (١) =<br>أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٨ | د |
| ٥ | إذا كان ق (س) = أ هـ ( $\sqrt{س}$ ) ، وكان هـ$'$ ( ٣ ) = ٢ ، ق$'$ ( ٩ ) = $\frac{٢}{٣}$ ،<br>فإن قيمة الثابت أ =<br>أ) ٢ ب) $\frac{٤}{٣}$ جـ) ١ د) $\frac{١}{٢}$ | أ |
| ٦ | إذا كان ( ق٥ هـ) $'$( ٢ ) = ٢٧ ، حيث ق (س)= س$^{٢}$ ـ ٥ س ، هـ $'$ ( ٢ ) = ٣ ،<br>فإن هـ (٣) =<br>أ) ٢١ ب) ١٦ ج) ٩ د) ٧ | د |
| ٧ | إذا كان ( ق ٥ هـ )(س) = س وكانت ق$'$ ( س) = $\frac{١}{س}$<br>حيث هـ قابل للاشتقاق فإن هـ $'$( س) =<br>أ) ١ ب) س ج) ق (س) د) هـ(س) | د |

| | | |
|---|---|---|
| ٨ | ن ل = س$^{٢}$ − ٤س + ٣ ، س = $\sqrt{٣ص^{٢}+٦}$<br>فان $\frac{د ل}{د ص}$ عندما ص = ١ هي :<br>أ) ١ ب) ٢ ج) $\frac{1}{3}$ د) − ٢ | ب |
| ٩ | إذا كان ( ق ٥ هـ )$'$(٣) = ٨ ، وكان ( ق$'$ ٥ هـ ) (٣) = ٢ فإن هـ $'$ (٣) تساوي :<br>أ) ٢ ب) ٤ ج) ٨ د) ١٦ | ب |
| ١٠ | إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س^{٢}-٦س+٩}$ ، س ≠ ٣ ، فإن ق$''$ (٣) =<br>أ) − ق$^{٢}$(س) ب) ٦ ق (س) ج) ٦ ق$^{٢}$(س) د) ق$^{٢}$(س) | ج |
| ١١ | هـ(س) = $\sqrt{٢س+١٠}$ ، هـ(س) = ٩ − ٣س فإن (هـ ∘ هـ)$'$(٢) =<br>أ) $\frac{-٣}{٢}$ ب) −٦ ج) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{-٣}{٤}$ | د |
| ١٢ | إذا كان ق (س) = ا س ، هـ(س) = جتاس ،( ق ٥ هـ)$'$ ($\frac{\pi}{٢}$) = ١ فان قيمة الثابت ا تساوى :<br>أ) − ١ ب) $\frac{٢}{\pi}$ جـ) صفر د) ١ | أ |
| ١٣ | إذا كان ق(س) = هـ$^{٣س}$ − لوهـ ( ٢س +٢ ) حيث هـ عدد نيبيري فإن ق$'$ (٠)<br>أ) ٢ ب) ٢,٥ جـ) ٣ د) − ١ | أ |

| | | |
|---|---|---|
| ١٤ | اذا كان ق (س) =ظا٢س فأن $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(\pi + هـ) - ق(\pi)}{هـ}$<br>أ) غير موجودة ب) -٢ ج) صفر د)٢ | د |
| ١٥ | $\lim_{س \to 0} \frac{(١ - س)^{-٥} - ٣٢}{١ + س}$<br>أ) ٤٠ ب) -٤٠ ج) ٨٠ د)-٨٠ | د |
| ١٦ | إذا كان ق(س) = هـ$^{٣س}$ - لوهـ ( ٢س +٢ ) حيث هـ عدد نيبيري فإن قَ (٠)<br>أ) ٢ ب) ٢,٥ جـ) ٣ د) - ١ | أ |
| ١٧ | $\lim_{هـ \to 0} \frac{جا^{٣}(٢س - ٢هـ) - جا^{٣}(٢س)}{٣هـ}$<br>ا) -جا٤س جا٢س ب) ٢جا$^{٢}$٢س جـ) $-\frac{٢}{٣}$جا$^{٢}$٢س د) جا٤س جتا٢س | أ |
| ١٨ | اذا كان وهـ(س) =جا٢س ، فأن وهـ$'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ + ٦وهـ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ =<br>أ)٨ ب)٤ جـ)٢ د)-٤ | د |
| ١٩ | اذا كان وهـ(س) = $\frac{٤}{هـ(س^{٢} - ٣)}$ ، هـ(١)=٢ ، هـ$'$(١)=٥ فأن وهـ$'$(٢)<br>أ)٤٠ ب) ٢٠ ج) -١٠ د)-٢٠ | د |
| ٢٠ | اذا كانت ص = ع$^{٢}$ + ٥ ، ع = $\frac{٢س - ١}{س}$ ، فأن $\frac{د ص}{د س}$ عندما ( ع = ٣ ) تساوي :<br>أ)-٦ ب)-٤ ج)٤ د)٦ | د |
| ٢١ | اذا كان وهـ$(س^{٣} - ٢) = ٣س^{٤} - ٢$ ، س ≠ ٠ فأن وهـ$'$(-١) =<br>أ)١٢ ب)٤ ج)-٤ د)-١٢ | ب |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | بين أن الاقتران ص = ( ١ + ٢س ) هـ$^{٣س}$ يحقق المعادلة $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ ـ ٦ $\frac{دص}{دس}$ + ٩ ص = صفر | |
| ٢ | إذا كان ص = هـ $^{س^{٢}}$ لو هـ س$^{٢}$ ، أوجد $\frac{دص}{دس}$ | $\frac{٢هـ^{س^{٢}}}{س}$ + ٤س هـ$^{س^{٢}}$ لـو س |
| ٣ | إذا كان ق (س) = ل(س$^{٢}$+١) ، لَ (٥) =١ ، ل(٥) = ٣ جد معادلة المماس لمنحنى ق (س) عندما س = ٢ . | ص = ٤ س ـ ٥ |
| ٤ | إذا كانت ص = ( ع$^{٣}$ ـ ٢ ع)$^{٣}$ ، ع س = ١ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ١ | ـ٣ |
| ٥ | إذا كان $\sqrt{ص}$ = $\frac{ص}{س-١}$ ، أثبت أن : صً ص = صَ ( س ـ ١) | |
| ٦ | إذا كان ق (س) = س$^{٣}$ +٢، هـ(س)= س$^{٢}$ + ٣ ،جد ( ق٥ هـ)ً ( ٢) | ٩٦٦ |
| ٧ | إذا كان المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = ( س + $\frac{٢}{س}$ )$^{٣}$ عند س = ٢ يمر بالنقطة ( أ ، ٠ ) فاحسب قيمة أ | صفر |
| ٨ | اذا كان قَ(٥) = ٦ فجد نهـا$_{هـ\to٠}$ $\frac{ق(٥-٢هـ)-ق(٥+٤هـ)}{هـ}$ | ـ٣٦ |
| ٩ | إذا كان ق ( ٢س$^{٢}$ ـ ١) = $\sqrt[٣]{(س+٦)^{٤}}$ ، س > صفر فاحسب نهـا$_{هـ\to٠}$ $\frac{ق(٧+هـ)-ق(٧)}{٦هـ}$ | $\frac{١}{١٨}$ |
| ١٠ | اذا كان س = ع$^{١٠}$ ، ص$^{٢}$ = ع +١ فأثبن ان ٢٠س ص $\frac{دص}{دس}$ = ص$^{٢}$ ـ ١ | |
| ١١ | اذا كان ق(س) = ٢س$^{٢}$ + ب س ، وكان ( ق٥ قَ )َ(١) = ٢٤ فما قيمة الثابت ب. | ب = ـ٢ |

| | | |
|---|---|---|
| ١٢ | اذا كان ق قابلا للاشتقاق ، فأثبت أن :<br>أ) $\text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{ق(س+هـ)-ق(س-هـ)}{هـ} = ق'(س)$<br>ب) $\text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{ع\,ن(س)-ع\,ن(س)}{هـ} = ن(س)-س\,ن'(س)$ | |
| ١٣ | اذا كان $٣ق'(٢) = ٢٤$ فجد $\text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{ق(٢-٣هـ)-ق(٢)}{٤هـ}$ | ٦- |
| ١٤ | إذا كان ص = جا هـ ، س = قتا هـ ، أثبت أن : $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ص \frac{د ص}{دس}$ = صفر | |
| ١٥ | اذا كان $ص = ا جا٢س - ب جتا٢س$ اثبت ان $(ص')^{٢} + ٤ص^{٢} = ا^{٢} + ٤ب^{٢}$ | |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كان $ص = هـ^{-س\sqrt{\frac{س+١}{س-١}}}$ ، بين ان $(١-س^{٢})ص' = س^{٢}ص$ | ـــ |
| ٢ | اذا كان $ع = \frac{ص+١}{ص-١}$ ، $ص = \frac{س+٤}{س-٢}$ اثبت ان : $\frac{ع}{س} = \frac{١}{٣}$ | ـــ |
| ٣ | اذا كانت معادلة المماس لمنحنى هـ(س) عند س=١ هي ص=٣س-٥ ، احسب معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند س=١ بحيث ان :<br>$ق(س) = (س^{٢}\ هـ(س))^{٣}$ | $ص + ٨ = \frac{١}{١٢}(س-١)$ |
| ٤ | اذا كان $م(س)، ل(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند النقطة س=١ ،<br>وكان $ل(٢) = -١، ل'(٢) = -٢، م(١) = ٢، م'(١) = ٣$ احسب<br>$\frac{ع}{س}(س^{٢}.(ل\circ م))$ عند س = ١ | ٨- |

## الدرس الثامن الاشتقاق الضمني

### القسم الأول : الملخص

١- في حالة ليس من السهل كتابة ص بدلالة س ، فنسميها علاقة ضمنية ، ونجد $\frac{د ص}{د س}$ بطريقة تسمى الاشتقاق الضمني حيث يتم اشتقاق كل من طرفي العلاقة بالنسبة لـِ س ضمن قواعد الاشتقاق

٢- إذا كان :

أ - $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، م، ن $\in$ ص ، ن $\neq$ ٠ فإن $ص' = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

ب - $ص = \sqrt{هـ(س)}$ ، هـ(س) > ٠ فإن $ص' = \frac{هـ'(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$

*التعليم هو أقوى سلاح*
*من الممكن استخدامه*
*لتغيير العالم*

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي :**

فرع أ : $س^{٣} + س ص + ٢ ص^{٢} = ٥$

**الحل** $٣س^{٢} + (س ص' + ص) + ٤ ص ص' = ٠$ ( حاصل ضرب )

$س ص' + ٤ ص ص' = -٣س^{٢} - ص$

$ص' (س + ٤ ص) = -٣س^{٢} - ص \Leftarrow$ $\boxed{ص' = \frac{-٣س^{٢} - ص}{س + ٤ ص}}$

---

فرع ب : $ص = \sqrt[٥]{١ - س^{٢}} + ٣$

**الحل** $ص = (١ - س^{٢})^{\frac{١}{٥}} + ٣ \Leftarrow ص' = \frac{١}{٥} \times -٢س \times (١ - س^{٢})^{\frac{-٤}{٥}}$

---

فرع جـ : $ص = جا(س + ص)$

**الحل** $ص' = جتا(س + ص) \times (١ + ص') \Leftarrow ص' = جتا(س + ص) + ص' جتا(س + ص)$

$ص' - ص' جتا(س + ص) = جتا(س + ص)$

$ص' (١ - جتا(س + ص)) = جتا(س + ص)$

$\Leftarrow ص' = \frac{جتا(س + ص)}{(١ - جتا(س + ص))}$

---

فرع د : $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ٢$

**الحل** $ص^{-١} + س^{-١} = ٢$

$-ص^{-٢} \times ص' + -١ \times س^{-٢} = ٠ \Leftarrow \frac{-١}{ص^{٢}} ص' - \frac{١}{س^{٢}} = ٠ \Leftarrow \frac{-١}{ص^{٢}} ص' = \frac{١}{س^{٢}} \Leftarrow ص' = -\frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$

---

**السؤال الثاني : جد معادلة العمودي على منحنى $ص = س^{٢} - ٣س + ٥$ ، عند كل من نقطتي تقاطعه مع الدائرة التي معادلتها $س^{٢} - ٣س + ص^{٢} = ٢٥$**

**الحل** لكي نجد معادلة العمودي لابد من توفر ميل العمودي ونقطة كالتالي:

**أولا/ نوجد نقطة تقاطع المنحنى مع الدائرة :-**

ص = س ٢ – ٣س + ٥ ⇐ س ٢ – ٣س = ص – ٥ ← ١

بالتعويض في معادلة الدائرة س ٢ – ٣س + ص ٢ = ٢٥

ص – ٥ + ص ٢ = ٢٥ ⇐ ص ٢ + ص – ٣٠ = ٠ ومنها (ص + ٦)(ص – ٥) = ٠ ⇐ ص = –٦ ، ص = ٥

عندما ص = – ٦ فان – ٦ = س ٢ – ٣س + ٥ وبالتالي س ٢ – ٣س + ١١ = ٠ ، لكن المميز < ٠ فلا يوجد حلول

عندما ص = ٥ فان ٥ = س ٢ – ٣س + ٥ وبالتالي س ٢ – ٣س = ٠ ⇐ س (س – ٣) = ٠ ومنها س = ٠ ، س = ٣

النقاط هي (٠، ٥) و (٣، ٥)

ثانيا / ميل المماس = المشتقة الأولى لمعادلة المنحنى ص = س ٢ – ٣س + ٥ أي أن ص ′ = ٢س – ٣

الحالة الأولى : عند النقطة (٠، ٥) ← ص ′ = –٣ ، فيكون ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{١}{٣}$

معادلة العمودي : ص – ٥ = $\frac{١}{٣}$ (س – ٠) ، ومنها ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٥

الحالة الثانية : عند النقطة (٣، ٥) ⇐ ص ′ = ٦ – ٣ = ٣ ، فيكون ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$ = $\frac{-١}{٣}$

معادلة العمودي : ص – ٥ = $\frac{-١}{٣}$ (س – ٣) ← ص – ٥ = $\frac{-١}{٣}$ س + ١ ، ومنها ص = $\frac{-١}{٣}$ س + ٦

---

السؤال الثالث : يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف ٢ = ٤ نـ ٢ + ٢٤ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، جد قيمة أ الموجبة علما بأن سرعته بعد ٢ ثانية تساوي ١ م / ث.

الحل معطى ع(٢) = ١ م / ث

ف ٢ = ٤ نـ ٢ + ٢٤ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين )

ف = $\sqrt{}$ ٤ نـ ٢ + ٢٤ (بالاشتقاق بالنسبة ل ن )

ف ′ = $\frac{٤ نـ ٢}{٢ \sqrt{٤ نـ ٢ + ٢٤}}$ وبمعلومية ان ع = ف ′

ع = $\frac{٤ نـ ٢}{٢ \sqrt{٤ نـ ٢ + ٢٤}}$ ومن المعطى ع(٢) = ١ فأن ١ = $\frac{٤}{٢ \sqrt{٤ + ٢٤}}$ ⇐ ١ = $\frac{٢}{\sqrt{٤ + ٢٤}}$ ⇐ $\sqrt{٤ + ٢٤}$ = ٢

بتربيع الطرفين فأن ٤ + ٢٤ = ٤ ٢

٤ ٢ – ٤ – ٢٤ = ٠ بالقسمة على ٤ ⇐ ٢ – ٢ – ٦ = ٠

⇐ (٢ – ٣)(٢ + ٢) = ٠ ومنها ٢ = ٣ ، ٢ = –٢ "مرفوض لأن ٢ قيمة موجبة

**السؤال الرابع** : اذا كانت ف = جا(٢ن + م) ، هي معادلة الحركة لجسيم يتحرك على خط مستقيم ، حيث أ ، م عددان ثابتان ، أثبت أن ت = –٤ف عدديا

**الحل** نشتق المعادلة فينتج ع = ف ′ = ٢ × (٢ن + م) = ٢جتا(٢ن + م) ، بالاشتقاق مرة أخرى ينتج

ت = ع ′ = –٤جا(٢ن + م) = –٤ف

معطى ف = جا(٢ن + م)

---

**السؤال الخامس** : اذا كان المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، ٠) يمس منحنى العلاقة : ٤س ٢ + ص ٢ = ٤ ، جد نقطة / نقط التماس

**الحل** يمس معناه أن ميل المستقيم = ميل المماس ( المشتقة )

١ – لإيجاد ميل المستقيم يجب فرض نقطة تماس $(س_١ ، ص_١)$ مع النقطة $(-٢ ، ٠)$

ميل المستقيم $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص - ٠}{س + ٢}$

٢ – لإيجاد ميل المماس ( اشتقاق )

$\boxed{٤س^٢ + ص^٢ = ٤}$ ← [١] نشتق ضمني

$٨س + ٢ص صَ = ٠ \Leftarrow صَ = \frac{-٨س}{٢ص} = \frac{-٤س}{ص}$

ميل المماس = ميل المستقيم

$\frac{ص}{س + ٢} = \frac{-٤س}{ص} \Leftarrow ص^٢ = -٤س^٢ - ٨س$ من معادلة المنحنى [١] ينتج أن

$٤ - ٤س^٢ = -٤س^٢ - ٨س \Leftarrow ٤ = -٨س \Leftarrow س = \frac{-١}{٢}$

$\Leftarrow ص^٢ + ٤(\frac{-١}{٢})^٢ = ٤ \Leftarrow ص^٢ + ١ = ٤ \Leftarrow ص^٢ = ٣ \Leftarrow ص = \pm \sqrt{٣}$

نقاط التماس هي $(\frac{-١}{٢} ، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{-١}{٢} ، -\sqrt{٣})$

---

**السؤال السادس** : اذا كان هـ $^{ص}$ + هـ $^{س}$ = هـ $^{-ص}$ + هـ $^{-س}$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (–١ ، ١)

**الحل** هـ $^{ص}$ + هـ $^{س}$ = $\frac{١}{هـ^{ص}} + \frac{١}{هـ^{س}} \Leftarrow هـ^{ص} + هـ^{س} = \frac{هـ^{س} + هـ^{ص}}{هـ^{ص} هـ^{س}}$

هـ $^{ص}$ هـ $^{س}$ = ١ $\Leftarrow$ هـ $^{ص}$ = هـ $^{-س}$

هـ $^{ص}$ صَ = –هـ $^{-س}$ ، (–١ ، ١) $\Leftarrow$ هـ صَ = –هـ $\Leftarrow$ صَ = –١

حل آخر السؤال السادس

$هـ^{ص} \times ص' + هـ^{س} \times ١ = هـ^{-ص} \times -ص' + هـ^{-س} \times -١$

$ص' هـ^{ص} + هـ^{س} = -ص' هـ^{-ص} - هـ^{-س}$

$ص' هـ^{ص} + ص' هـ^{-ص} = -هـ^{س} - هـ^{-س}$

$ص' = \frac{-هـ^{س} - هـ^{-س}}{هـ^{ص} + هـ^{-ص}}$

$ص' (هـ^{ص} + هـ^{-ص}) = -هـ^{س} - هـ^{-س}$

نعوض عن (−١، ١) في المشتقة فينتج $ص' = \frac{-هـ - هـ^{-١}}{هـ + هـ^{-١}}$ ← $ص' = \frac{-(هـ + هـ^{-١})}{هـ + هـ^{-١}}$ ← $\boxed{ص' = -١}$

---

السؤال السابع: اذا كانت $س^{٢} = لـو_{هـ}(س ص)$ ، س ، ص > ٠ ، اوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، هـ)

الحل $س^{٢} = لـو_{هـ} س + لـو_{هـ} ص$ (بالاشتقاق)

$٢س = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص}$

بالتعويض عن النقطة (١ ، هـ) في المشتقة ينتج أن :

$٢ = ١ + \frac{ص'}{هـ}$

$١ = \frac{ص'}{هـ}$ ⟸ $ص' = هـ$

**القسم الثالث** :اسئلة اثرائية

## الاشتقاق الضمنى

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | $(س+ص)^{٥} = س^{٢} ص^{٣} + ٣١$ فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند النقطة(١،١) | $\frac{-٧٨}{٧٧}$ |
| ٢ | إذا كانت ع = ٥ ص ـ ص$^{٢}$ + ٨ ، ص$^{٢}$ = س ص + ٢<br>جد $\frac{ء ع}{ء س}$ عند س= ـ ١، ص = ١ | ١ |
| ٣ | جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ( س ـ ص)٢ + ٢ س ـ ص = ٦ عند نقطة / نقاط تقاطع منحناها مع المستقيم ص ـ س + ١ = صفر | ص–٣= $\frac{٤}{٣}$ (س–٤) |
| ٤ | إذا كانت ص$^{٢}$ = $\frac{٥}{س^{٢}+١}$ ، أثبت أن س ص$^{٣}$ + ٥ص$'$ = صفر | |
| ٥ | إذا كانت ل = ص$^{٢}$ + ٤ص – ٥ ، ص + س ص = ٦ جد $\frac{ء ل}{ء س}$ عند ص=٢ | $\frac{-١٦}{٣}$ |
| ٦ | أوجد معادلة المماس و العمودي على المماس لمنحنى القطع الذي معادلته ٢س$^{٢}$ ـ ٣ ص$^{٢}$ = ٥ عند النقطة ( ٢ ، ـ ١) | ص = $\frac{-٤}{٣}$ س + $\frac{٥}{٣}$<br>ص = $\frac{٣}{٤}$ س – $\frac{٥}{٢}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ٧ | إذا كان $\left(\frac{س}{أ}\right)^{ن} = \left(\frac{ص}{ب}\right)^{م}$ ، حيث أ ، ب أعداد حقيقة لا تساوي صفر ، م ، ن أعداد صحيحة موجبة غير متساوية ،<br>أثبت $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ن}{م}\left(\frac{ص}{س}\right)$ | |
| ٨ | إذا كان $ص^{٦} س^{٣} = ١٠$ فأثبت أن $ص'' = \frac{٣ ص}{٤ س^{٢}}$ | |
| ٩ | اذا كان $س^{\frac{٢}{٣}} + ص^{\frac{٢}{٣}} = ١$ فان $\frac{ء ص}{ء س} =$<br>أ) $\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{١}{٣}}$ ب) $-\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{١}{٣}}$ ج) $\frac{٢}{٣}\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{-١}{٣}}$ د) $\frac{-٢}{٣}\left(\frac{ص}{س}\right)^{\frac{-١}{٣}}$ | ب |
| ١٠ | جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ( س ـ ص)$^{٢}$ + ٢ س ـ ص = ٦ عند نقطة / نقاط تقاطع منحناها مع المستقيم ص ـ س + ١ = صفر | ص−٣= $\frac{٤}{٣}$ (س−٤) |

**القسم الرابع :اسئلة تفوق**

الملتقى التربوي
www.wepal.net

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | **اذا كان** ص $-$ س ص $=$ هـ $^{س}$ ، **بين ان** $\frac{ص'}{ص} = \frac{٢ - س}{١ - س}$ | — |
| ٢ | **جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة** س ص $^{٢} + \pi^{٢}$ جتا ص $= ٠$ **عند النقطة** $(\pi ، ١)$ | ص $- \pi = \frac{\pi -}{٢}$ (س $- ١$) |
| ٣ | **تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بحيث ان العلاقة بين السرعة (ع) والمسافة (ف) في اللحظة (ن) هي** ع $= ٢$ف $^{٢} - ٦$ف ، **جد تسارع النقطة عندما ع=٨م/ث** | +٨٠ ،-٨٠ |
| ٤ | **اذا كان** ق $^{٣}$ (ص $^{٢}$) $=$ ٥س $^{٣} + ٣$ ، **وكانت ص=١ عندما س=١ وايضا** ق$'$(١) $= ٥$ ، **جد** $\frac{د ص}{د س}$ $\Big\vert_{(١،١)}$ | $\frac{١}{٨}$ |
| ٥ | **اذا كان** $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ٢^{٢}$ ، **اثبت أن**<br>١) $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص}{س}$<br>٢) **جد** $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ | صفر |

## تمـــارين عامـــــة

**السؤال الأول**: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

| الفرع | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ | ١٢ | ١٣ | ١٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رمز الاجابة | د | ب | د | أ | جـ | د | جـ | د | د | جـ | أ | ب | ب | د |

١) اذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة $[١ ، ٣]$ يساوي ٤ ، وكان متوسط تغير نفس الاقتران في الفترة $[٣ ، ٧]$ يساوي ـ٥ ، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة $[١ ، ٧]$ ؟

الحل

$$\frac{ق(٣)-ق(١)}{٢}=٤ \leftarrow ق(٣)-ق(١)=٨ \quad \ldots\ldots(١)$$

$$\frac{ق(٧)-ق(٣)}{٤}=-٥ \leftarrow ق(٧)-ق(٣)=-٢٠ \quad \ldots\ldots(٢)$$

بجمع المعادلتين ينتج $\boxed{ق(٧)-ق(١)=-١٢}$

∴ متوسط التغير في $[١ ، ٧]$ $= \frac{ق(٧)-ق(١)}{٧-١}=\frac{-١٢}{٦}=-٢$

**د**

٢) اذا كان س ك(س) $= ق(س)+٢$ ، وكان التغير في ق(س) عندما تتغير س من ١ الى ١+ هـ يعطى بالقاعدة $(١+هـ)^{٢}-١$ ، ق(١) = ١ ، فما قيمة ك`(١)؟

الحل

$\Delta ص=(١+هـ)^{٢}-١$ ، $\Delta س=هـ$

$\Leftarrow ق`(١)=٢$ ، س ك(س) $= ق(س)+٢$

بوضع س=١ $\leftarrow$ ك(١) $= ق(١)+٢ \Leftarrow$ ك(١) $=٣$

س ك(س) $= ق(س)+٢$

بالاشتقاق : ك(س) $+$ س ك`(س) $= ق`(س) \Leftarrow$ ك`(س) $= \frac{ق`(س)-ك(س)}{س}$

عندما س = ١ ← ك´(١) = $\frac{\text{ن´(١)} - \text{ك(١)}}{١}$ = ٣ − ٢ = |−١|

ب

٣) اذا كان المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢ ، −١ ) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فما قيمة $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{ن(س)} - \text{ن(٢)}}{٢س - ٤}$

الحل

ن´(٢) = ظا١٣٥ = −١

$\Leftarrow \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{ن(س)} - \text{ن(٢)}}{٢س - ٤} = \frac{١}{٢} \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{ن(س)} - \text{ن(٢)}}{س - ٢} = \frac{١}{٢} \times$ ن´(٢) = $\frac{-١}{٢}$

د

٤) ما معدل تغير مساحة المربع بالنسبة الى محيطه عندما يكون طول ضلعه ٦ سم ؟

الحل

طول الضلع س=٦

محيط المربع ل = ٤س

نعوض عن س =٦ ∴ ل = ٤×٦ = ٢٤

المساحة م = س$^{٢}$ ولكن س = $\frac{ل}{٤}$ $\Leftarrow$ م = $\frac{ل^{٢}}{١٦}$

$\Leftarrow \frac{\text{د م}}{\text{د ل}} = \frac{٢ل}{١٦} = \frac{١}{٨}$ ل

بالتعويض بقيمة ل =٢٤

∴ المعدل = $\frac{١}{٨} \times ٢٤ = ٣$ سم$^{٢}$/سم

أ

٥) اذا كان ن(س) =جتا٢س فما قيمة ن´´(س) + ٦ن(س)؟

ج

الحل

ن(س) =جتا٢س ← ن´(س) = −٢جا٢س ← ن´´(س) = −٤جتا٢س

$\Leftarrow$ ن´´(س) + ٦ن(س) =− ٤ جتا٢س+٦ جتا٢س =٢ جتا٢س

٦) اذا كان ن $\left(\sqrt{٢س+١}\right) = س^{٣} + ٢$ ، وكان ق قابلا للاشتقاق ، فما قيمة ن $'(٣)$؟

الحل

$$ن\left(\sqrt{٢س+١}\right) = س^{٣} + ٢ \Leftarrow ن'\left(\sqrt{٢س+١}\right) \frac{٢}{٢\sqrt{٢س+١}} = ٣س^{٢}$$

نفرض س = ٤ لكي نحصل على ن $'(٣)$

$$\frac{١}{٣} \times ن'(٣) = ٣ \times ٤^{٢} \Leftarrow \boxed{ن'(٣) = ٩ \times ١٦ = ١٤٤}$$

د

٧) اذا كان $س^{٢} - سص + ص^{٢} = ٣$، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، -١) ؟

الحل

$$س^{٢} - سص + ص^{٢} = ٣ \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} ٢س - \left[ص + س\frac{د ص}{د س}\right] + ٢ص\frac{د ص}{د س} = ٠$$

$$٢س - ص - \frac{د ص}{د س}(٢ص - س) = ٠ \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{ص - ٢س}{٢ص - س}$$

بالتعويض عن (١ ، ١) $\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-١ - ٢}{-٢ - ١} = ١$

ج

٨) اذا كان $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، \quad س \neq ٥ \\ ١٠س & ، \quad س = ٥ \end{cases}$ ، فما قيمة ن $'(٥)$ ؟

الحل

ق(س) غير متصل عند س=٥ ، وبالتالي ن $'(٥)$ غير موجودة

د

٩) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة : ف(ن) ع(ن) = ن ، ف : المسافة بالأمتار ، ن: الزمن بالثواني ، ع(ن) السرعة ، وكانت ع(٢) = ٣ م/ث ، فما قيمة التسارع عندما ن = ٢ ثانية ؟

الحل

$$\because ف(ن) ع(ن) = ن \Leftarrow ع(ن) = \frac{ن}{ف(ن)} \xrightarrow{\text{بالاشتقاق}} ت(س) = \frac{ف(ن) - ن ع(ن)}{(ف(ن))^{٢}}$$

عند ن = ٢ ، بالتعويض في معادلة الاقتران $\Longleftarrow$ ف(٢) ع(٢) = ٢ $\Leftarrow$ ف(٢) = $\frac{٢}{٣}$ ، ع(٢) = ٣

$$\Leftarrow ت(٢) = \frac{\frac{٢}{٣} - ٢ \times ٣}{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}} = -١٢$$

د

١٠) اذا كان ن ´(س) = $\frac{١}{١+س^{٢}}$ ، هـ(س) = ظاس فما قيمة (ن ∘ هـ)´(س) ؟

الحل

(ن ∘ هـ)(س) = ن(هـ(س)) ]´ = ن ´(هـ(س)) × هـ´(س)

= ن ´(ظاس) × قا$^{٢}$س = $\frac{١}{١+ظا^{٢}س}$ × قا$^{٢}$س = $\frac{قا^{٢}س}{قا^{٢}س}$ = ١

ج

---

١١) اذا كانت ن(س) = $(س^{٢}+٧)^{\frac{٢}{٣}}$ ، فما قيمة ن ″(١) ؟

الحل

ن(س) = $(س^{٢}+٧)^{\frac{٢}{٣}}$ ← ن ´(س) = $\frac{٢}{٣}$ × $(س^{٢}+٧)^{\frac{-١}{٣}}$ × ٢س ،

ن ″(س) = $\frac{٤}{٣}$ س × $(س^{٢}+٧)^{\frac{-١}{٣}}$ − $\frac{٤}{٩}$ × $(س^{٢}+٧)^{\frac{-٤}{٣}}$ × ٢س$^{٢}$

ن ″(١) = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ × $\frac{٤}{٩}$ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{١}{١٨}$ − $\frac{١١}{١٨}$

أ

---

١٢) اذا كانت س = جتاص ، ص ∈ $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$ ، فما قيمة $\frac{ص}{س}$ ؟

الحل

∵ س = جتاص بالاشتقاق ⇐ ١ = $\frac{ص}{س}$ × − جاص ⇐ $\boxed{\frac{ص}{س} = \frac{-١}{جاص}}$ ... [١]

ومن معلومية أن س = جتاص (بالتربيع)

∴ س$^{٢}$ = جتا$^{٢}$ص (بالضرب في −١)

∴ −س$^{٢}$ = − جتا$^{٢}$ص (بإضافة ١ إلى الطرفين)

∴ ١ − س$^{٢}$ = ١ − جتا$^{٢}$ص ولكن $\boxed{جا^{٢}ص = ١ - جتا^{٢}ص}$

∴ ١ − س$^{٢}$ = جا$^{٢}$ص (بأخذ الجذر التربيعي)

ب

⇐ $\boxed{جاص = \sqrt{١ - س^{٢}}}$ بالتعويض في ١ ⇐ $\boxed{\frac{ص}{س} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}}$

١٣) اذا كان $(ب \circ هـ)'(٣) = ١٥$ ، وكان $ب(س) = س^{٢} - ٩$ ، $هـ'(٣) = ٥$ ، فما قيمة $هـ(٣)$؟

أي الاقترانات الاتية يكون قابلا للاشتقاق على مجاله ؟

**الحل** $(ب \circ هـ)'(٣) = ١٥$

$\Leftarrow [ب(هـ(٣))]' = ١٥$

$\Leftarrow ب'(هـ(٣)) \times هـ'(٣) = ١٥$

$\Leftarrow ٢هـ(٣) \times ٥ = ١٥ \Leftarrow هـ(٣) = \frac{٣}{٢}$

**ب**

---

١٤) جد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س)= $(س + ١)هـ^{س^{٢}-س}$ عندما تتغير س من ٠ الى ١ .

**الحل** $ب(س) = [س + ٢] - [س]$

$= [س] + ٢ - [س] = ٢$

$\therefore ب(س) = ٢$ ، $\forall س \ni ع$

$\Leftarrow ب'(س) = ٠$ ، $\forall س \ni ع$

**د**

أي أن المشتقة = صفر لكل س $\ni$ ح

---

**السؤال الثاني :** جد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س)= $(س + ١)هـ^{س^{٢}-س}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ١.

**الحل** متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ب(س_{٢}) - ب(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{ب(١) - ب(٠)}{١ - ٠} = \frac{(١+١)هـ^{١-١} - (٠+١)هـ^{٠}}{١} = ١$

**السؤال الثالث:** اذا كان $ق(٢) = ٣$ ، $ق'(٢) = -١$ جد $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س^{٢} + ٢س - ١) - ق(٢)}{س^{٢} - ١}$ ؟

**الحل**

بفرض $ل(س) = ق(س^{٢} + ٢س - ١)$ ⇐ يكون $ل(١) = ق(٢)$

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{ق(س^{٢} + ٢س - ١) - ق(٢)}{س^{٢} - ١} = \lim_{س \to ١} \left[ \frac{ل(س) - ل(١)}{س - ١} \times \frac{١}{س + ١} \right]$$

$$= ل'(١) \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} ل'(١)$$

$$\because ل(س) = ق(س^{٢} + ٢س - ١)$$

$$\Leftarrow ل'(س) = (٢س + ٢) \times ق'(س^{٢} + ٢س - ١)$$

$$\Leftarrow ل'(١) = (٢ + ٢) \times ق'(١ + ٢ - ١)$$
$$= ٤ق'(٢) = ٤ \times -١ = -٤$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{ق(س^{٢} + ٢س - ١) - ق(٢)}{س^{٢} - ١} = \frac{١}{٢} ل'(١) = \frac{١}{٢} \times -٤ = -٢$$

---

**السؤال الرابع:** جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

**فرع أ :** $\lim_{س \to ٠} \frac{هـ^{س^{٤}} - ١}{ظاس}$

**الحل**

بالتعويض المباشر $= \frac{هـ^{٠} - ١}{ظا٠} = \frac{٠}{٠}$ " صورة غير معينة وباستخدام لوبيتال "

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤س^{٣} هـ^{س^{٤}}}{٢قا^{٢}س}$ بالتعويض المباشر $= \lim_{س \to ٠} \frac{٤هـ^{٠ \times ٤}}{٢قا^{٢}٠} = \frac{٠}{٠}$ " صورة غير معينة وباستخدام لوبيتال "

$$= \frac{٤هـ^{٠}}{٢قا^{٢}٠} = \frac{٤}{١} = ٤$$

فرع : $\lim_{س\to 0} \frac{هـ^{س^2} - هـ^{س}}{2س}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{هـ^{(0)^2} - هـ^{0}}{2\times 0} = \frac{0}{0}$ " صورة غير معينة وباستخدام لوبيتال "

$\Leftarrow \lim_{س\to 0} \frac{2س\, هـ^{س^2} - هـ^{س}}{2} = \frac{0-1}{2} = \frac{-1}{2}$

فرع جـ: $\lim_{س\to 0} \frac{جا2س - جاس}{2س}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{جا(2\times 0) - جا0}{2\times 0} = \frac{0}{0}$ " صورة غير معينة باستخدام لوبيتال "

$\Leftarrow \lim_{س\to 0} \frac{2جتا2س - جتاس}{2} = \frac{2جتا0 - جتا0}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

فرع د: $\lim_{س\to 0} \frac{1 - جتاس}{س جاس}$

الحل

بالتعويض المباشر $= \frac{1 - جتا0}{0\times جا0} = \frac{0}{0}$ " صورة غير معينة باستخدام لوبيتال "

$\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س جتاس + جاس}$ بالتعويض المباشر $= \frac{جا0}{0\times جتا0 + جا0} = \frac{0}{0}$ " صورة غير معينة وباستخدام لوبيتال "

$\lim_{س\to 0} \frac{جتاس}{-س جاس + جتاس + جتاس} = \frac{جتا0}{-0\times جا0 + 2جتا0} = \frac{1}{2}$

**السؤال الخامس** : جد $ن'(١)$ في الحالتين الاتيتين باستخدام تعريف المشتقة :

فرع أ : $ن(س) = (س+١)\sqrt{س}$

الحل

$$ن(س) = (س+١)\sqrt{س} = س^{\frac{٣}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}}$$

$$ن'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ن(س) - ن(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^{\frac{٣}{٢}} + س^{\frac{١}{٢}} - ٢}{س - ١}$$

بالتعويض المباشر $= \frac{(١)^{\frac{٣}{٢}} + (١)^{\frac{١}{٢}} - ٢}{١ - ١} = \frac{٠}{٠}$ " صورة غير معينة باستخدام لوبيتال "

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} س^{\frac{-١}{٢}}}{١}$$

$$= \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} = \frac{٤}{٢} = \boxed{٢}$$

---

فرع ب : $ن(س) = \sqrt[٣]{٢س - ١}$

الحل

$$ن'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ن(س) - ن(١)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{٢س - ١} - ١}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} - ١}{س - ١}$$

بالتعويض المباشر $= \frac{(٢ \times ١ - ١)^{\frac{١}{٣}} - ١}{١ - ١} = \frac{٠}{٠}$ " صورة غير معينة باستخدام لوبيتال "

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{٣}(٢س - ١)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٢}{١}$$

$$= \frac{١}{٣}(٢ \times ١ - ١)^{\frac{-٢}{٣}} \times ٢ = \boxed{\frac{٢}{٣}}$$

**حل آخر:** $ن(س) = \sqrt[3]{٢س - ١}$

$$\Leftarrow ن'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{ن(س) - ن(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[3]{٢س - ١} - ١}{س - ١}$$

**بضرب البسط والمقام في ٢**

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[3]{٢س - ١} - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(\sqrt[3]{٢س - ١} - ١)٢}{٢س - ٢} = ٢ \lim_{س \to ١} \frac{(٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} - ١}{(٢س - ١) - ١}$$

**بفرض ص= ٢س-١ ، عندما س ← ١ فإن ص ← ١** $\Leftarrow س = \frac{ص + ١}{٢}$

$$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص^{\frac{١}{٣}} - ١}{\frac{ص + ١}{٢} - ١} = \lim_{ص \to ١} \frac{ص^{\frac{١}{٣}} - ١}{\frac{ص + ١ - ٢}{٢}}$$

$$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص^{\frac{١}{٣}} - ١}{ص - ١}$$ ، **وباستخدام التعميم :** $\boxed{\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن(أ)^{ن-١}}$

$$= ٢ \times \frac{١}{٣} \times (١)^{\frac{١}{٣}-١} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[3]{٢س - ١} - ١}{س - ١} = \frac{٢}{٣}$$

---

**السؤال السادس:** اذا كانت هـ (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ن(س - ١) & ، \quad س \leq ١ \\ ن(س) & ، \quad س > ١ \end{cases}$ ،وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٠،٢] يساوي ٣ ، جد متوسط تغير الاقتران هـ (س) في الفترة [٠،٣].

**الحل** متوسط التغير في الفترة [٠،٢] يساوي ٢ $\leftarrow \frac{ن(٢) - ن(٠)}{٢ - ٠} = ٣ \leftarrow ن(٢) - ن(٠) = ٦$

متوسط التغير في الفترة [٠،٣] = $\frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣ - ٠} = \frac{ن(٢) - ن(٠) + ٩}{٣} = \frac{٦ + ٩}{٣} = ٥$

**السؤال السابع :** اذا كانت $\lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-٢}{س-١} = ٣$ ، ق متصلا على مجاله ، جد $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}ن(س)-ن(١)}{س-١}$ ؟

**الحل** الاقتران ق(س) متصل $\Leftarrow \lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-٢}{س-١} = ٣$

$\Leftarrow ن(١) = ٢$ ، $ن'(١) = ٣$ (معطى)

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}ن(س)-ن(١)}{س-١}$$

بالتعويض المباشر $= \frac{(١)ن\times(١)ن^{٣}-(١)ن}{١-١} = \frac{٠}{٠}$ " صورة غير معينة باستخدام لوبيتال "

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}ن'(س)+ن(س)\times٣س^{٢}}{١}$$

$$= ١\times ن'(١)+ن(١)\times٣ = ٣\times٢+٣ = ٩$$

**حل آخر :** $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}ن(س)-ن(١)}{س-١}$ ، $\Leftarrow ن(١) = ٢$ ، $ن'(١) = ٣$ (معطى)

الان بإضافة وطرح س$^{٣}$ ق(١) الى البسط كالتالي /

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}ن(س)-س^{٣}ن(١)+س^{٣}ن(١)-ن(١)}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}(ن(س)-ن(١))}{س-١} + \lim_{س\to ١} \frac{ن(١)(س^{٣}-١)}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to ١} س^{٣}\times \lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-ن(١)}{س-١} + ن(١)\times \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{س-١}$$

$$= ١\times ن'(١)+٢\times٣ = ٩$$

**السؤال الثامن :** يقف أحمد ونزار على سطح بناية ، أفلت أحمد كرة من السكون وفق العلاقة ف$_{١}$ (ن) = ٥ن$^{٢}$ ، وفي اللحظة نفسها ، رمى نزار كرة أخرى عموديا الى أسفل وفق العلاقة ف$_{٢}$ (ن) = ١٥ن + ٥ن$^{٢}$ ، فاذا ارتطمت كرة أحمد بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار ، ما سرعة ارتطام كرة نزار بالأرض

( ف الإزاحة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني )

**الحل**

المسافة التي قطعها أحمد = المسافة التي قطعها نزار

$$\Leftarrow ٥ن^{٢} = ١٥ن + ٥ن^{٢} \Leftarrow ١٥ن = ٠ \Leftarrow ن = ٠$$

المسافة التي قطعها أحمد بدلالة الزمن = ٥(ن+١)$^{٢}$ =٥(ن$^{٢}$+٢ن+١)= ٥ن$^{٢}$+١٠ن+٥

المسافة التي قطعها نزار بدلالة الزمن = ١٥ن+٥ن$^{٢}$

٥ن$^{٢}$+١٠ن+٥=١٥ن+٥ن$^{٢}$ ← ٥ن=٥ ← ن= ١ ث

سرعة نزار = ف$'$(١)= ١٥+١٠(١)=١٥+١٠=٢٥ م/ث

---

**السؤال التاسع :** اذا كان ق(س) = اجاس ،هـ (س) = $\frac{٣س}{س^{٢}+١}$ ، فجد قيمة أ بحيث (هـ ○ ق)$'$ $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = ٠ ، أ ≠ ٠

**الحل**

(هـ ○ ق)$'$(س) = هـ$'$(ق(س)) × ق$'$(س)

(هـ ○ ق)$'$ $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ = هـ$'$ $\left(ق\left(\frac{\pi}{٦}\right)\right)$ × ق$'$ $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

ق$'$(س) = اجتاس

هـ$'$(س) = $\frac{(٣س^{٢}+١)\times ٣ - ٣س \times (٢س)}{(٣س^{٢}+١)^{٢}}$

هـ$'$(س) = $\frac{٣ - ٣س^{٢}}{(٣س^{٢}+١)^{٢}}$

$$(هـ ○ ق)'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = ٠ \Leftarrow هـ'\left(ق\left(\frac{\pi}{٦}\right)\right) \times ق'\left(\frac{\pi}{٦}\right) = ٠$$

$$هـ'\left(ق\left(\frac{\pi}{٦}\right)\right) \times اجتا\frac{\pi}{٦} = ٠ \Leftarrow هـ'\left(ق\left(\frac{\pi}{٦}\right)\right) = ٠$$

ولكن $ق\left(\frac{\pi}{٦}\right) = اجا\left(\frac{\pi}{٦}\right) = ا \times \frac{١}{٢} = \frac{ا}{٢}$

اذن هـ$'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-3\left(\frac{\pi}{2}\right)+3}{\left(1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\right)^{2}}=0$

أي أن $-3\left(\frac{\pi}{2}\right)+3=0\leftarrow -3\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\Leftarrow \frac{\pi^{2}}{4}=1\Leftarrow \pi^{2}=4\Leftarrow \boxed{\pi=\pm 2}$

---

**السؤال العاشر :** اذا كان ق(س) = $\begin{cases} [2-س]+س^{2} & ، \ 0\leq س<2 \\ \frac{2}{1+س} & ، \ س\geq 2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله.

**الحل**

أولا / نقوم بإعادة تعريف $[2-س]$ كالتالي :

$[2-س]=\begin{cases} 1 & ، \ 0<س\leq 1 \\ 0 & ، \ 1<س\leq 2 \\ 2 & ، \ س=0 \end{cases}$ حيث طول الدرجة = 1

$\Leftarrow$ ق(س) = $\begin{cases} 2+س^{2} & ، \ س=0 \\ 1+س^{2} & ، \ 0<س\leq 1 \\ س^{2} & ، \ 1<س<2 \\ \frac{2}{1+س} & ، \ س\geq 2 \end{cases}$ ومنها ق$'$(س) = $\begin{cases} 2س & ، \ 0<س<1 \\ 2س & ، \ 1<س<2 \\ \frac{-2}{(1+س)^{2}} & ، \ س<2 \\ غ.م & ، \ س\ni\{0،1،2\} \end{cases}$

**السؤال الحادي عشر :** يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف $= ٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن})$ ، بين أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي ٤ف ( ف الإزاحة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني )

**الحل**

ف $= ٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن}) \Leftarrow$ ع $=$ ف $' = ٢(٢هـ^{٢ن} + ٢هـ^{-٢ن})$

$\Leftarrow$ ع $= ٤(هـ^{٢ن} + هـ^{-٢ن})$

ت $=$ ع $' = ٤(٢هـ^{٢ن} - ٢هـ^{-٢ن})$

$\Leftarrow$ ت $= ٤ \times [٢(هـ^{٢ن} - هـ^{-٢ن})] = ٤$ف

---

**السؤال الثاني عشر :** اذا كان ق(س)=جا$^{٣}$س–جتا$^{٣}$س ، جد ق$'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$؟

**الحل**

ق(س)=جا$^{٣}$س–جتا$^{٣}$س

$\Leftarrow$ ق$'$(س) $= ٣$جا$^{٢}$س جتاس $+ ٣$جتا$^{٢}$س جاس $= ٣$جتاس جاس (جتاس+جاس)

$\Leftarrow$ ق$''$(س) $= ٣$جتاس جاس (جتاس–جاس) $+ ٣$(جتاس+جاس)(جتا$^{٢}$س–جا$^{٢}$س)

$= ٣$جتاس جاس (جتاس–جاس) $+ ٣$(جتاس+جاس)$^{٢}$ (جتاس–جاس)

$= ٣$(جتاس–جاس)[جتاس جاس + (جتاس+جاس)$^{٢}$]

$\Leftarrow$ ق$''\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٣\left(جتا\frac{\pi}{٤} - جا\frac{\pi}{٤}\right)\left[جتا\frac{\pi}{٤}جا\frac{\pi}{٤} + \left(جتا\frac{\pi}{٤} + جا\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\right]$

$= ٣\underbrace{\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)}_{=٠}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}\right) = ٠$

---

**السؤال الثالث عشر:** جد مجموعة قيم س التي يكون عندها ق$'$(س) $= ٠$ في كل مما يأتي:

**فرع أ :** ق(س) $= (س - ٢)^{٣} \times (٣ + ٢س)^{٤}$

**الحل**

ق$'$(س) $= (س - ٢)^{٣} \times ٤(٣ + ٢س)^{٣} \times ٢ + (٣ + ٢س)^{٤} \times ٣(س - ٢)^{٢}$

$= ٨(س - ٢)^{٣}(٣ + ٢س)^{٣} + ٣(٣ + ٢س)^{٤}(س - ٢)^{٢}$

ق$'$(س) $= ٠ \leftarrow ٨(س - ٢)^{٣}(٣ + ٢س)^{٣} + ٣(٣ + ٢س)^{٤}(س - ٢)^{٢} = ٠$

$(س - ٢)^{٢}(٣ + ٢س)^{٣}[٨(س - ٢) + ٣(٣ + ٢س)] = ٠$

$(س-٢)^{٢}(٣+٢س)^{٣}[٨س-١٦+٩+٦س]=٠$

$(س-٢)^{٢}(٣+٢س)^{٣}(١٤س-٧)=٠$

اما $(س-٢)=٠\leftarrow س=٢$

أو $٣+٢س=٠\leftarrow س=\frac{-٣}{٢}\notin[٠،٣]$

أو $١٤س-٧=٠\leftarrow س=\frac{١}{٢}$

---

فرع ب : $ق(س)=جاس(١+جتاس)$ ، $س\in[٠،\frac{\pi}{٢}]$

الحل $ق'(س)=جاس\times-جاس+(١+جتاس)\times جتاس=-جا^{٢}س+جتا^{٢}س+جتاس$

$ق'(س)=٠\leftarrow -جا^{٢}س+جتا^{٢}س+جتاس=٠$ $\boxed{جا^{٢}س=١-جتا^{٢}س}$

$\leftarrow جتا^{٢}س+جتا^{٢}س-١+جتاس=٠\leftarrow ٢جتا^{٢}س+جتاس-١=٠$

$(٢جتاس-١)(جتاس+١)=٠$ ومنها : $٢جتاس-١=٠\leftarrow جتاس=\frac{١}{٢}\leftarrow س=\frac{\pi}{٣}$

أو $جتاس+١=٠\leftarrow جتاس=-١\leftarrow س=\pi\notin[٠،\frac{\pi}{٢}]$

---

السؤال الرابع عشر: جد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقترانات الاتية :

فرع أ : $ص=ق(س)=\frac{س\,هـ^{٦س}}{جاس}$

الحل $ق'(س)=\frac{جاس(هـ^{٦س}+٦س\,هـ^{٦س})-س\,هـ^{٦س}\,جتاس}{جا^{٢}س}$

$=\frac{هـ^{٦س}\,جاس+٦س\,هـ^{٦س}\,جاس-س\,هـ^{٦س}\,جتاس}{جا^{٢}س}=\frac{هـ^{٦س}\left[جاس+٦س\,جاس-س\,جتاس\right]}{جا^{٢}س}$

حل آخر : ممكن حل السؤال بأخذ لوغاريتم للطرفين .

فرع ب : $ص = ق(س) = \frac{س لـو_{هـ} س}{جتاس}$

الحل

$ق'(س) = \frac{جتاس(١ + لـو_{هـ} س) - س لـو_{هـ} س \times -جاس}{جتا^{٢} س} = \frac{جتاس لـو_{هـ} س + جتاس + س جاس لـو_{هـ} س}{جتا^{٢} س}$

---

**السؤال الخامس عشر :** يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = ١(جتا٢ن + جا٢ن)$ حيث ف تمثل بعد الجسم عن النقطة الثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني ، ما تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و)

الحل

$ف = ١(جتا٢ن + جا٢ن)$

$\Leftarrow ع = ١(-٢جا٢ن + ٢جتا٢ن)$

$\Leftarrow ع = ١٢(-جا٢ن + جتا٢ن)$

$\Leftarrow ت = ١٢(-٢جتا٢ن - ٢جا٢ن)$

$\Leftarrow ت = -١٤(جتا٢ن + جا٢ن)$

$\Leftarrow ت = -٤ف$

$ت = -٤ف \Leftarrow ت = -٤ \times ٣ \Leftarrow ت = -١٢ ١/ث^{٢}$

---

**السؤال السادس عشر :** جد النقطة / النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى $ق(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ ، موازيا للقاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ٢) ، (٢ ، $\frac{٥}{٢}$).

الحل

$ق(س) = س + \frac{١}{س} \leftarrow ق'(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$

المماس يوازي القاطع ← ميل المماس = ميل القاطع $= \frac{\frac{٥}{٢} - ٢}{١ - ٢} = \frac{١}{٢}$

ميل المماس = المشتقة الأولى لمنحنى ق(س) عند النقطة (س١، ق(س١))

$\therefore ق'(س_{١}) = \frac{١}{٢} \leftarrow ١ - \frac{١}{س_{١}^{٢}} = \frac{١}{٢} \leftarrow \frac{١}{س_{١}^{٢}} = \frac{١}{٢}$ ومنها $س_{١}^{٢} = ٢ \leftarrow س_{١} = \pm \sqrt{٢}$

النقط هي $(\sqrt{٢}، ق(\sqrt{٢}))$ ، $(-\sqrt{٢}، ق(-\sqrt{٢}))$

## ملاحظات الطالب

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

# الوحدة الثانية

٢

# تطبيقات التفاضل

## الدرس الأول نظريتا رول و القيمة المتوسطة

### القسم الأول : الملخص

**نظرية رول:**

**إذا كان ق(س) يحقق الشروط الآتية:**

١) متصلا في الفترة [ أ ، ب ]
٢) قابلا للاشتقاق في الفترة ] أ ، ب [
٣) هـ(أ) = هـ(ب)

فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈ ] أ ، ب [ بحيث أن هـ´(جـ) = ٠

تتعلق نظرية رول بايجاد المماسات الافقية او اصفار (جذور ) المشتقة الاولى

**نظرية القيمة المتوسطة:**

**إذا كان ق(س) يحقق الشروط الآتية:**

١) متصلا في الفترة [ أ ، ب ]
٢) قابلا للاشتقاق في الفترة ] أ ، ب [

**فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل** جـ ∈ ] أ ، ب [ **بحيث أن** $هـ´(جـ) = \frac{هـ(ب) - هـ(أ)}{ب - أ}$

تتعلق نظرية القيمة المتوسطة بايجاد المماسات العادية.

**ليس الجمال بأثواب تزيننا ،،، إن الجمال جمال العلم والأدب**

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول :** بين أياً من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية رول في الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة ( ان وجدت ) :-

فرع أ : $هـ(س) = \sqrt{٤س - س^{٢}}$ ، $س \in [٠،٤]$

**الحل**

١) نبحث عن اتصال ق (س) في الفترة $[٠،٤]$

نبحث عن مجال هـ(س):

$٤س - س^{٢} \geq ٠ \Leftarrow س(٤ - س) \geq ٠$

مجال هـ(س) $٠ \leq س \leq ٤$ $\Leftarrow$ هـ(س) متصل في الفترة $[٠،٤]$

$هـ'(س) = \frac{٤ - ٢س}{٢\sqrt{٤س - س^{٢}}}$ ، مجاله $٠ < س < ٤$

$\Leftarrow$ هـ(س) قابل للاشتقاق في الفترة $]٠،٤[$

$هـ(٠) = \sqrt{٤ \times ٠ - ٠} = ٠$

$هـ(٤) = \sqrt{٤ \times ٤ - ٤^{٢}} = ٠$

$\Leftarrow$ $\boxed{هـ(٠) = هـ(٤)}$

∴ ق(س) يحقق شروط نظرية رول

∴ $\exists$ جـ $\in ]٠،٤[$ بحيث أن $هـ'(جـ) = ٠$

٢)نجد قيم /قيمة جـ التي تعينها النظرية:

$هـ'(جـ) = ٠ \Leftarrow \frac{٤ - ٢جـ}{٢\sqrt{٤جـ - جـ^{٢}}} = ٠$ بالضرب التبادلي

$\Leftarrow ٤ - ٢جـ = ٠ \Leftarrow -٢جـ = -٤ \Leftarrow جـ = ٢$ ، $٢ \in ]٠،٤[$

---

فرع ب : $هـ(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$ ، $س \in [-١،٣]$

**الحل**

١) نبحث عن اتصال ق (س) في الفترة $[-١،٣]$

هـ(س) متصل على $[-١،٣]$ (لأنه كثير حدود)

هـ(س) قابل للاشتقاق على الفترة $]-١،٣[$ (لأنه كثير حدود)

$هـ(-١) = ١ + ٢ - ٣ = ٠$

$هـ(٣) = ٩ - ٦ - ٣ = ٠$

$\Leftarrow$ هـ(-١) = هـ(٣) $\Leftarrow$ هـ(س) يحقق شروط نظرية رول

$\Leftarrow \exists جـ \in ]-١،٣[$ بحيث أن $هـ'(جـ) = ٠$

٢) نجد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية:

$هـ'(جـ) = ٠ = ٠ \Leftarrow ٢جـ - ٢ = ٠ \Leftarrow ٢جـ = ٢ \Leftarrow جـ = ١$ ، $جـ \in ]-١،٣[$

---

**فرع جـ :** $هـ(س) = لـو_{هـ}(س + \frac{١}{س})$ ، $س \in [\frac{١}{٢}، ٢]$

الحل

١) نبحث عن اتصال ق (س) في الفترة $[\frac{١}{٢}، ٢]$

$س + \frac{١}{س} > ٠ \Leftarrow \frac{س^{٢}+١}{س} > ٠$ ( بضرب الطرفين ب س ، وهذا يصح لأن $س \in [\frac{١}{٢}، ٢]$ )

$\Leftarrow س^{٢} + ١ > ٠$ ++++++++++

$\Leftarrow هـ(س)$ متصل $\forall س \in ح$ ، $\because [\frac{١}{٢}، ٢] \subset ح \Leftarrow هـ(س)$ متصل في الفترة $[\frac{١}{٢}، ٢]$

نبحث عن قابلية اشتقاق $هـ(س)$ في الفترة $]\frac{١}{٢}، ٢[$

$هـ(س) = لـو_{هـ}(س + \frac{١}{س}) = لـو_{هـ}(\frac{س^{٢}+١}{س}) = لـو_{هـ}(س^{٢} + ١) - لـو_{هـ}(س)$

$\Leftarrow هـ'(س) = \frac{٢س}{س^{٢}+١} - \frac{١}{س}$

$\Leftarrow هـ(س)$ قابل للاشتقاق $\forall س \in ح - \{٠\}$، $\because ]\frac{١}{٢}، ٢[ \subset ح - \{٠\}$

$\Leftarrow هـ(س)$ قابل للاشتقاق في الفترة $]\frac{١}{٢}، ٢[$

$هـ(\frac{١}{٢}) = لـو_{هـ}(\frac{١}{٢} + ٢) = لـو_{هـ}(٢\frac{١}{٢})$

$هـ(٢) = لـو_{هـ}(٢ + \frac{١}{٢}) = لـو_{هـ}(٢\frac{١}{٢})$

$\Leftarrow هـ(\frac{١}{٢}) = هـ(٢) \Leftarrow$ $هـ(س)$ يحقق شروط نظرية رول

$\Leftarrow \exists جـ \in ]\frac{١}{٢}، ٢[$ بحيث أن $هـ'(جـ) = ٠$

٢)نبحث عن قيمة /قيم جـ التي تعينها النظرية:

$هـ'(جـ) = ٠ \Leftarrow \frac{٢جـ}{جـ^{٢}+١} - \frac{١}{جـ} = ٠ \Leftarrow \frac{٢جـ^{٢} - (جـ^{٢}+١)}{جـ(جـ^{٢}+١)} = ٠ \Leftarrow ٢جـ^{٢} - جـ^{٢} - ١ = ٠$

$جـ^{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow جـ^{٢} = ١ \Leftarrow جـ = \pm ١ \Leftarrow جـ = ١ \in ]\frac{١}{٢}، ٢[$ ، ، $جـ = -١$ مرفوض

**فرع د :** $هـ(س) = جا٢س + ٢جاس$ ، $س \in [٠، \pi]$

١) هـ(س) متصل على $[0، \pi]$ (حاصل جمع اقترانين متصلين)

هـ(س) قابل للاشتقاق على الفترة $]0، \pi[$ (حاصل جمع اقترانين قابلين للاشتقاق)

هـ(٠) = جا٠ + ٢جا٠ = ٠
هـ(π) = جا٢π + ٢جاπ = ٠
⇐ هـ(٠) = هـ(π) ⇐ هـ(س) يحقق شروط نظرية رول

⇐ E جـ ∈ $]0، \pi[$ بحيث أن هـ´(جـ) = ٠

٢)نبحث عن قيم /قيمة س التي عينها النظرية:

هـ´(س) = ٢جتا٢س + ٢جتاس ، س ∈ $[0، \pi]$

∵ هـ´(جـ) = ٠ ⇐ ٢جتا٢جـ + ٢جتاجـ = ٠ ⇐ ٢(٢جتا$^{٢}$جـ − ١) + ٢جتاجـ = ٠،

ملاحظة:-

| جتا٢جـ = ٢جتا$^{٢}$جـ − ١ |
|---|

⇐ ٤جتا$^{٢}$جـ − ٢ + ٢جتاجـ = ٠ ⇐ ٤جتا$^{٢}$جـ + ٢جتاجـ − ٢ = ٠ (بالقسمة على ٢)

⇐ ٢جتا$^{٢}$جـ + جتاجـ − ١ = ٠ ⇐ (جتاجـ + ١)(٢جتاجـ − ١) = ٠

إما (جتاجـ + ١) = ٠ ⇐ جتاجـ = −١ ⇐ جـ = π مرفوض لأن π ∉ $]0، \pi[$

أو (٢جتاجـ − ١) = ٠ ⇐ ٢جتاجـ = ١ ⇐ جتاجـ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ جـ = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٣}$ ∈ $]0، \pi[$

---

**السؤال الثاني : بين أيا من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة أو قيم جـ التي تحددها النظرية في كل حالة ( ان وجدت ) :-**

فرع أ : هـ(س) = س$^{٣}$ − س − ١ ، س ∈ $[-١، ٢]$

الحل

هـ(س) متصل على $[-١، ٢]$ ( لأنه كثير حدود)

هـ(س) قابل للاشتقاق على $]-١، ٢[$ ( لأنه كثير حدود)

⇐ هـ(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

⇐ E جـ ∈ $]-١، ٢[$ بحيث أن هـ´(جـ) = $\frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١)}{٢ - (-١)}$

لإيجاد قيم/ قيمة جـ:

هـ´(س) = ٣س$^{٢}$ − ١ ، س ∈ $]-١، ٢[$

⇐ هـ´(جـ) = $\frac{(٢^{٣} - ٢ - ١) - (-١)^{٣}(-١) - (-١) - ١}{٢ - (-١)}$

⇐ ٣جـ$^{٢}$ − ١ = $\frac{٥ - (-١)}{٢ + ١}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

⇐ ٣جـ$^{٢}$ − ١ = ٢ ⇐ ٣جـ$^{٢}$ = ٣ ⇐ جـ$^{٢}$ = ١ ⇐ إما جـ = ١ ∈ $]-١، ٢[$ أو جـ = −١ ∉ $]-١، ٢[$ مرفوض

فرع ب ط(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ ، س ∈ $[-١، ٢]$

**الحل**

نبحث عن اتصال $هـ(س)$ في الفترة $[-١، ٢]$

$هـ(س)$ متصل ماعدا عند أصفار المقام

$\Leftarrow هـ(س)$ متصل $\forall س \in ح - \{-٢\}$ ولأن $[-١، ٢] \subseteq ح - \{-٢\}$

$\Leftarrow هـ(س)$ متصل في الفترة $[-١، ٢]$

نبحث عن قابلية اشتقاق $هـ(س)$ في الفترة $]-١، ٢[$

$$\Leftarrow هـ'(س) = \frac{١ \times ٤ - ٠ \times (س+٢)}{(س+٢)^{٢}} = \frac{-٤}{(س+٢)^{٢}}$$

$\Leftarrow هـ(س)$ قابل للاشتقاق $\forall س \in ح - \{-٢\}$، ولأن $]-١، ٢[ \subseteq ح - \{-٢\}$

$\Leftarrow هـ'(س)$ قابل للاشتقاق في الفترة $]-١، ٢[$

$\Leftarrow هـ(س)$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة E

$$\Leftarrow E جـ \in ]-١، ٢[ \text{ بحيث أن } هـ'(جـ) = \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٢ - (-١)}$$

نبحث عن قيم / قيمة جـ:

$$هـ'(جـ) = \frac{\left(\frac{٤}{٢+٢}\right) - \left(\frac{٤}{٢+(-١)}\right)}{٢ - (-١)}$$

$$\Leftarrow \frac{-٤}{(جـ+٢)^{٢}} = \frac{-١ - ٤}{٣} = -١$$

$\Leftarrow (جـ+٢)^{٢} = ٤$ (بأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$\Leftarrow$ إما $جـ + ٢ = ٢ \Leftarrow جـ = ٠ \in ]-١، ٢[$

أو $جـ + ٢ = -٢ \Leftarrow جـ = -٤ \notin ]-١، ٢[$ مرفوض

**فرع جـ:** $هـ(س) = \sqrt{س + ٢س}$ ، $س \in [٤، ٩]$

نبحث عن اتصال $\text{ه}(س)$ في الفترة $[٤ ، ٩]$

$\text{ه}(س)$ متصل $\forall$ س $\leq ٠$

أي أن $\text{ه}(س)$ متصل في الفترة $[-\infty ، ٠[$ ، ولأن $[٤ ، ٩] \subseteq [-\infty ، ٠[$

$\Leftarrow$ $\text{ه}(س)$ متصل في الفترة $[٤ ، ٩]$

نبحث عن قابلية الاشتقاق في الفترة $]٤ ، ٩[$

$$\text{ه}'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + ٢$$

$\Leftarrow$ $\text{ه}(س)$ قابل للاشتقاق في الفترة $]-\infty ، ٠[$ ، ولأن $]٤ ، ٩[ \subseteq [-\infty ، ٠[$

$\Leftarrow$ $\text{ه}(س)$ قابل للاشتقاق في الفترة $]٤ ، ٩[$

$\Leftarrow$ $\text{ه}(س)$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow \exists \text{جـ} \in ]٤ ، ٩[ \text{ بحيث أن } \text{ه}'(\text{جـ}) = \frac{\text{ه}(٩) - \text{ه}(٤)}{٩ - ٤}$$

$$\text{ه}'(\text{جـ}) = \frac{(٩ \times ٢ + ٩\sqrt{}) - (٤ \times ٢ + ٤\sqrt{})}{٩ - ٤}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{\text{جـ}}} + ٢ = \frac{(٣ + ١٨) - (٢ + ٨)}{٥} = \frac{١١}{٥}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{\text{جـ}}} = \frac{١}{٥} \Leftarrow ٢\sqrt{\text{جـ}} = ٥ \Leftarrow \sqrt{\text{جـ}} = \frac{٥}{٢} \text{ (بتربيع الطرفين)}$$

$$\Leftarrow \text{جـ} = \frac{٢٥}{٤} \exists ]٤ ، ٩[$$

**السؤال الثالث :** $\text{ه}(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ٢س & ٠ \geq س \geq ٢ \\ س^{٣} - بس + ١٢ & ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[٠ ، ٣]$ ، جد قيم الثابتين أ ، ب ، ثم جد قيمة / قيم جـ التي تحققها النظرية .

هـ(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

∴ هـ(س) متصل في الفترة [٠ ، ٣]

∴ هـ(س) متصل عند س=٢

$\Leftarrow$ نهـــا هـ(س) = نهـــا هـ(س)
س←٢⁺ س←٢⁻

$\Leftarrow$ ٨ − ٢ب + ١٢ = ٤أ + ٤

$\Leftarrow$ ٢٠ − ٤ = ٤أ + ٢ب $\Leftarrow$ ١٦ = ٤أ + ٢ب (بالقسمة على ٢)

$\Leftarrow$ ٢أ + ب = ٨ $\Leftarrow$ [١]

هـ(س) قابل للاشتقاق $\Leftarrow$ هـ´(س) = $\begin{cases} ٢أس + ٢ & ، ٠ < س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ب & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

هـ´(٢)⁺ = هـ´(٢)⁻

٣(٢)² − ب = ٢أ × (٢) + ٢

١٢ − ب = ٤أ + ٢

٤أ + ب = ١٠ $\Leftarrow$ [٢]

بطرح المعادلة ١ من المعادلة ٢

$\Leftarrow$ ٢أ = ٢ $\Leftarrow$ [أ = ١] بالتعويض في المعادلة ١

٢ × ١ + ب = ٨ $\Leftarrow$ [ب = ٦]

لإيجاد قيمة جـ:

هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٣} - ٦س + ١٢ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ $\Leftarrow$ هـ´(س) = $\begin{cases} ٢س + ٢ & ، ٠ < س < ٢ \\ ٣س^{٢} - ٦ & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

عندما ٠ < جـ ≤ ٢ $\Leftarrow$ هـ´(جـ) = $\frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣}$ $\Leftarrow$ ٢جـ + ٢ = $\frac{٢١ - ٠}{٣}$ $\Leftarrow$ ٢جـ = ٥ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{٥}{٢}$

مرفوض

عندما ٢ < جـ < ٣ $\Leftarrow$ هـ´(جـ) = ٧ $\Leftarrow$ ٣جـ² − ٦ = ٧ $\Leftarrow$ ٣جـ² = ١٣ $\Leftarrow$ جـ² = $\frac{١٣}{٣}$

$\Leftarrow$ إما جـ = $-\sqrt{\frac{١٣}{٣}}$ مرفوض

أو جـ = $\sqrt{\frac{١٣}{٣}}$ ∋ ]٠ ، ٣[

**السؤال الرابع :** اذا كان هـ(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∋ [أ،ب] ، س ≠ ٠ ، فأثبت باستخدام نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∋ ]أ،ب[ بحيث جـ² = أ.ب .

هـ(س) متصل في الفترة [أ،ب] ، ( لأن هـ(س) متصل $\forall$ س $\in$ ح $-$ {٠} ، س $\neq$ ٠

هـ´(س) $= \frac{-١}{س^{٢}}$ قابل للاشتقاق $\forall$ س $\in$ ]أ ، ب[

$\Leftarrow$ هـ(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

$\Leftarrow \exists$ جـ $\in$ ]أ،ب[ بحيث أن هـ´(جـ) $= \frac{هـ(ب) - هـ(أ)}{ب - أ}$

$\Leftarrow \frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{\frac{١}{ب} - \frac{١}{أ}}{ب - أ}$ $\Leftarrow \frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{\frac{أ - ب}{أب}}{ب - أ}$

$\Leftarrow \frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{أ - ب}{أب(ب - أ)}$

$\Leftarrow \frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{-١}{أب}$ $\Leftarrow$ $\boxed{جـ^{٢} = أ٠ب}$

---

**السؤال الخامس :** بين أن لمنحنى الاقتران هـ(س) $= ٤$ جا$^{٢}$س مماسا أفقيا واحدا على الأقل في الفترة س $\in$ [٠ ، $\pi$] ، ثم جد نقط التماس .

**الحل**

١) نريد أن نبين أن هـ(س) يحقق نظرية رول في الفترة [٠،$\pi$]

هـ(س) اقتران متصل في الفترة [٠،$\pi$]

هـ(س) اقتران قابل للاشتقاق في الفترة ]٠،$\pi$[

هـ(٠) $= ٤$ جا٠ $= ٠$ ، هـ($\pi$) $= ٤$ جا$^{٢}\pi = ٠$ $\Leftarrow$ هـ(٠) $=$ هـ($\pi$)

$\Leftarrow$ هـ(س) يحقق شروط نظرية رول

$\Leftarrow \exists$ جـ $\in$ ]٠ ، $\pi$[ بحيث أن هـ´(جـ) $= ٠$

يوجد للمنحنى مماساً أفقياً على الأقل في الفترة ]٠،$\pi$[

٢) لإيجاد نقطة التماس وهي (جـ، هـ(جـ))

هـ´(س) $= ٨$ جتا$^{٢}$س

$\because$ هـ´(جـ) $= ٠$ $\Leftarrow ٨$ جتا$^{٢}$جـ $= ٠ \Leftarrow$ جتا$^{٢}$جـ $= ٠$

$\Leftarrow$ إما ٢جـ $= \frac{\pi}{٢} \Leftarrow$ جـ $= \frac{\pi}{٤} \in$ ]٠،$\pi$[ أو ٢جـ $= \frac{٣\pi}{٢} \Leftarrow$ جـ $= \frac{٣\pi}{٤} \in$ ]٠،$\pi$[

نقاط التماس هي : $(\frac{\pi}{٤}، ٤)$ ، $(\frac{٣\pi}{٤}، -٤)$

**السؤال السادس :** اذا كان ع(س) $=$ (هـ $\circ$ هـ)(س) ، س$\in$[أ،ب] ، هـ(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين في [أ،ب] وقابلين للاشتقاق ]أ،ب[ ، وكان هـ(أ) $=$ ب ، هـ(ب) $=$ أ ، أثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ $\in$ ]أ،ب[ بحيث ع(أ) $-$ ع(ب) $=$ هـ´(جـ)(ب $-$ أ).

**الحل**

هـ(س) متصل [أ،ب]

هـ(س) قابل للاشتقاق على ]أ، ب[

هـ(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة حيث يوجد جـ ∈ ]أ ، ب [

$$\Leftarrow \text{هـ}'(\text{جـ}) = \frac{\text{هـ}(\text{ب}) - \text{هـ}(\text{أ})}{\text{ب} - \text{أ}}$$

ع(أ) = هـ(هـ(أ))، (ولأن هـ(أ) = ب) ⇐ ع(أ) = هـ(ب) ... [١]

ع(ب) = هـ(هـ(ب)) ، (ولأن هـ(ب) = أ) ⇐ ع(ب) = هـ(أ) ... [٢]

من ١ ، ٢ ينتج أن :

$$\text{هـ}'(\text{جـ}) = \frac{\text{هـ}(\text{أ}) - \text{هـ}(\text{ب})}{\text{ب} - \text{أ}} = \frac{\text{ع}(\text{أ}) - \text{ع}(\text{ب})}{\text{ب} - \text{أ}}$$

$$\Leftarrow \text{ع}(\text{أ}) - \text{ع}(\text{ب}) = \text{هـ}'(\text{جـ})\ (\text{ب} - \text{أ})$$

---

**السؤال السابع :** اذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س جتاس}$ ، $\text{س} \in \left[0 ، \frac{\pi}{2}\right]$ ، استخدم نظرية رول لإثبات أن القيمة التي تعنيها النظرية هي عندما س = ظتاس

**الحل**

هـ(س) متصل في الفترة $\left[0 ، \frac{\pi}{2}\right]$ ، (لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين)

هـ(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left[0 ، \frac{\pi}{2}\right]$ ، (لأنه حاصل ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق )

هـ(٠) = ٠

$\text{هـ}(\frac{\pi}{2}) = ٠$ ⇐ هـ(٠) = $\text{هـ}(\frac{\pi}{2})$

⟸ هـ(س) يحقق شروط نظرية رول

$\Leftarrow \text{جـ} \in \text{E}\left]0 ، \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث أن $\text{هـ}'(\text{جـ}) = ٠$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{س جاس} + \text{جتاس}$ ، $\text{هـ}'(\text{جـ}) = ٠$

$\text{جـ جاجـ} + \text{جتاجـ} = ٠ \Leftarrow \text{جـ جاجـ} = -\text{جتاجـ} \Leftarrow \text{جـ} = \frac{\text{جتاجـ}}{\text{جاجـ}} \Leftarrow \text{جـ} = \text{ظتاجـ}$

⟸ القيمة التي تعينها النظرية هي عندما س = ظتاس

**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

# نظريتا رول والقيمة المتوسطة

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | قيمة جـ التي تحددها نظرية رول على الاقتران ق (س) = جاس + جتاس في الفترة [ ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ] هي :<br>أ) صفر ب) $\frac{\pi}{٦}$ جـ) $\frac{\pi}{٤}$ د) $\frac{\pi}{٣}$ | ج |
| ٢ | إذا كان ق (س) = س$^{٢}$ ـ ٣س ـ أ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [ ـ ١ ، أ ] فإن قيمة الثابت أ تساوي :<br>أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤ | د |
| ٣ | إذا كان ق (س) = ٣ $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ـ س يحقق نظرية رول في [ ١ ، ٤ ]<br>فإن قيمة جـ التي تحددها النظرية هي :<br>أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٧}{٢}$ ج) $\frac{٩}{٤}$ د) ٢ | ج |
| ٤ | قيمة جـ التى تحدهها نظرية رول على ق(س) =جتاس+جاس في $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$ هي :<br>أ) $\frac{\pi}{٦}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٣}$ د)صفر | ب |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان ق (س) = { س$^{٣}$ ـ أ س ، صفر ≤ س < ١ ; ب س$^{٢}$ ـ ٤س ، ١ ≤ س ≤ ٢ }<br>يحقق شروط نظرية رول على [ ٠ ، ٢ ] جد قيمتي الثابتين أ ، ب ثم جد قيمة /قيم جـ التي تحددها النظرية . | أ = ٣<br>ب = ٢<br>جـ = ١ |
| ٢ | إذا كان ق ( س) = { [ ١ـ س ] + جـ ، ١ ≤ س ≤ ٣ ; س$^{٢}$ ـ أ س ، ٣ ≤ س ≤ ب }<br>يحقق شروط نظرية رول ، أوجد الثوابت أ ، ب ، جـ | أ= ٦<br>ب = ٣<br>جـ = ـ ٩ |

| | | |
|---|---|---|
| ٣ | بين أن الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٦}+١}{س^{٣}}$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة $[٢،\frac{١}{٢}]$ ، ثم جد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية | جـ = ١ |
| ٤ | إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ س^{٣}+٢س & ، ٠ \geq س \geq ٢ \\ س^{٣}+ب س+١٢ & ، ٢ > س \geq ٣ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [ ٠ ، ٣ ] ، فعين قيم الثابتين أ ، ب ثم جد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية | أ = $\frac{١}{٤}$ ، ب = -٧ ، جـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ |
| ٥ | إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س-٣ & ، ١ \geq س \geq ٢ \\ ٦س-س^{٢}-٧ & ، ٢ > س \geq ٣ \end{cases}$ فابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق (س) في الفترة [ ١ ، ٣ ] ثم جد قيمة جـ التي تعينها النظرية ( إن وجدت ) | $\frac{٩}{٤}$ |
| ٦ | إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س^{٢}+٣س & ، ٠ \geq س > ١ \\ أ س+ب & ، ١ \geq س \geq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على [ ٠ ، ٢ ] فجد قيمتي أ ، ب | أ = ١ ، ب = ١ |
| ٧ | اذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س^{٢}+٣س+أ & ، ٠ \geq س \geq ١ \\ ب س+٤ & ، ١ > س \geq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[٢،٠]$ جد :<br>١) قيم الثابتين أ، ب ٢) قيمة جـ التي تعينها النظرية | أ = ٣، ب = ١<br>$\frac{٣}{٤}$ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كان ق(س) = ا س $^{٣}$ + ب س معرف على [٠، ٢] حيث ا، ب ∈ ع $^{*}$ وكان ق(٠) = ٠ ق(٢) = ١٦ ،ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في الفترة [٠، ٢] ثم جد قيمة التى تعينها النظرية . | جـ = $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ |
| ٢ | باستخدام نظرية رول بين انه لاي اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة فما فوق اذا قطع منحناه محور السينات في ثلاث نقاط فان منحنى ق″(س) يقطع محور السينات في نقطة واحدة على الاقل | |
| ٣ | اذا كان ق(س)، هـ(س) اقترانين كثيرى حدود موجبتين متقاطعتين عند النقطتين (س$_{١}$، ص$_{١}$) (س$_{٢}$، ص$_{٢}$)، اثبت انه يوجد على الاقل جـ ∈ ]س$_{١}$، س$_{٢}$[ بحيث ان $\frac{ق(جـ)}{هـ(جـ)} = \frac{ق'(س)}{هـ'(س)}$، هـ′(س) ≠ ٠ | |
| ٤ | اذا كان ق(س) كثير حدود معرف على [٠، ٢] بحيث ق(١) < ق(٠) < ق(٢) اثبت ان يوجد جـ$_{١}$، جـ$_{٢}$ ∈ ]٠، ٢[ بحيث ق′(س) × ق″(س) > ٠ | |
| ٥ | اذا كان ق(س) = س $^{٢}$ + ا س + ب، س ∈ [١، ٥] وكانت معادلة المماس عند قيمة جـ التي تعينها نظرية القيمة المتوسطة هي ص = ٢ س − ٨ جد قيمة ا، ب، جـ ؟ | ٣، ١، ٤ − |

## الدرس الثاني الاقترانات المتزايدة و المتناقصة

### القسم الأول : الملخص

**تعريف:**

يكون منحنى الاقتران ق(س) المعرف في [ أ، ب] ، س١ ، س٢ ∈ [أ ، ب]

١) متزايداً في [ أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س١ < س٢ فإن ق(س١) < ق(س٢)

٢) متناقصاً في [ أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س١ < س٢ فإن ق(س١) > ق(س٢)

٣) ثابتاً في [ أ، ب] إذا تحقق الشرط: عندما س١ < س٢ فإن ق(س١) = ق(س٢)

❖ **اذا كان ق(س) اقترانا متصلا في الفترة [أ،ب]، وقابلا للاشتقاق في الفترة ]أ،ب[ فان :**

١) منحنى الاقتران ق(س) يكون متزايدا في [أ،ب] اذا كانت ق ـ (س) > ٠ ∀ س ∈ ]أ،ب[ .

أي أن : زاوية الميل حادة ، إشارة ق ـ (س) موجبة ، ظل زاوية ميل المماس موجب .

٢) منحنى الاقتران ق(س) يكون متناقصا في [أ،ب] اذا كانت ق ـ (س) < ٠ ∀ س ∈ ]أ،ب[ .

أي أن : زاوية الميل منفرجة ، إشارة ق ـ (س) سالبة ، ظل زاوية ميل المماس سالب .

٣) منحنى الاقتران ق(س) يكون ثابتا في [أ،ب] اذا كانت ق ـ (س) = ٠ ∀ س ∈ ]أ،ب[ .

أي أن : زاوية الميل = صفر ، المماس أفقي يوازي السينات ، ظل زاوية ميل المماس = صفر .

عندما أسمع قوله تعالى :

**(ولسوف يعطيك ربك فترضى)**

أشعر براحة وارتب قائمة أحلامي وأمنياتي من جديد

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

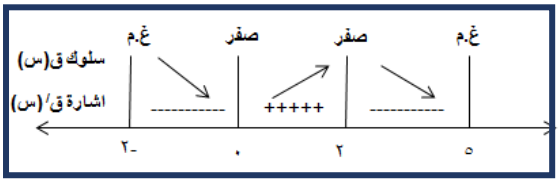
**السؤال الأول :** حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران في الحالات التالية :-

**فرع أ :** $ن(س) = ٣س^{٢} - س^{٣}$ ، $س \in [-٢، ٥]$

**الحل**

$ن(س)$ متصل في الفترة $[-٢، ٥]$ لأنه كثير حدود

وقابل للاشتقاق في الفترة $]-٢، ٥[$




$ن'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$ ، نجعل $ن'(س) = ٠$

$٦س - ٣س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٦ - ٣س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = ٢$

ومن إشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :

يكون منحنى $ن(س)$ متزايد في الفترة $[٠، ٢]$ ،ومتناقص في الفترتين $[٢، ٥]$ ، $[-٢، ٠]$

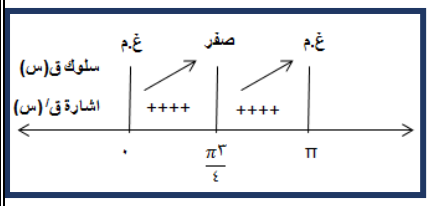
---

**فرع ب :** $ن(س) = س + جا^{٢}س$ ، $س \in [٠، \pi]$

**الحل**

$ن(س)$ متصل في الفترة $\in [٠، \pi]$ "لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين"

$ن(س)$ قابل للاشتقاق في الفترة $\in ]٠، \pi[$




$ن'(س) = ١ + ٢جاسجتاس = ١ + جا٢س$ ، بجعل $ن'(س) = ٠$

$١ + جا٢س = ٠ \Leftarrow جا٢س = -١ \Leftarrow ٢س = \frac{٣\pi}{٢} \Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤}$

ومن إشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :

يكون منحنى $ن(س)$ متزايد في الفترة $[٠، \pi]$(ملاحظة الفترة لا تجزأ لان الاقتران متصل عند $س = \frac{٣\pi}{٤}$ )

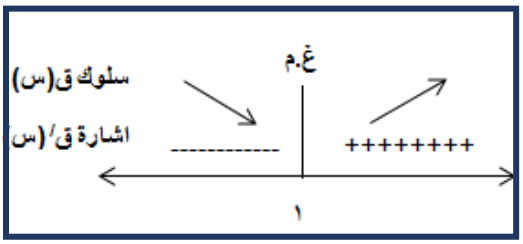
---

**فرع جـ :** $ن(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ ، $س \in ح$

**الحل**

$ن(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ ، $س \in ح$

$ن(س)$ متصل على مجاله ، $ن(س)$ قابل للاشتقاق على ح



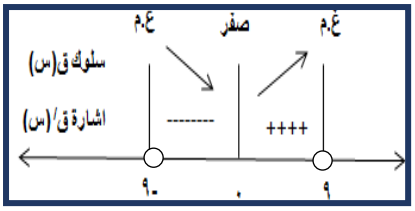

$ن'(س) = \frac{٢س - ٢}{٢\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}}$ ، بجعل $ن'(س) = ٠$

$\Leftarrow ٢س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ١$

ومن إشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :

يكون منحنى $ن(س)$ متزايد في الفترة $[١، \infty[$ ومتناقص في الفترة $]-\infty، ١]$

**فرع د :** $\text{ق}'(س) = \frac{س}{س^{٢}+٩}$ ، $س \in ]-٩،٩[$




**الحل** بجعل $\text{ق}'(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$

ومن إشارة $\text{ق}'(س)$ في الشكل المجاور :

يكون منحنى ق(س) متزايد في الفترة $]٠،٩]$ ومتناقص في الفترة $[-٩،٠[$

---

**السؤال الثاني :** اذا كان $\text{ق}(س) = ٢س - لـو_{هـ}(س+١)$ ، $س > -١$ ، فأثبت أن منحنى الاقتران ق(س) متزايد في $ح^{+}$ .

**الحل** $لـو_{هـ}(س+١)$ متصل عندما $س+١ > ٠$ أي عندما $س > -١$ ، ٢س متصل $\forall س \in ع$ ، $ع \supseteq ]-١،\infty[$

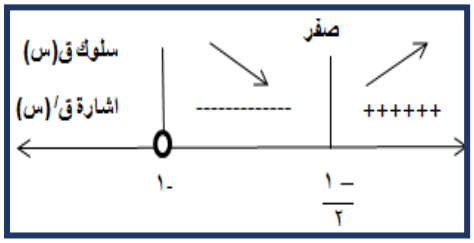
اذن ٢س متصل عندما $س > -١$

بالتالي $\text{ق}(س) = ٢س - لـو_{هـ}(س+١)$ متصل $\forall س > -١$ لأنه "حاصل طرح اقترانين متصلين".

$$\text{ق}'(س) = ٢ - \frac{١}{س+١} = \frac{٢س+٢-١}{س+١} = \frac{٢س+١}{س+١}$$

ق(س) قابل للاشتقاق $\forall س > -١$ ، بجعل $\text{ق}'(س) = ٠$

$$\Leftarrow \frac{٢س+١}{س+١} = ٠ \Leftarrow ٢س+١ = ٠ \Leftarrow ٢س = -١ \Leftarrow س = \frac{-١}{٢}$$




ومن إشارة $\text{ق}'(س)$ في الشكل المجاور فان :

ق(س) متزايد على $]-\frac{١}{٢}،\infty[$ ⟵ ق(س) متزايد على $ع^{+}$

---

**السؤال الثالث :** جد فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، ١ > س \geq ٠ \\ س^{٢}-٢ & ، ٢ \geq س \geq ١ \end{cases}$ ، في الفترة $[٠،٢]$

**الحل** $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، ١ > س \geq ٠ \\ س^{٢}-٢ & ، ٢ \geq س \geq ١ \end{cases} \Leftarrow \text{ق}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، ١ > س > ٠ \\ ٢س & ، ٢ > س > ١ \end{cases}$

ق(س) غير متصل على الفترة $[٠،٢]$ لأنه غير متصل عند س = ١

ق'(١) غير موجودة لأن لأنه غير متصل عند س = ١

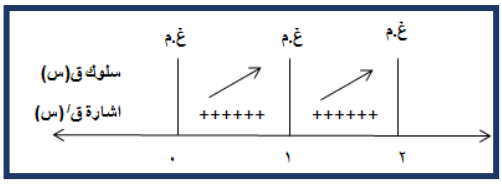
بجعل $\text{ق}'(س) = ٠$ :

$٠ > س > ١ \Leftarrow ٣س^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin ]٠،١[$

$١ < س < ٢ \Leftarrow ٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \notin ]١،٢[$

ومن إشارة ق`(س) في الشكل المجاور :

يكون ق(س) متزايد في الفترتين ]-∞،٠[ و ]١،٢[




---

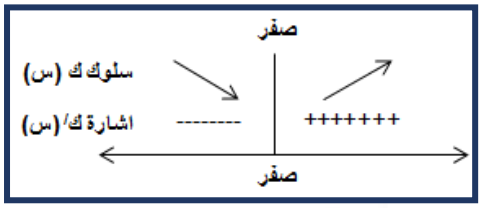
**السؤال الرابع :** **اذا كان ق(س)، هـ(س) كثيري حدود وكان ك(س) = ق(س)^٢ + هـ(س)^٢ + س^٢ ، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س)، علما بأن ق`(س) = هـ(س)، هـ`(س) = -ق(س) .**

**الحل** ك`(س) = ٢ق(س) × ق`(س) + ٢هـ(س) × هـ`(س) + ٢س

= ٢ق(س) × هـ(س) + ٢هـ(س) × -ق(س) + ٢س

= ٢ق(س) × هـ(س) - ٢ق(س) × هـ(س) + ٢س = ٢س

بجعل ك`(س) = ٠ ⟵ ٢س = ٠ ⟸ س = ٠ ،




ومن إشارة ك`(س) في الشكل المجاور : ك(س) متزايد في الفترة ]٠،∞[

و ك(س) متناقص في الفترة ]-∞،٠[

---

**السؤال الخامس :** **اذا كان ق(س) كثير حدود متزايد في مجاله ، وكان ك(س) = ق(س^٢ - ٤س) ، فحدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ك(س).**

**الحل** ك(س) اقتران متصل لأنه حاصل تركيب اقترانين كثيري حدود ، ك(س) قابل للاشتقاق

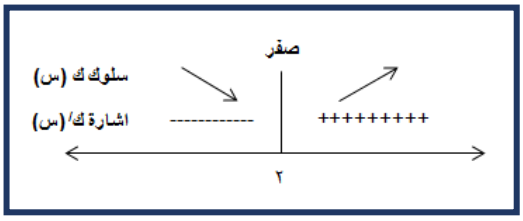
ك`(س) = ق`(س^٢ - ٤س) × (٢س - ٤) = (٢س - ٤) × ق`(س^٢ - ٤س)

**ملاحظة :-**

ق(هـ(س))` = هـ`(س) × ق`(هـ(س))

بجعل ك`(س) = ٠ ⟵ اما ق`(س^٢ - ٤س) = ٠ مستحيل لأن ق(س) متزايد أي أن ق`(س) > ٠

أو (٢س - ٤) = ٠ ⟸ ٢س = ٤ ⟸ س = ٢




ومن إشارة ك`(س) في الشكل المجاور :

يكون منحنى ك(س) متزايد في الفترة ]٢،∞[

ومتناقص في الفترة ]-∞،٢[ .

**السؤال السادس :** اذا كان ن(س).هـ(س) كثيري حدود معروفين في الفترة [٠،٤] ، بحيث أن منحنى ق(س) متناقص في مجاله ، ويقع في الربع الرابع ، ومنحنى هـ(س) متزايد في مجاله ، ويقع في الربع الاول ، أثبت أن منحنى الاقتران ن(س)×هـ(س) متناقص في الفترة [٠،٤]

**الحل**

ن(س) متناقص أي أن نَ(س) < ٠ ، س ∈ ]٠،٤[

ن(س) يقع في الربع الرابع أي أن ن(س) < ٠ ، س ∈ [٠،٤]

هـ(س) متزايد أي أن هـَ(س) > ٠ ، س ∈ ]٠،٤[

هـ(س) يقع في الربع الأول أي أن هـ(س) > ٠ ، س ∈ [٠،٤]

نفرض أن ك(س) = ن(س)×هـ(س) ، ، س ∈ [٠،٤]

ك(س) اقتران متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين كثيري حدود ، ك(س) قابل للاشتقاق في الفترة ]٠،٤[

كَ(س) = ن(س)×هـَ(س) + هـ(س)×نَ(س)

= (−)×(+) + (+)×(−) = (−) − (−) = (−)

← كَ(س) < ٠ ∀ س ∈ ]٠،٤[ ⇔ ك(س) متناقص ∀ س ∈ [٠،٤]

---

**السؤال السابع :** اذا كان ن(س) = جاس + جتاس ، س ∈ $\left[0، \frac{\pi}{2}\right]$ ، فجد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ن(س)

**الحل**

نَ(س) = جتاس − جاس ، س ∈ $\left]0، \frac{\pi}{2}\right[$

نَ(س) اقتران متصل لأنه حاصل طرح اقترانين كثيري حدود ، نَ(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left]0، \frac{\pi}{2}\right[$

هـ ً(س) = − جاس − جتاس ، س ∈ $\left]0، \frac{\pi}{2}\right[$ ، بجعل ن ً(س) = ٠

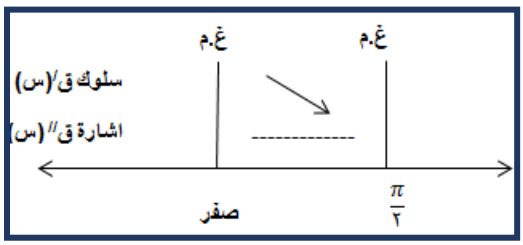
⇐ − جاس − جتاس = ٠ ⇐ − جاس = جتاس ⇐ ظاس = − ١

إما الربع الثاني س = $\frac{٣}{٤}\pi$ مرفوض لا ينتمي للفترة

أو الربع الرابع س = $\frac{٧}{٤}\pi$ مرفوض لا ينتمي للفترة

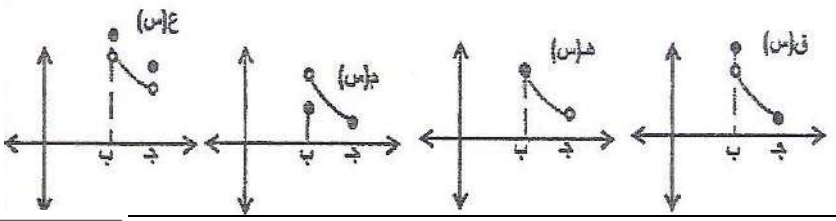
ومن إشارة نَ(س) في الشكل المجاور :

يكون منحنى نَ(س) متناقص ∀ س ∈ $\left]0، \frac{\pi}{2}\right[$



## القسم الثالث :اسئلة اثرائية

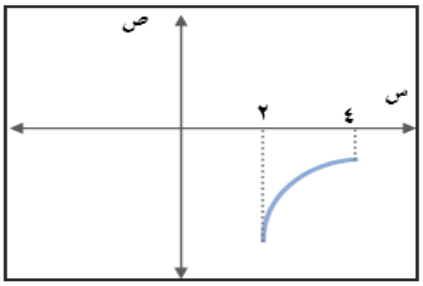
# الاقترانات المتزايدة والمتناقصه

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان ق َ (س) = (س$^{٢}$ ـ١)$^{٣}$ ( س ـ ٢)$^{٤}$ ، فإن ق يكون متناقصاً على الفترة :<br>أ) ] ـ ∞ ، ـ ١ [ ب) [ ـ١ ، ١ ] ج) [ ١ ، ٢ ] د) [ ٢ ، ∞ [ | ب |
| ٢ | الشكل المجاور يمثل اقترانات ،المنحنى الذى يكون متناقص على [ ب ،جـ ]<br>أ) ق(س) ب) هـ(س) ج) م(س) د) ع(س)<br>  | أ |
| ٣ | الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) على [١ ، ٤] ،<br>متى يكون الاقتران متزايدا؟<br>أ) [١ ، ٤] ب) ]١ ، ٤[ جـ) [١ ، ٤[ د) ]١ ، ٤] | د |
| ٤ | اذا كان ق(س) متصلا على [ا ، ب] ، وقابلا للاشتقاق على ]ا ، ب[ ، وكانت جميع المماسات لمنحنى ق(س) في تصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، لإن العبارة الصحيحة من الاتية هي :<br>أ)ق(س) متناقص في [ا ، ب] ب) ق(س) متزايد في [ا ، ب]<br>جـ) ق َ(س) متناقص في [ا ، ب] د) ق َ(س) متزايد في [ا ، ب] | ب |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق (س) = \| س$^{٢}$ ـ ٤ \| | متزايد على [ ٢ ، ∞ [ U [ ـ ٢ ، ٠ ] ،<br>ومتناقص على [ ٠ ، ٢ ]<br>U ] ـ ∞ ، ـ ٢ ] |

| | | |
|---|---|---|
| ٢ | إذا كان الاقتران ق (س) كثير حدود معرفاً على [ ٢ ، ٦ ] ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقص على مجاله ، وكان الاقتران هـ(س) = ٨ ـ س ، بين أن الاقتران ك( س) = ( ق × هـ )( س) متناقص في [ ٢ ، ٦ ] | |
| ٣ | اذا كان ق ،هـ اقترانين كثيري الحدود متزايد على ح ، وكان $ق(س) > ٠،٥ \forall س \in ع$ اثبت ان الاقتران $((ق \circ هـ)(س))^{٢}$ | |
| ٤ | اذا كان $ق(س) = (س^{٢} - ٤٦)^{\frac{٢}{٣}}$ فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) | ق متزايد في الفترتين $[-٨،٠][٨،\infty[$<br>ق متناقص في الفترتين $[٨،٠][[-\infty،-٨]$ |
| ٥ | اذا كان $ق(س) = \frac{س}{١ + س^{٢}}$ معرفا على $[-١،١]$ ، جد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق . | ق متزايد في الفترة $[-١،١]$ |
| ٦ | ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود معرفان على $[١،٦]$ ويقع منحنى كل منهما في الربع الاول فاذا كان ق(س) متزايدا في مجاله ، هـ (س) متناقصا في مجاله ، هـ(س) ≠ ٠ ، أثبت أن : $\frac{ق}{هـ}(س)$ متزايدا في $[١،٦]$ | |
| ٧ | اذا كان $ق(س) = |س - ١|(س + ٢)$ أوجد مجالات تزايد والتناقص للاقتران ق(س) | ق متزايد في الفترتين $[١،\frac{١}{٢}][\infty،\frac{١}{٢}-[$<br>ق متناقص في الفترة $[\frac{١}{٢}،١]$ |
| ٨ | اذا كان $ق(س) = لـو_{هـ}(س - س^{٢})$ جد قيم س الحرجة ومجالات تزايد وتناقص الاقترن . | ق متزايد $[٠،٢]$<br>ق متناقص $[٢،\infty[$<br>النقط الحرجة عند س=$\frac{١}{٢}$ |
| ٩ | عين مجالات التزايد التناقص للاقتران $ق(س) = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ ،$|س| \leq ٦$ | ق متزايد في $[٦،\infty[$<br>ق متناقص $]-\infty،-٦]$ |
| ١٠ | اذا كان $ص = س^{\frac{١}{٣}}(٢ - س)^{\frac{١}{٣}}$ فأوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران . | ق متزايد $]-\infty،٢]$<br>ق متناقص $[٢،\infty[$ |

## القسم الرابع :اسئلة اثرائية

| # | القسم الأول : اجب عن الاسئلة التالية : | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | ق(س) ، هـ(س) كثيري حدود متزايدين على ح وكان ق(س) > ٠،٥س ∈ ح جد مجالات التزايد والتناقص ان وجدت للاقتران $((ق \circ هـ)(س^{٢}))^{٢}$ | متزايد ]-∞،٠[<br>متناقص<br>]٠،∞[ |
| ٢ | الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س)على[٢،٤]<br>وكان $ق(س) = \frac{هـ(س)}{١ - س}$<br>جد مجالات تزايد والتناقص لمنحنى ق(س)<br>  <br> | متناقص على<br>[٢،٤] |
| ٣ | اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود ومتزايد على [-٣،-١]ويقع في الربع الثاني و كان<br>$ق(س) \times هـ(س) = س$ ، جد فترات التزايد والتناقص لمنحنى هـ(س) | متزايد على<br>[-٣،-١] |

## الدرس الثالث / القيم القصوى

## القسم الأول : الملخص

**تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية:**

ليكن ق(س) اقتراناً معرفاً على المجال ع، ولتكن جـ ∈ ع، عندها يكون للاقتران ق(س):

١) قيمة عظمى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

٢) قيمة صغرى محلية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي جـ، بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

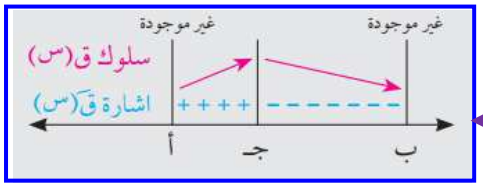
٣) قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

٤) قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) لجميع قيم س ∈ ع

ملاحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيماً قصوى، سواء أكانت محلية أم مطلقة.

### اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوى :

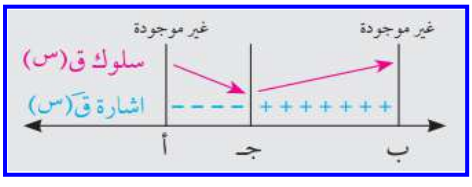
اذا كانت اذا كان ق(س) اقتران متصل على فترة مغلقة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) المتصل عند جـ ∈ ]أ،ب[ فانه اذا كان : ( تأمل الرسومات الآتية ستلاحظ )




أ) قَ(س) > ٠ عندما أ < س < جـ

قَ(س) < ٠ عندما جـ < س < ب

**فان ق(جـ) تكون قيمة عظمى محلية للاقتران ق(س)**




ب) قَ(س) < ٠ عندما أ < س < جـ

قَ(س) > ٠ عندما جـ < س < ب

**فان ق(جـ) تكون قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س)**

**تعريف:**

تسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة للاقتران ق(س) إذا كانت:

١) أ ∈ مجال ق(س)

٢) قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غير موجودة.

## نظرية القيم القصوى المطلقة :

اذا كان ق(س) اقتران متصل على فترة مغلقة [ا ، ب] فان ق(س)يتخذ قيما قصوى مطلقة في [ا ، ب]

طريقة ايجادها : نوجد أولامجموعة قيم س النقاط الحرجة ثم نعوض بالاقتران ، أكبر قيمة من الصور تكون قيمة عظمي مطلقة بينما أصغر قيمة من الصور تكون قيمة صغرى مطلقة .

**كل الامتنان للذين يزرعون فرحا في قلوب الاخرين**

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول : جد النقط الحرجة للإقترانات التالية :**

**فرع أ :** $ن(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + \frac{١}{٣}$ ، $س \in [-٢،٣]$

**الحل** $ن(س)$ متصل في الفترة $[-٢،٣]$ لانه كثير حدود

$ن'(س) = س^{٢} - ٢س$ ، $س \in ]-٢،٣[$ ، نجعل $ن'(س) = ٠$

$س^{٢} - ٢س = ٠ \Leftarrow س(س-٢) = ٠$

$\Leftarrow \boxed{س = ٠} \in ]-٢،٣[$

أو $\Leftarrow \boxed{س = ٢} \in ]-٢،٣[$

$ن'(س)$ غ.م عند $س = -٢$ ، $س = ٣$

النقاط الحرجة هي $(٠ ، ن(٠)) = (٠ ، \frac{١}{٣})$ ، $(٢ ، ن(٢)) = (٢ ، -١)$

$(-٢ ، ن(-٢)) = (-٢ ، \frac{-١٩}{٣})$ ، $(٣ ، ن(٣)) = (٣ ، ٠)$

---

**فرع ب :** $ن(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، $س \in [-٨،٨]$

**الحل** $ن(س)$ متصل في الفترة $[-٨،٨]$

$ن'(س) = \frac{٢}{٣}س^{\frac{-١}{٣}} = \frac{٢}{٣س^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$ ، $س \in ]-٨،٨[ - \{٠\}$ ،

لا يوجد قيم لـ $س \in ]-٨،٨[$ بحيث $ن'(س) = ٠$

$ن'(س)$ غ.م عند $س = -٨$ ، $س = ٨$ ، $س = ٠$

النقاط الحرجة هي $(-٨ ، ن(-٨)) = (-٨ ، ٤)$ ، $(٨ ، ن(٨)) = (٨ ، ٤)$

$(٠ ، ن(٠)) = (٠ ، ٠)$

**السؤال الثاني :** في التمارين من ١-٦ جد القيم العظمى و الصغرى المحلية (ان وجدت ) :

**فرع أ :** $ن(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$ ، $س \in ح$

**الحل** $ن(س)$ متصل على ح لانه كثير حدود

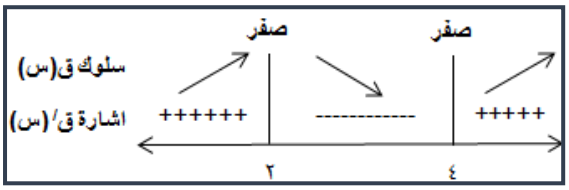
$ن'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$ ، نجعل $ن'(س) = ٠$

$٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤ = ٠ \Leftarrow س^{٢} - ٦س + ٨ = ٠$

$\Leftarrow (س - ٤)(س - ٢) = ٠ \Leftarrow$ $\boxed{س = ٤}$ ، $\boxed{س = ٢}$

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\{٢، ٤\}$

من اشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :




عند $س = ٢$ يوجد قيمة عظمى محلية قيمتها $ن(٢) = ٢٠$

عند $س = ٤$ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها $ن(٤) = ١٦$

---

**فرع ب :** $ن(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

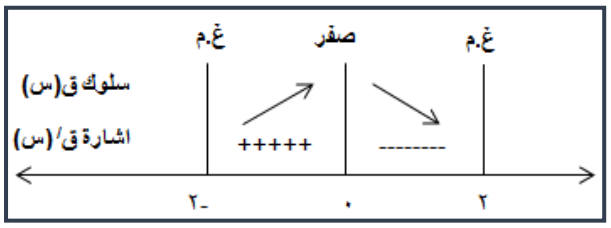
**الحل** يجب أن نجد مجال $ن(س) \Leftarrow ٤ - س^{٢} \geq ٠$

مجال $ن(س)$ هو $[-٢، ٢]$

$ن(س)$ متصل على $[-٢، ٢]$

$ن'(س) = \dfrac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}}$ ، $س \in ]-٢، ٢[$

نجعل $ن'(س) = ٠ \Leftarrow \dfrac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}} = ٠$




$\Leftarrow -٢س = ٠ \Leftarrow$ $\boxed{س = ٠}$

$ن'(س)$ غير موجودة عند $س = -٢$ ، $س = ٢$

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\{-٢، ٠، ٢\}$ ،من اشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :

عند $س = -٢$ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها $ن(-٢) = ٠$ (بداية تزايد )

عند $س = ٠$ يوجد قيمة عظمى محلية قيمتها $ن(٠) = ٢$

عند $س = ٢$ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها $ن(٢) = ٠$ (بداية تناقص )

**فرع جـ** : ن(س) = (س$^{٢}$ − ٣) هـ$^{س}$ ، س ∈ ح

**الحل** ن(س) متصل على ح ( حاصل ضرب اقترانين متصلين )

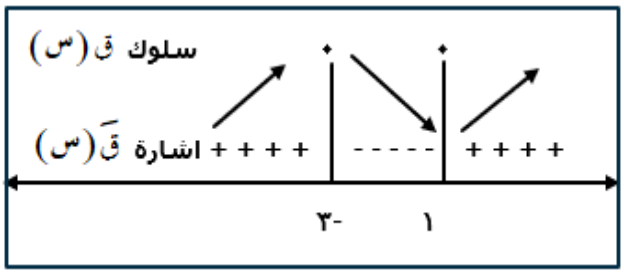
ن$'$(س) = (س$^{٢}$ − ٣) هـ$^{س}$ + (٢س) هـ$^{س}$ = هـ$^{س}$ (س$^{٢}$ + ٢س − ٣) ، نجعل ن$'$(س) = ٠

اما هـ$^{س}$ = ٠ ( وهذا مستحيل )

أو س$^{٢}$ + ٢س − ٣ = ٠

(س + ٣)(س − ١) = ٠ ⇐ $\boxed{س = -٣}$ ، $\boxed{س = ١}$

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي {−٣ ، ١}




من اشارة ن$'$(س) في الشكل المجاور :

عند س = −٣ يوجد قيمة عظمي محلية قيمتها ن(−٣) = ٦هـ$^{-٣}$

عند س = ١ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها ن(١) = −٢هـ

وهي قيم مطلقة حسب أتعلم ص$^{٧٩}$ (اذن هذه هي الوحيدة )

---

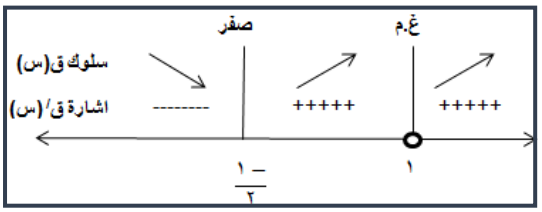
**فرع د** : ن(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

**الحل** ن(س) متصل على ح − {١}

ن(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س - ١} = \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{س - ١}$ = س$^{٢}$ + س + ١

ن$'$(س) = ٢س + ١ ، نجعل ن$'$(س) = ٠

٢س + ١ = ٠ ⇐ ٢س = −١ ⇐ س = $\frac{-١}{٢}$ ∈ مجال ن(س)




ن$'$(س) غير موجودة عند س = ١

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\left\{\frac{-١}{٢}\right\}$

من اشارة في الشكل المجاور

عند س = $\frac{-١}{٢}$ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها ن$\left(\frac{-١}{٢}\right)$ = ٣

**فرع هـ :** $ن(س) = جتا^{٢}س - جا^{٢}س$ ، $س \in [٠، \pi]$

**الحل** $ن(س)$ متصل في الفترة $[٠، \pi]$ ( حاصل طرح اقترانين متصلين )

$ن'(س) = -٢جتاسجاس - ٢جاسجتاس = -٤جاسجتاس$ ، $س \in ]٠، \pi[$

نجعل $ن'(س) = ٠ \Leftarrow -٤جاسجتاس = ٠$ ، تذكر المتطابقة ( ٢جاسجتاس = جا٢س )

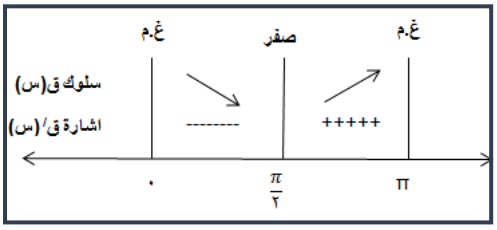
$-٢جا٢س = ٠ \Leftarrow$ جا٢س = ٠

اما $٢س = \pi \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \in ]٠، \pi[$

$٢س = ٢\pi \Leftarrow س = \pi \notin ]٠، \pi[$

$ن'(س)$ غير موجودة عند $س = ٠ ، س = \pi$ مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\left\{٠، \pi، \frac{\pi}{٢}\right\}$

من اشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :




عند $س = ٠$ يوجد قيمة عظمى محلية قيمتها $ن(٠) = ١$ (بداية تناقص )

عند $س = \frac{\pi}{٢}$ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها $ن(\frac{\pi}{٢}) = -١$

عند $س = \pi$ يوجد قيمة صغرى محلية قيمتها $ن(\pi) = ١$ (نهاية تزايد )

---

**فرع و :** $ن(س) = هـ^{-(س-٢)^{٢}}$ ، $س \in ع$

**الحل** $ن(س)$ متصل على ح

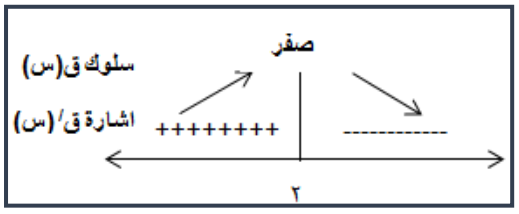
$ن'(س) = -٢(س-٢)هـ^{-(س-٢)^{٢}}$ ، $س \in ع$ ، نجعل $ن'(س) = ٠$

$-٢(س-٢)هـ^{-(س-٢)^{٢}} = ٠ \Leftarrow (س-٢)هـ^{-(س-٢)^{٢}} = ٠$

إما $(س-٢) = ٠ \Leftarrow س = ٢$

أو $هـ^{-(س-٢)^{٢}} = ٠ \Leftarrow$ مرفوض

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\{٢\}$




من اشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :

عند $س = ٢$ يوجد قيمة عظمى محلية قيمتها $ن(٢) = ١$

**السؤال الثالث** : **جد أكبر وأصغر قيمة ( ان وجدت ) لكل من الاقترانات الآتية :**

**فرع أ :** $ن(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} + ٤ & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، $س \in [٠، ٣]$

**الحل** $ن(س)$ أقتراناً متصلاً في $[٠، ٣]$

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، \ ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$ ، بجعل $ن'(س) = ٠$

عند $٠ < س < ٢$ فان $٣س^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ٠$ لا تنتمي $]٠، ٢[$

عند $٢ < س < ٣$ فان $٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$ لا تنتمي $]٢، ٣[$

$ن'(٢)$ غ.م لان $ن'(٢)^{+} \neq ن'(٢)^{-}$

$ن'(س)$ غ.م عند $س = ٠ ، س = ٣$ ( نقاط طرفية )

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\{٠، ٢، ٣\}$

ويكون $ن(٠) = ٠ ، ن(٢) = ٨ ، ن(٣) = ١٣$

أصغر قيمة للاقتران هي $ن(٠) = ٠ \leftarrow ن(٠) = ٠$ قيمة صغرى مطلقة

أكبر قيمة للاقتران هي $ن(٣) = ١٣ \leftarrow ن(٣) = ١٣$ قيمة عظمى مطلقة "باستخدام نظرية القيمة القصوى المطلقة "

---

**فرع ب :** $ن(س) = هـ^{س} - هـ س$ $س \in [٠، ٣]$

**الحل** $ن(س)$ اقتراناً متصل في الفترة $[٠، ٣]$

$ن'(س) = هـ^{س} - هـ$ ، $س \in ]٠، ٣[$

بجعل $ن'(س) = ٠$

$هـ^{س} - هـ = ٠ \Leftarrow هـ^{س} = هـ \Leftarrow س = ١ \in ]٠، ٣[$

$ن'(٠) ، ن'(٣)$ غ.م ( نقاط طرفية )

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\{٠، ١، ٣\}$

ويكون ن(٠) = ١ ، ن(١) = ٠ ، ن(٣) = هـ$^{٣}$ − ٣هـ

أصغر قيمة للاقتران هي ن(١) = ٠ ← ن(١) = ٠ هي قيمة صغرى مطلقة

أكبر قيمة للاقتران هي ن(٣) = هـ$^{٣}$ − ٣هـ ← ن(٣) = هـ$^{٣}$ − ٣هـ هي قيمة عظمى مطلقة

" باستخدام نظرية القيمة القصوى المطلقة "

---

**فرع جـ :** ن(س) = جتاس − $\frac{١}{٣}$جتا$^{٣}$س  س ∈ $\left[\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$

**الحل** ن(س) متصل في الفترة $\left[\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$ ( حاصل طرح اقترانين متصلين )

ن$'$(س) = −جاس + جتا$^{٢}$س جاس ،  س ∈ $\left]\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right[$

بجعل ن$'$(س) = ٠

−جاس + جتا$^{٢}$س جاس = ٠ ⇐ جاس(−١ + جتا$^{٢}$س) = ٠  جا$^{٢}$س = ١ − جتا$^{٢}$س

⇐ جاس × −جا$^{٢}$س = ٠ ⇐ −جا$^{٣}$س = ٠ ⇐ جاس = ٠

س = π ∈ $\left]\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right[$

س = π٢ ∉ $\left]\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right[$

ن$'$$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ ، ن$'$$\left(\frac{\pi ٣}{٢}\right)$ غ.م ( نقاط طرفية )

مجموعة قيم س التي يكون عندها نقط حرجة هي $\left\{\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}، \pi\right\}$

ن$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ٠ ، ن(π) = $\frac{-٢}{٣}$ ، ن$\left(\frac{\pi ٣}{٢}\right)$ = ٠

أكبر قيمة للاقتران هي ن$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ٠ ← ن$\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ٠ هي قيمة عظمى مطلقة

أكبر قيمة للاقتران هي ن$\left(\frac{\pi ٣}{٢}\right)$ = ٠ ← ن$\left(\frac{\pi ٣}{٢}\right)$ = ٠ هي قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للاقتران هي ن(π) = $\frac{-٢}{٣}$ ← ن(π) = $\frac{-٢}{٣}$ هي قيمة صغرى مطلقة

" باستخدام نظرية القيمة القصوى المطلقة "

**السؤال الرابع :** اذا كان $ن(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١$ ، $أ، ب \in ح$ اقتران له قيمة عظمى محلية عند س = ١ ، وقيمة صغرى محلية عند س = ٣ ، ما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

**الحل** $ن(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩س + ١ \Leftarrow ن'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + ٩$

قيمة عظمى محلية عند س = ١ $\Leftarrow$ $ن'(١) = ٠ \Leftarrow ٣أ + ٢ب + ٩ = ٠$

$\Leftarrow \boxed{٣أ + ٢ب = -٩} \leftarrow \boxed{١}$

قيمة صغرى محلية عند س = ٣ $\Leftarrow$ $ن'(٣) = ٠ \Leftarrow ٢٧أ + ٦ب + ٩ = ٠$

$\Leftarrow ٢٧أ + ٦ب = -٩ \Leftarrow \boxed{١٩أ + ٢ب = -٣} \leftarrow \boxed{٢}$

بطرح المعادلة (١) من المعادلة ( ٢ ) وينتج :

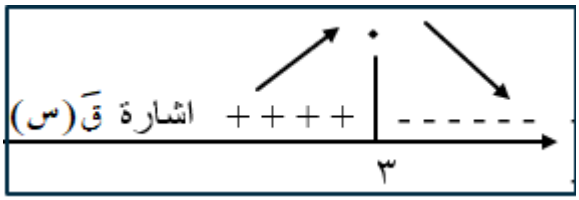
$٢٦أ = ٦ \Leftarrow \boxed{أ = ١}$ بالتعويض في المعادلة (١):

$٣ + ٢ب = -٩ \Leftarrow ٢ب = -١٢ \Leftarrow ب = -٦$

---

**السؤال الخامس :** أثبت أن المقدار $٤س^{٣} - س^{٤} - ٢٩$ سالب دائما .

**الحل** نفرض أن $ن(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} - ٢٩$




$ن(س)$ متصل على ح لأنه كثير حدود وقابل للاشتقاق

$ن'(س) = ١٢أ س^{٢} - ٤س^{٣}$ ، بوضع $ن'(س) = ٠$

$١٢أ س^{٢} - ٤س^{٣} = ٠ \Leftarrow ٤س^{٢}(٣ - س) = ٠$ (بما أن $٤س^{٢}$ موجبة دائما نركز على $(٣ - س) = ٠$

من اشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :

عند س = ٣ يوجد قيمة عظمى محلية قيمتها $ن(٣) = -٢$

(من أتعلم ص ٧٩ ) فان $ن(٣) = -٢$ هي قيمة عظمى مطلقة وهي سالبة ( أي أن أعظم قيمة سالبة )

$\Leftarrow ن(س)$ سالب دائما $\Leftarrow ٤س^{٣} - س^{٤} - ٩$ سالبا دائما

**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

# القيم القصوى

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان ق (س) اقتراناً معرفاً على [ ٠ ، ٣ ] وكانت ق َ ( س) = ( س ـ٢)( س+١) فإن مجموعة جميع قيم س التي يوجد عند كل منها قيمة حرجة للاقتران ق (س) هي :<br>أ) { ٠ ، ـ١ ، ٢ ، ٣ } ب) { ٠ ، ٣ } جـ) { ـ١ ، ٢ } د) [ ٠ ، ٢ ، ٣ } | د |
| ٢ | إذا كان ق (س) = ٢س$^{٣}$ ـ أ س$^{٢}$ وكان لمنحنى الاقتران ق قيمة قصوى محلية عند س = ١ ، فإن قيمة الثابت أ =<br>أ) ٢ ب) ـ ٣ جـ) ٣ د) ـ ٢ | جـ |
| ٣ | إذا كان ق (س) معرفاً على ح ، وكانت ق َ (س) = $\frac{س^{٢}+٢س}{(س+١)^{٢}}$ ، فإن عدد النقط الحرجة للاقتران ق (س) يساوي :<br>أ. صفر ب. ١ ج. ٢ د. ٣ | د |
| ٤ | إذا كان ق (س) = [ ٢س ـ ٤ ] ، س ∋ [ ٠ ، ٢ ] ، فإن جميع قيم س التي تكون عندها نقط حرجة للاقتران ق(س) :<br>أ) ٠ ، ٢ ب) [ ٠ ، ٢ ] جـ) ] ٠ ، ٢ [ د) ٠ ، ١ ، ٢ | ب |
| ٥ | ليكن ق ( س) =$\sqrt{٤ ـ س^{٢}}$ ، س ∋ [ ـ ٢ ، ٢ ] فإن قيمة س التي يكون عندها للاقتران ق (س) قيمة عظمى مطلقة هي :<br>أ) ـ ٢ ب) صفر ج) ١ د) ٢ | ب |
| ٦ | إن مجموعة قيم س التي يكون للاقتران ق (س) =$\sqrt{س^{٢}-١٢س}$ نقطاً حرجة هي :<br>أ) { ٠ ، ١٢} ب) { ٠، ٠ ، ١٢ } ج) { ٦ } د) { ٦ ، ١٢ } | ب |
| | اذا كان ق(س) معرفا على الفترة ،[٠، ٣] بحيث ق َ(س) = $\frac{س-٢}{س+١}$ ، فأن مجموعة قيم س التى يكون عندها للاقتران ق(س) نقطا حرجة هي :<br>أ) {٠، ٣} ب) {١ـ، ٠، ٢، ٣} ج) {٠، ٢، ٣} د) {١ـ، ١، ٢، ٣} | ج |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | عين فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ( س) = $\frac{س^{٢}}{س^{٢}+٢}$ ثم أوجد القيم القصوى للاقتران | متزايد عندما س > ٠<br>متناقص عندما س < ٠<br>قيمة صغرى محلية<br>عند س= ٠ ق(٠) =٠ |
| ٢ | اذا كان ق(س) = ٤س − $\frac{١}{٣}$ س $^{٣}$ ، [−٣،٣] ،أوجد :<br>١) النقاط الحرجة .<br>٢) فترات التزايد والتناقص .<br>٣) القيم القصوى المطلقة للاقتران ق. | ١) {−٣،−٢،٢،٣}<br>٢)ق متزايد في [−٢،٢]<br>ق متناقص في [٢،٣]<br>[−٣،−٢]<br>٣)عظمى مطلقة $(٢،\frac{١٦}{٣})$<br>صغري مطلقة $(٢،\frac{-١٦}{٣})$ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كان ق(س) كثير حدود له ٤ نقاط حرجة في [أ،ب] ، اثبت انه يوجد حل للمعادلة ق ً(س) = ٠ في ]أ،ب[ | |
| ٢ | اثبت ان ق(س) = س $^{٤}$ − ٤س $^{٣}$ + ٣٠ موجب دائما | |
| ٣ | اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة له قيمه قصوى واحدة فقط عند س= و اثبت ان له نقطه انعطاف عند س= و ؟ | |
| ٤ | اذا كان ق ً(−١) = ق ً(٢) = ٠ ، ق ً(س) = −٣س أوجد لمنحنى ق(س):<br>١) نقط القيم القصوى ونوعها .<br>٢) فترات التزايد والتناقص .<br>٣) فترات التقعر للاعلى و للاسفل ونقط الانعطاف ان وجدت<br>ملاحظة / فرع ٣ للدرس الرابع | ١) صغرى محلية<br>(−١،ق(−١))<br>محليه عظمى (٢،ق(٢))<br>٢)ق متزايد في[−١،٢]<br>ق متناقص في ]−∞،−١[<br>]∞،٢[<br>٣)مقعر للاعلى ]−∞،٠[<br>مقعر للاسفل ]٠،∞[<br>(٠،ق(٠)) |

## الدرس الرابع التقعر ونقط الانعطاف

### القسم الأول : الملخص

**تعريف:**

يقال لمنحنى الاقتران ق(س) أنه مقعّر للأعلى في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته في الفترة ] أ، ب[ وأنه مقعّر للأسفل في الفترة [أ، ب] إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته في الفترة ] أ، ب[.

❖ **اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية:**

١. اذا كان ق(س) اقترانا متصلا في الفترة [أ ، ب] وكان ق ״(س) معرفا في الفترة ]أ ، ب[ ، فان منحنى ق(س) يكون :- ١. مقعرا لأعلى في الفترة [أ ، ب] اذا كانت ق ״(س) > ٠ لجميع قيم س∈]أ ، ب[ .

٢. مقعرا للاسفل في الفترة [أ ، ب] اذا كانت ق ״(س) < ٠ لجميع قيم س∈]أ ، ب[.

٣. غير مقعر للأعلى أو للأسفل في الفترة [أ ، ب] اذا كانت ق ״(س) = ٠ لجميع قيم س∈]أ ، ب[.

**تعريف :** ١ . تسمى النقطة (جـ ، ق(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ق(س) اذا كان :

- ق(س) اقترانا متصلا عند س = جـ
- يغير الاقتران اتجاه تقعر منحناه عند س = جـ من الأعلى الى الأسفل، أو العكس.

٢. زاوية الانعطاف: هي زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف.

٣. إذا كانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة انعطاف وكان ق ״(جـ) = ٠ فتسمى النقطة تقطه انعطاف أفقي.

❖ **نظرية :** اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق على فترة مفتوحة تحتوي جـ، و كان ق ״(جـ) = ٠ فان :

١. ق(جـ) قيمة عظمى محلية، إذا كانت ق ״(جـ) < ٠

٢. ق(جـ) قيمة صغرى محلية، إذا كانت ق ״(جـ) > ٠

٣. يفشل تطبيق الاختبار اذا كان ق ״(جـ) = ٠ أو ق ״(جـ) غير موجودة ٠

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول**: عين فترات التقعر للأعلى و الأسفل لمحنى الاقتران في الحالات الآتية :

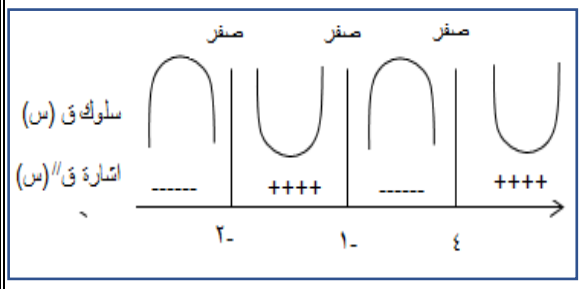
**فرع أ:** $هـ''(س) = (س^{٢} - ٣س - ٤)(س + ٢)$ ، $س \in ح$

الحل بوضع $\boxed{هـ''(س) = ٠}$

$\Leftarrow (س^{٢} - ٣س - ٤)(س + ٢) = ٠$

اما $س^{٢} - ٣س - ٤ = ٠ \Leftarrow (س - ٤)(س + ١) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٤}$ ، $\boxed{س = -١}$

او $س + ٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = -٢}$




ومن إشارة $هـ''(س)$ في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

مقعرا للأعلى في الفترتين $[-٢ ، -١]$ ، $[٤ ، \infty[$

مقعرا للأسفل في الفترتين $[-١ ، ٤]$ ، $]-\infty ، -٢[$

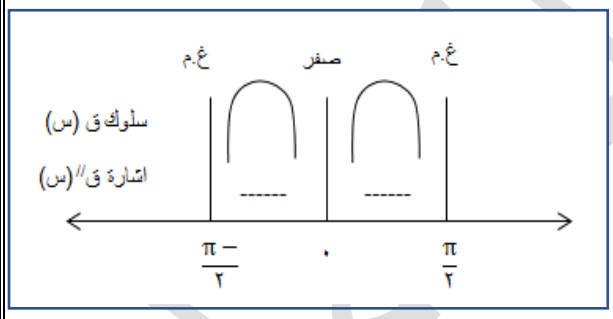
---

**فرع ب :** $هـ'(س) = جاس - س$ ، $س \in \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

الحل $هـ''(س) = جتاس - ١$ ، $س \in \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

بوضع $هـ''(س) = ٠ \Leftarrow جتاس - ١ = ٠ \Leftarrow جتاس = ١$

إما $س = \pi \notin \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$ أو $س = ٠ \in \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$




ومن إشارة $هـ''(س)$ في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

مقعرا للأسفل في الفترتين $\left]-\frac{\pi}{٢} ، ٠\right[$ ، $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

---

**فرع جـ :** $هـ(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} + س$ ، $س \in [٠ ، ٤]$

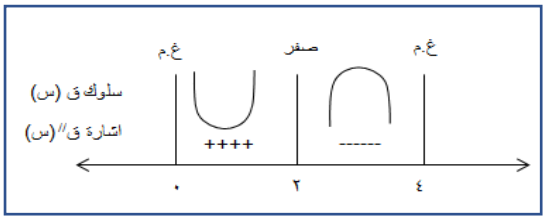
الحل $هـ(س)$ متصل على مجاله لأنه كثير حدود $هـ'(س) = ١٢س^{٢} - ٤س^{٣} + ١$ ، $س \in ]٠ ، ٤[$

$هـ''(س) = ٢٤س - ١٢س^{٢}$ ، $س \in ]٠ ، ٤[$ ، بوضع $\boxed{هـ''(س) = ٠}$

$\Leftarrow ٢٤س - ١٢س^{٢} = ٠ \Leftarrow ١٢س(٢ - س) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{س = ٢}$

ومن إشارة هـ ً (س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

مقعرا للأسفل في الفترة [٢ ، ٤] ، ومقعرا للأعلى في الفترة [٠، ٢].




**فرع د :** هـ(س) = (س − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، س ≤ ٣

**الحل**

هـ(س) = (س − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ = $\sqrt{(س - ٣)^{٣}}$

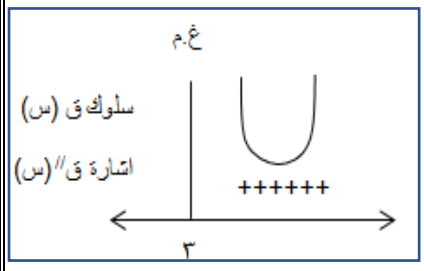
مجال هـ(س) = (س − ٣)$^{٣}$ ≥ ٠ ⇐ س − ٣ ≤ ٠ ⇐ س ≤ ٣ المجال ⇐ ]−∞ ، ٣]

هـ(س) متصل على مجاله س ≤ ٣

هـ ´(س) = $\frac{٣}{٢}$ (س − ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ ، ]−∞ ، ٣[

هـ ″(س) = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٣)$^{-\frac{١}{٢}}$ ، ]−∞ ، ٣[ ⇐ هـ ″(س) = $\frac{٣}{٤\sqrt{س - ٣}}$ ، هـ ″(س) ≠ ٠

ومن إشارة هـ ً (س) في الشكل المجاور حيث هـ ″(س) > ٠ ، ∀س ∈ ]−∞ ، ٣] يكون منحنى ق(س) :




يكون منحنى الاقتران ق(س) مقعرا للأعلى في الفترة ]−∞ ، ٣]

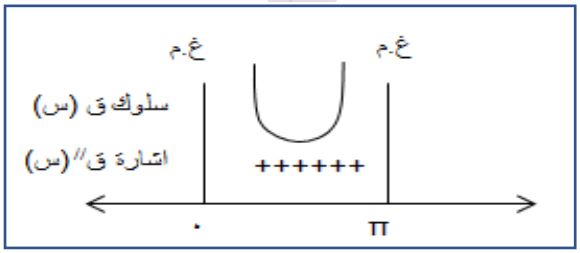
**فرع هـ :** هـ(س) = جا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈ [٠ ، π]

**الحل**

هـ(س) متصل على مجاله

هـ ´(س) = $\frac{١}{٢}$ جتا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈ ]٠ ، π[

هـ ″(س) = −$\frac{١}{٤}$ جا$\frac{س}{٢}$ ، س ∈ ]٠ ، π[




بوضع هـ ″(س) = ٠ ⇐ −$\frac{١}{٤}$ جا$\frac{س}{٢}$ = ٠ ⇐ جا$\frac{س}{٢}$ = ٠

إما $\frac{س}{٢}$ = π ، س = ٢π ∉ ]٠ ، π[

أو $\frac{س}{٢}$ = ٢π ، س = ٤π ∉ ]٠ ، π[

ومن إشارة هـ ً (س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

مقعرا للأعلى على الفترة ]٠ ، π[

**فرع و :** $ه(س) = هـ^{س}$ جتاس ، $س \in [0 ، 2\pi[$

**الحل** $ه(س)$ متصل على مجاله

$ه'(س) = -هـ^{س}$ جاس + جتاس $هـ^{س}$ ، $س \in [0 ، 2\pi[$

$ه''(س) = -هـ^{س}$ جتاس $- هـ^{س}$ جاس + $هـ^{س}$ جتاس $- جاس هـ^{س}$

$ه''(س) = -2هـ^{س}$ جاس ، $س \in [0 ، 2\pi[$

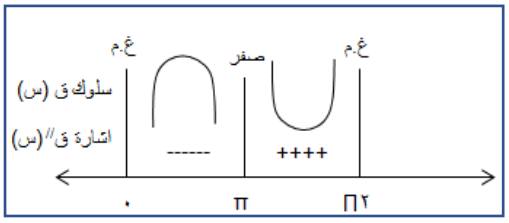
بوضع $ه'(س) = 0 \Leftarrow -2هـ^{س}$ جاس $= 0$

إما $هـ^{س} = 0$ (مستحيل) ، أو جاس $= 0 \Leftarrow س = \pi \in [0 ، 2\pi[$

ومن إشارة $ه''(س)$ في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

مقعرا للأعلى غلى $[\pi ، 2\pi[$

مقعرا للأسفل على $[0 ، \pi[$




---

**فرع ز :** $ه(س) = \begin{cases} [\frac{1}{3}س - 1] & 1 < س \leq 3 \\ س^{3} & 3 < س \leq 5 \end{cases}$

**الحل** $\Leftarrow ه(س) = \begin{cases} -1 & 1 < س < 3 \\ 0 & س = 3 \\ س^{3} & 3 < س \leq 5 \end{cases}$

$ه(س)$ غير متصل عند $س = 3$ ومنها $ه'(3)$ غ.م

$ه(س)$ متصل على $]1 ، 5[ - \{3\}$

$ه'(س) = \begin{cases} 0 & 1 < س < 3 \\ 3س^{2} & 3 < س < 5 \end{cases} \Leftarrow ه''(س) = \begin{cases} 0 & 1 < س < 3 \\ 6س & 3 < س < 5 \end{cases}$

$ه''(س) = 0$ عندما $1 < س < 3$

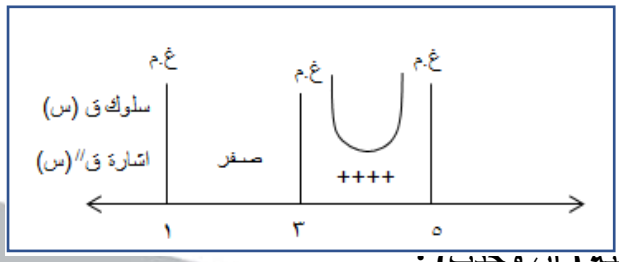
$ه''(س) = 0$ عندما $3 < س < 5$ فيكون $ه''(س) = 0 \Leftarrow 6س = 0 \Leftarrow س = 0 \notin ]3 ، 5[$ "مرفوضة"

ومن إشارة $ه''(س)$ في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

مقعرا للأعلى في الفترة $]3 ، 5[$ ،

بينما في الفترة $[1 ، 3[$ ليس مقعرا للأعلى أو للأسفل

لأن $ه''(س) = 0$ لجميع قيم $س \in [1 ، 3[$




**السؤال الثاني** : حدد نقاط الانعطاف للاقتران ق(س) في الحالات الآتية ( ان وجدت ) :

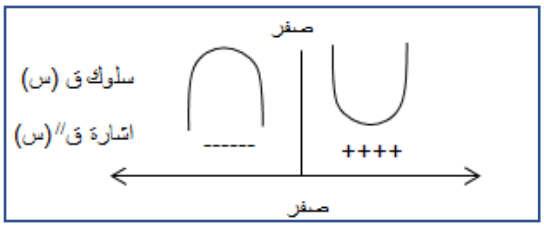
**فرع أ :** $ه(س) = س^{٣} + س$

**الحل** $ه(س)$ متصل لأنه كثير حدود

$ه'(س) = ٣س^{٢} + ١ \Leftarrow ه''(س) = ٦س$ ، بوضع أن $ه''(س) = ٠ \Leftarrow ٦س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$ه(س)$ متصل عند س = صفر ، ويغير من اتجاه تقعره عندها

كما يتضح من إشارة $ه''(س)$ في الشكل المجاور:




∴ النقطة (٠ ، ٠) هي نقطة انعطاف للاقتران ق(س) .

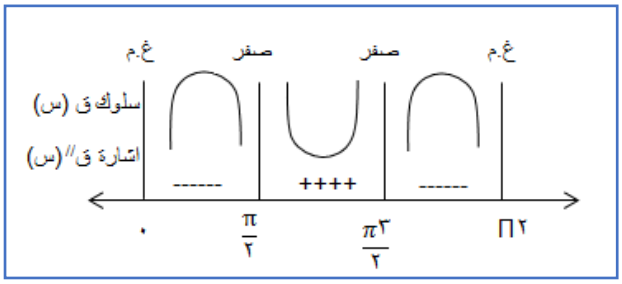
**فرع ب :** $ه(س) = جتاس$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

**الحل** $ه(س)$ متصل في الفترة $[٠ ، ٢\pi]$

$\Leftarrow ه'(س) = -جاس$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$ ، بالتالي $ه''(س) = -جتاس$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

بوضع $ه''(س) = ٠ \Leftarrow -جتاس = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ ، $س = \frac{\pi ٣}{٢} \in [٠ ، ٢\pi]$

$ه(س)$ متصل عند كل من $س = \frac{\pi}{٢}$ ، $س = \frac{\pi ٣}{٢}$ ، ويغير من اتجاه تقعره عندها كما يتضح من إشارة $ه''(س)$ في الشكل المجاور .




نقاط الانعطاف هي $\left(\frac{\pi}{٢} ، ه\left(\frac{\pi}{٢}\right)\right) ، \left(\frac{\pi ٣}{٢} ، ه\left(\frac{\pi ٣}{٢}\right)\right)$

∴ $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right) ، \left(\frac{\pi ٣}{٢} ، ٠\right)$ هي نقاط انعطاف للاقتران ق(س)

**فرع جـ :** $ه(س) = \sqrt[٣]{٥ - س}$

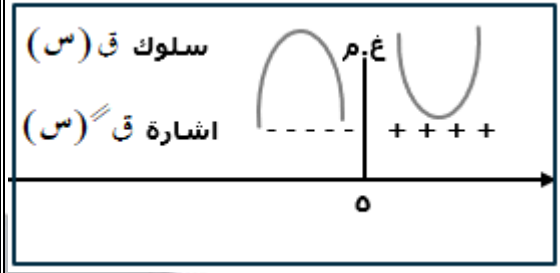
**الحل** $ه(س)$ متصل على مجاله

$ه'(س) = \frac{-١}{٣}(٥ - س)^{\frac{-٢}{٣}}$

$\Leftarrow ه''(س) = \frac{-٢}{٩}(٥ - س)^{\frac{-٥}{٣}}$ أو $ه''(س) = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{(٥ - س)^{٥}}}$

وبما أن $ه''(س) \neq ٠$ ، $ه''(س) < ٠ \ \forall س \in ]٥ ، \infty[$

كما يتضح من إشارة $ه''(س)$ في الشكل المجاور ،




فان ق(س) مقعر لأعلى في الفترة $[٥ ، \infty[$ وللاسفل في $]-\infty ، ٥]$

(٥،ق(٥)) نقطه انعطاف (متصل، ويغير الاقتران من اتجاه تقعره حولها )

**السؤال الثالث:** جد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانان الاتية ، وحدد نوع كل منها باستخدام اختبار المشتقة الثانية

( ان أمكن تطبيقها ) ، وفي حالة عدم امكانية تطبيقها استخدم اختبار المشتقة الأولى :

**فرع أ :** $هـ(س)=س^{٣}+٦س^{٢}$

الحل

$هـ(س)$ متصل وقابل للاشتقاق لأنه كثير حدود

$هـ'(س)=٣س^{٢}+١٢س$ ، بوضع $هـ'(س)=٠ \Leftarrow ٣س^{٢}+١٢س=٠$

$٣س(س+٤)=٠ \Leftarrow س=٠ ، س=-٤$

$هـ''(س)=٦س+١٢$

$هـ''(٠)=١٢>٠ \Leftarrow$ $هـ(٠)=٠$ قيمة صغرى محلية

$هـ''(-٤)=-١٢<٠ \Leftarrow$ $هـ(-٤)=٨٠$ قيمة عظمى محلية

---

**فرع ب :** $هـ(س)=|س+٦|$

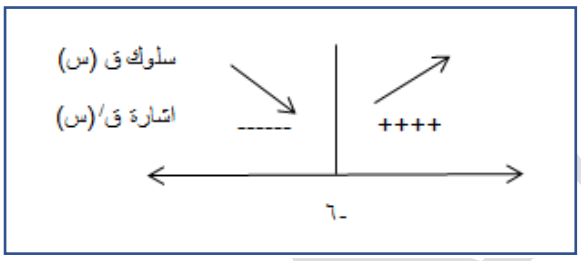
الحل

$$هـ(س)=\begin{cases} س+٦ & ، س \geq -٦ \\ -(س+٦) & ، س<-٦ \end{cases} \Leftarrow هـ'(س)=\begin{cases} ١ & ، س>-٦ \\ -١ & ، س<-٦ \end{cases}$$

$ن'(-٦)$ غير موجودة لأن $ن'(-٦)^{+} \neq ن'(-٦)^{-}$

$$\Leftarrow هـ''(س)=\begin{cases} ٠ & ، س>-٦ \\ ٠ & ، س<-٦ \end{cases}$$

بفشل الاختبار ولذا نلجأ إلى اختبار المشتقة الأولى.




ق(-٦) قيمة صغرى محلية وهي مطلقة

(حسب أتعلم ص ٧٩)

---

**السؤال الرابع:** اذا كان الاقتران $ن(س)=أس^{٢}+س^{٣}$ نقطة انعطاف عند س = -١ ، جد قيم / قيمة الثابت أ

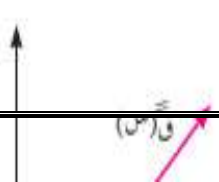
الحل

عند س = -١ يوجد للمنحنى نقطة انعطاف $\leftarrow ن''(-١)=٠$ "معطى"

$هـ'(س)=٢أس+٣س^{٢} \Leftarrow هـ''(س)=٢أ+٦س$

$\therefore ن''(-١)=٠ \longleftarrow ٠=٦-١٢ \Leftarrow ٠=١-\times٦+٢أ \Leftarrow \boxed{أ=٣}$

**السؤال الخامس:** الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $ن''(س)$ ، اذا علمت أن $ن'(٠)=ن'(٦)=٠$



،جد كلا مما يلي

أ) فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (س)

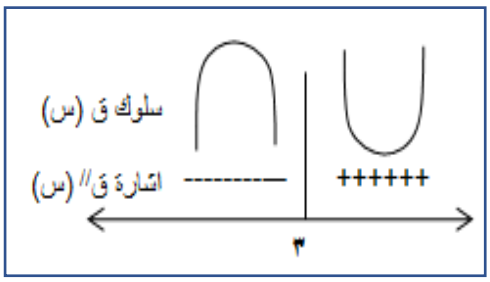
ب) القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)

ج) فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س)

الحل

**فرع أ :**

كما يتضح من إشارة ق/(س) في الشكل المجاور :




ق(س) مقعر للأعلى في الفترتين ]٣،∞[

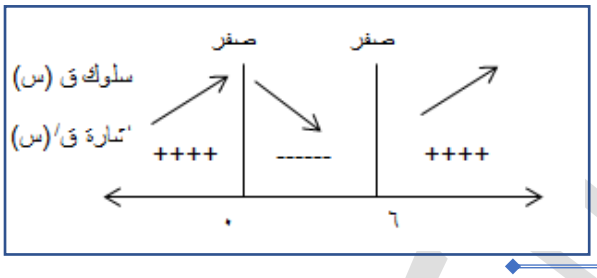
ق(س) مقعر للأسفل في الفترة ]-∞،٣[

∴ نقطة الانعطاف هي (٣ ، ق(٣))

الحل

**فرع ب :**

ق/ (٠) = ق/ (٦) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = ٦ هي نقط حرجة




نستخدم اختبار المشتقة الثانية

ق/ (٠) < ٠ ⟸ ق(٠) قيمة عظمى محلية

ق/ (٦) > ٠ ⟸ ق(٦) قيمة صغرى محلية

الحل

**فرع جـ :** كما يتضح من إشارة ق/(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ق(س) :

متزايدا على ]٦ ، ∞[ ، ]-∞ ، ٠[ ، و متناقصا على [٠ ، ٦]

**السؤال السادس :** ق(س) اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة ، يمر منحناه بالنقطة (١،٥) وله نقطة انعطاف عند س = ٢ ، بحيث أن معادلة المماس عند نقطة الانعطاف هي : ٣س + ص = ٧ ، جد قاعدة الاقتران ق(س) .

الحل

ق(س) = أس$^{٣}$ + بس$^{٢}$ + جس + د

يمر بالنقطة (١،٥) ⟸ ق(١) = ٥ ⟸ $\boxed{أ + ب + جـ + د = ٥}$ ... [١]

توجد نقطة انعطاف عند س = ٢ ⟸ ق/(٢) = ٠

لدينا ق(س) = أس$^{٣}$ + بس$^{٢}$ + جس + د ومنها ق/(س) = ٣أس$^{٢}$ + ٢بس + جـ ومنها

ق/(س) = ٦أس + ٢ب ، بالتعويض عن س = ٢ في المشتقة الثانية :

⟸ ق/ (٢) = ١٢أ + ٢ب = ٠ ⟸ $\boxed{١٢أ + ب = ٠}$ ... [٢]

معادلة المماس عند نقطة الانعطاف (٢ ، ق(٢)) هي ٣س + ص = ٧

$\Leftarrow$ هـ´(٢)= ميل المماس = $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{-٣}{١} = -٣$

بالتعويض عن س= ٢ في هـ´(س) $\Leftarrow$ $\boxed{٣ ١^{٢} + ٤ ب + جـ = -٣}$ ... ٣

لكن نقطة الانعطاف (٢ ، ق(٢)) تحقق معادلة المماس ، $\Leftarrow ٣ \times ٢ + ص = ٧ \Leftarrow ص = ١ \Leftarrow$ هـ(٢)=١

$\Leftarrow$ $\boxed{٨ ^{٢} + ٤ ب + ٢ جـ + ء = ١}$ ... ٤ بطرح المعادلة ١ من المعادلة ٤

$\Leftarrow$ $\boxed{٧ ^{٢} + ٣ ب + جـ = -٤}$ ... ٥ بطرح المعادلة ٥ من المعادلة ٣

$\Leftarrow$ $\boxed{٥ ^{٢} + ب = ١}$ ... ٦ بطرح المعادلة ٦ من المعادلة ٢

$\Leftarrow$ $\boxed{^{٢} = -١}$ بالتعويض في المعادلة ٢ $\Leftarrow$ $\boxed{ب = ٦}$

بالتعويض في المعادلة ٥ عن قيمة ^ = −١ و قيمة ب = ٦ ينتج

$-٧ + ٣ \times ٦ + جـ = -٤ \Leftarrow$ $\boxed{جـ = -١٥}$ بالتعويض في المعادلة ١ عن قيم ^ ، ب ، جـ ينتج :

$-١ + ٦ + -١٥ + ء = ٥ \Leftarrow$ $\boxed{ء = ١٥}$

∴ $\boxed{هـ(س) = -س^{٣} + ٦ س^{٢} - ١٥ س + ١٥}$

---

**السؤال السابع :** اذا كان للاقتران ق(س) = $س^{٤} - ٤ س^{٣} + ك(س)$ نقطة انعطاف أفقي هي (٢،١) ، وكان ع(س) = $ك^{٢}$(س) ، احسب ع´´(١)

الحل

ع(س) = $ك^{٢}$(س)

ع´(س) = ٢ك(س) ك´(س)

ع´´(س) = ٢ك(س) ك´´(س) + ٢(ك´(س))$^{٢}$ .....(١)

بالتعويض عن س = ١ في معادلة (١) ينتج : ع´´(١) = ٢ك(١) ك´´(١) + ٢(ك´(١))$^{٢}$ .....(٢)

النقطة (٢،١) تقع على منحنى ق(س) = $س^{٤} - ٤ س^{٣} + ك(س)$

هـ(١)=٢ $\Leftarrow$ ١ − ٤ + ك(١) = ٢ $\Leftarrow$ $\boxed{ك(١) = ٥}$

النقطة (٢،١) نقطة انعطاف افقي لمنحنى ق(س) $\Leftarrow$ هـ´(١)=٠

$\Leftarrow$ ٤ − ١٢ + ك´(١) = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{ك´(١) = ٨}$

النقطة (٢،١) نقطة انعطاف لمنحنى ق(س) $\Leftarrow$ هـ´´(١)=٠ ، ق´´(س) = ١٢ $س^{٢}$ − ٢٤ س + ك´´(س)

$\Leftarrow$ ٠ = ١٢ − ٢٤ + ك´´(١) $\Leftarrow$ $\boxed{ك´´(١) = ١٢}$

بالتعويض في معادلة ٢ عن قيم ك(١) و ك´(١) و ك´´(١)

$ع''(١) = ٢ك(١)\ ك''(١) + ٢(ك'(١))^{٢}$

$ع''(١) = ٢ \times ٥ \times ١٢ + ٢(٨)^{٢} = ١٢٠ + ٢ \times ٦٤ = \boxed{٢٤٨}$

**السؤال الثامن :** اذا كان ق (س) اقترانا متصلا في الفترة $[-٣، ٢]$ ويحقق الشروط الاتية :

$ن(٠) = ن(١) = ن'(١) = ن'(-٢) = ٠$ ، $ن''(س) > ٠$ عندما $س < ٠$ ، $ن''(س) < ٠$ ، عندما $س > ٠$

اعتمد على هذه المعلومات للإجابة عن الأسئلة التالية :

أ) ما قيمة / قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيما قصوى ؟ وما نوع كل منها ؟

ب) ما قيمة / قيم س التي يكون للاقتران ق(س) عندها نقط انعطاف ؟

ج) حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق(س) ؟

الحل

$هـ'(١) = ٠$ ، $هـ'(-٢) = ٠ \Leftarrow$ $(١، هـ(١))$ ، $(-٢، هـ(-٢))$ نقاط حرجة

**فرع أ** : حسب اختبار المشتقة الثانية فإن

عندما $س < ٠$ أي $١ < ٠$ فإن $هـ''(س) < ٠$ أي:

$هـ''(١) < ٠ \Leftarrow$ $(١، هـ(١))$ قيمة صغرى محلية

عندما $س > ٠$ أي $-٢ < ٠$ فإن $هـ''(س) < ٠$ أي:

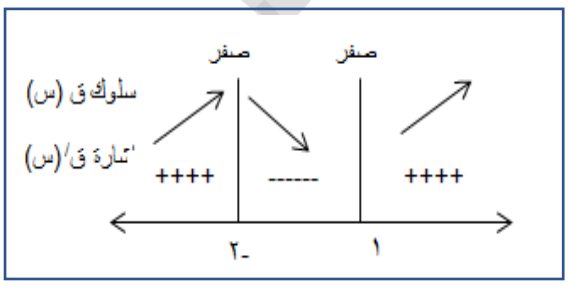
$هـ''(-٢) < ٠ \Leftarrow$ $(-٢، هـ(-٢))$ قيمة عظمى محلية

**فرع ب :** نقطة انعطاف وهي ( ٠ ، ٠ )

لأن $هـ(س)$ متصل ، وعندها يغير من مجال التقعر .

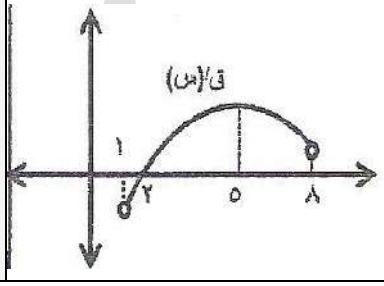
**فرع جـ :** ق(س) متزايد في الفترات $[١، \infty[$ ، $]-\infty، -٢]$

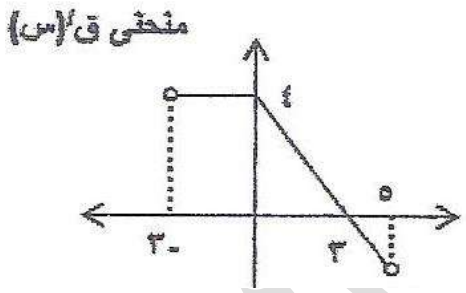
ق(س) متناقص في الفترة $[-٢، ١]$

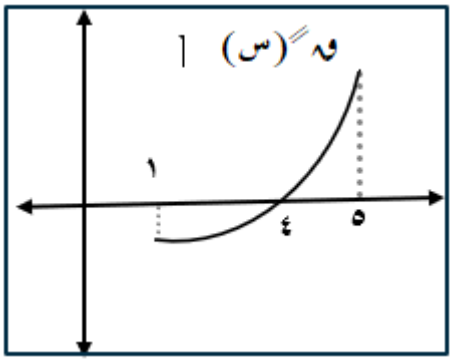


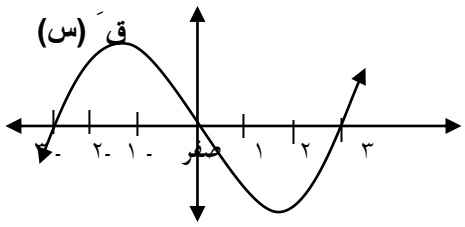
**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

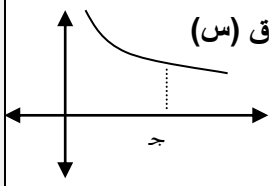
# التقعر ونقط الانعطاف

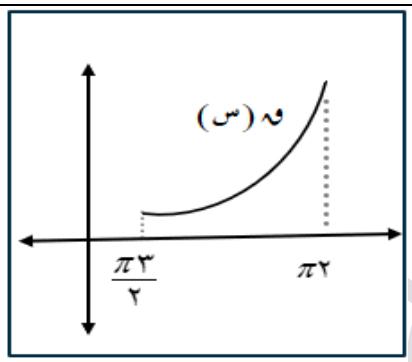
| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى واحدة وكان قَ(١)= صفر ، قً(١)= ـ ٣ ، ق يمر بالنقطة ( ١ ، ـ ٢) فإن تلك القيمة العظمى هي :<br>أ) ـ ٣ ب ) ـ ٢ جـ) صفر د) ١ | ب |
| ٢ | إذا كان للاقتران ق (س) = أ س$^{٢}$ + س$^{٣}$ نقطة انعطاف عندما س = ـ ١ فإن قيمة الثابت أ تساوي<br>أ) ـ ٢ ب) ـ ٣ ج) ٢ د) ٣ | د |
| ٣ | إذا كان ق (س) متصلاً على [ ١ ، ٣ ] وكان قً ( س ) < صفر لجميع قيم س ∋ ] ١ ، ٣ [ ، ق (س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [ ١ ، ٣ ] ، وكان قَ ( ٢ ) = صفر فإن :<br>أ) ق ( ٢،٥ ) > صفر ب) ق (٢،٥) > ق(٢)<br>ج) ق (٢،٥) = ق(٢) د) ق ( ٢،٥ ) < ق (٢) | د |
| ٤ | إذا كان لمنحنى الاقتران ق (س) = س$^{٣}$ + م س$^{٢}$ ـ ٩س نقطة انعطاف عند س = ـ ١ فإن قيمة الثابت م تساوي :<br>أ) ٣ ب) ٦ ج) ـ ٣ د) ـ ٤ | أ |
| ٥ | إذا كان ق (س) = ١ س + جتاس معرفاً على [ ٠ ، π ] فإن منحنى ق(س) يكون مقعراً للأسفل في أ) [٠ ، π ] ب) [ ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ ] ج) [ $\frac{\pi}{٢}$ ، π ] د) [ ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ] | د |
| ٦ | ادا كان ق(س) = جتا$^{٢}$ س معرفا على [ ٠، $\frac{\pi}{٢}$ ] فان قيمة س التى يكون عندها نقط انعطاف س =<br>أ) $\frac{\pi}{٣}$ ب) $\frac{\pi}{٤}$ ج) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\frac{\pi}{٦}$ | ب |
| ٧ | الشكل المجاور هو قَ(س) تم نقطة الانعطاف لمنحنى ق(س) هى:<br>أ) (١ ، ق(١))<br>ب) ( ٥، ق(٥))<br>ج) (٢ ، ق(٢))<br>د) لايوجد له نقطة انعطاف<br>  | ب |

| | | |
|---|---|---|
| ٨ | اذا كان هـ(س) = س\|س\| ، فان العبارة الصحيحة فيما يلي هي :<br>أ) (٠،هـ(٠)) نقطة انعطاف ب) هـ(٠) قيمة عظمي محلية<br>ج) هـ(٠) قيمة عظمي محلية د) هـ`(٠) غير موجودة | أ |
| ٩ | اذا كانت النقطتان (٠،هـ(٠))، $\left(\frac{١}{٢}، هـ\left(\frac{١}{٢}\right)\right)$ هما نقطتا انعطاف لمنحنى ق(س)، وكانت هـ`(س) = ٤س$^{٣}$ − ك س$^{٢}$ ، فأن قيم الثابت ك هي :<br>أ)-٣ ب)٢ ج)٣ د)٦ | ج |
| ١٠ | الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) على الفترة [-٣ ،٥ ] فان ق(س) يكون :<br>أ) مقعر للاسفل [ ٠ ،٥ ]<br>ب) مفعرا للأسفل [-٣ ،٣ ]<br>ج) متناقصا [ ٠ ،٥ ]<br>د) متناقصا [ ٠ ،٣ ]<br>  | أ |
| ١١ | ادا كان ق(س) كثير حدود ، وكانت زاوية ميل المماس لمنحنى قَ(س) عند أي نقطة عليه في الفترة ] ٢ ، ٥[ هى زاوية منفرجة ، فان العبارة الصحيحة هى:<br>أ) ق(س) متناقص في الفترة [ ٢ ، ٥]<br>ب) ق(س) متزايد في الفترة [ ٢ ، ٥]<br>ج) ق(س) مقعر للأعلي في الفترة [ ٢ ، ٥]<br>د) ق(س) مقعر للأسفل في الفترة [ ٢ ، ٥] | د |
| ١٢ | ادا كان ق(س) اقترانا متصلا على الفترة [ ١ ، ٣] ، قً(س)<صفر ،<br>∀س ∈ ] ١ ، ٣[ ، قَ(٢) =صفر، فان العبارة الصحيحة فيما يلى :<br>أ) ق(٢) صغرى محلية ب) (٢، ق(٢)) نقطة انعطاف<br>ج) ق(٢) عظمى محلية د) ق(س) متزايد على الفترة [ ٢ ، ٣] | ج |

| | | |
|---|---|---|
| ١٣ | الشكل المجاور يمثل منحنى هـ″(س) ، حيث هـ(س) كثير حدود ، هـ′(٣) = ٠، فأن العبارة الصحيحة :<br>أ) هـ(٣) قيمة صغري محلية<br>ب) هـ(س) مقعر للاعلى في [١،٥]<br>ج) هـ(س) مقعر للاعلى في [٤،٥]<br>د) هـ′(س) متناقص في [٤،٥]<br>  | ج |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | حدد فترات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق (س) = ٤س$^{٣}$ ـ ٣س + ٢<br>ثم أوجد نقطة الانعطاف ( إن وجدت) . | مقعر لأعلى على ] ٠، ∞ [<br>مقعر لأسفل على ] ـ∞ ، ٠ [<br>نقطة الانعطاف ( ٠ ، ٢ ) |
| ٢ | جد مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق (س) = ٣ جا س جتا س في [ ٠ ، π ] | مقعر لأسفل [ ٠، $\frac{\pi}{٢}$ ]<br>ولأعلى [ $\frac{\pi}{٢}$ ، π ] |
| ٣ | إذا كان ق(س) معرفاً على ح ، قَ ( س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٩}$ جد مجالات التقعر للأعلى للاقتران ق (س) . | [ ـ ٣ ، ٣ ] |
| ٤ | للاقتران ق(س) = ٢س$^{٣}$ ـ ٢٤ س ، س ∈ ح ، جد :<br>١. مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى<br>٢. مجالات التقعر للأعلى وللأسفل | متزايد عندما س < ـ ٢ ، س > ٢<br>متناقص [ ـ ٢ ، ٢ ]<br>مقعر لأعلى س > ٠<br>مقعر لأسفل س < ٠ |
| ٥ | معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران قَ (س)<br>جد : ١) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران ق (س) .<br>٢) الإحداثيات السينية لنقاط الانعطاف .<br>  | ق مقعر للأعلى في ] ـ∞ ، ـ ٢ [ ∪ ] ٢ ، ∞ [<br>ق مقعر للأسفل في [ ـ ٢ ، ٢ ]<br>للاقتران نقاط انعطاف عندما س= ٢ ،س = ـ ٢ |

| | | |
|---|---|---|
| ٦ | إذا كان ق َ ( س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$<br>جد : ١- مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)<br>٢- مجالات التقعر للأعلى وللاسفل للاقتران ق (س)<br>٣- الإحداثيات السينية لنقط الانعطاف . | ١) متزايد ] ٠ ، ∞[<br>متناقص ] - ∞ ، ٠ [<br>٢) للأعلى [ - ١ ، ١ ]<br>للاسفل ] - ∞ ، - ١ [ ∪ ]<br>١، ∞ [<br>٣) س = ± ١ |
| ٧ | الشكل المجاور يمثل جزءاً من منحنى الاقتران<br>كثير الحدود ق(س)<br>فإذا كان م (س) = ق(س) × ق َ (س) ،<br>بين أن م َ (جـ) > صفر<br>  <br> | |
| ٨ | إذا كان ق (س) = (س +٢ )(س – ١)$^{٢}$، معرفا على الفترة [ - ٢، ٥ ] أوجد :<br>١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)<br>٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق (س)<br>٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق (س) | ١) متزايد [ - ٢ ، -١ ] ∪ [ ١ ، ٥ ]<br>متناقص [ -١ ، ١ ]<br>٢)عظمى ق(-١) = ٤،<br>ق(٥) = ١١٢<br>صغرى ق(-٢) = ٠ ،<br>ق(١) = ٠<br>٣) لأعلى [ ٠ ، ٥ ]<br>لأسفل [ - ٢ ، ٠ ] |
| ٩ | ليكن ق (س) = س - ٢جتاس معرفاً على [ ٠ ، $\frac{\pi ٢}{٣}$ ] فأوجد :<br>١) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق (س)<br>٢) القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق (س)<br>٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل للاقتران ق (س) | ١) متزايد [ ٠ ، $\frac{\pi ٢}{٣}$ ]<br>٢)عظمى ق(-١) = ٧ ،ق (٢) = ١٦<br>صغرى محلية ق (١) = - ١<br>٣) لأعلى ] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ] ،<br>لأسفل [ $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi ٢}{٣}$ ] |

| | | |
|---|---|---|
| ١٠ | اذا كان ق(س) = ٦س$^{٢}$ − ٢س$^{٣}$ معرفا على [−٠٫٢، ٣٫٢] ، أ،جد :<br>١)مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)<br>٢)القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)<br>٣) مجالات التقعر للاعلى و للاسفل للاقتران ق(س)<br>٤) نقطة الانعطاف للاقتران ق(س) | ١)متناقص على [−٠٫٢]<br>وعلى [٣٫٢]ومتزايد على<br>[٢٫٠]<br>٢)ق(-٢)=٤٠عظمى محليه<br>مطلقه<br>ق(٠)=٠ صغرى مطلقه<br>ق(٢)=٨ عظمى محليه<br>ق(٣)=٠ صغرى محليه<br>ومطلقة .<br>٣) ق(س) مقعر للاعلى<br>على[−٠٫٢، ١٫٢]ومقعر<br>للاسفل على[١٫٢]<br>٤) (١٫٩هـ(١)) = (١٫٤) |
| ١١ | الشكل المقابل يمثل منحنى ق(س) في الفترة $\left[\frac{\pi ٣}{٢}، \pi ٢٫٠\right]$ اثبت ان الاقتران هـ(س) مقعر للاعلى في تلك الفترة علما بأن هـ`(س) = هـ`(س).جتاس<br>  | |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| | | |
|---|---|---|
| ١ | اذا كانت س=١ هي نقطة الانعطاف الافقي لمنحنى الاقتران<br>ق(س) = ا س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + ٣س − ١ ، جد قيم الثابتين ا،ب ؟ | ١، -٣ |
| ٢ | اذا كان ص = (س) اقتران معرف على ع − {١}،وه ،وه″ معرفتين على مجاله وكان منحنى الاقتران متزايد في هذا المجال وكانت س ص′ = ص″ − ٣ص جد مجالات التقعر للاعلى وللاسفل لمنحنى الاقتران ق(س). | ق مقعر للاعلى على ]−∞،١[<br>ق مقعر للاسفل على ]١،∞[ |
| ٣ | اذا كان لمنحنى الاقتران ص = س$^{٣}$ − $\frac{٢}{٣}$ س$^{٢}$ + ا س (ا ثابت) نقطة انعطاف افقي ، فجد<br>١) مجالات التقعر للاعلى وللاسفل لمنحنى الاقتران ق(س).<br>٢) قيمة الثابت ا ؟<br>٣) احداثيات نقطة الانعطاف الافقي . | ق مقعر للاعلى على ]$\frac{٢}{٩}$،∞[<br>ق مقعر للاسفل على ]−∞،$\frac{٢}{٩}$[<br>ا = $\frac{٤}{٢٧}$<br>٣) ($\frac{٨}{٧٢٩}$،$\frac{٢}{٩}$) |
| ٤ | الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)في [$\frac{\pi ٣}{٢}$،$\pi ٢$] ، اثبت ان هـ(س) مقعر للاعلى في تلك الفترة علما هـ′(س) = ق(س) جتاس | |

## الدرس الخامس تطبيقات عملية على القيم القصوى

### القسم الأول : الملخص

ان من تطبيقات القيم القصوى ايجاد أكبر مساحة أو محيط أو حجم و بالعكس الأصغر حيث نستخدم اختبار المشتقة الثانية و في حال فشل اختبار المشتقة الثانية أو لصعوبة الاقتران نستخدم اختبار المشتقة الأولى .

ويجب على الطالب أن يكون على دراية بهذه القوانين .

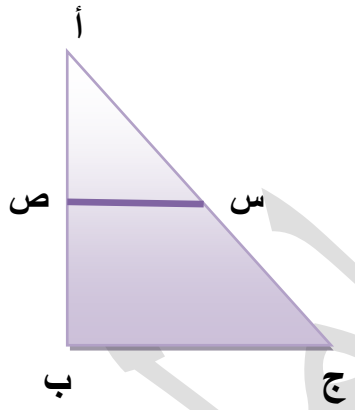
| الشكل | الأبعاد | المحيط | المساحة |
|---|---|---|---|
| المثلث | - | مجموع أطوال أضلاعه | $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع<br>$= \frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب أي ضلعين $\times$ جيب الزاوية المحصورة |
| المربع | ل : طول الضلع | ٤ل | $= ل^2$<br>او $= \frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب القطرين |
| المستطيل | س: الطول<br>ص : العرض | ٢(س+ص) | الطول $\times$ العرض |
| شبه المنحرف المتساوي الساقين | - | مجموع أطوال أضلاعه | المساحة $= \frac{1}{2} \times$ ( مجموع القاعدتين )$\times$ الارتفاع |
| المعين | ل:طول الضلع<br>ع : الارتفاع | ٤ل | $=$ القاعدة $\times$ الارتفاع<br>$= ل^2 \times$ جيب إحدى زواياه<br>$= \frac{1}{2} \times$ حاصل ضرب القطرين |
| الدائرة | نق : نصف القطر | ٢ $\pi$ نق | $\pi$ نق$^2$ |

| الشكل | الأبعاد | المساحة | الحجم |
|---|---|---|---|
| الاسطوانة | ع : الارتفاع<br>نق : نصف القطر | المساحة الجانبية= ٢ π نق ع<br>المساحة الكلية =٢ π نق ع + ٢ π نق$^{٢}$ | π نق$^{٢}$ع |
| الكرة | نق : نصف القطر | ٤ π نق$^{٢}$ | $\frac{٤}{٣}$ π نق$^{٣}$ |
| المخروط القائم | ر : طول الراسم<br>ع : الارتفاع<br>نق : نصف القطر | المساحة الجانبية= π نق<br>الكلية = π نق ل + π نق$^{٢}$ | $\frac{١}{٣}$ π نق$^{٢}$ع |
| متوازي المستطيلات | س: الطول<br>ص : العرض<br>ع : الارتفاع | ٢(س ص + ص ع + س ع) | س ص ع |

❖ **قانون المسافة بين نقطتين** ( س$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ) ، ( س$_{١}$ ، ص$_{٢}$ )

$$ف = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

❖ **تشابه المثلثات :** -




$$\frac{أ ب}{أ س} = \frac{ب ج}{س ص} = \frac{أ ج}{أ ص}$$

" و سيجعل لهم الرحمن ودا "

ما اقبل عبد بقلبه الى الله ، الا اقبل الله بقلوب المؤمنين اليه حتى يرزقه مودتهم وحبهم

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول** يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل من أرضه ، وذلك بإحاطتها بسياج ، فاذا كان لديه ٨٠ مترا من الأسلاك ، فما مساحة أكبر حديقة يمكن للرجل إحاطتها ؟

الحل

طول السياج = محيط الحديقة = ٨٠ متر

بفرض طول المستطيل = س ، عرض المستطيل = ص

يكون محيط المستطيل = ٢س+٢ص

٢س +٢ص = ٨٠ ومنها س + ص = ٤٠ أو ص=٤٠− س

**مساحة المستطيل = الطول × العرض**

م= س ×ص = س× (٤٠− س) = ٤٠س − س$^{٢}$ ، بالاشتقاق بالنسبة ل س

$\frac{ده}{دس} = ٤٠ - ٢س$ ، بوضع $\frac{ده}{دس} = ٠ \Leftarrow ٤٠ - ٢س = ٠ \Leftarrow ٢س = ٤٠ \Leftarrow$ س = ٢٠

**باستخدام اختبار المشتقة الثانية :**

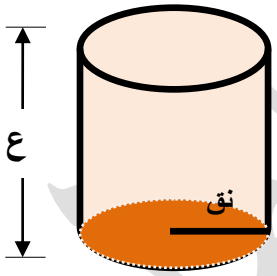
م$''$(٢٠) = −٢ < ٠ ، ∴ عند س = ٢٠ قيمة عظمى محلية ، وعندها تكون المساحة أكبر ما يمكن .

∴ مساحة القطعة = م = ٤٠س− س$^{٢}$ =٤٠×٢٠−(٤٠٠) = ٤٠٠ متر مربع

---

**السؤال الثاني:** مقلمة على شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ $\pi$ سم$^{٣}$ فاذا علمت أن سعر كل ١سم$^{٢}$ من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة ، يعادل ثلاثة أمثال سعر ١ سم$^{٢}$ من البلاستيك المستخدم في صناعة الجوانب ، جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة .

الحل




السعة = الحجم = ١٩٢ $\pi$ سم$^{٣}$

تكلفة ١ سم$^{٢}$ من القاعدة = ٣ × تكلفة ١ سم$^{٢}$ من الجوانب

بفرض وحدة التكلفة لكل ١سم$^{٢}$ من الجوانب = أ

فتكون التكلفة لكل ١سم$^{٢}$ من القاعدة = ٣أ

**التكلفة الكلية (ك ) = تكلفة الجوانب + تكلفة القاعدة**

ك = أ × ٢$\pi$نوه ع + ٣أ × $\pi$نوه$^{٢}$ حيث نق : نصف قطر الاسطوانة ... و ع : ارتفاع

**الاسطوانة**

لكن الحجم = ح = $\pi$نوه$^{٢}$ ع $\Leftarrow$ ١٩٢ $\pi$ = $\pi$نوه$^{٢}$ ع $\Leftarrow$ ع = $\frac{\pi ١٩٢}{\pi نوه^{٢}} = \frac{١٩٢}{نوه^{٢}}$

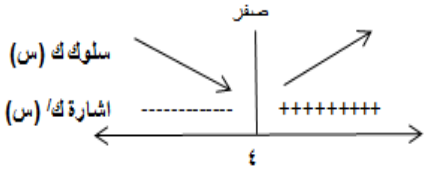
$\Leftarrow$ ك = ٢أ$\pi$نوه × $\frac{١٩٢}{نوه^{٢}}$ + ٣أ$\pi$نوه$^{٢}$ = $\frac{\pi ٣٨٤أ}{نوه}$ + ٣أ$\pi$نوه$^{٢}$

ك = $\frac{-\pi 1384}{نو^{2}} + \pi 16 نو$ ، ك = ٠ ← $\frac{-\pi 1384}{نو^{2}} + \pi 16 نو = ٠$

$\Leftarrow \pi 16 نو = \frac{\pi 1384}{نو^{2}}$

$\Leftarrow \pi 1384 = \pi 16 نو^{3}$

$\Leftarrow نو^{3} = 64 \Leftarrow نو = ٤$




**باستخدام اختبار المشتقة الأولى** ومن ملاحظة اشارة ك/ (س) :-

يكون عند س = ٤ قيمة صغرى مطلقة

ع = $\frac{192}{٤^{2}} = \frac{192}{16}$ = ١٢ سم ← أبعاد المقلمة ذات الاقل تكلفة ( نق = ٤ سم ، ع = ١٢ سم )

---

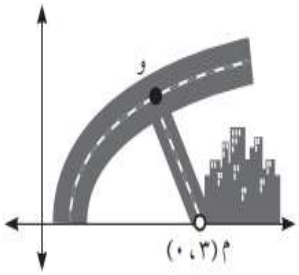
**السؤال الثالث :** طريق منحنى معادلته في المستوى الديكارتي هي ص = ق(س) = $\sqrt{2س - 1}$ ، النقطة م (٣،٠)

تمثل موقع مستشفى ، يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة ( و ) الى موقع المستشفى ( م ) ، عين احداثيات النقطة ( و ) ليكون طول الشارع ( و م) أقل ما يمكن .

( انظر الشكل المجاور)

الحل

طول و م = $\sqrt{(س_{2} - س_{1})^{2} + (ص_{2} - ص_{1})^{2}}$ قانون المسافة بين نقطتين



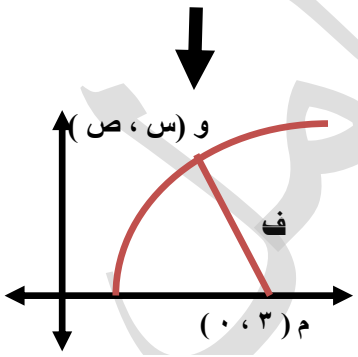

ف = $\sqrt{(س - ٣)^{2} + (ص - ٠)^{2}}$

= $\sqrt{س^{2} + 6س + 9 + ص^{2}}$ ..... (١)

لكن ص = $\sqrt{2س - 1}$ ← $ص^{2} = 2س - 1$ بالتعويض بقيمة $ص^{2}$ في (١)

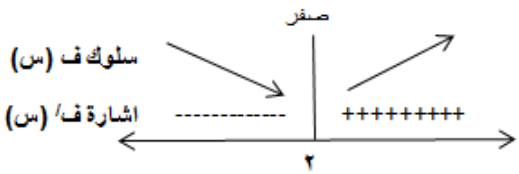
**بالاشتقاق بالنسبة ل س :**

← ف = $\sqrt{س^{2} - 6س + 9 + 2س - 1}$ ← ف = $\sqrt{س^{2} + 4س + 8}$




بوضع $\frac{ك ف}{ك س} = \frac{2س - 4}{2\sqrt{س^{2} + 4س + 8}}$

$\frac{ك ف}{ك س} = ٠$ ← $\frac{2س - 4}{2\sqrt{س^{2} + 4س + 8}} = ٠$ ← 2س − ٤ = ٠ ← س = ٢




**باستخدام اختبار المشتقة الأولى ومن ملاحظة اشارة ف/ (س) :-**

يكون عند س = ٢ قيمة صغرى مطلقة

ص = $\sqrt{2س - 1}$ = $\sqrt{2 \times 2 - 1}$ = $\sqrt{3}$

فتكون احداثيات و هي (٢، $\sqrt{٣}$)

**السؤال الرابع:** **جسم يسير في خط مستقيم بحيث أن أبعاده ف بالأمتار بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة**

**ف = أ جتا $\frac{\pi}{٤}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{٤}$ ن فاذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠،٢] هي ١٠ م / ث ، وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث . احسب الثابتين أ ، ب .**

الحل

$$ف = أ جتا\left(\frac{\pi}{٤} ن\right) + ب جا\left(\frac{\pi}{٤} ن\right)$$

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \text{السرعة المتوسطة} = \frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠} = ١٠$$

$$\frac{\left(أ جتا\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ب جا\left(\frac{\pi}{٢}\right)\right) - \left(أ جتا\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ب جا\left(\frac{\pi}{٢}\right)\right)}{٢} = \frac{(أ \times ٠ + ب \times ١) - (أ \times ١ + ٠)}{٢} = ١٠$$

$$٢٠ = ب - أ \Leftarrow \boxed{ب = أ + ٢٠} \quad .....(١)$$

**بما أن سرعة الجسم أقل ما يمكن عند ن = ١ ث ، تكون ع ′(١)=٠ ، لذا نجد مشتقة السرعة كالتالي**

$$ع = ف' = -\frac{\pi}{٤} أ جا\left(\frac{\pi}{٤} ن\right) + \frac{\pi}{٤} ب جتا\left(\frac{\pi}{٤} ن\right)$$

$$ع' = -\frac{\pi^{٢}}{١٦} أ جتا\left(\frac{\pi}{٤} ن\right) - \frac{\pi^{٢}}{١٦} ب جا\left(\frac{\pi}{٤} ن\right)$$

من معلومية أن ع ′(١)=٠

$$\Leftarrow -\frac{\pi^{٢}}{١٦} أ جتا\left(\frac{\pi}{٤}\right) - \frac{\pi^{٢}}{١٦} ب جا\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٠$$ ، بضرب الطرفين في $-\frac{١٦}{\pi^{٢}}$ ثم التعويض عن قيمة النسب المثلثية ينتج :

$$أ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ب \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$$ ، بضرب الطرفين في $\sqrt{٢}$ ينتج: $أ + ب = ٠ \Leftarrow \boxed{أ = -ب}$

بالتعويض في (١) عن قيمة أ : $-ب = ب + ٢٠ \leftarrow ٢ب = ٢٠ \Leftarrow \boxed{ب = ١٠}$ ومنها $\boxed{أ = -١٠}$

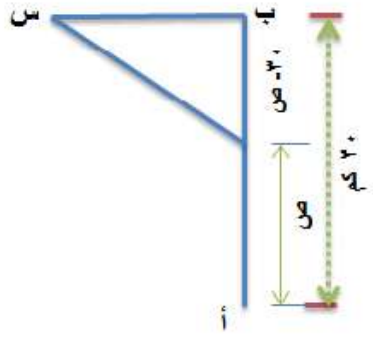
**السؤال الخامس:** في الساعة الثانية عشرة ظهرا كانت الباخرة ( ب) على بعد ٣٠ كم شمال الباخرة أ وتسير غربا بسرعة ١٠ كم / الساعة ، فاذا كانت أ تسير شمالا بسرعة ٢٠ كم في الساعة ، فمتى تكون المسافة بين الباخرتين أقل ما يمكن ؟

الحل

المسافة التي تسيرها الباخرة "ب" = س = ١٠ن $\Leftarrow$ $\boxed{\text{س} = ١٠\text{ن}}$ ، " المسافة = السرعة × الزمن"

المسافة التي تسيرها الباخرة "أ" = ص = ٢٠ن $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ص} = ٢٠\text{ن}}$ ، " المسافة = السرعة × الزمن"

**من نظرية فيثاغورس :**




$ف^{٢} = س^{٢} + (٣٠ - ص)^{٢}$

$ف^{٢} = (١٠ن)^{٢} + (٣٠ - ٢٠ن)^{٢}$

$ف^{٢} = ١٠٠ن^{٢} + ٩٠٠ - ١٢٠٠ن + ٤٠٠ن^{٢}$

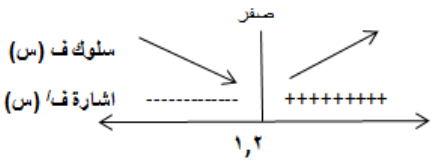
$ف^{٢} = ٥٠٠ن^{٢} - ١٢٠٠ن + ٩٠٠$

$٢ف ف' = ١٠٠٠ن - ١٢٠٠$

$ف' = ٠ \Leftarrow ١٠٠٠ن - ١٢٠٠ = ٠ \Leftarrow ن = \frac{١٢٠٠}{١٠٠٠} = ١,٢$ س

**باستخدام اختبار المشتقة الأولى ،**

ومن ملاحظة إشارة $ف'(س)$ في الشكل المجاور

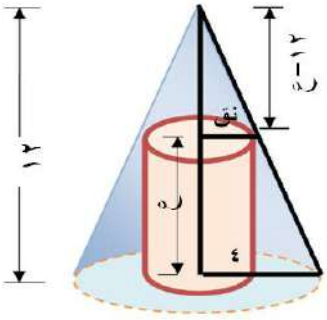



عند $\boxed{ن = ١,٢}$ توجد قيمة صغرى محلية

، اذن بعد ١,٢ ساعة تكون السفينتان أقرب ما يمكن

---

**السؤال السادس:** جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٢ سم ونصف قطر قاعدته ٤ سم .




الحل

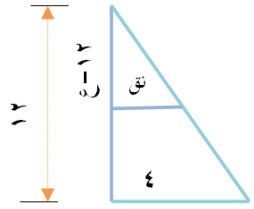
حجم الاسطوانة = ع = $نو^{٢}\pi ع$ ، من تشابه المثلثات نحصل على :

$\frac{١٢ - ع}{١٢} = \frac{نو}{٤} \Leftarrow \frac{نو}{١} = \frac{١٢ - ع}{٣}$

$\Leftarrow ١٢ - ع = ٣نو \Leftarrow \boxed{ع = ١٢ - ٣نو}$

**بالتعويض عن قيمة ع في ح :** $ح = \pi نو^{٢}(١٢ - ٣نو)$

$\Leftarrow \boxed{ح = ١٢\pi نو^{٢} - ٣\pi نو^{٣}}$ .....(١)




**بالاشتقاق بالنسبة ل نق :** $ح' = ٢٤\pi نو - ٩\pi نو^{٢}$

، بوضع $ح' = ٠ \Leftarrow ٢٤\pi نو - ٩\pi نو^{٢} = ٠ \Leftarrow ٣\pi نو(٨ - ٣نو) = ٠$

بحل المعادلة :

اما $٨ - ٣نو = ٠ \Leftarrow \boxed{نو = \frac{٨}{٣}}$ أو $٣\pi نو \Leftarrow \boxed{نو = ٠}$ مرفوض

**باستخدام اختبار المشتقة الثانية :**

$$ع'' = ٤\pi٢ - ٨\pi١ \text{ نق}$$

$$ع''\left(\frac{٨}{٣}\right) = ٤\pi٢ - \frac{٨}{٣} \times ٨\pi١ = -٤\pi٢ < ٠$$

اذن عند $\boxed{\text{نق} = \frac{٨}{٣}}$ قيمة عظمى ( وعندها يكون حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن) بالتعويض في (١) :

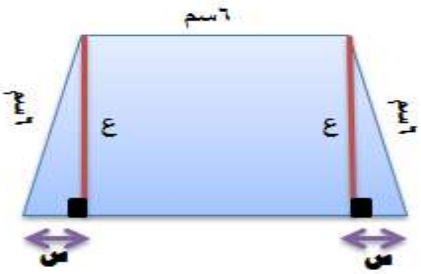
$$\therefore ع = \pi \text{ نق}^{٢}(١٢ - ٣\text{ نق}) = \left(\frac{٨}{٣}\right)\pi\left(١٢ - ٣ \times \frac{٨}{٣}\right)^{٢} = \pi\frac{٦٤}{٩} \times ٤ = \pi\frac{٢٥٦}{٩} \text{ سم}^{٣} .$$

---

**السؤال السابع:** **شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم ، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف .**

الحل

**مساحة شبه المنحرف (م)= نصف مجموع القاعدتين × الارتفاع**




$$م = \frac{١}{٢} \times (٦ + ٢س + ٦) \times ع$$

$$= \frac{١}{٢} \times (١٢ + ٢س) \times ع$$

$$= \boxed{(٦ + س) \times ع}$$

**لكن من فيثاغورس :** $ع^{٢} = ٣٦ - س^{٢} \leftarrow ع = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

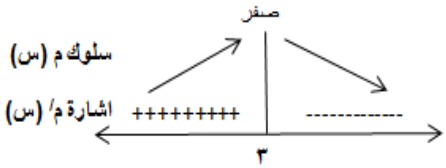
**بالتعويض عن "ع " في "م"**

**∴ م =** $(٦ + س) \times \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ **، بالاشتقاق بالنسبة ل س :**

$$م' = (س + ٦) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} + \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$$

$$= \frac{-٢١س - س^{٢}}{٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} + \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$$

$$= \frac{-٢١س - س^{٢} + ٣٦ - س^{٢}}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$$




بوضع $م' = ٠ \Leftarrow -٢س^{٢} - ٢١س + ٣٦ = ٠$

$$\Leftarrow س^{٢} + ٦س - ١٨ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ٦) = ٠$$

اما $(س - ٣) = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $(س + ٦) = ٠ \leftarrow \boxed{س = -٦}$ " مرفوض"

**باستخدام اختبار المشتقة الأولى** ، ومن ملاحظة إشارة $ن'(س)$ في الشكل المجاور :

يكون عند س=٣ قيمة عظمى ، ومنها :

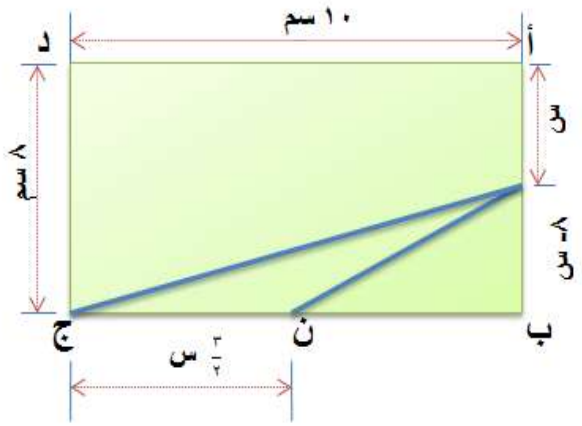
**مساحة شبه المنحرف( م)** = $(٦ + س) \times \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$م(٣) = (٦ + ٣) \times \sqrt{٣٦ - ٩} = ٢٧\sqrt{٣}$ سم مربع

---

**السؤال الثامن:** أ ب ج د مستطيل عرضه أ ب = ٨ سم وطوله ب ج = ١٠ سم ، م نقطة على الضلع أ ب بحيث أ م = س سم ، ن نقطة على الضلع ب ج بحيث ن ج = $\frac{٣}{٢}$ س سم ، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن ج أكبر ما يمكن .

الحل




**المعطيات** : أب = ٨ ، أم = س ، ب م = ٨ − س

**مساحة المثلث م ن جـ (م) = نصف القاعدة ×الارتفاع**

$م = \frac{١}{٢} \times ن ج \times ب م$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} س \times (٨ - س)$

$= ٦س - \frac{٣}{٤} س^{٢}$

، **بالاشتقاق ينتج** $م' = ٦ - \frac{٣}{٢} س$

$م' = ٠ \Leftarrow ٦ - \frac{٣}{٢} س = ٠$

بوضع $\Leftarrow ٦ = \frac{٣}{٢} س \Leftarrow ١٢ = ٣س$

$\Leftarrow$ **س = ٤**

**باستخدام اختبار المشتقة الثانية** : $م'' = -\frac{٣}{٢} \leftarrow م''(٤) = -\frac{٣}{٢} < ٠$

اذن عند س = ٤ قيمة عظمى ، اذن عند س = ٤ تكون مساحة المثلث م ن ج أكبر ما يمكن

**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

## أسئلة تطبيقات عملية على القيم القصوى

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم | ٢٠٠ |
| ٢ | مثلث متساوي الساقين محيطه ١٨ سم ، أوجد أطوال أضلاعه عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن | ٦ ، ٦ ، ٦ |
| ٣ | جد أقصر مسافة بين النقطة ( ٠ ، ٦ ) ومنحنى الاقتران س$^{٢}$ ـ ص$^{٢}$ = ١٦ | $\sqrt{٣٤}$ |
| ٤ | سلك طوله ١٢ سم ثني ليكون مثلثاً متساوي الساقين ، أوجد أطوال أضلاع هذا المثلث لتكون مساحته أكبر ما يمكن | ٤ ، ٤ ، ٤ |
| ٥ | أوجد أقصر مسافة بين النقطة ( ٢ ، ٠ ) ومنحنى العلاقة ص$^{٢}$ ـ س$^{٢}$ = ٨ | $\sqrt{١٠}$ |
| ٦ | أرض مستطيلة الشكل رؤوسها أ ، ب، ج، د تتكون من حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢٠٠ متر مربع محاطة بأرصفة عرض كل من الرصفين أب ، ج د يساوي ٤ متر ، وعرض كل من الرصفين على الضلعين الاخرين ٢ متر ، أوجد أقل مساحة ممكنة لقطعة الأرض | ٣٨٧٢ م$^{٢}$ |
| ٧ | شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها ٦ سم ، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف | $٢٧\sqrt{٣}$ |
| ٨ | أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ومتساوي الساقين ، وطول أ جـ =١٢ سم ما مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر أ جـ ، ويقع الرأسان الاخران على ضلعي القائمة ؟ | ١٨ سم$^{٢}$ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | أوجد مساحة أكبر مستطيل بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات الموجب ويقع الرأسان الآخران على المستقيمين ص = ٤س ، ص = ٦ − ٥س | $\frac{٤}{٥}$ |
| ٢ | قطاع دائري زاويته المركزية هـ ْ ونصف قطر دائرته ٣ سم حُوِّل إلى مخروط دائري قائم ، جد قيمة هـ التي تجعل حجم المخروط أكبر ما يمكن | $هـ = \frac{\sqrt{٦} \pi ٢}{٣}$ |
| ٣ | قطاع دائري محيطه ( ٢٠ سم ) ، جد نصف قطر دائرته بحيث تكون مساحة القطاع أكبر ما يمكن | نق = ٥ سم |
| ٤ | أ ب جـ مثلث فيه ب جـ = ١٢ سم ، الارتفاع أ م = ١٦ سم ، $\overline{هـ و}$ // $\overline{جـ ب}$ جد طول العمود النازل من د على $\overline{هـ و}$ الذي يجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن | ٨ سم |

# تمارين عامة

**السؤال الأول :** ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات (١٤-١) :

| الفقرة | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الاجابة | جـ | ب | ب | د | د | جـ | أ |
| الفقرة | ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ | ١٢ | ١٣ | ١٤ |
| الاجابة | د | أ | ج | د | جـ | د | ب |

**حلول السؤال الأول:**

١. اذا كان $ن(س) = \begin{cases} س^{٢} - س & ، ٠ \leq س \leq ١ \\ س - ١ & ، ١ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، فما مجموع قيم س التي يكون عندها للاقتران ق(س) نقطة حرجة في الفترة $[٠، ٣]$ ؟

الحل

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ، ٠ < س < ١ \\ ١ & ، ١ < س < ٣ \end{cases}$$

بوضع $ن'(س) = ٠ \Leftarrow ٢س - ١ = ٠ \Leftarrow س = \frac{١}{٢} \in ]٠، ١[$

النقاط الحرجة هي : $(٠، ن(٠))$ ، $(٣، ن(٣))$ ، $\left(\frac{١}{٢}، ن\left(\frac{١}{٢}\right)\right)$

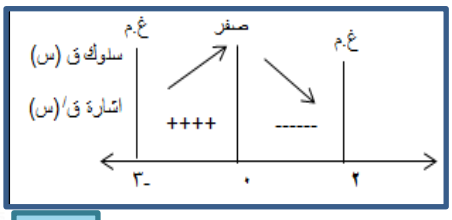
ج

٢. ليكن $ن(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٢، ٢]$ ، فما قيمة س التي يكون للاقتران ق(س) عندها قيمة عظمى مطلقة ؟

الحل

$$هـ'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}} = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}} ، س \in ]-٢، ٢[$$

بوضع $هـ'(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$




$$ن'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}} ، س \in ]-٢، ٢[$$

$ن'(س) = ٠ \Leftarrow -٢س = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٠}$

ب

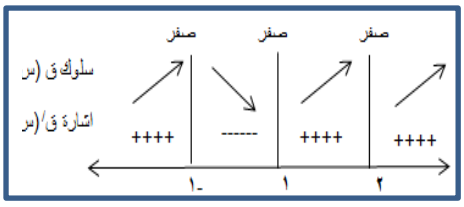
عند س = ٠ قيمة عظمى مطلقة اذن عند ق(٠) هي اكبر قيمة للاقتران

٣. اذا كان $ن'(س) = (س^{٢} - ١)^{٣}(س - ٢)^{٤}$

فما الفترة التي يكون فيها ق(س) متناقصا ؟

الحل

$ن'(س) = (س^{٢} - ١)^{٣}(س - ٢)^{٤}$




$ن'(س) = ٠ \leftarrow (س^{٢} - ١)^{٣}(س - ٢)^{٤} = ٠$

$س^{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \pm ١}$

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٢}$

الفترة هي $[-١، ١]$

ب

٤. اذا كان $ن(س) = س^{٣} - ٣س$ معرفا في الفترة $[-٣، ١]$ ،

فما القيمة الصغرى المطلقة للاقتران ق(س)

الحل

$ن(س) = س^{٣} - ٣س \leftarrow ن'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow ٣س^{٢} - ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \pm ١}$

هـ غ . م عند $س = -٣، ١$

قيم س الحرجة هي $\{-٣، -١، ١\}$

$هـ(-٣) = (-٣)^{٣} - ٣(-٣) = -١٨$

$هـ(-١) = (-١)^{٣} - ٣(-١) = ٢$

$هـ(١) = (١)^{٣} - ٣(١) = -٢$

$-١ \exists [-٣، ١] \not\ni ١، [-٣، ١]$

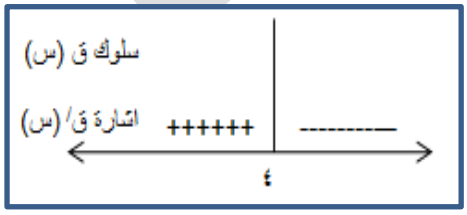
$ن(-٣) = -١٨$

$\Leftarrow ن(-١) = -٢، ن(١) = ٢ \Leftarrow ن(-٣) = -١٨$ قيمة صغرى مطلقة

د

٥. اذا كان ق(س) كثير حدود وكان $ن''(س) > ٠$ عندما س < ٤ ، $ن''(س) < ٠$ ، عندما س > ٤ وكان $ن'(٣) = ٠$ فما العبارة الصحيحة دائما من العبارات الاتية ؟

الحل




هـ $'(٣) = ٠ \Leftarrow س = ٣$ نقطة حرجة

هـ $''(٣) > ٠ \Leftarrow س = ٣$ هي قيمة صغرى محلية هي ق (٣)

د

٦. ما مجموع جميع قيم ج التي يمكن الحصول عليها من تطبيق نظرية رول على الاقتران ق(س) = ٨ في الفترة [٠، ١] ؟

الحل

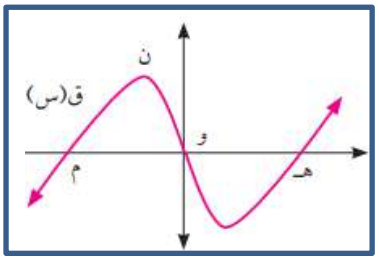
ق(س) = ٨ ، ق(س) متصل على ح ، ق(س) قابل للاشتقاق على ح

⇐ ق يحقق نظرية رول ومنها ق(س) = ٠ ⇐ ق(جـ) = ٠ ⇐ ٠ = ٠ وفي أنظمة حل المعادلات عندما أ = أ فانه يوجد عدد لا نهائي من النقاط أي أن : م.ع الفترة جميعها ( هندسياً : أي أن جميع النقاط الموجودة على المستقيم ص = ٨ يوجد عندها مماس افقي وفقاً للفترة المعطاه )

ج

٧. بالاعتماد على الشكل المجاور ، الذي يمثل منحنى ق(س)

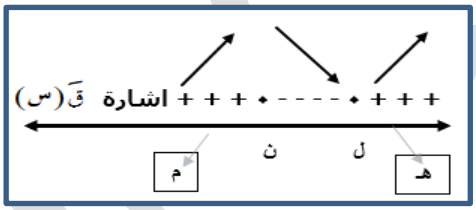
حدد النقط التي يكون عندها ق(س) ، ق(س) موجبتين :




الحل

ن،ل نقاط حرجة (قمة وقاع)

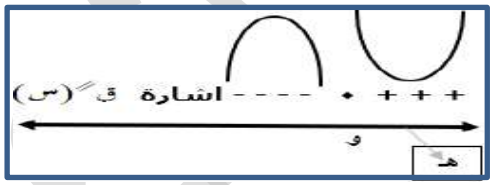
بملاحظة اشارة ق(س) في الشكل المجاور :




فأن ق(س) عند س=هـ ، س=م

و نقطة حرجة

بملاحظة اشارة ق(س) في الشكل المجاور :




فأن ق(س) عند س = هـ

ومنها ق(س)، ق(س) موجبتين عند س = هـ

أ

٨. اذا كان ق(س) اقترانا متصلا على [١، ٣] وكان ق(س) > ٠ لجميع قيم س ∈ ]١، ٣[ وكان ق(س) له ثلاث نقاط حرجة فقط في [١، ٣] ، وكان ق(٢) = ٠ ، فما العبارة الصحيحة مما يأتي ؟

الحل

بما أن هـ(س) > ٠ وله ٣ نقاط حرجة هي عند س=١ ، س=٣ (أطراف الفترة)،

وكذلك عند س=٢ (نقطة حرجة )لأن هـ(٢) = ٠ ⇐ هـ(٢) > ٠

⇐عند س =٢ قيمة عظمى محلية (أي ان اشارة الاقتران هـ(٢) = ٠ تتغير من موجب الى سالب عند س=٢)

$\frac{٥}{٢}$ تقع بعد ٢ وحسب تعريف التناقص $\frac{٥}{٢}$ > ٢

⇐ هـ($\frac{٥}{٢}$) > هـ(٢)

د

٩. ما قيمة الثابت م التي تجعل لمنحنى الاقتران ن(س) = س$^{٣}$ + م س$^{٢}$ − ٩س نقط انعطاف عند س = −١ ؟

الحل

ن(س) = س$^{٣}$ + م س$^{٢}$ − ٩س ← ن′(س) = ٣س$^{٢}$ + ٢م س − ٩ ← ن″(س) = ٦س + ٢م

(−١، ن(−١)) نقطة انعطاف

أ

⇐ ن″(−١) = ٠ ⇔ ٦ × −١ + ٢م = ٠ ← $\boxed{م = ٣}$

١٠. ما قيمة ج التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ن(س) = س$^{٢}$ + س − ٦ في [−١، ٢] ؟

الحل

∵ ن يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow ن'(ج) = \frac{ن(٢) - ن(-١)}{٣}$$

$$\Leftarrow ٢ج + ١ = \frac{٠ - -٦}{٣}$$

$$\Leftarrow ٢ج + ١ = ٢ \Leftarrow \boxed{ج = \frac{١}{٢}}$$

ج

١١. اذا كان ن(س) = س|س| فما العبارة الصحيحة فيما يأتي ؟

الحل

ق(س) متصل دائما لأنه ضرب اقترانين متصلين

$$ن(س) = س|س| = \begin{cases} س^{٢} & ، \ س \geq ٠ \\ -س^{٢} & ، \ س < ٠ \end{cases}$$

ومنها $ن'(س) = \begin{cases} ٢س & ، \ س < ٠ \\ -٢س & ، \ س \geq ٠ \end{cases}$

هـ′(٠)$^{-}$ = ٠ ، هـ′(٠)$^{+}$ = ٠ ⇐ هـ′(٠) = ٠

∴ لا يوجد قيم قصوى

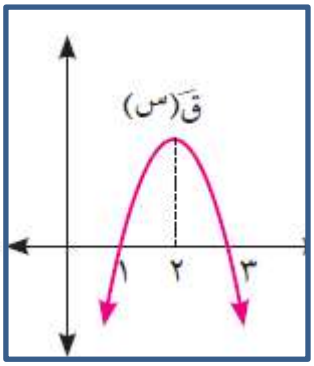
$$هـ''(س) = \begin{cases} -٢ & ، \ س < ٠ \\ ٢ & ، \ س > ٠ \end{cases}$$

هـ″(٠)$^{-}$ ≠ هـ″(٠)$^{+}$ ⇐ ن″(س) غ م

د

⇐ (٠، ن(٠)) نقطة انعطاف لأن ق متصل عندها ويغير مجال التقعر حولها

١٢. الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) ، ما مجموعة حل المتباينة ق(س) > ٠ ؟




الحل

عند س = ٢ يوجد مماس أفقي أي أن : ق(س) = ٠

من خلال المماس : *ق(س) متزايد في الفترة ]−∞ ، ٢[ (والمماس عندها يصنع زاوية حادة)

ومنها ق(س) > ٠ في الفترة ]−∞ ، ٢[

*ق(س) متناقص في الفترة ]−∞ ، ٢[ (والمماس عندها يصنع زاوية منفرجة)

ومنها ق(س) < ٠ في الفترة ]٢ ، ∞[

جـ

١٣. اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، ما أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة يمكن أن نحصل عليها للاقتران ق(س) ؟

الحل

ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ← ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية

⇐ أكبر عدد من النقاط الحرجة من ق(س) هو ٢ بالإضافة الى طرفي الفترة ٢ ،

فيكون أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للاقتران ق(س) هو ٤

د

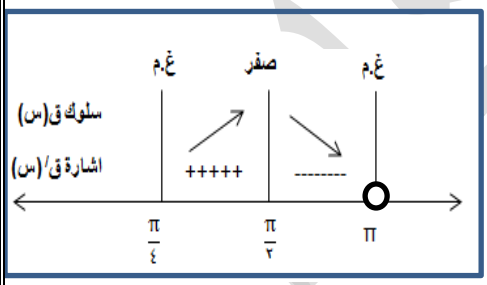
١٤. اذا كان ق(س) = لـو جاس ، س ∈ $\left]\pi ، \frac{\pi}{٤}\right[$ ، متى يكون منحنى ق(س) متزايدا ؟

الحل

ق(س) = لـو جاس ، ق(س) متصل على مجاله ،

$$ق'(س) = \frac{جتاس}{جاس}$$

بوضع ق(س) = ٠ ⇐ جتاس = ٠ ⇐ $س = \frac{\pi}{٢} \in \left]\pi ، \frac{\pi}{٤}\right[$




من ملاحظة إشارة ق(س) في الشكل المجاور:

يكون منحنى ق(س) متزايد في الفترة $\left]\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

ب

**السؤال الثاني :** اذا كان ق(س) = جاس + جتاس، س ∈ $\left[0، \frac{\pi}{4}\right]$ ، أثبت أن ق(س) متزايد في مجاله و من ذلك أثبت أن جاس + جتاس ≤ ١ في تلك الفترة .

الحل

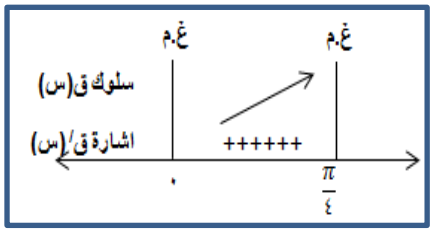
هـ(س) متصل في الفترة $\left[0، \frac{\pi}{4}\right]$ ، هـ(س) قابل للاشتقاق في $\left]0، \frac{\pi}{4}\right[$

هـ(س) = جتاس − جاس، س ∈ $\left[0، \frac{\pi}{4}\right]$

بوضع هـ′(س) = ٠ ⇐ جتاس − جاس = ٠ ⇐ جتاس = جاس

س = $\frac{\pi}{4}$ ∈ $\left]0، \frac{\pi}{4}\right[$ ، س = $\frac{5\pi}{4}$ ∉ $\left]0، \frac{\pi}{4}\right[$

**ومن ملاحظة إشارة هـ′(س) من الشكل المجاور**




يكون هـ(س) **متزايد** على $\left[0، \frac{\pi}{4}\right]$

لإثبات أن جاس + جتاس ≤ ١:

هـ(٠) = ١ **وهي قيمة صغرى مطلقة** ( حسب قاعدة أتعلم صفحة ٧٩)

هـ(س) ≤ هـ(٠) ، ∀س ∈ $\left[0، \frac{\pi}{4}\right]$

جاس + جتاس ≤ جا٠ + جتا٠ ، ∀س ∈ $\left[0، \frac{\pi}{4}\right]$ ⇐ جاس + جتاس ≤ ١ ، ∀س ∈ $\left[0، \frac{\pi}{4}\right]$

---

**السؤال الثالث :** جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = $\frac{س + ١}{س^{٢} + ٣}$

الحل

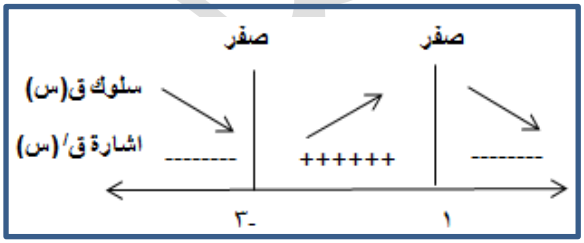
هـ(س) متصل ∀س ∈ ع

هـ(س) قابل للاشتقاق ∀س ∈ ع

بوضع هـ′(س) = ٠ ⇐ $-س^{٢} - ٢س + ٣ = ٠$ ⇐ $س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠$ ⇐ (س + ٣)(س − ١) = ٠

⇐ س = −٣ ، س = ١

من ملاحظة إشارة هـ′(س) من الشكل المجاور:




يكون منحنى ق (س) متزايد على $[-٣، ١]$

و متناقص على $]-\infty، -٣] \cup [١، \infty[$

هـ(−٣) = $\frac{-٢}{١٢} = \frac{-١}{٦}$ قيمة صغرى محلية

هـ(١) = $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤}$ قيمة عظمى محلية

**السؤال الرابع :** اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س − ١ يحقق شرط نظرية رول على [−١، ١] جد قيمة / قيم الثابت أ

الحل

ق(−١) = ق(١) ⇐ −١ + ٣ − ١ = ١ − ٣أ − أ$^{٣}$

⇐ أ$^{٣}$ − ٣أ − ٢ = ٠ ( باستخدام القسمة المطولة)

⇐ (أ + ١)(أ$^{٢}$ − أ − ٢) = ٠

⇐ (أ + ١)(أ − ٢)(أ + ١) = ٠ ⇐ أ = ٢ ، أ = −١

بالتحقق من قيم أ فإن أ = −١ مرفوضة لأنها لا تحقق الشرط .

| | | |
|---|---|---|
| أ$^{٣}$ − ٣أ − ٢ | | أ$^{٢}$ − أ − ٢ |
| أ$^{٣}$ + أ$^{٢}$ | | أ + ١ |
| − أ$^{٢}$ − ٣أ − ٢ | | |
| − أ$^{٢}$ − أ | | |
| − ٢أ − ٢ | | |
| − ٢أ − ٢ | | |
| ٠ | | |

---

**السؤال الخامس :** اذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ − ٩س + ٥ معرفا في الفترة [−٢، ٦] جد :

أ) القيم القصوى المطلقة للاقتران ق(س) .

الحل

ق(س) متصل على مجاله لأنه كثير حدود .

ق(س) قابل للاشتقاق في الفترة ]−٢، ٦[

ق′(س) = ٣س$^{٢}$ − ٦س − ٩ ، س ∈ ]−٢، ٦[

بوضع ق′(س) = ٠ ⇐ ٣س$^{٢}$ − ٦س − ٩ = ٠ ⇐ س$^{٢}$ − ٢س − ٣ = ٠ ⇐ (س − ٣)(س + ١) = ٠

⇐ س = ٣ ، س = −١

∴ مجموعة قيم س التي يكون عندها قيم حرجة هي {−١، ٣، ٦، −٢}

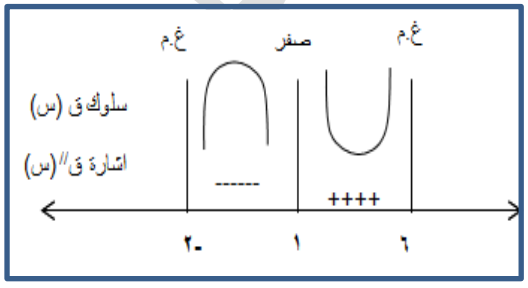
ق(−٢) = ٣ ، ق(−١) = ١٠ ، ق(٣) = −٢٢ ، ق(٦) = ٥٩

أكبر قيمة للاقتران هي ق(٦) = ٥٩ ← ق(٦) = ٥٩ هي قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للاقتران هي ق(٣) = −٢٢ ← ق(٣) = −٢٢ هي قيمة صغرى مطلقة

---

ب) فترات التقعر للأعلى والأسفل لمنحنى الاقتران ق(س)




الحل

ق″(س) = ٦س − ٦ ، س ∈ ]−٢، ٦[

بوضع ق″(س) = ٠ ⇐ ٦س − ٦ = ٠ ⇐ س = ١

من ملاحظة اشارة ق″(س) في الشكل المجاور

يكون منحنى ق(س) مقعر للأعلى في الفترة [١، ٦]

و مقعر للأسفل في الفترة [−٢، ١]

**ج) نقط الانعطاف ، وزوايا الانعطاف لمنحنى الاقتران ق(س)**

الحل

(١، هـ(١)) = (١، −٦) هي نقطة انعطاف لأن هـ(س) متصل ، وعندها يغير من اتجاه التقعر .

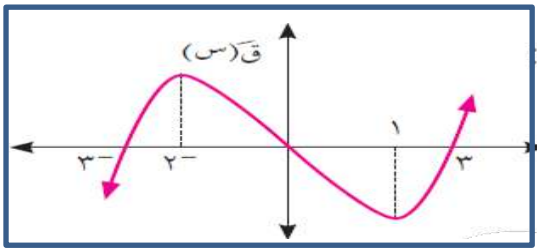
**لإيجاد زاوية الانعطاف :**

نفرض أن هـ هي زاوية الانعطاف عند (١، −٦)

⇐ظا هـ = هـ′(١) = −١٢ ⇐ هـ = ظا⁻¹(−١٢)

---

**السؤال السادس :** معتمدا على الشكل المجاور ، الذي يمثل منحنى ق′(س) جد :




**أ) فترات التقعر للأعلى والأسفل لمنحنى الاقتران ق(س)**

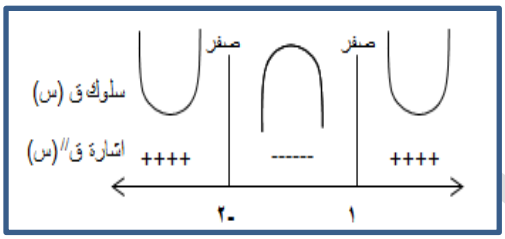
الحل

*ق′(س) متزايد في الفترتين ]−∞، −٢[، ]١ ، ∞[

(والمماس عندها يصنع زاوية حادة)

ومنها ق″(س) > ٠ في الفترتين ]−∞، −٢[، ]١ ، ∞[

أي أن : ق(س) مقعر للاعلى في الفترتين ]−∞، −٢[، ]١ ، ∞[




*ق′(س) متناقص في الفترة [−٢، ١]

(والمماس عندها يصنع زاوية منفرجة)

ومنها ق″(س) < ٠ في الفترة [−٢، ١]

أي أن : ق(س) مقعر للاسفل في الفترة [−٢، ١]

---

**ب) الاحداثيات السينية لنقط الانعطاف**

الحل

عند كل من س = ١ ، س = −٢ لانه يوجد مماس افقي للاقتران ق′(س) أي أن : ق″(س) = ٠

عند كل من النقطتين حيث عندها الاقتران متصل ويغير اتجاه تقعره .

---

**السؤال السابع :** اذا كان الاقتران ق(س) كثير حدود معرفا في الفترة [٢، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول ، ومتناقصا على مجاله ، وكان الاقتران هـ(س) = ٨ − س بين أن الاقتران ك(س) = (ق × هـ)(س) متناقصا في [٢، ٦] .

ق(س) كثير حدود ⇐ متصل وقابل للاشتقاق

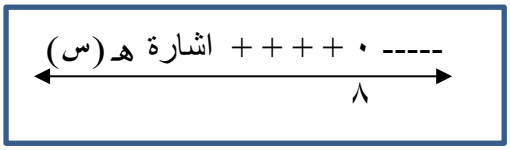
الحل

هـ(س) يقع منحناه في الربع الأول ⇐ $\boxed{\text{هـ}(س) > ٠ ، \forall س \in [٢ ، ٦]}$ ... [١]

هـ(س) متناقص في الفترة [٢، ٦] ⇐ $\boxed{\text{هـ}'(س) < ٠ ، \forall س \in ]٢ ، ٦[}$ ... [٢]

هـ(س) = ٨ − س نبحث في اشارته على الفترة [٢، ٦]

٨ − س = ٠ ⟸ س = ٨




⟸ هـ(س) > ٠ ، ∀س ∈ [٢ ، ٦] ... ٣

هـ′(س) = −١ (ثابت)

ك(س) = (قـ × هـ)(س) ، ك(س) متصل في الفترة [٢ ، ٦] (لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين)

ك(س) قابل للاشتقاق في الفترة ]٢ ، ٦[

⟸ ك′(س) = قـ′(س) × هـ(س) + هـ′(س) × قـ(س)

ك′(س) = (−) × (+) + (+) × (−١) = − + − = −

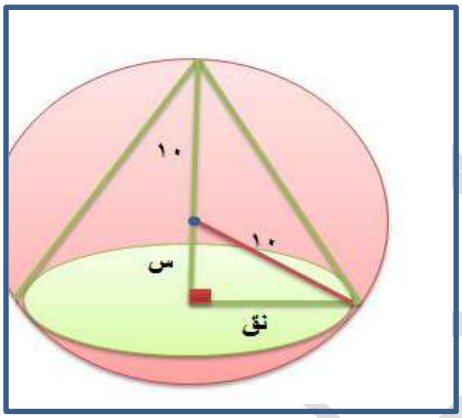
ك′(س) < ٠ ، ∀س ∈ ]٢، ٦[ ⟸ ك(س) متناقص ∀س ∈ [٢ ، ٦]

---

**السؤال الثامن : ما أبعاد أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ١٠ سم ؟**

الحل

حجم المخروط = $\frac{\pi}{٣}$ نقـ٢ ع ⟸ ع = $\frac{\pi}{٣}$ نقـ٢ (١٠ + س)




لكن س٢ + نقـ٢ = ١٠٠ ( نظرية فيثاغورث)

⟸ نقـ٢ = ١٠٠ − س٢

بالتعويض بقيمة نقـ٢ في ح

∴ ع = $\frac{\pi}{٣}$ (١٠٠ − س٢)(١٠ + س)

ع = $\frac{\pi}{٣}$ (١٠٠٠ + ١٠٠س − ١٠س٢ − س٣)

ع′ = $\frac{\pi}{٣}$ (١٠٠ − ٢٠س − ٣س٢)

بوضع ع′ = ٠ ⟸ ١٠٠ − ٢٠س − ٣س٢ = ٠

⟸ ٣س٢ + ٢٠س − ١٠٠ = ٠ ⟸ (٣س − ١٠)(س + ١٠) = ٠

إما ٣س − ١٠ = ٠ ⟸ س = $\frac{١٠}{٣}$ أو س + ١٠ = ٠ ⟸ س = −١٠ (مرفوض)

باستخدام اختبار المشتقة الثانية:

ع″ = $\frac{\pi}{٣}$ (−٢٠ − ٦س) ⟸ ع″ $\left(\frac{١٠}{٣}\right)$ = $\frac{\pi}{٣}\left(-٢٠-\frac{٦٠}{٣}\right)$ < ٠

∴ عندما س = $\frac{١٠}{٣}$ قيمة عظمى (أي أن حجم المخروط أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{١٠}{٣}$

عندما س = $\frac{١٠}{٣}$ ⟸ نقـ٢ = ١٠٠ − س٢ = ١٠٠ − $\left(\frac{١٠}{٣}\right)^{٢}$ = ١٠٠ − $\frac{١٠٠}{٩}$ = $\frac{٨٠٠}{٩}$

$$\Leftarrow \boxed{\text{نوه} = \sqrt{\frac{٢٠}{٣}} = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٩}}}$$

$$\Leftarrow \text{ع} = ١٠ + \text{س} = ١٠ + \frac{١٠}{٣} = \frac{٤٠}{٣}$$

الابعاد هي $\boxed{\text{س} = \frac{١٠}{٣}}$ ، $\boxed{\text{نوه} = \sqrt{\frac{٢٠}{٣}}}$ ، $\boxed{\text{ع} = \frac{٤٠}{٣}}$.

---

**السؤال التاسع :** اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} - \text{هـ}(\text{س}) + ٣\text{س}$ ، $\text{س} \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$ حيث هـ(س) قابل للاشتقاق ، أثبت أن الاقتران (ق + هـ)(س) متزايد في تلك الفترة .

الحل

$$(\text{و} + \text{هـ})(\text{س}) = \text{و}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) = \left(\text{جتاس} - \text{هـ}(\text{س}) + ٣\text{س}\right) + (\text{هـ}(\text{س})) = \text{جتاس} + ٣\text{س}$$

نفرض أن $(\text{و} + \text{هـ})(\text{س}) = \text{ك}(\text{س}) \Leftarrow \text{ك}(\text{س}) = \text{جتاس} + ٣\text{س}$ ، $\text{س} \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

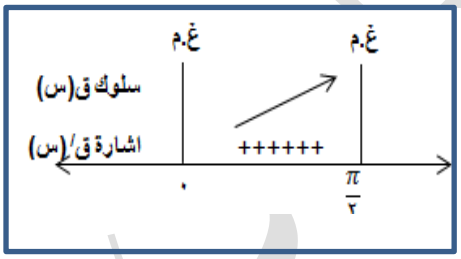
ك(س) متصل في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

ك(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$\Leftarrow \text{ك}'(\text{س}) = -\text{جاس} + ٣ \text{ ، } \text{س} \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$$

بوضع $\text{ك}'(\text{س}) = ٠ \Leftarrow -\text{جاس} + ٣ = ٠ \Leftarrow \text{جاس} = ٣$ (مرفوض)

$$\Leftarrow \text{ك}'(\text{س}) \neq ٠ \text{ ، } \forall \text{س} \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$$



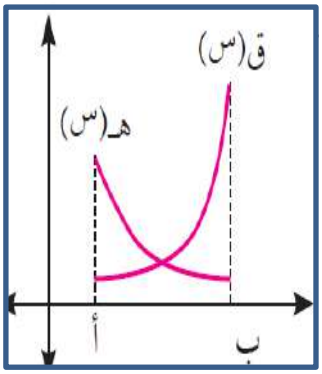

ومن ملاحظة إشارة $\text{ك}'(\text{س})$ في الشكل المجاور:

ك(س) متزايد في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$\Leftarrow$ (و + هـ)(س) متزايد في الفترة $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

**السؤال العاشر :** الشكل المجاور يبين منحنى الاقترانين ق ، هـ المعرفين على $[أ،ب]$

بين أن الاقتران $\frac{ق'(س)}{هـ(س)}$ هو اقتران متزايد على $[أ،ب]$ .




الحل

من الرسم نلاحظ أن الاقتران هـ(س) :

هـ(س) اقتران متناقص (حيث زاوية المماس عندها منفرجة لاحظ الشكل ١)

$\Leftarrow$ $\boxed{هـ'(س) < ٠}$

هـ(س) يقع في الربع الأول $\Leftarrow$ $\boxed{هـ(س) > ٠}$

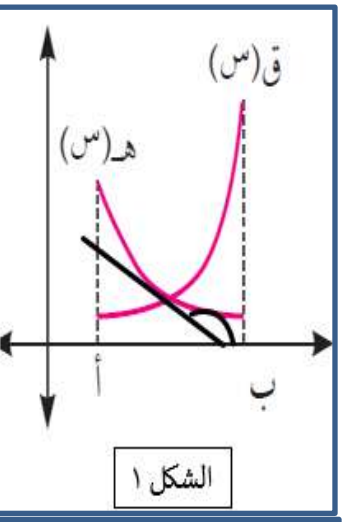
ومن الرسم نلاحظ أن الاقتران وه(س) :

وه(س) اقتران متزايد (حيث زاوية المماس عندها منفرجة لاحظ الشكل ١)

$\Leftarrow$ $\boxed{وه'(س) > ٠}$

وه(س) يقع في الربع الأول $\Leftarrow$ $\boxed{وه(س) > ٠}$

وه(س) مقعر للأعلى $\Leftarrow$ $\boxed{وه''(س) > ٠}$



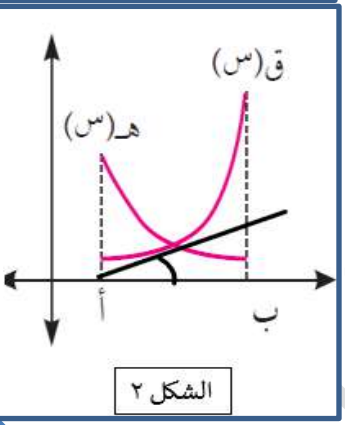
الشكل ١

الآن بفرض أن :

فإن : $ك'(س) = \frac{وه''(س)هـ(س) - وه'(س)هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

$\Leftarrow$ $ك'(س) = \frac{- \times \oplus - \oplus \times \oplus}{\oplus} = \frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$

$\Leftarrow$ $ك'(س) > ٠$ $\Leftarrow$ $ك(س) = \frac{وه'(س)}{هـ(س)}$ متزايد على $[أ ، ب]$



الشكل ٢

**السؤال الحادي عشر :** اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، جد قاعدة الاقتران ق(س) اذا علمت أن النقطة (٢،- ١) هي نقطة قيمة صغرى محلية ، وأن النقطة (٠،٣) هي نقطة انعطاف للاقتران ق(س) .

الحل

∵ ١) هي نقطة قيمة صغرى محلية للاقتران ق(س) $\Leftarrow$ وه(٢) = -١ ، وه'(٢) = ٠

∴ (٠،٣) هي نقطة انعطاف للاقتران ق(س) $\Leftarrow$ وه(٠) = ٣ ، وه''(٠) = ٠

$\Leftarrow$ وه(س) = أس$^{٣}$ + بس$^{٢}$ + جس + د

$\Leftarrow$ $هـ'(س) = ٣أس^{٢} + ٢بس + جـ$ $\Leftarrow$ $هـ''(س) = ٦أس + ٢ب$

$\because هـ(٠) = ٣ \Leftarrow \boxed{د = ٣}$

$\because هـ''(٠) = ٠ \Leftarrow ٢ب = ٠ \Leftarrow \boxed{ب = ٠}$

$\because هـ(٢) = -١ \Leftarrow ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ٠$

بالتعويض عن قيمة د و ب $\Leftarrow$ $٨أ + ٢جـ = -٤ \Leftarrow \boxed{٤أ + جـ = -٢}$ .....(١)

$\because هـ'(٢) = ٠ \Leftarrow ١٢أ + ٤ب + جـ = ٠$

بالتعويض عن قيمة ب $\Leftarrow \boxed{١٢أ + جـ = ٠}$ .....(٢)

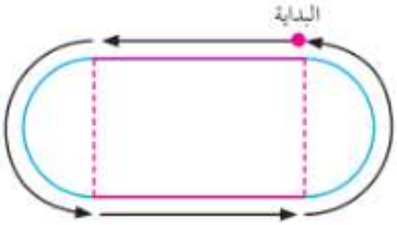
بطرح معادلة (١) من معادلة (٢) $\Leftarrow ٨أ = ٢ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{١}{٤}}$

بالتعويض عن قيمة ( أ ) في معادلة (١) ينتج : $\Leftarrow ٤ \times \frac{١}{٤} + جـ = -٢ \Leftarrow \boxed{جـ = -٣}$

$\Leftarrow \boxed{هـ(س) = \frac{١}{٤}س^{٣} - ٣س + ٣}$

---

**السؤال الثاني عشر :** مسار للسباق طوله ٤٠٠ م ، يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة . ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن ؟




الحل

محيط المسار = ٢س + محيط الدائرة

$= ٢س + ٢ط نو هـ = ٤٠٠$

$\Leftarrow س + ط نو هـ = ٢٠٠$

$\Leftarrow \boxed{س = ٢٠٠ - ط نو هـ}$ .....(١)

مساحة المستطيل (م) $= ٢نو هـ س = ٢نو هـ(٢٠٠ - ط نو هـ)$

مساحة المستطيل (م) $= ٤٠٠ نو هـ - ٢ط نو هـ^{٢}$

$م' = ٤٠٠ - ٤ط نو هـ$

بوضع $م' = ٠ \Leftarrow ٤٠٠ - ٤ط نو هـ = ٠ \Leftarrow \boxed{نو هـ = \frac{١٠٠}{ط}}$

باستخدام اختبار المشتقة الثانية

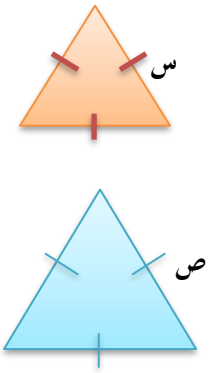
م″ = −٤ط ، ط > ٠ فإن $\boxed{\text{نهـ} = \frac{١٠٠}{ط}}$ عندها قيمة عظمى محلية

$\boxed{١٠٠} = \frac{١٠٠}{ط} \times ط - ٢٠٠ = س$

الطول س = ١٠٠ ⟸ العرض = ٢نهـ $= ٢ \times \frac{١٠٠}{ط} = \frac{٢٠٠}{ط}$

---

**السؤال الثالث عشر :** سلك طوله ١٨ سم ، صنع منه مثلثان كل منهما متساوي الاضلاع ، ما طول كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن .




الحل

يكون ضلع المثلث الأول = س ومنه محيط المثلث الأول = ٣س

يكون ضلع المثلث الثاني = ص ومنه محيط المثلث الثاني = ٣ص

حيث طول السلك = محيطي المثلثين = ٣ س + ٣ ص = ١٨ ⟸ س + ص = ٦

$\boxed{س = ٦ - ص} \ldots\ldots\ldots \langle ١ \rangle$

من معلومية مساحة االمثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول الضلع الاول × طول الضلع الثاني×جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث الأول $= \frac{١}{٢} \times س \times س \times جا ٦٠^\circ$ ⟸ $\boxed{\text{مساحة المثلث الأول} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^٢}$

مساحة المثلث الثاني $= \frac{١}{٢} \times ص \times ص \times جا ٦٠^\circ$ ⟸ $\boxed{\text{مساحة المثلث الثاني} = \frac{\sqrt{٣}}{٤} ص^٢}$

**المطلوب :** طول كل من المثلثين ليكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن .

منه نوجد مجموع مساحتيهما = م

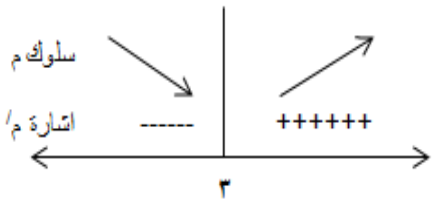
$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} س^٢ + \frac{\sqrt{٣}}{٤} ص^٢$ بالتعويض من ١

$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} (٦ - ص)^٢ + \frac{\sqrt{٣}}{٤} ص^٢ = \frac{\sqrt{٣}}{٤} \left[ (٣٦ - ١٢ص + ص^٢) + ص^٢ \right]$

$م = \frac{\sqrt{٣}}{٤} (٢ص^٢ - ١٢ص + ٣٦)$ بالاشتقاق بالنسبة ل ص :

$م' = \frac{\sqrt{٣}}{٤} (٤ص - ١٢) = \sqrt{٣}ص - ٣\sqrt{٣}$

بوضع م/ = ٠ ومنه ص = ٣




باستخدام اختبار المشتقة الاولى

ومن ملاحظة إشارة م/ في الشكل المجاور:

يكون عند ص = ٣ قيمة صغرى محلية

بالتعويض في ١ تكون س = ٣ ومنه يكون مجموع مساحتيهما اصغر ما يمكن .

# الوحدة الثالثة

٣

# المصفوفات والمحددات

## الدرس الأول المصفوفات

### القسم الأول : الملخص

**المصفوفة :** هي تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد على هيئة صفوف وأعمدة محصورين بين قوسين [ ]
ويرمز لها بأحد حروف الهجاء أ ، ب ، .... وتسمى الأعداد داخل المصفوفة مدخلات .

**ملاحظات :**

١) تتحدد رتبة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة فيها م×ن حيث م: عدد الصفوف ، ن: عدد الأعمدة ( تأمل الشكل المقابل )

٢) عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها × عدد أعمدتها
٣) تتحدد أي مدخلة في المصفوفة بحسب الصف والعمود الواقعة فيهما

**مصفوفات خاصة :**

١ ) **المصفوفة المربعة :** هي المصفوفة التي يكون فيها عدد صفوفها = عدد اعمدتها = م
( تسمي مصفوفة مربعة من الرتبة م )

مثلا : $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

٢ ) مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة مربعة بحيث $م_{ي هـ} = \begin{cases} ١ & ، ي = هـ \\ ٠ & ، ي \neq هـ \end{cases}$ يرمز لها بالرمز م

مثلا : $م_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة وحدة من الرتبة الثانية

٣) المصفوفة الصفرية ( و ) : هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار

مثلا : $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة صفرية من الرتبة ٢×٣

٤) مصفوفة الصف : هي المصفوفة المكونة من صف واحد

مثلا: ص = [١ ٢- ٣] هي مصفوفة صف من الرتبة ١×٣

٥) مصفوفة العمود : هي المصفوفة المكونة من عمود واحد

مثلا : ص = $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عمود من الرتبة ٣×١

٦) المصفوفة القطرية : هي المصفوفة المربعة س بحيث $س_{يهـ} = ٠$ ، $\forall$ ي ≠ هـ

مثلا : س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & ٠ & ٠ \\ ٠ & س_{٢٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، حيث نسمي لقطر الذي مدخلاته $س_{يهـ}$ ، $\forall$ ي = هـ بالقطر الرئيسي للمصفوفة س

٧) المصفوفة المثلثية العلوية : هي المصفوفة المربعة التي تكون مدخلاتها التي تحت القطر الرئيسي أصفارا

مثلا : س = $\begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} & س_{٣١} \\ ٠ & س_{٢٢} & س_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & س_{٣٣} \end{bmatrix}$

**تعريف :**

تساوي مصفوفتين : تتساوى المصفوفتين أ ، ب اذا كان لهما نفس الرتبة ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية

( أ = ب اذا وفقط اذا كان $أ_{يهـ} = ب_{يهـ}$ لجميع قيم ي ، هـ )

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول : ينتج مصنع ألبان نوعين من العبوات حجم كبير، وحجم صغير، فإذا كان لهذا المصنع فروع في كل من: الخليل وطولكرم وغزة، وكان عدد العبوات التي ينتجها كل فرع يوميا كما يأتي:**

**فرع الخليل: ٨٠٠عبوة من الحجم الكبير ، ٩٠٠ عبوة من الحجم الصغير.**
**فرع طولكرم: ٦٠٠عبوة من الحجم الكبير ، ٤٥٠ عبوة من الحجم الصغير.**
**فرع غزة: ٧٥٠عبوة من الحجم الكبير ، ٦٥٠ عبوة من الحجم الصغير.**

**فرع أ : نظم المعلومات السابقة بمصفوفة، بحيث تمثل الصفوف فيها أنواع العبوات، ثم اكتب رتبتها؟**

**الحل** $\begin{bmatrix} ٨٠٠ & ٦٠٠ & ٧٥٠ \\ ٩٠٠ & ٤٥٠ & ٦٥٠ \end{bmatrix}$ الرتبة $٢ \times ٣$

---

**فرع ب : ماذا يمثل مجموع مدخلات العمود الثاني؟**

**الحل** تمثيل مجموع انتاج فرع طولكرم $= ٦٠٠ + ٤٥٠ = ١٠٥٠$ عبوة

---

**السؤال الثاني : إذا كانت**

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٤- \\ ٦ & ٢ & س \\ ١ & س- & ٧ \\ ٣ & ٢٠ & ٧ \end{bmatrix}$$

**فرع أ : رتبة المصفوفة أ**

**الحل** الرتبة $٤ \times ٣$

---

**فرع ب : قيمة** $(أ_{٣١} + أ_{١٢})$

**الحل** $أ_{٣١} + أ_{١٢} = -٤ + ٦ = ٢$

---

**فرع جـ : قيمة س بحيث أن** $(أ_{٢٣})^{٣} = ٢٧$

**الحل** $(-س)^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣} \Leftarrow -س = ٣ \Leftarrow س = -٣$

**السؤال الثالث :** إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & س^{٢}+١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ س-١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة/ قيم س.

**الحل** بما أن المصفوفتان متساويتان إذن مدخلاتهما المتناظرة متساوية ، ومنها :

$٢ = س - ١ \Leftarrow$ س $= ٣$

$س^{٢} + ١ = ١٠ \Leftarrow س^{٢} = ١٠ - ١ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Leftarrow$ س $= \pm ٣$ السالب مرفوض

---

**السؤال الرابع :** كون مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ بحيث تعطي مدخلاتها حسب العلاقة $أ_{يهـ} = ٢^{ي-هـ}$ .

**الحل** $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $\boxed{أ_{يهـ} = ٢^{ي-هـ}}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix} أ_{١١} = ٢^{١-١} = ١ \\ أ_{٢١} = ٢^{٢-١} = \frac{١}{٢} \\ أ_{١٢} = ٢^{١-٢} = ٢ \\ أ_{٢٢} = ٢^{٢-٢} = ١ \end{matrix}$ $\Leftarrow$ $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٢ \end{bmatrix}$

---

**السؤال الخامس :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ & ١ \\ ٦ & ٣- & ٥ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢

بحيث أن $أ_{يهـ} = ب_{هـي}$ لجميع قيم ي ، هـ .

**الحل** $أ = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ & ١ \\ ٦ & ٣- & ٥ \end{bmatrix}$ $\Leftarrow$ $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{bmatrix}$

$أ_{١١} = ب_{١١} = ٢-$
$أ_{٢١} = ب_{١٢} = ٥$
$أ_{٣١} = ب_{١٣} = ١$
$أ_{١٢} = ب_{٢١} = ٦$
$أ_{٢٢} = ب_{٢٢} = ٣-$
$أ_{٣٢} = ب_{٢٣} = ٥$

$\Leftarrow ب = \begin{bmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} \\ ب_{١٣} & ب_{٢٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ٥ & ٣- \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

**ملاحظة: (قلب الصفوف أعمدة)**

**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

# المصـــــــفوفة

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ & -١ \\ ٥ & ٨ & -٢ \\ ٦ & ١٠ & ٤ \end{bmatrix}$ فإن $أ_{٣٢} \times أ_{١٣} =$<br>أ) ١٢ ب) -١٢ ج) ٣٠ د) -١٠ | ب |
| ٢ | إذا كان $\begin{bmatrix} ص^{٢} \\ ٢ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ \\ -٨ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة ص =<br>أ) $\{٤، -٤\}$ ب) $\{٤، ٢\}$ ج) $\{٤\}$ د) $\{-٤\}$ | د |
| ٣ | إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢} & ٢ \\ س^{٢} - س & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة س هي:<br>أ) $\{٣، -٣\}$ ب) $\{٣، ٢\}$ ج) $\{٣، -٢\}$ د) $\{٣\}$ | د |
| ٤ | إذا كانت $ب = [٢٥ \quad -١ \quad ٠]$، $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ -١٦ & ٩ \end{bmatrix}$ فإن قيمة $(أ_{٢٢} - \sqrt{ب_{١١}})^{٢} =$<br>أ) $أ_{١٢}$ ب) $ب_{٢١}$ ج) $-أ_{١٢}$ د) $ب_{٣١}$ | ج |
| ٥ | مصفوفة الوحدة من بين المصفوفات الآتية هي:<br>أ) $\begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} (-١)^{٢} & ٠ \\ ٠ & (-١)^{٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & (-١)^{٢} \\ -(-١)^{٢} & ٠ \end{bmatrix}$ | ج |
| ٦ | إذا كان $\begin{bmatrix} ٢^{س} & ٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ص+١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة س + ص هي:<br>أ) ٢ ب) ٤ ج) -٢ د) -٤ | أ |

| | | |
|---|---|---|
| ٧ | إذا كان $\begin{bmatrix} ٤ & س+ص \\ -٨ & -م \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٢س \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة ص، م على الترتيب هما:<br>أ) -٤ ، ٢ ب) ٧ ، ٢ ج) ٧ ، -٢ د)-٢ ، -٧ | ج |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اكتب المصفوفة أ من الرتبة ٣ × ٤ بحيث: $أ_{يه} = \begin{cases} ٢^{ي} & ، ي < هـ \\ -١ & ، ي = هـ \\ ٥هـ & ، ي > هـ \end{cases}$ | الاجابة : $\begin{bmatrix} -١ & ١٠ & ١٥ & ٢٠ \\ ٤ & -١ & ١٥ & ٢٠ \\ ٨ & ٨ & -١ & ٢٠ \end{bmatrix}$ |
| ٢ | إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٣}-ص^{٣} & ١ \\ ٤ & س+ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة المقدار<br>$س^{٢}-سص+ص^{٢}$ ؟ | ٢ |
| ٣ | إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢}+ص^{٢} & ١ \\ ٤ & س+ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة المقدار<br>$(س-ص)^{٣}$ ؟ | ٦٤ |
| ٤ | إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص^{٣} & \overline{ل٧} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ٢٥ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة المقدار<br>$س+ص+ل$ ؟ | ١٣ ، ٢٣ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٣-أ & ٢-ء٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢-أ & ٢ب+١ \\ ج & ١٦ \end{bmatrix}$ جد قيم أ،ب،ج،ء | أ=٥ ، ب=-٣<br>ج=٢ ، ء=٦ |
| ٢ | إذا كان $\begin{bmatrix} أ+ب & أ-ب \\ أ+ب+ج & أ-ب+٢ء \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ جد قيم أ،ب،ج،ء | أ=٣ ، ب=٦<br>ج=-٢ ، ء=٤ |
| ٣ | جد قيمة س، ع التي تحقق $\begin{bmatrix} س^{٣}-٤س & س^{٢} \\ س+٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٤س \\ ع^{٢} & ٣ \end{bmatrix}$ | س=٠، ع=±٢ |

## الدرس الثاني العمليات على المصفوفات / تدريبات

الملتقى التربوي
www.wepal.net

### القسم الأول : الملخص

**جمع المصفوفات :**

اذا كان أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن فان جـ = أ + ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن
حيث مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ ، ب $\left(أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ} = جـ_{ي هـ}\right)$

**ضرب المصفوفة بعدد حقيقي :**

اذا كان أ مصفوفة من الرتبة م × ن وكان ك عددا حقيقيا ، فان ك أ = جـ ، حيث جـ هي مصفوفة من الرتبة م × ن وتكون مدخلاتها ناتجة من : $جـ_{ي هـ} = ك\ أ_{ي هـ}$ لجميع قيم ي ، هـ

**طرح المصفوفات :**

اذا كان أ ، ب مصفوفتين من الرتبة م × ن فان أ – ب = أ + ( - ب )

**خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي :**

اذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن وكانت ك ، ع فان :

١ ) أ + ب = ب + أ ( التبديل )

٢ ) ( أ + ب ) + جـ = ب +( أ + جـ ) ( التجميع )

٣) أ + و = و + أ = أ ( المصفوفة المحايد )

٤) أ + ( –أ ) = ( – أ ) + أ = و ( النظير الجمعي )

٥) ك ( أ + ب ) = ك أ + ك ب ( توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات )

## ضرب المصفوفات :

اذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل فان حاصل الضرب أ . ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو

$$جـ_{يه} = أ_{ي١} \times ب_{١ه} + أ_{ي٢} \times ب_{٢ه} + \cdots + أ_{ين} \times ب_{نه}$$

## خصائص عملة الضرب على المصفوفات :

اذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات حيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان ، م المصفوفة المحايدة ، ك∈ ح فان :

١) ( أ . ب ) . جـ = أ . ( ب . جـ ) ( الخاصية التجميعية )

٢) أ. ( ب + جـ ) = ( أ . ب ) + ( أ . جـ ) ( توزيع الضرب على الجمع من اليمين )

٣) ( أ + ب ) . جـ = ( أ . جـ ) + ( ب . جـ ) ( توزيع الضرب على الجمع من اليسار )

٤) أ . م = م . أ = أ ( العنصر المحايد لعملية ضرب المصفوفات )

٥) ك ( أ . ب ) = ( ك أ ) . ب = أ . ( ك ب )

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix}$ فجد:

**فرع أ :** $ب + ٢أ$ ، $٣أ - ٢ب$

**الحل**

$$ب + ٢أ = \begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & -٦ & ١٠ \\ ٢ & ١٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١٦ \\ ٤ & ١٧ & ١٢ \end{bmatrix}$$

---

$$٣أ - ٢ب = \left(٣\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}\right) - \left(٢\begin{bmatrix} -٤ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & -٩ & ١٥ \\ ٣ & ١٨ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٨ & ٢ & ١٢ \\ ٤ & ١٠ & ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & -١١ & ٣ \\ -١ & ٨ & -١٠ \end{bmatrix}$$

---

**فرع ب :** إذا كانت $جـ = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ر = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فبين أن $جـ + ر = ٩م_٢$

**الحل**

الطرف الأيمن $= جـ + ر = \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

$$٩ = ٩م_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

---

**السؤال الثاني :** حل المعادلة المصفوفية: $٢\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} - ٣س = س + م_٢$ ( حيث $م_٢$ مصفوفة وحدة من الرتبة الثانية)

**الحل**

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix} - ٣س = س + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix} = ٣س + س + \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

باضافة نظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ الى طرفي المعادلة

$$٤س = \begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\text{٤س} = \begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow \text{س} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{-١٠}{٤} \\ \frac{١٠}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{bmatrix}$$

---

**السؤال الثالث :** إذا كانت جـ $= \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفة أ بحيث ٢أ+جـ= و ( و مصفوفة صفرية )

**الحل**

$$\text{٢أ}+\text{جـ} = \text{و} \Leftarrow \text{٢أ} + \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

باضافة نظير الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ الى طرفي المعادلة

$$\Leftarrow \text{٢أ} + \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{٢أ} + \text{و} = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{٢أ} = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ١- & ٣- \end{bmatrix} \Leftarrow \text{أ} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & ١- \\ \frac{٣-}{٢} & \frac{١-}{٢} \end{bmatrix}$$

---

**السؤال الرابع :** جد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة: س $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ ٣- \end{bmatrix}$

**الحل**

$$\text{س}\begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} + \text{ص}\begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ ٣- \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ص \\ ٥ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣س \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ص \\ ٣س+٥ص \end{bmatrix}$$

من مساواة المدخلات المتناظرة ، فان :

$$٣ص = ٩ \Leftarrow \boxed{ص = ٣}$$

بالتعويض عن قيمة ص لايجاد س :

$$٣س + ٥ص = -٣$$
$$\Leftarrow ٣س + ٥ \times ٣ = -٣$$
$$\Leftarrow ٣س + ١٥ = -٣ \Leftarrow ٣س = -١٨ \Leftarrow \boxed{س = -٦}$$

---

**السؤال الخامس:** إذا كانت $س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$ ، $٣س - ص = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix}$ فجد المصفوفتين س، ص

**الحل**

$$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix} \leftarrow \boxed{١}$$

بضرب المعادلة ( ٢ ) في ٢

$$٣س - ص = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix} \leftarrow \boxed{٢}$$

بجمع المعادلة ( ١ ) مع المعادلة (٢)

$$٦س - ٢ص = \begin{bmatrix} ٦ & -١٠ \\ ١٦ & -١٠ \end{bmatrix} \leftarrow \boxed{٣}$$

$$٧س = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & -١٠ \\ ١٦ & -١٠ \end{bmatrix} \Leftarrow ٧س = \begin{bmatrix} ٧ & -٧ \\ ١٤ & -٢١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow س = \frac{١}{٧} \begin{bmatrix} ٧ & -٧ \\ ١٤ & -٢١ \end{bmatrix} \Leftarrow \boxed{س = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}}$$

بالتعويض في المعادلة ١

باضافة نظير الجمعي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

الى طرفي المعادلة

$$٢ص + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$$

$$٢ص + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$$

$$٢ص + \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٤ & -٨ \end{bmatrix}$$

$$٢ص = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٤ & -٨ \end{bmatrix} \Leftarrow ص = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٤ & -٨ \end{bmatrix} \Leftarrow \boxed{ص = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}}$$

## الدرس الثاني/ تمارين ٣-٢

**السؤال الأول :** إذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات بحيث أن أ. ب= جـ فما رتبة ب في كل من الحالات الآتية:

**فرع أ :** $أ_{٥\times٢}$ ، $جـ_{٤\times٢}$

**الحل**

أ . ب = جـ

٢×٥ ٤×٥ ٤×٢

رتبة المصفوفة ب هي $٤\times٥$

---

**فرع ب :** $أ_{٣\times٣}$ ، $جـ_{٥\times٣}$

**الحل**

أ . ب = جـ

٣×٣ ٥×٣ ٥×٣

رتبة المصفوفة ب هي $٥\times٣$

---

**السؤال الثاني :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$ $جـ = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٣ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد ما يأتي:

ا) أ.ب ب) جـ.ب ج) أ.ب

**فرع أ:** أ.ب

**الحل** بما أن عدد الأعمدة للمصفوفة أ يساوي عدد صفوف المصفوفة ب فيكمن ايجاد أ.ب :

$$أ.ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤\times٥+٥\times٤ & ٤\times٦+٥\times٠ & ٤\times-٢+٥\times٧ \\ -٢\times٥+١\times٤ & -٢\times٦+١\times٠ & -٢\times-٢+١\times٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠+٢٠ & ٢٤+٠ & -٨+٣٥ \\ -١٠+٤ & -١٢+٠ & ٤+٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٠ & ٢٤ & ٢٧ \\ -٦ & -١٢ & ١١ \end{bmatrix}$$

**فرع ب: جـ · ب**

الحل

**بما أن عدد الأعمدة للمصفوفة جـ يساوي عدد صفوف المصفوفة ب فيكمن ايجاد جـ · ب :**

$$\text{جـ} \cdot \text{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -٣٠ & ٦ & -١١ \\ ٢٩ & ١٨ & ٣٥ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢٨+-٢ & ٠+٦ & -١٦+٥ \\ -٣٥+٦ & ٠+١٨ & ٢٠+١٥ \\ -١٤+٤ & ٠+١٢ & ٨+١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧\times٤+-٢\times١ & ٠\times٤+٦\times١ & ٤\times٤+-٥\times١ \\ ٧\times٥+-٢\times٣ & ٠\times٥+٦\times٣ & ٤\times٥+-٥\times٣ \\ ٧\times٢+-٢\times٢ & ٠\times٢+٦\times٢ & ٤\times٢+-٥\times٢ \end{bmatrix}$$

---

**فرع جـ : ٢٠٢**

الحل

**بما أن عدد الأعمدة للمصفوفة ٢ يساوي عدد صفوف المصفوفة ٢ فيكمن ايجاد ٢٠٢ :**

$$٢٠٢ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times٥+٥\times٤ & -٢\times٥+٤\times٤ \\ ١\times١+٥\times-٢ & -٢\times١+٤\times-٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٥ & ٦ \\ -٩ & -١٠ \end{bmatrix}$$

---

**السؤال الثالث : جد قيم س ، ص بحيث** $\begin{bmatrix} ٣ & س & ٥ \\ -١ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٤ & ص \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$

الحل

$$\begin{bmatrix} ٣+٤س+٢٥ & ١٨+س ص+٤٠ \\ -١+١٦+١٠- & -٦+٤ص-١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤س+٢٨ & س ص+٥٨ \\ ٥ & ٤ص-٢٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٦٤ \\ ٥ & -٣٤ \end{bmatrix}$$

**من تساوي المدخلات المتناظرة :**

$$٤س+٢٨=٢٠ \Leftarrow ٤س=-٨ \Leftarrow \boxed{س=-٢}$$

$$٤ص-٢٢=-٣٤ \Leftarrow ٤ص=-١٢ \Leftarrow \boxed{ص=-٣}$$

**السؤال الرابع :** إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \end{bmatrix}$ فبين أن س=٥ص

**الحل**

$$س = \begin{bmatrix} ٢\times٤+١\times٣+(-١)\times٠ & ٢\times٥+٣\times٢+(-١)\times٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١١ & ١٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١\times٦+١٣\times(-٢) & ١١\times٢+١٣\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٠ & ٣٥ \end{bmatrix}$$

$$= ٥ \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \end{bmatrix} = ٥ص$$

---

**السؤال الخامس :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فبين أن: $أ^{٢} - ب^{٢} \neq (أ-ب)(أ+ب)$

**الحل**

$$(أ)^{٢} = أ \cdot أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$(ب)^{٢} = ب \cdot ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٣ & ١٨ \end{bmatrix}$$

$$(أ)^{٢} - (ب)^{٢} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٣ & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & -٩ \end{bmatrix}$$

$$أ - ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -١ & -١ \end{bmatrix}$$

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$(أ-ب)(أ+ب) = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -١ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -٢ & -١٠ \end{bmatrix}$$

**نلاحظ أن** $(أ)^{٢} - (ب)^{٢} \neq (أ-ب)(أ+ب)$

---

**السؤال السادس :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فهل يمكن إيجاد قيمة/قيم س بحيث أن: $أ^{٢} = ب$

**الحل**

$$(أ)^{٢} = ب \Leftarrow أ \cdot أ = ب$$

$$\begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} س\times س+٠\times١ & ٠\times س+٠\times١ \\ ١\times س+١\times١ & ٠\times١+١\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} س^{٢} & ٠ \\ س+١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

**لا يمكن إيجاد قيمة س؛ لأن المصفوفتان غير متساويتان حيث** $١ \neq ٠$ $\quad م.ع = \varnothing$

**السؤال السابع :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -١ \end{bmatrix}$

**فرع أ :** جد المصفوفة د بحيث أن: $أ + د = ب \cdot د$

**الحل**

حتى يصبح جمع المصفوفة $أ$ مع المصفوفة $د$ يجب ان يكونوا من نفس الرتبة $\Leftarrow$ رتبة المصفوفة $ه = ٢ \times ١$

بفرض أن المصفوفة $ه = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

$$أ + د = ب \cdot د \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ + س \\ -٣ + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \times س + ٢ \times ص \\ ١ \times س + ٠ \times ص \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ + س \\ -٣ + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س \end{bmatrix}$$

من تساوي المدخلات المتناظرة :

$$٢ + س = ٣س + ٢ص \Leftarrow ٢س + ٢ص = ٢ \Leftarrow \boxed{س + ص = ١} \leftarrow \boxed{١}$$

$$-٣ + ص = س \Leftarrow \boxed{س - ص = -٣} \leftarrow \boxed{٢}$$ ( بجمع المعادلة ١ مع المعادلة ٢ )

$$٢س = -٢ \Leftarrow س = -١$$ ( بالتعويض في المعادلة ١ ) $\Leftarrow ص = ٢ \Leftarrow \boxed{د = \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix}}$

---

**فرع ب :** بين أن: $جـ^{٣} = جـ$

**الحل**

$$جـ^{٣} = جـ \cdot جـ \cdot جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \times ١ + ٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} & ١ \times ٠ + ٠ \times -١ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ١ + -١ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٠ + -١ \times -١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ \frac{\sqrt{٣}}{٢} & -١ \end{bmatrix} = جـ$$

**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

# العمـليات علـى المصـفوفات

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات حيث أ × ب = جـ وكانت رتبة ب تساوي ٢ × ٣ ورتبة جـ = ٢ × ٣ فان رتبة أ هي :<br>أ) ٢ × ٣ ب) ٣ × ٢ ج) ٣ × ٣ د) ٢ × ٢ | د |
| ٢ | اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$ فان ٣أ٣ − ٢(أ + ب) + ١ب يساوي<br>أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ | ب |
| ٣ | اذا كان $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & س \\ ٤ & ٥ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢- & ٢ \\ ١ & ٠ \\ ص & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ١- \\ ١٩ & ٢- \end{bmatrix}$ فان قيمتي س ، ص هما :<br>أ) ٨ ، ٩ ب) ١ ، ٦ ج) ٩ ، ١٠ د) ٤ ، ٥ | ب |
| ٤ | مجموعة قيم س التي تجعل : $[٢ \quad س] \begin{bmatrix} ٥ \\ س \end{bmatrix} = [١٩]$ هي<br>أ) {٤ ، ٥} ب) {٣ ، −٣} ج) {٩} د) {٦} | ب |
| ٥ | اذا كانت أ$_{٢\times٣}$ ، ب$_{٣\times٢}$ ، جـ$_{٢\times٢}$ أي العمليات الآتية يمكن اجرائها<br>أ) أ × ب + جـ ب) ب × أ + جـ ج) أ × جـ + ب د) ب × أ + أ | ب |
| ٦ | اذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١- & س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ص \\ ١- & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix}$ ، فان س + ص =<br>أ) ١٠ ب) ٥ ج) ٠ د) −٥ | أ |

| | | |
|---|---|---|
| ٧ | اذا كانت ا ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن $أ_{ن\times ٢} \times ب_{ي\times ١} = جـ_{٢\times ١}$ ، فان ن + ي تساوي<br>أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ٥ | د |
| ٨ | اذا كانت ا ، ب ، جـ مصفوفات بحيث تكون عملية الجميع والطرح معرفتين وكان ك عدد حقيقي فان العبارة الصحيحة فيما يلي هي :<br>أ ) اذا كان ا . ب =ا .جـ ، فان ب =جـ<br>ب) ا . ب =ب.ا<br>ج) ك(ا.ب) = (كا).(كب)<br>د) (ا + ب) . جـ = ا.جـ + ب.جـ | د |

| | | |
|---|---|---|
| ١ | اذا علمت ان $ا = \frac{-١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة س التي تحقق<br>$\frac{٢}{٣}س + ٣ا = ا^{٢} - \frac{١}{٣}س$ | $س = \begin{bmatrix} ١٠ & -٨ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ |
| ٢ | اذا كانت $ا = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة<br>$١٥ا^{٢} + ١٥اب - ١٤(ا + ب)$ | $\begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ٣ | اذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٨ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة ب بحيث $٣أ + ٢ب = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \end{bmatrix}$ | $ب = \begin{bmatrix} -١٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ |
| ٤ | اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -٣ & ٠ \end{bmatrix}$<br>حل المعادلة المصفوفية $٢س + ب = أ + ٣جـ$ : | $س = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ |
| ٥ | حل المعادلة المصفوفية :<br>$-٣\left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix} + س\right) = ٢س + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ | $س = \begin{bmatrix} \frac{-٧}{٥} & -٢ \\ \frac{-١٢}{٥} & \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$ |
| ٦ | اذا كانت :<br>$\begin{bmatrix} ٣ & أ & ٤ \\ ٠ & ٢ & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٣ \\ ب & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٥ & ٥ \end{bmatrix}$ ،<br>جد قيمة أ + ب | $-٢$ |
| ٧ | اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٣ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، وكانت<br>$جـ = أ ب$ فأوجد $جـ_{٣٢}$ ، $جـ_{٢١}$ | $جـ_{٣٢} = ٧$<br>$جـ_{٢١} = ٤$ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

الملتقى التربوي
www.wepal.net

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | حل المعادلة المصفوفية التالية $٢س + ٣ب = أ + ب$<br>حيث $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ج = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ج = ب - أ$ | $س = \begin{bmatrix} \frac{٥-}{٢} & ١- \\ \frac{٧}{٢} & \frac{٩-}{٢} \end{bmatrix}$ |
| ٢ | إذا كان $أ_{٣\times٢}$ ، $ب_{٢\times٣}$ ، $ج_{٢\times٢}$ أي العمليات التالية يمكن إجرائها<br>أ) $ب \times ج + أ$<br>ب) $أ \times ب + ج$<br>ج) $ب \times أ + ج$<br>د) $أ \times ج \times ب$<br>ه) $ج^{٢} + ب$<br>و) $ج \times ب + أ$<br>ز) $ج \times ب + ب$ | ج<br>ى<br>ز |
| ٣ | إذا كان $أ = \begin{bmatrix} س^{٢} & سص \\ سص & ص^{٢} \end{bmatrix}$ ، $س، ص \in ع$ أثبت أن<br>١- $أ^{٢} = أ$ حيث $س^{٢} + ص^{٢} = ١$<br>٢- $ب^{٢} = ب$ حيث $ب = م - أ$ | |

## الدرس الثالث المحددات

### القسم الأول : الملخص

**محدد المصفوفة :** ربط المصفوفة بعدد حقيقي

١ ) اذا كانت $أ = [أ_{١١}]$ فان $|أ| = أ_{١١}$

٢ ) اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ قان محدد أ ويرمز له بالرمز $|أ|$

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}أ_{٢٢} - أ_{١٢}أ_{٢١}$$

٣ ) اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$

$$|أ| = أ_{١١}\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١}\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١}\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

**نظرية :**

اذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ، فانه يمكن ايجاد $|أ|$ بدلالة مدخلات أي صف أو عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ واعطاء اشارة لحاصل الضرب وفق القاعدة $(-١)^{ي+هـ}$

الملتقى التربوي
www.wepal.net

## خصائص المحددات :

١ ) عند تبديل صف مكان صف أو عمود مكان عمود آخر فان قيمة المحدد تضرب بـــ ( - ١)

مثال: $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} (-١) = \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$

٢ ) يمكن اخراج عامل مشترك أي من صف أو عمود

مثال : $\begin{vmatrix} -٢ & ٥ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} ٦ = \begin{vmatrix} -٢ & ٥ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix}$ ( اخراج ٦ عامل مشترك من الصف الثاني )

٣ ) اذا أضيف لمدخلات أي صف أو أي عمود مضاعفات نظائرها في صف آخر أو عمود آخر فلا تتغير قيمة المحدد

مثال : $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ١٥ ،$ $\begin{vmatrix} ٣ \times ٢ + ٥ & ٦ \times ٢ + ١٥ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ١٥$

٤ ) اذا تساوت المدخلات المتناظرة في صفين أو في عمودين في مصفوفة فان محددها يساوي صفرا

مثال : $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix} = ٠$

٥ ) اذا كانت المصفوفة مصفوفة مثلثية علوية فان محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي

مثال : $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$ فان $|أ| = أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$

٦ ) اذا كان مدخلات أي صف أو عمود كلها اصفارا فان قيمة المحدد تساوي صفرا

مثال : $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix} = ٠$

### قواعد هامة :

١ ) اذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن ،فان $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$ ، حيث ك ∈ ح

٢ ) اذا كانت أ ، ب مصفوفتين من الرتبة ن فان $|أ . ب| = |أ| \times |ب|$

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول : جد قيمة كل من المحددات الآتية:**

**فرع أ :**

**الحل**

$$\begin{vmatrix} ٤- & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٤- \end{vmatrix} = ٤- \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٦ & ١ \\ ٤- & ٢ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٤- & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٤-(٥\times٢-١\times٣)-٣(٦\times٢--١\times٤)+٢(٦\times٣--٥\times٤)$$

$$= ٤-٧\times٤-٢٨-٤٨+٧٦ = ٠$$

**فرع ب :**

**الحل**

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤- \\ ٨ & ٨ \end{vmatrix} = ٢\times٨-٨\times٤- = ١٦--١٦ = ٣٢$$

**فرع جـ :**

**الحل**

$|٥أ_{٣}| = ٥^{٣}\times|أ_{٣}| = ٥^{٣}\times١ = ١٢٥$

م مصفوفة وحدة مربعة من الرتبة الثالثة ( استخدام قاعدة $|ك أ| = ك^{ن}|أ|$ )

---

**السؤال الثاني: حل المعادلة الآتية:** $\begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ١- \\ ١ & س \end{vmatrix}$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٤ & س & ٥ \\ ١ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ١- \\ ١ & س \end{vmatrix}$$

$$٢\begin{vmatrix} س & ٥ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} - -١\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} = س^{٢} - (١-)$$

$$٢(س\times٣-٥\times٦)+١(٤\times٣-١\times٥)+٣(٤\times٦-١\times س) = س^{٢}+١$$

$$٢(٣س-٣٠)+١(١٢-٥)+٣(٢٤-س) = س^{٢}+١$$

$$٦س-٦٠+١٢+٥-٧٢+٣س = س^{٢}+١$$

$$٣س+١٩ = س^{٢}+١ \Leftarrow س^{٢}-٣س-١٨ = ٠$$

$$(س-٦)(س+٣) = ٠ \Leftarrow \text{ س = ٦ ، س = }-٣$$

---

**السؤال الثالث : إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية بحيث أن $|٣أ| = ٥٤$ ، $|أ.ب| = -١٢$،**

**فما قيمة $|٢أ| + |٥ب|$**

**الحل**

$|٣أ| = ٥٤ \Leftarrow ٣^{٢}|أ| = ٥٤ \Leftarrow ٩|أ| = ٥٤ \Leftarrow \boxed{|أ| = ٦}$

$|أ.ب| = -١٢ \Leftarrow |أ||ب| = -١٢ \Leftarrow ٦|ب| = -١٢ \Leftarrow \boxed{|ب| = -٢}$

$|٢أ| + |أب٥| = ٢^{٢}|أ| + ٥^{٢}|ب| = ٤|أ| + ٢٥|ب|$ بالتعويض عن قيمة $|أ| = ٦ ، ب = -٢$

$= ٤ \times ٦ + ٢٥ \times -٢ = -٢٦$

---

**السؤال الرابع :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{٣}| = ١٢٥$ ، فما قيمة/ قيم س؟

**الحل**

$|أ^{٣}| = ١٢٥ \Leftarrow |أ . أ . أ| = ١٢٥ \Leftarrow |أ| . |أ| . |أ| = ١٢٥$

$\Leftarrow (|أ|)^{٣} = ١٢٥ \Leftarrow \boxed{|أ| = ٥}$

$|أ| = \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = س \times س - ٢ \times ٢ = س^{٢} - ٤ \Leftarrow (س^{٢} - ٤) = ٥ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Leftarrow \boxed{س = \pm ٣}$

---

**السؤال الخامس :** إذا علمت أن معادلة المستقيم في المستوى والمار بالنقطتين $(س_{١}، ص_{١})$ ، $(س_{٢}، ص_{٢})$ تعطى

بالقاعدة $\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ س_{١} & ص_{١} & ١ \\ س_{٢} & ص_{٢} & ١ \end{vmatrix} = ٠$

فاستخدم القاعدة في إيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(٣، ٢)$ ، $(٥، ٧)$

**الحل**

$\begin{vmatrix} س^{+} & ص^{-} & ١^{+} \\ س_{١} & ص_{١} & ١^{-} \\ س_{٢} & ص_{٢} & ١^{+} \end{vmatrix} = ٠$ $(س_{١}، ص_{١}) = (٣، ٢)$ ، $(س_{٢}، ص_{٢}) = (٥، ٧)$

$\Leftarrow \begin{vmatrix} س^{+} & ص^{-} & ١^{+} \\ ٣^{-} & ٢^{+} & ١^{-} \\ ٥^{+} & ٧^{-} & ١^{+} \end{vmatrix} = ٠$ باستخدام مدخلات العمود الثالث

$\Leftarrow \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} س & ص \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$

$\Leftarrow ١١ - (٧س - ٥ص) + (٢س - ٣ص) = ٠$

$\Leftarrow ١١ - ٧س + ٥ص + ٢س - ٣ص = ٠$

$\Leftarrow$ ٨ص – ٥س + ١١ = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{٨ص = ٥س - ١١}$

**السؤال السادس : اذكر خاصية/خصائص المحددات التي استخدمت في كل من المتساويات الآتية:**

**فرع أ :** $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٤- \end{vmatrix}$

**الحل** بضرب الصف الأول في -٢ ثم جمعه مع الصف الثاني

**فرع ب :** $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$

**الحل** إخراج ٣ عامل مشترك من العمود الثاني ومن تساوي العمود الأول والعمود الثاني فان المحدد يساوي صفر

**فرع جـ :** $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$

**الحل** تبديل العمود الأول والعمود الثاني

**السؤال السابع : باستخدام خصائص المحددات أثبت ما يلي:**

**فرع أ :** $\begin{vmatrix} ١ & أ & ب+جـ \\ ١ & جـ & أ+ب \\ ١ & ب & أ+جـ \end{vmatrix} = ٠$

**الحل**

$\begin{vmatrix} ١ & أ & ب+جـ \\ ١ & جـ & أ+ب \\ ١ & ب & أ+جـ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & أ & أ+ب+جـ \\ ١ & جـ & أ+ب+جـ \\ ١ & ب & أ+ب+جـ \end{vmatrix}$ بضرب العمود الثاني في ١ وجمعه مع العمود الأول

$= \begin{vmatrix} ١ & أ & أ+ب+جـ \\ ١ & ب & أ+ب+جـ \\ ١ & جـ & أ+ب+جـ \end{vmatrix}$ بأخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من العمود الأول

$= (أ+ب+جـ) \begin{vmatrix} ١ & أ & ١ \\ ١ & ب & ١ \\ ١ & جـ & ١ \end{vmatrix}$ تساوي العمود الأول مع العمود الثاني فان قيمة المحدد يساوي صفر

$= (أ+ب+جـ) \times ٠ = ٠$

**فرع ب :** $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & ٤- & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠ \Leftarrow \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & ٤- & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix}$ حاصل ضرب القطر الرئيسي ( مصفوفة مثلثية )

$= ٥ \times ٤- \times ١٠ = -٢٠٠$

**القسم الثالث :اسئلة اثرائية**

## المحـــــــــــددات

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فان $\|٢أ\| =$<br>أ) $-٢$ ب) ٢ ج) ٨ د) $-٨$ | د |
| ٢ | اذا علمت أن $\|أ \times ب\| = -٧$ وكان $\|-٢ب\| = -٤$، أ ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية فان $\|أ\| =$<br>أ) ٧ ب) $-٧$ ج) $\frac{٧}{٢}$ د) $\frac{-٧}{٢}$ | أ |
| ٣ | اذا كان $\begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٢$ ، فان قيمة س تساوي :<br>أ) ٢ ب) $-٢$ ج) ٣ د) ٤ | أ |
| ٤ | اذا كانت أ ، ب مصفوفتان مربعتان من الرتبة ن ، فان احدى العبارات الآتية صائبة<br>أ) $\|أ + ب\| = \|أ\| + \|ب\|$ ج) $\|أ ب\| = \|أ\| \times \|ب\|$<br>ب) $\|أ - ب\| = \|أ\| - \|ب\|$ د) $أ \times ب = ب \times أ$ | ج |
| ٥ | اذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٢ وكانت $\|أ\| = -٢$ فان $\|٤أ\| =$<br>أ) $-٨$ ب) ٣٢ ج) $-٣٢$ د) ٨ | ج |
| ٦ | اذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ س & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\|٢أ\| = ١٢$ فان قيمة س<br>أ) $-١$ ب) $+١$ ج) ٢ د) $-٤$ | ب |
| ٧ | اذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ فان $\|س\| + \|ص\| =$<br>أ) $-١٦$ ب) ٢١ ج) ٦ د) $-٦$ | ج |

| | | |
|---|---|---|
| ٨ | اذا كانت ص مصفوفة من الرتبة ٣×٣ وكان $\|ص\| = ٥$ ، وقمنا بابدال الصفين الأول والثالث ثم أبدلنا الثاني والثالث فان قيمة المحدد الجديد =<br>أ) ٠ ب) ١ ج) $-٥$ د) ٥ | د |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ س & ٤ & ٥ \\ ٦ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٧ & ٤ \\ ٣ & س \end{vmatrix}$ | $س = \frac{-١٣}{١٠}$ |
| ٢ | دون حساب قيمة المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ١٣ & ٥ & ٠ \\ ٨ & ٧ & ٦ \\ ٦ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ٠$ | - |
| ٣ | اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ جد $\|أ \times ب\|$ | ٢٤ |
| ٤ | ماقيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٥ & ٢س-٣ \end{vmatrix} = ٢٠$ | $س = ٤$ ، $س = \frac{-٥}{٢}$ |
| ٥ | اكتب خاصية / الخصائص المحددات المستخدمة في كل من :<br>أ) $\begin{vmatrix} ٢ & -٦ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = ٠$<br>ب) $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٨ & ٧ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٠ & ١٩ \end{vmatrix}$ | الحل : ضرب الصف الأول في -٤ ثم جمع مع الصف الثاني<br>الحل : ١) عامل مشترك – ٣ من العمود الثاني<br>٢) تساوي العمود الأول والثاني |

| | | |
|---|---|---|
| ٦ | ٦) استخدام خصائص المحددات أثبت أن:<br>أ) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ص & ع \\ صع & سع & سص \end{vmatrix} = (س-ص)(ص-ع)(ع-س)$<br>ب) $\begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & جـ & جـ^{٢} \end{vmatrix} = (ب-أ)(جـ-أ)(جـ-ب)$ | – |
| ٧ | اذا كانت $س = \begin{bmatrix} أ & ى & ك \\ ب & هـ & م \\ جـ & و & ع \end{bmatrix}$ وكان $\lvert س \rvert = ٥$ ، فما قيمة<br>$س = \begin{vmatrix} ٢أ & ٣ى & ٤ك \\ ٢ب & ٣هـ & ٤م \\ ٢جـ & ٣و & ٤ع \end{vmatrix}$ | ١٢٠ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | إذا كان $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & س+١ \\ ٠ & ٣ & ١ \\ ٣ & س+٢ & ٢ \end{bmatrix}$ جد قيمة س بحيث $\|ب\| \leq ٠$ | $\left[-\infty، \frac{١}{١٠}\right[$ |
| ٢ | باستخدام خصائص المحددات أثبت أن $\begin{vmatrix} ٩ & ١ & -٥ \\ -٦ & -٢ & ٦ \\ ٨ & ٥ & -٨ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٩ \\ ١ & ٣ & ٣ \\ ٥ & ٨ & ٨ \end{vmatrix}$ | |
| ٣ | حل المعادلة $\begin{vmatrix} ١ & جاس & ٢ \\ جاس & ١ & جتاس \\ ٠ & جتاس & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢}$ ، $س \in ]٠، \pi[$ | $س = \frac{\pi}{١٢}، \frac{\pi ٥}{١٢}$ |

## الدرس الرابع النظير الضربي للمصفوفة

### القسم الأول : الملخص

**النظير الضربي للمصفوفة المربعة :**

**اذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن ،فان المصفوفة ب من الرتبة ن تسمي نظيرا ضربيا للمصفوفة أ اذا كان أب = ب أ = م حيث م المصفوفة المحايدة من الرتبة ن .**

( يرمز النظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$ أي ان ب = $أ^{-١}$ ويكون $أ.أ^{-١} = أ^{-١}.أ = م$

**المصفوفة المنفردة :** هي المصفوفة المربعة التي ليس لها نظير ضربي

**المصفوفة الغير منفردة :** هي المصفوفة المربعة التي لها نظير ضربي

**نظرية :** تكون المصفوفة أ مصفوفة منفردة اذا وفقط اذا كان $|أ| = ٠$

**خصائص النظير الضربي : اذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين ، وغير منفردتين ، ومن نفس الرتبة ، وكانت ك عددا حقيقيا ≠٠ ، فان :**

أ ) $(أ^{-١})^{-١} = أ$

ب ) $(كأ)^{-١} = \frac{١}{ك}(أ)^{-١}$

ج ) $(أ.ب)^{-١} = ب^{-١}.أ^{-١}$

**تعميم : ( ايجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية )**

اذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢١} \end{bmatrix}$ مصفوفة غير منفردة فان $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١١} & أ_{٢١} \end{bmatrix}$

أي أن $أ^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة أ بمقلوب محددها بعد تبديل مدخلات القطر الرئيسي وتغيير اشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول : بين أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي:**

**فرع أ :** $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -٨ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$

**الحل** $|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & -٨ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٢٤ - -٢٤ = ٤٨$ **لها نظير ضربي**

---

**فرع ب :** $ب = \begin{bmatrix} ٣ & جاس \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

**الحل** $|ب| = \begin{vmatrix} ٣ & جاس \\ -١ & ١ \end{vmatrix} =$ جاس $+ ٣$ ، جاس $\neq -٣$ **لها نظير ضربي** " $-١ \geq$ جاس $\geq ١$ "

---

**فرع جـ :** $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

**الحل** $|جـ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ٩ = ٠$ **ليس لها نظير ضربي " لانها مصفوفة منفردة "**

---

**فرع د :** $د = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٨ & -١ \end{bmatrix}$

**الحل** $|د| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٨ & -١ \end{vmatrix} = ٣ \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٢ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٨ & -١ \end{vmatrix} = ٣ \times ٠ = ٠$ **ليس لها نظير ضربي " لانها مصفوفة منفردة "**

---

**السؤال الثاني : ما قيم ك التي تجعل كلا من المصفوفات الآتية منفردة؟**

**فرع أ :** $أ = \begin{bmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{bmatrix}$

**الحل** $|أ| = ٠ \Leftarrow \begin{vmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ك \times ٢ك - ك \times ٤ = ٢ك^{٢} - ٤ك = ٠$

$\Leftarrow ك(٢ك - ٤) = ٠ \Leftarrow$ **ك = ٠ ، ك = ٢**

---

**فرع ب :** $ب = \begin{bmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{bmatrix}$

**الحل** $|ب| = ٠ \Leftarrow \begin{vmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ك \times ك - ١ \times ٤ = ك^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow ك^{٢} = ٤ \Leftarrow$ **ك = ٢** ، **ك = -٢**

**السؤال الثالث :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فجد

**فرع أ :** $أ^{-١}$ (إن أمكن)

**الحل**

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - ٣ \times ٤ = ١٠ - ١٢ = -٢$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢}\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} \Leftarrow أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{-٥}{-٢} & \frac{٣}{-٢} \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

---

**فرع ب :** $(أ^{-١})^{-١}$ (ماذا تلاحظ)

**الحل**

نلاحظ أن $(أ^{-١})^{-١} = أ$ ( باستخدام خصائص النظير الضربي )

---

**السؤال الرابع :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}| = \frac{١}{٥}$ ، فما قيمة س؟

**الحل**

$|أ| = ٣ \times س - ٥ \times ٢ = ٣س - ١٠$

$|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|} \Leftarrow \frac{١}{٣س - ١٠} = \frac{١}{٥}$ ، بالضرب التبادلي ينتج $٥ = ٣س - ١٠ \Leftarrow ١٥ = ٣س \Leftarrow س = ٥$

---

**السؤال الخامس :** إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & -٣ \\ ١ & ص \end{bmatrix}$ ، وكان $|أ^{-١}| = |أ|$ فما قيمة/قيم المقدار(س. ص)؟

**الحل**

$|أ| = س \times ص - (-٣) \times ١ \Leftarrow |أ| = س ص + ٣$ ، ( من معلومية $|أ^{-١}| = \frac{١}{|أ|}$ )

$\Leftarrow |أ| = \frac{١}{|أ|} \Leftarrow |أ||أ| = ١ \Leftarrow (|أ|)^{٢} = ١ \Leftarrow |أ| = \pm ١$

اما $|أ| = ١$ ومنها $س ص - (-٣) = ١ \Leftarrow \boxed{س ص = -٢}$

أو $|أ| = -١$ ومنها $س ص + ٣ = -١ \Leftarrow \boxed{س ص = -٤}$

---

**السؤال السادس :** إذا علمت أن $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، وكان أ . جـ = ب ، فجد $جـ^{-١}$

**الحل**

$أ \cdot جـ = ب$ ( نضرب بالنظير الضربي للمصفوفة أ من جهة اليمين )

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ - ٣ \times ٤ = ٢ - ١٢ = -١٠ \quad \text{ومنها} \quad أ^{-١} = \frac{-١}{١٠}\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$\therefore أ \cdot جـ = ب \Leftarrow$ بالضرب في $أ^{-١}$ من جهة اليمين : $أ^{-١} \cdot أ \cdot جـ = أ^{-١} \cdot ب \Leftarrow \boxed{جـ = أ^{-١} \cdot ب}$

$$\text{جـ} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}\frac{1}{10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \Leftarrow \text{جـ}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore |\text{جـ}| = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10} \quad \text{ومنها} \quad \text{جـ}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{10}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

**السؤال السابع :** إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وغير منفردة، وكان ك عددا حقيقيا لا يساوي صفرا فأثبت أن: $(\text{ك أ})^{-1} = \frac{1}{\text{ك}}(\text{أ}^{-1})$

**الحل**

$(\text{ك أ})(\text{ك أ})^{-1} = \text{م} \Leftarrow \frac{1}{\text{ك}}(\text{ك أ})(\text{أ})^{-1} = \text{م} \Leftarrow \text{أ}(\text{ك أ})^{-1} = \frac{1}{\text{ك}}\text{م}$

$\Leftarrow \text{أ}^{-1}\text{أ}(\text{ك أ})^{-1} = \text{أ}^{-1}\frac{1}{\text{ك}}\text{م} \Leftarrow (\text{ك أ})^{-1} = \text{أ}^{-1}\frac{1}{\text{ك}}\text{م} = \boxed{\frac{1}{\text{ك}}(\text{أ})^{-1}}$ حيث م مصفوفة الوحدة

**السؤال الثامن :** إذا كانت أ،ب مصفوفتين مربعتين وكانت أ مصفوفة غير منفردة بحيث أ . ب = أ . جـ فأثبت أن ب = جـ

**الحل**

∵ أ مصفوفة غير منفردة ∴ يوجد نظير ضربي للمصفوفة أ

ومن معلومية أن : أ . ب = أ . جـ " نضرب في $\text{أ}^{-1}$ من جهة اليمين "

$\Leftarrow \text{أ}^{-1}.\text{أ}.\text{ب} = \text{أ}^{-1}.\text{أ}.\text{جـ}$ ، حيث أن $\text{م} = \text{أ}^{-1}.\text{أ}$

$\Leftarrow \text{م}.\text{ب} = \text{م}.\text{جـ}$

$\Leftarrow \boxed{\text{ب} = \text{جـ}}$ ( حيث م مصفوفة الوحدة )

## القسم الثالث :اسئلة اثرائية

# النظير الضربي للمصفوفة المربعة

| # | القسم الأول : اختر الاجابة الصحيحة | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | اذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ منفردة فان س =<br>أ) ٢ ب) ٢ ، -٢ ج) ٤ د) ٤ ، -٤ | ب |
| ٢ | اذا كانت أ و ب مصفوفتان مربعتان غير منفردتان ، فان احدى العبارات الاتية صحيحة :<br>أ) $\|أ+ب\| = \|أ\| + \|ب\|$ ب) $(أب)^{-١} = أ^{-١}ب^{-١}$ ج) $أ \times ب = ب \times أ$ د) $\|أب\| = \|أ\|\|ب\|$ | د |
| ٣ | اذا علمت أن $أ٢ = \begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فان $أ^{-١}$ =<br>أ) $\begin{bmatrix} -٤ & ٦ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & -\frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٦} & \frac{١}{٣} \end{bmatrix}$ | د |
| ٤ | المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات التالية هي :<br>أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix}$ | ج |
| ٥ | قيم س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} (س-١) & ٣ \\ ٤ & (س-٢) \end{bmatrix}$ منفردة هي :<br>أ) $\{٥ ، -٢\}$ ب) $\{٥ ، -٢\}$ ج) $\{١٠ ، ١\}$ د) $\{١٠ ، -١\}$ | ب |
| ٦ | مصفوفة من الرتبة م ×ن ، احدى العبارات الأتية صحيحة دائما :<br>أ) للمصفوفة أ نظير ضربي ب) يمكن إيجاد المصفوفة أ×أ<br>ج) يمكن تنفيذ العملية : ٤+أ د) للمصفوفة أ نظير جمعي | د |

| | | |
|---|---|---|
| ٧ | المصفوفة التي لها نظير ضربي من بين المصفوفات الاتية هي :<br>أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ | أ |
| ٨ | اذا كانت أ مصفوفة ثنائية ، وكان أ$^{-١}$ هو النظير للمصفوفة أ ، فان أ.أ$^{-١}$ =<br>أ) $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ | ج |

| # | القسم الثاني : أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | أ ، ب مصفوفتان غير منفردتان وكان ب = ٢أ$^{-١}$ ، أوجد أ . ب | ٢ م |
| ٢ | اذا كانت س= $\begin{bmatrix} ٢ & ٧- \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$ ، ص= $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ع= $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ،<br>بين أن : س ص = ٢ع$^{-١}$ | س ص = ٢ع$^{-١}$ |
| ٣ | اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٤- \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة ب بحيث<br>أ.ب= جـ | $\begin{bmatrix} ١ \\ ١- \end{bmatrix}$ |
| ٤ | اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد (٢أ)$^{-١}$ | $\begin{bmatrix} \frac{٦}{٢٨} & \frac{٢-}{٢٨} \\ \frac{٢}{٢٨} & \frac{٤}{٢٨} \end{bmatrix}$ |
| ٥ | اذا كان ب$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix}$ ، وكان ب × أ - $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ = و ، جد<br>المصفوفة أ . | $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٥- & ١٢- \end{bmatrix}$ |
| ٦ | اذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فأوجد (أ × ب)$^{-١}$ . | $\begin{bmatrix} \frac{٢٢}{١٠} & \frac{١٤-}{١٠} \\ \frac{٤-}{١٠} & \frac{٣}{١٠} \end{bmatrix}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ٧ | اذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان أ$^{-١}$ × $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٣س & ٦ص \\ ع & ٩ل \end{bmatrix}$<br>فما قيمة $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$ ؟ | $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ \frac{١}{٢} & -١ \\ \frac{١}{٣} & \end{bmatrix}$ |
| ٨ | اذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، أوجد س التي تحقق المعادلة :<br>أ$^{٢}$ + بس = ٢س − ب$^{-١}$ | $\begin{bmatrix} ١١ & ٣ \\ ٢٣ & ٨ \end{bmatrix}$ |
| ٩ | اذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٦ & ١ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، أوجد :<br>١. ٣أ − ب ٢) ب$^{-١}$ | $\begin{bmatrix} ١٨ & -١٠ \\ ١١ & -١١ \end{bmatrix}$<br>$\begin{bmatrix} \frac{-١}{٢} & \frac{-١}{٢} \\ -٣ & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | جد قيمة الثوابت س ، ص ، ع ، ل ، اذا كان :<br>$\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢س & ص+٣ \\ ٣ل+٥ & ع^{٢}+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ | س = −٦<br>ص = ١٤<br>ل = −٤<br>ع = ±٣ |
| ٢ | إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بحيث س = س$^{-١}$ ، حل المعادلة المصفوفية ٣س$^{٢}$ + ٢س = م$_{٢}$ | س = $\begin{bmatrix} ١ & -٠ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ |
| ٣ | إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$ (أب)$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، جد ب | ب = $\frac{-١}{٢٨}\begin{bmatrix} -٣ & -٢ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ |

## الدرس الخامس حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات

### القسم الأول : الملخص

من التطبيقات المهمة للمصفوفات استخدامها في حل أنظمة المعادلات الخطية ، ويمكن اجراء ذلك بعدة طرق منها :

**١ ) طريقة النظير الضربي :**

اذا كان لدينا النظام $أ_{١١}س + أ_{٢١}ص = جـ_{١}$

$أ_{١٢}س + أ_{٢٢}ص = جـ_{٢}$

فاننا نكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية كالتالي:

$$\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} جـ_{١} \\ جـ_{٢} \end{bmatrix}$$

أي على صورة أع = جـ ، حيث أ مصفوفة المعاملات ، ع مصفوفة المتغيرات ، جـ مصفوفة الثوابت

فاذا كانت أ مصفوفة غير منفردة فان $أ^{-١}$ موجود ، وبضرب طرفي المعادلة من اليمين في $أ^{-١}$ وينتج ع = $أ^{-١}$ جـ ، ومنها نجد حل النظام

**ملاحظة :** في النظام أع = جـ ، اذا كانت أ مصفوفة منفردة فلا يمكن استخدام طريقة النظير الضربي وفي هذه الحالة اما ان يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول او ليس له حل .

**٢ ) طريقة كريمر :**

حل نظام من المعادلات الخطية مكون من معادلتين في متغيرين ( مجهولين ) س ، ص والذي يتخذ الصورة أع = جـ ، حيث أ مصفوفة المعاملات ، ع مصفوفة المتغيرات ، جـ مصفوفة الثوابت ، $|أ| \neq ٠$ هو

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} ، ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$$

حيث $|أ_{س}|$ هو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الأول بعمود مصفوفة الثوابت

$|أ_{ص}|$ هو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الثاني بعمود مصفوفة الثوابت

## ٣ ) طريقة جاوس :

اذا كان لدينا النظام $أ_{١١}س + أ_{٢١}ص + أ_{٣١}ع = جـ_{١}$

$أ_{١٢}س + أ_{٢٢}ص + أ_{٣٢}ع = جـ_{٢}$

$أ_{١٣}س + أ_{٢٣}ص + أ_{٣٣}ع = جـ_{٣}$

فان المصفوفة الممتدة للنظام هي $\bar{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} & جـ_{١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} & جـ_{٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} & جـ_{٣} \end{array}\right]$

لحل النظام نجري بعض العمليات الآتية على صفوف $\bar{أ}$ لنحصل على مصفوفة مثلثية علوية

ومن هذه العمليات :

١) تبديل صف مكان صف آخر

٢ ) ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفرا

٣) ضرب مدخلات أي صف بعدد لا يساوي صفرا واضافتها الى صف آخر

ثم نجد قيمة المتغير ع ثم بالتعويض العكسي نجد قيمة المتغير ص ، ثم المتغير س .

**ملاحظة :** اذا كانت $أ_{١١} = ٠$ فيمكن تبديل صف مدخلته الأولى $\neq ٠$ مكان الصف الأول في المصفوفة الممتدة $\bar{أ}$

عندما يراهنون على فشلك وتنجح ، يكون طعم الانتصار الذ

## القسم الثاني : حلول تمارين الكتاب

**السؤال الأول :** حل كلا من الأنظمة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

**فرع أ :**

$$\begin{aligned} س - ص &= ٣ \\ ٢س + ص &= ٦ \end{aligned}$$

**الحل**

،  .

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١\times١ - ١-\times٢ = ١ - ٢- = ٣$$

$$\Leftarrow أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢-}{٣} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{١}{٣} & \frac{٢-}{٣} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

$\therefore س = \boxed{٣}$ ، $ص = \boxed{٠}$

---

**فرع ب :**

$$\begin{aligned} س + ص &= ٢ \\ ١٠س + ص &= ١١ \end{aligned}$$

**الحل**

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$ بفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{vmatrix} = ١\times١ - ١٠\times١ = ١ - ١٠ = ٩-$$

$$\Leftarrow أ^{-١} = \frac{١}{٩-}\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ١٠- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{١-}{٩} \\ \frac{١-}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{١-}{٩} \\ \frac{١-}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$\therefore س = \boxed{١}$ ، $ص = \boxed{١}$

**السؤال الثاني :** حل أنظمة المعادلات الآتية باستخدام طريقة كريمر:

**فرع أ :**

$$س - ص = ٥$$
$$س + ٢ص = ٢$$

**الحل**

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} ، \quad أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} ، \quad أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ - (-١) \times ١ = ٢ + ١ = ٣ \quad \Leftarrow \quad |أ| = ٣$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٥ \times ٢ - (-١) \times ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢ \quad \Leftarrow \quad |أ_{س}| = ١٢$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١ \times ٢ - ١ \times ٥ = ٢ - ٥ = -٣ \quad \Leftarrow \quad |أ_{ص}| = -٣$$

$$\therefore س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{١٢}{٣} = \boxed{٤} \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٣}{٣} = \boxed{-١}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{س = ٤} \quad ، \quad \boxed{ص = -١}$$

**فرع ب :**

$$س + ص = -٣$$
$$٢ص + س = -٢$$

**الحل**

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ -٢ \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} ١ & ١ & -٣ \\ ٢ & ١ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ - ٢ \times ١ = ١ - ٢ = -١$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} = -٣ \times ١ - (-٢) \times ١ = -٣ + ٢ = -١$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ١ \times (-٢) - ٢ \times (-٣) = -٢ + ٦ = ٤$$

$$\therefore س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-١}{-١} = \boxed{١} \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٤}{-١} = \boxed{-٤}$$

**السؤال الثالث :** عند حل نظام مكون من معادلتين خطيتين بالمتغيرين س، ص بطريقة كريمر، وجد أن:

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، فجد قيمة س ، ص

**الحل** $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات ، مصفوفة الثوابت $= \begin{bmatrix} ٥ \\ -٣ \end{bmatrix}$

$\therefore أ_{س} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ - -١ \times -٣ = ٢ - ٣ = -١$

$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = ٥ \times ١ - -٣ \times -٣ = ٥ - ٩ = -٤$

$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} = ٢ \times -٣ - -١ \times ٥ = -٦ + ٥ = -١$

$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٤}{-١} = \boxed{٤}$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١}{-١} = \boxed{١}$

$\Leftarrow$ **س= ٤** ، **ص= ١**

---

**السؤال الرابع :** استخدم طريقة جاوس في حل الأنظمة الآتية:

**فرع أ :**
$٣س - ص = ١$
$س + ٢ص = ٥$

**الحل** $\Leftarrow \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right]$ ( باستبدال الصفين )

$\Leftarrow \left[\begin{array}{cc|c} ١ & ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ & ١ \end{array}\right]$ ( بضرب الصف الأول في -٣ وأضافته للصف الثاني )

$\Leftarrow \left[\begin{array}{cc|c} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & -٧ & -١٤ \end{array}\right]$

$\Leftarrow -٧ص = -١٤ \Leftarrow \boxed{ص = ٢}$

$س + ٢ص = ٥$ بالتعويض بقيمة ص = ٢

$\Leftarrow$ س $+ ٢ \times ٢ = ٥ \Leftarrow$ $\boxed{\text{س} = ١}$

---

**فرع ب :** س $-$ ص $+$ ع $= ٦$ ، س $+ ٢$ص $+$ ع $= ٣$ ، $٢$س $+$ ص $-$ ع $= ٠$

**الحل**

س $-$ ص $+$ ع $= ٦$
س $+ ٢$ص $+$ ع $= ٣$ ( الترتيب جاهز )
$٢$س $+$ ص $-$ ع $= ٠$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right|$$ ( بضرب الصف الأول في $-١$ وأضافته للصف الثاني )

$$\left|\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right|$$ ( بضرب الصف الأول في $-٢$ وأضافته إلى الصف الثالث )

$$\left|\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٣ & -٣ & -١٢ \end{array}\right|$$ ( بضرب الصف الثاني في $-١$ وأضافته إلى الصف الثالث )

$$\left|\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٠ & -٣ & -٩ \end{array}\right|$$

$-٣$ع $= -٩ \Leftarrow$ $\boxed{\text{ع} = ٣}$
$٣$ص $= -٣ \Leftarrow$ $\boxed{\text{ص} = -١}$
س $-(-١) + ٣ = ٦ \Leftarrow$ $\boxed{\text{س} = ٢}$

## القسم الثالث :اسئلة اثرائية

### حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | حل النظام الآتي باستخدام طريقة النظير الضربي:<br>أ) س + ٢ ص = −٢ ، ٣ س + ١١ ص = ٩<br>ب) س= ص +١ ، ٢ س + ص = ٢ | أ) س = − ٨<br>ص = ٣<br>ب) س = ١<br>ص = ٠ |
| ٢ | حل النظام الآتي باستخدام طريقة كرايمر : −<br>أ) ٢ س + ص = ٥ ، س + ٣ ص = ٠<br>ب ) ٢ س − ص = ١ ، ٢ ص − ٣ س = ٠ | أ) س = ٣ ، ص =٥<br>ب) س = ٢ ، ص = ٣ |
| ٣ | حل النظام الآتي باستخدام طريقة جاوس : −<br>أ) ص = ٢ س + ١ ، س + ص = ٧<br>ب)٢ س − ص + ع = ٧ ، ٢ ص + ع = −١ ، ص − ع +س =−٦ | أ) س = ٢<br>ص = ٥<br>ب) س = $\frac{١}{٣}$<br>ص = $\frac{-٢٢}{٩}$<br>ع= $\frac{٣٥}{٩}$ |
| ٤ | عند حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطريقة كريمر ، وجد أن :−<br>س = −٢ ، $\left\|\text{ا}_{\text{س}}\right\| = ٤$ ، $\left\|\text{ا}_{\text{ص}}\right\| = -٦$ ، فما قيمة ص ؟ | ٣ |

## القسم الرابع :اسئلة تفوق

| # | أجب عن الأسئلة الاتية | الجواب |
|---|---|---|
| ١ | عند حل نظام من معادلتين خطيتين بطريقة كريمر وجد أن $\begin{vmatrix} أ_س & أ_ص \end{vmatrix} = ٣٢$ ، س $= ٢$ ، ص $= ٤$ جد $\begin{vmatrix} أ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} أ_س \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} أ_ص \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} أ \end{vmatrix} = ٢$ ، $\begin{vmatrix} أ_س \end{vmatrix} = ٤$ ، $\begin{vmatrix} أ_ص \end{vmatrix} = ٨$<br>أو<br>$\begin{vmatrix} أ \end{vmatrix} = -٢$ ، $\begin{vmatrix} أ_س \end{vmatrix} = -٤$ ، $\begin{vmatrix} أ_ص \end{vmatrix} = -٨$ |
| ٢ | باستخدام طريقة جاوس حل نظام المعادلات التالية<br>$٢س + ٣ص = ع + ٤$<br>$٣س + ٤ع + ٢ = ٠$<br>$٣ع = ٢ص - ٣$ | س $= -٢$<br>ص $= ٣$<br>ع $= ١$ |
| ٣ | عند حل نظام من معادلتين خطيتين بطريقة كريمر للنظام<br>$أ س + ب ص = ١$<br>$٣س + ٢ص = ٤$<br>وكان $\begin{vmatrix} أ \end{vmatrix} = -١$ ، $\begin{vmatrix} أ_س & أ_ص \end{vmatrix} = -٢$ جد قيمة الثوابت أ ، ب | أ $= ١$ ، ب $= ١$<br>أو أ $= ٠$ ، ب $= \frac{١}{٣}$ |

# تمارين عامة

**السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة فيما يأتي:**

| الفرع | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الحل | جـ | جـ | جـ | د | أ | ب | د | ب | د | أ |

**فرع ١ : إذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ٦ & -٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ & -١ \end{bmatrix}$ **فما قيمة** $أ_{١٢} - أ_{٣١}$ ؟

**الحل**

$أ_{١٢} - أ_{٣١} = ٦ - ٥ = ١$ **(جـ)**

---

**فرع ٢ : إذا كانت** $\begin{bmatrix} ٣ & س \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ س^{٢} + س & ٥ \end{bmatrix}$ **فما مجموعة قيم س؟**

**الحل** س = ٢ **(جـ)**

$س^{٢} + س = ٦ \Leftarrow س^{٢} + س - ٦ = ٠ \Leftarrow (س - ٢)(س + ٣) = ٠ \Leftarrow$ س = ٢، س = −٣ مرفوض

---

**فرع ٣ : إذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ا = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}$ ، **فما قيمة المصفوفة** ٢٢أ-٥(أ+٢ب)+٢٧ب؟

**الحل**

$٢٢أ - ٥(أ + ٢ب) + ٢٧ب = ٢٢أ - ٥أ - ١٠ب + ٢٧ب = ١٧أ + ١٧ب = ١٧(أ + ب)$

$١٧\left(\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}\right) = ١٧\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٥١ & ٠ \\ -٣٤ & ٠ \end{bmatrix}$ **(جـ)**

---

**فرع ٤ : إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين، فما العبارة الصحيحة دائما فيما يأتي؟**

**الحل** $|ب \cdot أ^{-١}| = |ب| \times |أ^{-١}| = |ب| \times \frac{١}{|أ|} = \frac{|ب|}{|أ|}$ **(د)**

---

**فرع ٥ : إذا كان س.ص = ص.س = م ، فما العبارة الصحيحة دائما فيما يأتي؟**

**الحل** ( أ ) س$^{-١}$ = ص ( تعريف صفحة ١٢٠ )

**فرع ٦ : إذا كانت س مصفوفة بحيث س. $\begin{bmatrix}١\\٢\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}١\\٢\end{bmatrix}$ فماذا يمكن أن تكون المصفوفة س؟**

**الحل** ( ب ) م × أ = أ خصائص عملية الضرب صفحة ١١٢ ، م : مصفوفة الوحدة

---

**فرع ٧ : إذا كانت أ = $\begin{bmatrix}٣ & ٢\\٥ & ٣\end{bmatrix}$ فما المصفوفة التي تساوي أ$^{-١}$ + أ ؟**

**الحل**

$$\boxed{أ = \begin{bmatrix}٣ & ٢\\٥ & ٣\end{bmatrix}} \Leftarrow |أ| = \begin{vmatrix}٣ & ٢\\٥ & ٣\end{vmatrix} = ١٠ - ٩ = ١$$

$$(أ)^{-١} = \frac{١}{١}\begin{bmatrix}٣- & ٥\\٢ & ٣-\end{bmatrix} \Leftarrow \boxed{\begin{bmatrix}٣- & ٥\\٢ & ٣-\end{bmatrix} = (أ)^{-١}}$$

$$أ^{-١} + أ = \begin{bmatrix}٣- & ٥\\٢ & ٣-\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}٣ & ٢\\٥ & ٣\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٧ & ٠\\٠ & ٧\end{bmatrix} = ٧\begin{bmatrix}١ & ٠\\٠ & ١\end{bmatrix} = ٧م_٢ \quad (د)$$

---

**فرع ٨ : إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين غير مفردتين بحيث أن |أ.ب| = ١٨ ، |أ| + |ب| = ١١ ، وكان |أ| ≤ |ب| فما قيمة |أ|؟**

**الحل**

$$|أ| \times |ب| = ١٨ \Leftarrow |أ.ب| = ١٨ \leftarrow \boxed{١}$$

$$\boxed{|ب| = ١١ - |أ|} \Leftarrow |أ| + |ب| = ١١ \leftarrow \boxed{٢}$$

**بالتعويض في ١**

$$\Leftarrow |أ| \times (١١ - |أ|) = ١٨ \Leftarrow ١١|أ| - |أ|^{٢} - ١٨ = ٠ \Leftarrow |أ|^{٢} - ١١|أ| + ١٨ = ٠ \quad (ب)$$

$$\Leftarrow (|أ| - ٩)(|أ| - ٢) = ٠ \Leftarrow |أ| = ٩ \text{ ومنها } |ب| = ٢ \quad ، \quad |أ| = ٢ \text{ ومنها } |ب| = ٩ \text{ مرفوض } (|أ| < |ب|)$$

---

**فرع ٩ : إذا علمت أن أ = $\begin{bmatrix}٢ & ٢\\١- & ٣\end{bmatrix}$ ، فما قيمة أ$^{٢}$ − أ؟**

**الحل**

$$أ = \begin{bmatrix}٢ & ٢\\١- & ٣\end{bmatrix} ، \quad أ^{٢} = أ \times أ = \begin{bmatrix}٢ & ٢\\١- & ٣\end{bmatrix}\begin{bmatrix}٢ & ٢\\١- & ٣\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٢ & ١٠\\٧ & ٣\end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} - أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix} = ٨ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ٨م_{٢} \quad (د)$$

**فرع ١٠ :** استخدم أحمد طريقة كريمر لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين في المتغيرين س، ص

**فوجدأن:** $|أ_{س}| = ٢|أ|$ ، $|أ_{ص}| = -\frac{١}{٢}|أ|$ ، **فما قيم س، ص على الترتيب؟**

**الحل**

$$|أ_{س}| = ٢|أ| \quad ، \quad |أ_{ص}| = \frac{-١}{٢}|أ| = ٢|أ| \Leftarrow |أ_{ص}| = -٤|أ|$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٢|أ|}{|أ|} = ٢$$

$$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٤|أ|}{|أ|} = -٤$$

**قيمة س ، ص على الترتيب هي ٢ ، -٤** ( أ )

---

**السؤال الثاني :** **إذا كان** $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix} = ٧$ **، فما قيم س، ص؟**

**الحل**

$$\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow س \times ٢ - ١ \times ص = ٧ \Leftarrow \boxed{٢س - ص = ٧} \quad ٠٠٠٠(١)$$

$$\Leftarrow \begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow س \times -١^{-} - ٤^{-} \times ص = ٧ \leftarrow \boxed{-س + ٤ص = ٧} \quad ٠٠٠٠(٢)$$

**بضرب المعادلة ٢ في ٢**

$-٢س + ٨ص = ١٤ \leftarrow$ **٣** **بجمع المعادلة (١) مع المعادلة ٣**

$٧ص = ٢١ \Leftarrow \boxed{ص = ٣}$ **بالتعويض في المعادلة (١ ) :** $٢س - ٣ = ٧ \Leftarrow ٢س = ١٠ \Leftarrow \boxed{س = ٥}$

---

**السؤال الثالث :** **إذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$ **فجد:**

**فرع أ :** $|أ|أ^{-١}$

**الحل**

$$|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٥ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = -٣ \times ٤ - -٢ \times ٥ = -١٢ + ١٠ = -٢$$

$$\Leftarrow أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow |أ|^{-1} = -2 \times \frac{1}{-2} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

**فرع ب :**

**الحل** $|3أ| = 3^2 \times |أ| = 9 \times -2 = -18$

**فرع جـ :** $(-2أ)^{-1}$

**الحل**

$$(-2أ)^{-1} = \frac{1}{-2} أ^{-1} = \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \\ 1 & \frac{-5}{4} \end{bmatrix}$$

**السؤال الرابع :** جد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} 1 & س & 2 \\ س & 3 & س \\ 4 & س & 5 \end{vmatrix} = -9$

**الحل**

$$\begin{vmatrix} 1^{+} & س^{-} & 2^{+} \\ س & 3 & س \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

$$1\begin{vmatrix} 3 & س \\ س & 5 \end{vmatrix} - س\begin{vmatrix} س & س \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} س & 3 \\ 4 & س \end{vmatrix} = -9$$

$$1(3 \times 5 - س \times س) - س(س \times 5 - 4 \times س) + 2(س \times س - 4 \times 3) = -9$$

$$\Leftarrow (15 - س^2) - س(5س - 4س) + 2(س^2 - 12) = -9$$

$$\Leftarrow 15 - س^2 - 5س^2 + 4س^2 + 2س^2 - 24 = -9$$

$$-9 = -9$$

، س أي عدد حقيقي

**السؤال الخامس :** حل المعادلات المصفوفية:

**فرع أ :** $\begin{bmص} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

**الحل**

$$أ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٣ \times ٢ = ٤ - ٦ = -٢$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{٣}{٢} & ١ \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{٣}{٢} & ١ \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$ س $= -٥$ ، ص $= ٤$

---

**فرع ب :** $[س \quad ص] \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$

**الحل**

$[٣س - ٤ص \quad -٣س \quad ٩س - ٨ص] = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$

$-٣س = -٣ \Leftarrow$ س $= ١$

$٣س - ٤ص = ٤ \Leftarrow ٣ \times ١ - ٤ص = ٤$

$\Leftarrow -٤ص = ١ \Leftarrow$ ص $= \frac{-١}{٤}$

---

**السؤال السادس : إذا كانت** $أ = \begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & ص \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}$ **، فما قيم س، ص؟**

**الحل**

$م = أ \times أ^{-١}$

$$\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ص \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \times ٤ + ٣ \times -٥ & س \times ص + ٣ \times ٤ \\ ٥ \times ٤ + ٤ \times -٥ & ٥ \times ص + ٤ \times ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤س - ١٥ & س ص + ١٢ \\ ٠ & ٥ص + ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$ **ومن تساوي المدخلات المتناظرة**

$٤س - ١٥ = ١ \Leftarrow ٤س = ١٦ \Leftarrow$ س $= ٤$

$س ص + ١٢ = ٠ \Leftarrow ٤ص = -١٢ \Leftarrow$ ص $= -٣$

**السؤال السابع : إذا كانت أ، ب مصفوفتين مربعتين غير صفريتين، بحيث أن أ. ب=و ، فأثبت أن: إحدى المصفوفتين أ، ب على الأقل ليس لها نظير ضربي.**

**الحل**

$أ \times ب = و \Leftarrow |أ \times ب| = |و| \Leftarrow |أ| \times |ب| = ٠$

**اما $|أ| = ٠$ لا يوجد نظير أو $|ب| = ٠$ لا يوجد نظير**

**اذن إحدى المصفوفتين أ، ب على الأقل ليس لها نظير ضربي.**

---

**السؤال الثامن : عند حل المعادلتين $لا س - ص = ٥$ ، $ك س + ص = ٣$ ، ن، ك عددان حقيقيان لا يساويان صفرا.**

**باستخدام طريقة كريمر، وُجد أن: $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ جد قيمة؟**

**فرع أ : ن ، ك**

**الحل**

$لا س - ص = ٥$

$ك س + ص = ٣$

$$\begin{bmatrix} لا & -١ \\ ك & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad أ = \begin{bmatrix} لا & -١ \\ ك & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad |أ_{ص}| = \begin{bmatrix} لا & ٥ \\ ك & ٣ \end{bmatrix}$$

**وبمعلومية أن $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$**

$$\begin{vmatrix} لا & ٥ \\ ك & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$ **ومن تساوي المدخلات المتناظرة**

$\Leftarrow$ **$لا = ٦$** ، **$ك = ٢$**

---

**فرع ب : س ، ص**

**الحل**

$٦س - ص = ٥$ ، $٢س + ص = ٣$

$$\begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٦ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٦ - -٢ = ٨$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٥ - -٣ = ٨$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ١٨ - ١٠ = ٨$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$$

$$\boxed{س = ١} \quad ، \quad \boxed{ص = ١}$$

---

**السؤال التاسع :** إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ فجد $(أ^{٢})^{-١}$ ، $(أ^{-١})^{٢}$ ( ماذا تلاحظ؟)

**الحل**

لإيجاد $(أ^{٢})^{-١}$

$$(أ^{٢})^{-١} = (أ \cdot أ)^{-١} = أ^{-١} \cdot أ^{-١} \quad ، \quad \boxed{(أ \cdot ب)^{-١} = ب^{-١} \times أ^{-١}}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ١+٢ & ١+٢ \\ ٣+٦ & ٣+٢ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٩ & ٥ \end{bmatrix} =$$

---

**السؤال العاشر :** استخدم طريقة كريمر لحل النظام الآتي؟ $٣س + ٢ص = -٤$ ، $٥ص + س = ٣$

**الحل**

**الترتيب غير جاهز** $\Leftarrow$ **الترتيب** $٣س + ٢ص = -٤$ ، $س + ٥ص = ٣$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ \\ ٣ \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad أ_{س} = \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ١٥ - ٢ = ١٣$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -٢٠ - ٦ = -٢٦$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - -٤ = ١٣$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٢٦}{١٣} = \boxed{-٢} \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٣}{١٣} = \boxed{١}$$

**السؤال الحادي عشر :** استخدم طريقة جاوس في حل النظام الآتي؟

$$س - ص + ٤ع = ٩ \quad ، \quad ٢س + ٣ص + ٢ع = ٢ \quad ، \quad ٣ص + س - ع = -٤$$

**الحل** الترتيب غير جاهز ، الترتيب $\Leftarrow$

$$س - ص + ٤ع = ٩$$
$$٢س + ٣ص + ٢ع = ٢$$
$$س + ٣ص - ع = -٤$$

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٤ & ٩ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ & -٤ \end{vmatrix}$$

( بضرب الصف الأول في -٢ وأضافته للصف الثاني )

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٤ & ٩ \\ ٠ & ٥ & -٦ & -١٦ \\ ١ & ٣ & -١ & -٤ \end{vmatrix}$$

( بضرب الصف الأول في -١ وأضافته إلى الصف الثالث )

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٤ & ٩ \\ ٠ & ٥ & -٦ & -١٦ \\ ٠ & ٤ & -٥ & -١٣ \end{vmatrix}$$

( بضرب الصف الثاني في $\frac{-٤}{٥}$ وأضافته إلى الصف الثالث )

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٤ & ٩ \\ ٠ & ٥ & -٦ & -١٦ \\ ٠ & ٠ & \frac{-١}{٥} & \frac{-١}{٥} \end{vmatrix}$$

$$\frac{-١}{٥}ع = \frac{-١}{٥} \Leftarrow \boxed{ع = ١}$$

$$٥ص - ٦ع = -١٦ \Leftarrow ٥ص - ٦ = -١٦ \quad \boxed{ص = -٢}$$

$$س - ص + ٤ع = ٩ \Leftarrow س - (-٢) + ٤ = ٩ \Leftarrow \boxed{س = ٣}$$

**السؤال الثاني عشر :** إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢}س \end{vmatrix} = -٥٠$ ، فجد قيم س مستخدما خصائص المحددات.

**الحل**

$$\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢}س \end{vmatrix} = -٥٠$$

حاصل ضرب القطر الرئيسي لأنها مصفوفة مثلثية علوية

$$س \times -٤ \times \frac{١}{٢}س = -٥٠$$

$$\Leftarrow -٢س^{٢} = -٥٠ \Leftarrow س^{٢} = ٢٥$$

$$\Leftarrow \boxed{س = \pm ٥}$$

# كل التوفيق والمحبة