حلول كتاب الرياضيات

للصف

الثاني عشر التكنولوجي

الوحدة الأولى

الإحصاء والاحتمال

حلول تمارين ومسائل ١ – ١

س١:

$$\mu = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{٤٠+٥٠+٦٠+٧٠+٥٥}{٥} = \frac{٢٧٥}{٥} = ٥٥$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س-\mu)^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{٥٠٠}{٥}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

س	$س-\mu$	$(س-\mu)^{٢}$	$ع = \frac{س-\mu}{\sigma}$
٤٠	١٥-	٢٢٥	$\frac{١٥-}{١٠} = ١,٥-$
٥٠	٥-	٢٥	$\frac{٥-}{١٠} = ٠,٥-$
٦٠	٥	٢٥	$\frac{٥}{١٠} = ٠,٥$
٧٠	١٥	٢٢٥	$\frac{١٥}{١٠} = ١,٥$
٥٥	٠		$\frac{٠}{١٠} = ٠$
المجموع		٥٠٠	

س٢:

اللغة العربية $ع = \frac{٧٢-٦٩}{١} = \frac{٣}{١} = ٣$

المحاسبة $ع = \frac{٦٩-٦٨}{٤} = \frac{١}{٤}$

الرياضيات $ع = \frac{٧٥-٧٩}{٢} = \frac{٤-}{٢} = ٢-$

تحصيل علي كان أفضل في اللغة العربية .

س٣: $\mu = ١٧$ ، $\sigma = ٣$

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma} \Leftarrow -١,٨ = \frac{س - ١٧}{٣}$$

$$س - ١٧ = -٥,٤$$

$$س = ١١,٦$$

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma} \Leftarrow ٢ = \frac{س - ١٧}{٣}$$

$$س - ١٧ = ٦$$

$$س = ٢٣$$

س٤ :

$$٠,٥ + ٥ك + ٠ + ١,٥ - = ٠,٥ - ٠$$

$$٥ك + ١,٥ - = ٠ \Leftarrow ٥ك = ١,٥$$

$$ك = \frac{١,٥}{٥} = ٠,٣ \Leftarrow$$

بحساب الانحراف المعياري للعلامات المعيارية سنجد بأن $\sigma = ١$

س٥:

$$ع_{٨٥} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$١ = \frac{\mu - ٨٥}{\sigma} \Leftarrow \sigma = \mu - ٨٥ \quad .....(١)$$

$$ع_{٧٠} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$-٢ = \frac{\mu - ٧٠}{\sigma} \Leftarrow -\sigma٢ = \mu - ٧٠ \quad .....(٢)$$

$$\mu - ٨٥ = \sigma$$

$$\pm \mu \mp ٧٠ = \pm \sigma٢$$

$$\sigma٣ = ١٥$$

$$\sigma = ٥$$

$$\mu - ٨٥ = \sigma$$

$$\mu - ٨٥ = ٥$$

$$-\mu = ٨٥ - ٥$$

$$-\mu = -٨٠ \quad \text{ومنها} \quad \mu = ٨٠$$

$$\therefore \text{ع}_{٧٥} = \frac{٨٠-٧٥}{٥}$$
$$= \frac{-٥}{٥} = -١$$

حلول تمارين ومسائل ١ – ٢

س١: أ) المساحة تحت (ع = ١,٣٨) = ٠,٩١٦٢

ب) المساحة فوق (ع = ٠,٩) =١- المساحة تحت (ع = ٠,٩) =١-٠,٨١٥٩=٠,١٨٤١

ج) المساحة بين (ع = ١,٥) و (ع = -١,٥) = المساحة تحت (ع = ١,٥) - المساحة تحت (ع = -١,٥)

= ٠,٩٣٣٢-٠,٠٦٦٨=٠,٨٦٦٤

س٢:

أ) المساحة تحت ع = ٠,٨٥٥٤ بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد ع = ١,٠٦

ب) المساحة تحت ع = ١ – ٠,٧٧٣٤ = ٠,٢٢٦٦ ومن الجدول ع = -٠,٧٥ .

ج) بما أن المساحة بين (-ع و ع) = ٠,٦٠

فإن المساحة تحت (- ع) + المساحة فوق (ع) = ١-٠,٦ = ٠,٤

ومنها المساحة تحت (- ع) = $\frac{٠,٤}{٢}$ = ٠,٢ والمساحة تحت ع = ٠,٦+٠,٢ = ٠,٨

من الجدول نجد ع = تقريبا ٠,٨٤

س٣:

$$\text{ع}_{١٥٠} = \frac{١٥٠-١٦٥}{١٠} = \frac{-١٥}{١٠} = -١,٥$$

$$\text{ع}_{١٨٠} = \frac{١٨٠-١٦٥}{١٠} = \frac{١٥}{١٠} = ١,٥$$

نسبة الطلبة = المساحة بين (ع= ١,٥ و ع= - ١,٥) = ٠,٩٣٣٢-٠,٠٦٦٨ = ٠,٨٦٦٤

ومنها عدد الطلبة = ٠,٨٦٦٤ × ٥٠٠ = ٤٣٣

س ٤:

أ) $ع_{٧٨} = \frac{٧٨ - ٧٢}{٨} = \frac{٦}{٨} = ٠,٧٥$ ، $ع_{٦٢} = \frac{٦٢ - ٧٢}{٨} = \frac{-١٠}{٨} = -١,٢٥$

نسبة الطلبة = المساحة بين (ع = ٠,٧٥)، (ع =- ١,٢٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,٧٥) – المساحة تحت (ع =- ١,٢٥)

$= ٠,٦٦٧٨ = ٠,١٠٥٦ - ٠,٧٧٣٤$

ومنها النسبة المئوية للطلبة $= ٠,٦٦٧٨ \times ١٠٠٪ = ٦٦,٧٨٪$

ب) نسبة الطلبة الراسبين = المساحة تحت (ع = ٦٠)

$ع_{٦٠} = \frac{٦٠ - ٧٢}{٨} = \frac{-١٢}{٨} = -١,٥$

نسبة الطلبة الراسبين = المساحة تحت (ع =- ١,٥) $= ٠,٠٦٦٨$

عدد الطلبة الراسبين $= ٠,٠٦٦٨ \times ٦٠٠ = ٤٠$ طالباً.

س ٥:

$ع_{٦٨٠} = \frac{٦٨٠ - ٧٠٠}{٢٠} = \frac{-٢٠}{٢٠} = -١$ ، $ع_{٧٤٠} = \frac{٧٤٠ - ٧٠٠}{٢٠} = \frac{٤٠}{٢٠} = ٢$

المساحة بين (ع = ٢) و (ع =- ١) = المساحة تحت (ع = ٢) – المساحة تحت (ع =- ١)

$= ٠,٨١٨٥ = ٠,١٥٨٧ - ٠,٩٧٧٢$

عدد الموظفين $= ٠,٨١٨٥ \times ١٠٠٠ = ٨١٩$ موظفاً.

.

حلول تمارين ومسائل عامة ١ – ٣

س ١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الإجابة	جـ	جـ	د	أ	ب	ب	د	أ

س٢:

$$ع_{٧١} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$٢ = \frac{٧١ - \mu}{\sigma} \Leftarrow ٢\sigma = ٧١ - \mu \quad .....(١)$$

$$ع_{٥٣} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$-١ = \frac{٥٣ - \mu}{\sigma} \Leftarrow -\sigma = ٥٣ - \mu \quad .....(٢)$$

بحل المعادلتين ينتج أن:

$$٣\sigma = ١٨$$

$$\sigma = ٦$$

وبالتعويض في المعادلة .....(١) ينتج أن

$$١٢ = ٧١ - \mu$$

$$\mu = ٥٩$$

س٣: أ) $ع_{١,٠٣} = \frac{١,٠٣ - ١,٠١}{٠,٠٢} = ١$

نسبة الأكياس = المساحة تحت (ع = ١) = ٠,٨٤١٣

ب) $ع_{١} = \frac{١ - ١,٠١}{٠,٠٢} = -٠,٥$ ، $ع_{١,٠٥} = \frac{١,٠٥ - ١,٠١}{٠,٠٢} = ٢$

نسبة الأكياس = المساحة بين (ع= -٠,٥ و ع= ٢)

= المساحة تحت (ع= ٢) – المساحة تحت (ع= -٠,٥)

= ٠,٩٧٧٢ - ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٦٨٧

س٤:

أ) $ع_{١١٠٠٠٠} = \frac{١١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١$ ، $\frac{٩٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = -١$

نسبة البطاريات المطلوبة = المساحة بين (ع = ١) و (ع =- ١)

= المساحة تحت (ع = ١) – المساحة تحت (ع =- ١)

= ٠,٨٤١٣ - ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٨٢٦

عدد البطاريات = ٠,٦٨٢٦ × ٢٠٠٠٠ = ١٣٦٥٢ بطارية

ب) ع ١٢٠٠٠٠ = $\frac{١٠٠٠٠٠ - ١٢٠٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٢

نسبة البطاريات = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

عدد البطاريات = ٠,٠٢٢٨ × ٢٠٠٠٠ = ٤٥٦

ج) ع ١١٠٠٠٠ = $\frac{١٠٠٠٠٠ - ١١٠٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ١ ، ع ٨٠٠٠٠ = $\frac{١٠٠٠٠٠ - ٨٠٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = −٢

نسبة البطاريات = المساحة تحت (ع = ١) − المساحة تحت (ع = − ٢)

= ٠,٨٤١٣ − ٠,٠٢٢٨ = ٠,٨١٨٥

النسبة المئوية = ٠,٨١٨٥ × ١٠٠٪ = ٨١,٨٥٪

س٥: أ) ع ٥٠ = $\frac{٤٠ - ٥٠}{٥}$ = ٢

نسبة الأعضاء = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ − المساحة تحت (ع = ٢) = ١ − ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

عدد الأعضاء = ٠,٠٢٢٨ × ٤٠٠ = ٩

ب) ع ٣٥ = $\frac{٤٠ - ٣٥}{٥}$ = $\frac{٥-}{٥}$ = −١ ، ع ٤٥ = $\frac{٤٠ - ٤٥}{٥}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

نسبة الأعضاء = المساحة بين (ع = ١) و (ع = − ١)

= المساحة تحت (ع = ١) − المساحة تحت (ع = − ١)

= ٠,٨٤١٣ − ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٨٢٦

عدد الأعضاء = ٠,٦٨٢٦ × ٤٠٠ = ٢٧٣ عضواً .

الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

حلول تمارين ومسائل ٢-١

س١: أ) $و(٤) = ٢$ ب) $\lim_{س \to ٤} و(س) = ٢$

ج) $ك(٤) = ٣$ د) $\lim_{س \to ٤} ك(س)$ = غير موجودة

هـ) $هـ(٤) = ١$ و) $\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٢$

ز) $ح(٤) = ١$ ح) $\lim_{س \to ٤} ح(س)$ = غير موجودة .

س٢): أ) $\lim_{س \to ٤} و(س) = ٣$ ب) $\lim_{س \to ٠^-} و(س) = ٣$

ج) $\lim_{س \to ٠^+} و(س) = ١$ د) $\lim_{س \to ٠} و(س)$ = غير موجودة

حلول تمارين ومسائل (٢ - ٢)

س١: أ) $\lim_{س \to ٢} (٢و(س) - هـ(س)) = \lim_{س \to ٢} ٢و(س) - \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢ \lim_{س \to ٢} و(س) - \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢(\lim_{س \to ٢} و(س))^{٢} - \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢ \times (-٢)^{٢} - ٣ = ٥$

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥و(س)}{هـ(س) + س} = \frac{\lim_{س \to ٢} ٥و(س)}{\lim_{س \to ٢} (هـ(س) + س)}$

$= \frac{\lim_{س \to ٢} ٥و(س)}{\lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} س}$

$= \frac{٥ \times -٢}{٢ + ٩}$

$= \frac{-١٠}{١١}$

ج) $\lim_{س\to ٢}(٤هـ(س)+س^{٢}-٣)=\lim_{س\to ٢}٤هـ(س)+\lim_{س\to ٢}س^{٢}-\lim_{س\to ٢}٣$

$=٤\times-٢+٤-٣=-٧$

س٢: أ) $\lim_{س\to ٤}\frac{٣س^{٢}-١٢س}{س^{٢}-١٦}=\lim_{س\to ٤}\frac{٣س(س-٤)}{(س+٤)(س-٤)}$

$=\lim_{س\to ٤}\frac{٣س}{(س+٤)}$

$=\frac{٤\times٣}{(٤+٤)}$

$=\frac{١٢}{٨}=١٫٥$

ب) $\lim_{س\to ١}\frac{س^{٣}-١}{س^{٢}-١}=\lim_{س\to ١}\frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{(س-١)(س+١)}$

$=\lim_{س\to ١}\frac{(س^{٢}+س+١)}{(س+١)}$

$=\frac{٣}{٢}$

ج) $\lim_{س\to \sqrt{٥}}\frac{س^{٢}-٥}{س-\sqrt{٥}}=\lim_{س\to \sqrt{٥}}\frac{(س-\sqrt{٥})(س+\sqrt{٥})}{(س-\sqrt{٥})}=٢\sqrt{٥}$

س٣: $\lim_{س\to ٣}\frac{أ(س^{٢}-٩)}{(س-٣)}=\lim_{س\to ٣}\frac{أ(س-٣)(س+٣)}{(س-٣)}$

$=\lim_{س\to ٣}أ(س+٣)=٢٤$ ومنها

$أ٦=٢٤$

$أ=٤$

س٤: $\lim_{س\to ٢}\frac{س^{٢}-٢س}{س^{٢}+٢س-٨}=\lim_{س\to ٢}\frac{س(س-٢)}{(س+٤)(س-٢)}$

$=\lim_{س\to ٢}\frac{س}{(س+٤)}$

$=\frac{٢}{٦}=\frac{١}{٣}$

تمارين ومسائل (٢ – ٣)

س١: – $\lim_{س\to 1^-} ه(س) = \lim_{س\to 1^-} (س-٢) = -٣$

– $\lim_{س\to 1} ه(س) = \lim_{س\to 1} (س^{٢}-٢) = -١$

– $\lim_{س\to ٠^-} ه(س) = \lim_{س\to ٠^-} (س-٢) = -٢$ ، $\lim_{س\to ٠^+} ه(س) = \lim_{س\to ٠^+} (س^{٢}-٢) = -٢$

وبما أن $\lim_{س\to ٠^-} ه(س) = \lim_{س\to ٠^+} ه(س) = -٢$

فإن $\lim_{س\to ٠} ه(س) = -٢$

س٢: $\lim_{س\to 1} ه(س)$ موجودة $\leftarrow \lim_{س\to 1^+} ه(س) = \lim_{س\to 1^-} ه(س)$

$$\lim_{س\to 1^+} ه(س) = \lim_{س\to 1^+} \frac{١-س}{س-١} = \lim_{س\to 1^+} \frac{-(س-١)}{(س-١)} = -١$$

$$\lim_{س\to 1^-} ه(س) = \lim_{س\to 1^-} (أس^{٢}-٩) = أ-٩$$

$$أ-٩ = -١$$

$$أ = ٨$$

س٣: $\lim_{س\to -٤^-} ه(س) = ه(^{-}٤)$

$$\lim_{س\to -٤^-} \frac{س^{٢}-١٦}{س+٤} = ب$$

$$\lim_{س\to -٤^-} \frac{(س-٤)(س+٤)}{(س+٤)} = ب$$

$$\lim_{س\to -٤^-} (س-٤) = ب$$

$$ب = -٨$$

س٤: $\lim_{س\to أ} \frac{س^{٢}-أ^{٢}}{س-أ} = \lim_{س\to ٣} (س+٥)$

$$\lim_{س\to أ} \frac{س^{٢}-أ^{٢}}{س-أ} = ٨$$

$$\lim_{س\to أ} \frac{(س+أ)(س-أ)}{(س-أ)} = ٨$$

$٢أ = ٨$ ومنها $أ = ٤$

س٥: - $\lim_{س\to 0} ه(س) = \lim_{س\to 0} (س^{٣}+٢) = ٢$

- $\lim_{س\to ١^{-}} ه(س) = \lim_{س\to ١^{-}} (س^{٣}+٢) = ٣$ ، $\lim_{س\to ١^{+}} ه(س) = \lim_{س\to ١^{+}} (٤س-١) = ٣$

وبما أن $\lim_{س\to ١^{-}} ه(س) = \lim_{س\to ١^{+}} ه(س)$

فإن $\lim_{س\to ١} ه(س) = ٣$

- $\lim_{س\to ٥} ه(س) = ١٩$

تمارين ومسائل (٢ - ٤)

س١: أ) $\lim_{س\to 0} س^{٢}(-٥س+٢) = \lim_{س\to 0} (-٥س^{٣}+٢س^{٢})$

$= \lim_{س\to \infty} س^{٣}(-٥+\frac{٢}{س})$

$= \lim_{س\to \infty} س^{٣} \times \lim_{س\to \infty} (-٥+\frac{٢}{س})$

$= \lim_{س\to \infty} س^{٣} \times (\lim_{س\to \infty} -٥ + \lim_{س\to \infty} \frac{٢}{س})$

$= -\infty$

ب) $\lim_{س\to \infty} \frac{٨س^{٣}-١+س^{٢}+٤}{س^{٥}+٣+س^{٤}+١} = ٠$ ، لأن درجة البسط أصغر من درجة المقام

ج) $\lim_{س\to \infty} \frac{(س+٢)(٣س+١)}{(س+١)(س+٣)} = \lim_{س\to \infty} \frac{٣س^{٢}+٧س+٢}{س^{٢}+٤س+٣} = ٣$

س٢: $\lim_{س\to \infty} \frac{س^{ن}+٥}{٣س^{٢}+١} = \frac{١}{٣}$ $\Leftarrow$ درجة البسط تساوي درجة المقام $\Leftarrow ن = ٢$

س٣: $\lim_{س\to ٢} (أس+٣) = \lim_{س\to \infty} \frac{٤س^{٣}-٢س+١}{س-س^{٣}}$

$أ٢+٣ = -٤$

$أ٢ = -٧$

$أ = \frac{-٧}{٢}$

س٤: أ) $\lim_{س\to\infty}\left(\frac{٥س}{س-١}-\frac{٢س}{س+١}\right)=\lim_{س\to\infty}\frac{٥س(س+١)-٢س(س-١)}{س^{٢}-١}$

$=\lim_{س\to\infty}\frac{٥س^{٢}+٥س-٢س^{٢}+٢س}{س^{٢}-١}=\lim_{س\to\infty}\frac{٣س^{٢}+٧س}{س^{٢}-١}=٣$

ب) $\lim_{س\to\infty}\left(\frac{س^{٥}-٣س+٢}{٦+س^{٢}}\right)=\infty$ ، لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام

تمارين ومسائل (٢ – ٥)

س١: $\lim_{س\to٤}ق_{١}(س)$ غير موجودة ، حيث أن $\lim_{س\to٤^{+}}ق_{١}(س)\neq\lim_{س\to٤^{-}}ق_{١}(س)$

$\lim_{س\to٢}ق_{٢}(س)\neq ق_{٢}(٢)$

س٢: أ) $ق(س)$ متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود

ب) $\lim_{س\to٢}ق(س)=\lim_{س\to٢}\frac{س^{٢}-٢س}{س-٢}=\lim_{س\to٢}\frac{س(س-٢)}{(س-٢)}=٢$

$ق(٢)=٧$

$\lim_{س\to٢}ق(س)\neq ق(٢)$ ، $ق(س)$ غير متصل عند س = ٢ .

س٣: $\lim_{س\to١^{+}}ق(س)=١+١=٢$ ، $\lim_{س\to١^{-}}ق(س)=٣-١=٢$

$\lim_{س\to١^{+}}ق(س)=\lim_{س\to١^{-}}ق(س)=٢\Leftarrow\lim_{س\to١}ق(س)=٢$

$ق(١)=١+١=٢$

$\lim_{س\to١}ق(س)=ق(١)\Leftarrow ق(س)$ متصل عند س= ١

س٤: $\lim_{س\to٢^{+}}ق(س)=\lim_{س\to٢^{-}}ق(س)=ق(٢)$ لأن $ق(س)$ عند س = ٢.

$٣\times٢-٥=٤-أ$ ومنها $أ=٣$

تمارين ومسائل (٢ – ٦)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الإجابة	د	جـ	ب	أ	أ	ب	أ	د	أ

س٢: أ) $\lim_{س\to -٤}\left(\frac{٢س}{س^{٢}-٤}-\frac{س^{٢}}{س^{٢}-٤}\right)=\frac{-٨}{١٢}-\frac{١٦}{١٢}=\frac{-٢٤}{١٢}=-٢$

ب) $\lim_{س\to ٠}\frac{س}{س^{٢}-٧س}=\lim_{س\to ٠}\frac{س}{س(س-٧)}=\lim_{س\to ٠}\frac{١}{(س-٧)}=\frac{-١}{٧}$

جـ) $\lim_{س\to ٣}\frac{س^{٣}-٢٧}{س^{٢}-٥س+٦}=\lim_{س\to ٣}\frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{(س-٢)(س-٣)}$

$=\lim_{س\to ٣}\frac{(س^{٢}+٣س+٩)}{(س-٢)}=٢٧$

د) $\lim_{س\to ٤}\frac{\sqrt{س}-٢}{س-٤}=\lim_{س\to ٤}\frac{(\sqrt{س}-٢)}{(\sqrt{س}-٢)(\sqrt{س}+٢)}=\lim_{س\to ٤}\frac{١}{(\sqrt{س}+٢)}=\frac{١}{٤}$

س٣: $\lim_{س\to ٢}\frac{س^{٣}+٢ب س^{٢}+١}{٤س^{٢}+١}=\frac{٨+٨ب+١}{١٦+١}=١$

$٨+٨ب+١=١٦+١$ ومنها ب $=١$

س٤: $\lim_{س\to ٢^{+}}ق(س)=٢+٤=٦$ ، $\lim_{س\to ٢^{-}}ق(س)=٥\times٢-٤=٦$

$\lim_{س\to ٢^{+}}ق(س)=\lim_{س\to ٢^{-}}ق(س)=٦ \Leftarrow \lim_{س\to ٢}ق(س)=٦$

$ق(٢)=١٠-٤=٦$

$\lim_{س\to ٢}ق(س)=ق(٢) \Leftarrow$ ق(س) متصل عند س = ٢

س٥: بما أن $ن(س)$ متصل عند س = −١ فإن $\lim_{س\to -١^-} ن(س)$ موجودة.

$$\lim_{س\to -١^+} ن(س) = \lim_{س\to -١^-} ن(س)$$

$$\lim_{س\to -١^+} (٣س^{٢} + ٢) = \lim_{س\to -١^-} (-٧س + أ)$$

$$٥ = ٧ + أ \quad \text{ومنها } أ = -٢$$

س٦: $$\lim_{س\to ٣} ن(س) = \lim_{س\to ٣} \frac{٢س^{٢} - ٦س}{س - ٣} = \lim_{س\to ٣} \frac{٢س(س - ٣)}{(س - ٣)} = ٦$$

$$ن(٣) = ٥$$

$\lim_{س\to ٣} ن(س) \neq ن(٣)$ ، $ن(س)$ غير متصل عند س = ٣ .

س٧: أ) $\lim_{س\to ٠^-} ن(س) = ١$

ب) $\lim_{س\to ٠^+} ن(س) = \lim_{س\to ٠^+} ٥ - ٠ = ٥$

ج) $\lim_{س\to ٠^+} ن(س) \neq \lim_{س\to ٠^-} ن(س)$ ومنها $\lim_{س\to ٠} ن(س)$ غير موجودة

د) $ن(س)$ غير متصل عند س = ٠ لأن $\lim_{س\to ٠} ن(س)$ غير موجودة

الوحدة الثالثة

التفاضل

حلول تمارين ومسائل ٣-١

س١:

أ . $\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣,٨ - ٢ = ١,٨$

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = و(س_٢) - و(س_١)$

$= و(٣,٨) - و(٢) = ١٨ - ٩ = ٩$

ب. $\Delta س = س_٢ - س_١ = -٢ - ٤ = -٦$

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = و(س_٢) - و(س_١)$

$= و(-٢) - و(٤) = -١١ - ١٩ = -٣٠$

س٢:

أ) متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{و(٤) - و(٧)}{٤ - ٧} = \frac{٢ - ١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

ب) متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = ٢ + ٤ = ٦$

$= \frac{و(٦) - و(٢)}{٦ - ٢} = \frac{٣٥ - ٣}{٤} = ٨$

س٣:

ميل القاطع أب $= \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{و(٣) - و(-٢)}{٣ - -٢} = \frac{١٠ - ٥}{٣ - -٢} = \frac{٥}{٥} = ١$

س٤:

أ. التغير في ص $= \Delta ص = ص_٢ - ص_١ = و(س_٢) - و(س_١)$

$١٣ = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{س_٢ - س_١} = \frac{\Delta ص}{٤ - ١} = \frac{\Delta ص}{٣}$

ومنها $\Delta ص = ٣٩$

ب. $\Delta ص = و(٤) - و(١)$

$و(٤) = \Delta ص + و(١) = ٣٩ + ٦ = ٤٥$

حلول تمارين ومسائل ٣-٢

س١:

أ. $ن'(-٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(-٣+هـ) - ن(-٣)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢(-٣+هـ) - ٧ - (٢(-٣) - ٧)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٦ + ٢هـ - ٧ + ١٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ}{هـ}$

$= ٢$

ب. $ن'(٢) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢+هـ) - ن(٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣ - (٢+هـ) - (٣-٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-١ - هـ - ١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-هـ}{هـ}$

$= -١$

ج. $و'(٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٠+هـ) - و(٠)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(هـ^{٢} + هـ) - (٠)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^{٢} + هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ+١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} (هـ+١)$

$= ١$

س٢: أ. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ} = و'(٣) = ٨$

ب. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ}$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{و}'(3) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

ج. $$\text{و}'(3) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ن(3) - ن(3 + هـ)}{هـ} \times -1 = \lim_{هـ \to 0} \frac{ن(3 + هـ) - ن(3)}{هـ}$$

$$= -\text{و}'(3)$$

$$= -8$$

س٣: $$\text{و}'(3) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ن(3 + هـ) - ن(3)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \text{متوسط التغير} = \lim_{هـ \to 0} \frac{2}{(-1 + هـ)}$$

$$= -2$$

س٤: $$\text{و}'(5) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{هـ \to 0} \frac{7هـ - هـ^2}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{7هـ - هـ^2}{4هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(7 - هـ)}{4هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{7 - هـ}{4}$$

$$= \frac{7}{4}$$

حلول تمارين ومسائل ٣-٣

س١: $$\lim_{هـ \to 0} \frac{ن(2) - ن(2 + هـ)}{هـ} = -\lim_{هـ \to 0} \frac{ن(2 + هـ) - ن(2)}{هـ}$$

$$= -ن'(2)$$

حيث $\text{و}(س) = س^3 - س$ ، $\text{و}'(س) = 3س^2 - 1$ ، $\text{و}'(2) = 11$

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{ن(2) - ن(2 + هـ)}{هـ} = -11$$

س٢: أجد $\frac{د ص}{د س}$ الاقترانات الآتية:

أ. $\frac{د ص}{د س}$ = صفر ب) $\frac{د ص}{د س} = 6س + 5$

ج. $ص = \frac{٤}{\sqrt{س}} = س^{\frac{-١}{٢}}$ ، $س > ٠$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٤}{٢} س^{\frac{-٣}{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{س^{٣}}} \quad ، \quad س > ٠$$

س٣: أ) $ص = \frac{٣}{س^{٢}} + ٥س = ٣س^{-٢} + ٥س$

$$\frac{د ص}{د س} = -٦س^{-٣} + ٥ = \frac{-٦}{س^{٣}} + ٥$$

$$\frac{د ص}{د س}_{|س=١} = -٦ + ٥ = -١$$

ب) $ص = ٧س^{٢} + \sqrt[٣]{س^{٢}} = ٧س^{٢} + س^{\frac{٢}{٣}}$

$$\frac{د ص}{د س} = ١٤س + \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}}$$

$$\frac{د ص}{د س}_{|س=١} = ١٤ + \frac{٢}{٣} = \frac{٤٤}{٣}$$

س٤: $ع(س) = ٣س^{٤} + بس^{٢}$

$ع'(س) = ١٢س^{٣} + ٢بس$

$ع'(١) = ١٢ + ٢ب = ٢٢$

$٢ب = ١٠$ ومنها $ب = ٥$

حلول تمارين ومسائل ٣-٤

س١: أ. $\frac{د ص}{د س}$ = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$= (٢س+٥) \times (-٣س^{٢}) + (٣ - س^{٣}) \times ٢$

$= -٦س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٦ - ٢س^{٣}$

$= -٨س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٦$

ب. $\frac{د ص}{د س} = \frac{١ \times (س+٣) - ١ \times س}{(س+٣)^{٢}}$

$$= \frac{س + ٣ - س}{(س + ٣)^{٢}} = \frac{٣}{(س + ٣)^{٢}}$$

$$\left| \frac{ص}{س} \right|_{س=١} = \frac{٣}{١٦}$$

س٢: $ه'(س) = ٢س - ١$

$$ه'(٣) = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$$

س٣: $ل'(س) = ه'(س) + ٣هـ'(س)$

$$= (٢س + ٣) + هـ'(س)$$

$$ل'(٢) = (٢ \times ٢ + ٣) + ٣هـ'(٢)$$

$$= ٧ + ٣ \times ١$$

$$= ١٠$$

س٤: $ه'(س) = \frac{٤ \times (٢ + ٣س) - ٣ \times (١ + ٤س)}{(١ + ٤س)^{٢}}$

$$ه'(٢) = \frac{٤ \times ٨ - ٣ \times ٩}{(٩)^{٢}} = \frac{٣٢ - ٢٧}{(٩)^{٢}} = \frac{٥}{٨١}$$

س٥: $ه'(س) = (س^{٣} \times ل'(س) + ل(س) \times ٣س^{٢}) + هـ'(س)$

$$ه'(-١) = (-١ \times ل'(-١) + ل(-١) \times ٣) + هـ'(-١)$$

$$= (-١ \times -٣ + ٥ \times ٣) + ٧$$

$$= ٢٥$$

حلول تمارين ومسائل ٣-٥

س١: ميل المماس = $ه'(-٢)$

$$ه'(س) = \frac{١ \times (٢ + س^{٢}) - ٢س \times (٣ + س)}{(٣ + س)^{٢}}$$

$$ه'(-٢) = \frac{١ \times (٢ + ٤) - ٤ \times (٣ + ٢)}{(٣ + ٢)} = \frac{٦ - ٤}{١} = ١٠$$

ميل المماس عندما (س = -٢) = - ١٠

س٢: معادلة المماس هي ص − ص١ = م (س − س١)

س١ = ٠ ، ص١ = ١ ، م = $\text{ه}'(٠)$ ، $\text{ه}'(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ١$

$\text{ه}'(٠) = -١ = م_{م}$ ومنها $م_{ع} = ١$

معادلة العمودي على المماس: ص − ١ = ١(س − ٠)

ص − س −١ = صفر

س٣: المماس أفقي تعني أن ميل المماس = صفر ،

ومنها $\text{ه}'(س) = ٠$ ، $\text{ه}(س) = س^{٢} - ٣س + ٥$

$\text{ه}'(س) = ٢س - ٣$

$٢س - ٣ = ٠$ ومنها $س = \frac{٣}{٢}$ ، $ص = \text{ه}(\frac{٣}{٢}) = \frac{٩}{٤} - \frac{٩}{٢} + ٥ = \frac{١١}{٤}$

النقطة هي $(\frac{٣}{٢} ، \frac{١١}{٤})$

س٤: معادلة المماس هي ص − ص١ = م (س − س١) ، (٠ ، ٧)

$م_{م} = \frac{-١}{م_{ع}} = \frac{-١}{\frac{-١}{٣}} = ٣$

معادلة المماس: ص − ٧ = ٣ (س − ٠)

ص − ٣س− ٧ = ٠

س٥: ميل المماس عندما (س= ١) =١١ تعني أن $\text{ه}'(١) = ١١$ ، لكن $\text{ه}'(س) = ٢أس + ٥$

$\text{ه}'(١) = ١١$ ومنها $٢أ + ٥ = ١١$ ومنها $أ = ٣$

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٦

س١: $(\text{ه} O \text{هـ})'(س) = \text{ه}'(\text{هـ}(س))\text{هـ}'(س)$

حيث $\text{ه}'(س) = ٢س$ ، $\text{هـ}'(س) = ١$

$(\text{ه} O \text{هـ})'(س) = \text{ه}'(س + ١)\text{هـ}'(س)$

$(\text{ه} O \text{هـ})'(س) = ٢(س + ١) \times ١ = ٢(س + ١) \times ١ = ٢س + ٢$

س٢: $\frac{ص}{س} = ٢(٢س-١) \times ٢ = ٤(٢س-١) = ٨س-٤$

س٣: $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

حيث $\frac{ص}{ع} = ٢ع-٥$ ، $\frac{ع}{س} = ٢$

$\frac{ص}{س} = ٢ \times (٢ع-٥) = ٤ع-١٠ = ٤(٢س+٣)-١٠ = ٨س+٢$

س٤: $م'(س) = ٤(س^{٢} - س)^{٣} (٢س-١)$

$م'(٢) = ٤(٤-٢)^{٣} (٤-١) = ٣ \times ٣٢ = ٩٦$

س٥: $ه'(س) = هـ'(٣س^{٢}+١) \times (٦س)$

$ه'(١) = هـ'(٣ \times ١+١) \times (١ \times ٦) = هـ'(٤) \times (٦) = ٢ \times ٦ = ١٢$

س٦: $(ه \circ هـ)'(٢) = ه'(هـ(٢)) هـ'(٢)$

$= ه'(٤) \times ٣ = ^{-}٢ \times ٣ = ^{-}٦$

$(هـ \circ ه)'(٢) = هـ'(ه(٢)) ه'(٢) = هـ'(٣) \times ٥ = ١ \times ٥ = ٥$

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٧

س١:

أ. $ه(س) = ٤س - ٢س^{٢}$

$ه'(س) = ٤ - ٤س$

$ه'(س) = ٠$

$٤ - ٤س = ٠$ ومنها $س = ١$

إشارة ه'(س)	+ + + + + +	- - - - - -
س	١	

نلاحظ أن

إشارة $ه'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= ١) $\Leftarrow$ $ه(١)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $ه(س)$ وتساوي $ه(١) = ٤ - ٢ \times ١ = ٢$

ب. $ه(س) = س(س^{٢} - ١٢) = س^{٣} - ١٢ س$

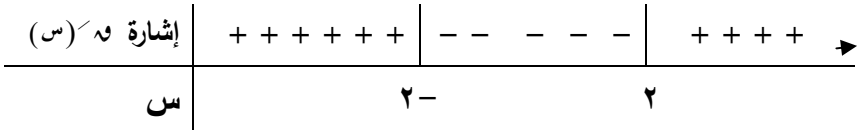
$ه'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

$ه'(س) = ٠$

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٤) = ٠$ ومنها $س^{٢} - ٤ = ٠$

$(س + ٢)(س - ٢) = ٠$ ومنها $س = -٢$، $س = ٢$



نلاحظ أن

إشارة هـ´(س) تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -٢) $\Leftarrow$ هـ(-٢) قيمة عظمى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(-٢) = ١٦.

إشارة هـ´(س) تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=٢) $\Leftarrow$ هـ(٢) قيمة صغرى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(٢) = -١٦.

ج. هـ(س)= $س^{٣}$ -٣س +٢ ، س $\in$ ح

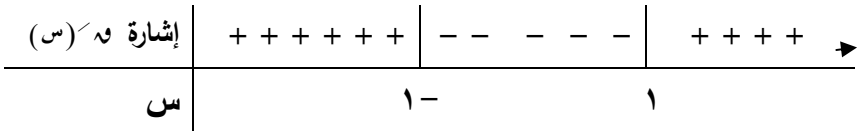
$هـ´(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$هـ´(س) = ٠$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ١) = ٠$ ومنها $س^{٢} - ١ = ٠$

$(س + ١)(س - ١) = ٠$ ومنها $س = -١$، $س = ١$



نلاحظ أن

إشارة هـ´(س) تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -١) $\Leftarrow$ هـ(-١) قيمة عظمى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(-١) = ٤.

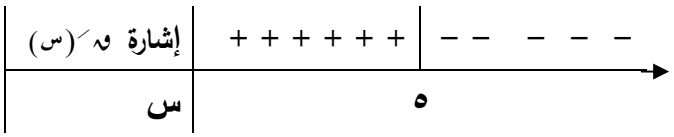
إشارة هـ´(س) تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س = ١) $\Leftarrow$ هـ(١) قيمة صغرى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(١) = ٠

د. $\text{ه}(س) = -س^{٢} + ١٠س + ٥$ ، س $\in$ ح

$\text{ه}'(س) = -٢س + ١٠$

$\text{ه}'(س) = ٠$

$-٢س + ١٠ = ٠$ ومنها $س = ٥$



نلاحظ أن إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول $(س = ٥) \Leftarrow$ $\text{ه}(٥)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $\text{ه}(س)$ وتساوي $\text{ه}(٥) = ٣٠$

س٢: $\text{ه}(-٢)$ قيمة عظمى محلية $\Leftarrow$ $\text{ه}'(-٢) = ٠$

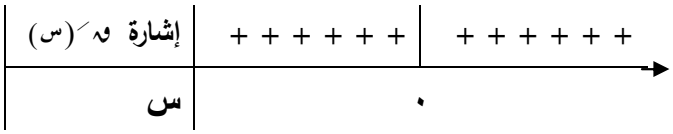
$\text{ه}'(س) = -٢س + ب$

$\text{ه}'(-٢) = ٠ \Leftarrow -٢ \times -٢ + ب = ٠$ ومنها $ب = -٤$

س٣: $\text{ه}'(س) = ٣س^{٢}$

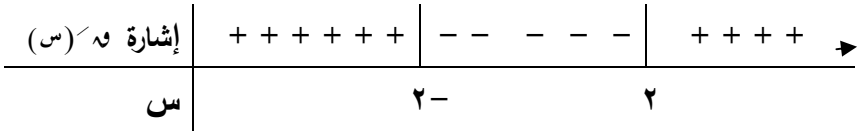
$\text{ه}'(س) = ٠$

$٣س^{٢} = ٠$ ومنها $س = ٠$



نلاحظ أن إشارة $\text{ه}'(س)$ لم تتغير حول $(س = ٠)$، $\text{ه}(٠)$ ليست قمة قصوى، ومنها $\text{ه}(س)$ ليس له أي قيم قصوى.

س٤:



نلاحظ أن

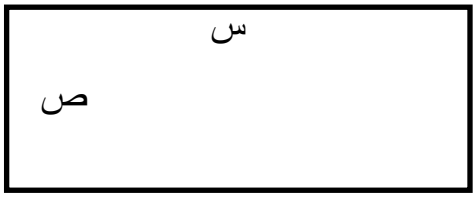
إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول $(س = -٢) \Leftarrow$ عند $(س = -٢)$ يوجد قيمة عظمى محلية.

إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول $(س = ٢) \Leftarrow$ عند $(س = ٢)$ يوجد قيمة صغرى محلية.

حلول تمارين ومسائل ٣ – ٨

س١: نفرض أن طول المستطيل = س

عرض المستطيل = ص



مساحة المستطيل = الطول × العرض

م(س) = س ص

مساحة المستطيل أكبر ما يمكن ⟸ إيجاد س التي يوجد عندها قيمة عظمى محلية للاقتران م(س).

لكن محيط المستطيل = ٢٠م

٢س + ٢ص = ٢٠

س + ص = ١٠ ومنها ص = ١٠ – س

م(س) = س (١٠ – س)

م(س) = ١٠س – س^{٢}

م´(س) = ١٠ – ٢س

م´(س) = ٠ ⟸ ١٠ – ٢س = ٠

ومنها س = ٥ م

إشارة م´(س)	+ + + + + + +	– – – – – – –
س	٥	

نلاحظ أن إشارة م´(س) تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= ٥) ⟸ عند (س= ٥) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران م(س).

ص = ١٠–٥ = ٥م

البعدان هما ٥ م ، ٥ م ،

مساحة أكبر مستطيل = ٥×٥= ٢٥ م^{٢}

س٢: نفرض العدد الأول = س ، العدد الثاني = ص

س + ص = ٢٠

حاصل ضرب العددين = س × ص

ح (س) = س ص ، لكن ص = ٢٠ – س

ح (س) = س (٢٠ – س) = ٢٠ س – $س^{٢}$

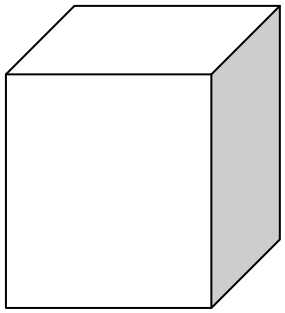
(نجد القيمة العظمى للاقتران ح(س))

ح ´(س) = ٢٠ – ٢ س

ح ´(س) = صفر ، ٢٠ – ٢ س = صفر ومنها س = صفر

العدد الأول = س = ١٠

العدد الثاني = ص = ٢٠ – س = ٢٠ – ١٠ = ١٠



س٣: نفرض طول ضلع القاعدة = س

ارتفاع الخزان = ع

سعة الخزان = $س^{٢}ع$

$س^{٢}ع$ = ٥٠٠

تكلفة بناء الخزان = ٥٠ (مساحة الأرضية + مساحة الجوانب الأربعة)

ت (س) = ٥٠ ($س^{٢}$ + ٤سع)

ت (س) = ٥٠$س^{٢}$ + ٢٠٠سع

لكن $ع = \frac{٥٠٠}{س^{٢}}$

ت (س) = ٥٠$س^{٢}$ + $\frac{١٠٠٠٠٠}{س}$ ،

أقل تكاليف تعني إيجاد القيمة الصغرى للاقتران ت(س).

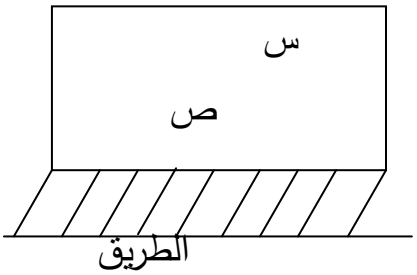
ت ´(س) = ١٠٠س – $\frac{١٠٠٠٠٠}{س^{٢}}$

ت ´(س) = صفر ، ١٠٠س – $\frac{١٠٠٠٠٠}{س^{٢}}$ = صفر

ومنها ١٠٠س = $\frac{١٠٠٠٠٠٠}{س^{٢}}$ ، ١٠٠س^{٣} = ١٠٠٠٠٠٠

س^{٣} = ١٠٠٠ ومنها س = ١٠م ، ع = $\frac{٥٠٠}{س^{٢}} = \frac{٥٠٠}{١٠٠}$ = ٥م

أبعاد الخزان هي: ١٠م ، ١٠م ، ٥م



س٤: نفرض أن طول الحديقة = س

عرضها = ص

مساحة الحديقة = س . ص = ٨٠٠

تكاليف السياج = ٦ س + ٢ (س + ٢ ص)

ت(س) = ٦ س + ٢ س + ٤ ص

= ٨ س + ٤ ص

لكن ص = $\frac{٨٠٠}{س}$

ت(س) = ٨ س + ٤ × $\frac{٨٠٠}{س}$

= ٨ س + $\frac{٣٢٠٠}{س}$

التكاليف أقل ما يمكن تعني إيجاد القيمة الصغرى للاقتران ت(س).

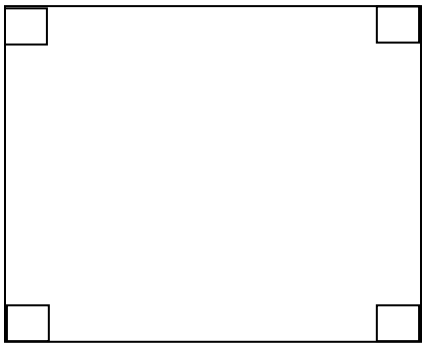
ت ´(س) = ٨ − $\frac{٣٢٠٠}{س^{٢}}$

ت ´(س) = صفر ، ٨ − $\frac{٣٢٠٠}{س^{٢}}$ = صفر

٨ = $\frac{٣٢٠٠}{س^{٢}}$ ومنها ٨ س^{٢} = ٣٢٠٠ ،

س^{٢} = ٤٠٠ ومنها س = ± ٢٠ ، −٢٠ مرفوضة لأنها تمثل بعد،

س = ٢٠ م ومنها ص= $\frac{٨٠٠}{س}$ = ٤٠ م .



س٥: نفرض أن طول ضلع المربع = س

طول ضلع قاعدة الصندوق = ٦٠ – ٢ س

حجم الصندوق = س (٦٠ – ٢ س) (٦٠ – ٢ س)

ح(س) = س (٣٦٠٠ – ٢٤٠ س + ٤ س^{٢})

= ٣٦٠٠ س – ٢٤٠ س^{٢} + ٤ س^{٣}

ح ′(س) = ٣٦٠٠ – ٤٨٠ س + ١٢ س^{٢}

(نجد س التي عندها القيمة العظمى)

ح ′(س) = صفر

٣٦٠٠ – ٤٨٠ س + ١٢ س^{٢} = صفر

س^{٢} – ٤٠ س + ٣٠٠= صفر

(س – ١٠) (س – ٣٠) = صفر ومنها س = ١٠ ، س =٣٠ (مرفوضة)

طول ضلع المربع = ١٠ سم

حلول تمارين عامة ٣ – ٩

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	أ	ب	ج	ب	د	أ	د	ج	ب	ج

س٢: متوسط التغير = $\frac{\text{ه}(٥) - \text{ه}(٢)}{٥ - ٢} = ١٠$

$\text{ه}(٥) - \text{ه}(٢) = ٣٠$

$\text{ه}(٥) - ٦ = ٣٠$ ومنها $\text{ه}(٥) = ٣٦$

س٣: متوسط التغير = $\frac{\text{ه}(أ) - \text{ه}(٢)}{أ - ٢} = ٦$

$\text{ه}(أ) - \text{ه}(٢) = ٦(أ - ٢)$

$أ^{٢} + ٣ - ٧ = ٦أ - ١٢$

$$أ^{٢} - ١٦أ + ٨ = ٠$$

$$(أ - ٤)(أ - ٢) = ٠$$ ومنها $أ = ٤$ ، $أ = ٢$ لكن ٢ مرفوضة، ومنها $أ = ٤$

س٤: $$ن'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٢} + ١٠ - ١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٩ + ٦هـ + هـ^{٢} + ١٠ - ١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٦هـ + هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٦ + هـ)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} ٦ + هـ = ٦$$

س٥: $$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢ + هـ) - ن(٢)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} ن'(٢)$$

$$ن'(س) = (س^{٢} + ٢) \times ٣ + (٣س + ٤) \times ٢س$$

$$ن'(٢) = ٦ \times ٣ + ١٠ \times ٤ = ٥٨$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢ + هـ) - ن(٢)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} \times ٥٨ = ٢٩$$

س٦: $$م'(س) = س^{٢} \times ق'(س) + ق(س) \times ٢س$$

$$م'(٣) = ٩ \times ق'(٣) + ٦ \times ق(٣) = ٩ \times ٥ + ٦ \times ٢^{-} = ٣٣$$

س٧: معادلة العمودي هي $ص - ص_{١} = م_{ع}(س - س_{١})$

$س = ١$، $ص = ق(١) = ٣$ ، $م_{ع} = \frac{-١}{م_{م}}$ لكن $م_{م} = ق'(١)$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ١٠س$ ومنها $ق'(١) = ١٣ = م_{م}$ ومنها $م_{ع} = \frac{-١}{١٣}$

معادلة العمودي: $ص - ٣ = \frac{-١}{١٣}(س - ١)$

$$١٣ص + س - ٤٠ = ٠$$

س٨: ميل المماس =٤ $\longleftarrow$ $ق'(١) = ٤$

$$\text{ه}'(س) = ٢أس + ٣$$

$$\text{ه}'(١) = ٢أ + ٣ = ٤ \quad \text{ومنها قيمة الثابت } أ = \frac{١}{٢}$$

س٩: $\text{ه}'(س) = ٣س^{٢} + ٦س$

$$\text{ه}'(س) = ٠$$

$$٣س^{٢} + ٦س = ٠$$

$$٣س(س + ٢) = ٠ \quad ، \quad س = ٠ \ ، \ س = -٢$$

إشارة ه′(س)	+ + + + + +	− − − − − −	+ + + +
س		−٢	٠

نلاحظ أن

إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= −٢) $\Leftarrow$ $\text{ه}(-٢)$ قيمة عظمى محلية وتساوي ١١.

إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=٠) $\Leftarrow$ $\text{ه}(٠)$ قيمة صغرى محلية وتساوي ٧

س١٠: نفرض طول ضلع القاعدة = س

ارتفاع الصندوق = ع

حجم الصندوق = $س^{٢}ع$

$$٥١٢ = س^{٢}ع$$

تكلفة عمل الصندوق = ٥ (مساحة القاعدتين + مساحة الجوانب الأربعة)

$$ت(س) = ٥(٢س^{٢} + ٤سع)$$

$$ت(س) = ١٠س^{٢} + ٢٠سع$$

$$\text{لكن } ع = \frac{٥١٢}{س^{٢}}$$

$$ت(س) = ١٠س^{٢} + \frac{١٠٢٤٠}{س}$$ أقل تكاليف تعني إيجاد القيمة الصغرى للاقتران ت(س).

$$ت'(س) = ٢٠س - \frac{١٠٢٤٠}{س}$$

$$ت'(س) = صفر \quad ، \quad ٢٠س - \frac{١٠٢٤٠}{س} = صفر$$

$$ومنها \quad ٢٠س = \frac{١٠٢٤٠}{س} \quad ، \quad ٢٠س^{٣} = ١٠٢٤٠$$

$$س^{٣} = ٥١٢ \quad ومنها \quad س = ٨، \quad ع = \frac{٥١٢}{س^{٢}} = \frac{٥١٢}{٦٤} = ٨$$

الصندوق على شكل مكعب طول ضلعه ٨.

الوحدة الرابعة

التكامل

حلول تمارين ومسائل ٤ – ١

س١:

	المشتقة ق ´(س)	الاقتران الأصلي ق(س)+جـ
١.	$٤س^{٣}$	$س^{٤}+جـ$
٢.	$٤س^{٣}+٣س^{٢}+٢$	$س^{٤}+س^{٣}+٢س+جـ$
٣.	$٢س+١$	$س^{٢}+س+جـ$
٤.	$٤س^{٣}+٣$	$\int(٤س^{٣}+٣)دس$

س٢:

العبارة	أ	ب	ج	د	هـ	و
الإجابة	✗	✓	✗	✓	✗	✓

س٣: $ق´(س)=\frac{س^{٢}+٣}{س+١}$.

حلول تمارين ومسائل ٤ – ٢

س١:

أ. $\int س^{\frac{٢}{٣}}دس=\frac{٢}{٣}س+جـ$ ب. $\int دس=س+جـ$ $\int ط دس=ط س+جـ$

ج. $\int \sqrt{٥س}دس=\int (٥س)^{\frac{١}{٢}}دس=\frac{(٥س)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}+جـ=\frac{٢\sqrt{٥س^{٣}}}{٣}+جـ$

د. $\int(٢س^{٢}+٣)دس=\int٢س^{٢}دس+\int٣دس=\frac{٢س^{٣}}{٣}+جـ_{١}+٣س+جـ_{٢}$

$=\frac{٢س^{٣}}{٣}+٣س+جـ$

هـ. $\int(٧س^{٣}-\frac{٢}{س^{٢}}+١)دس=\int٧س^{٣}دس-\int٢س^{-٢}دس+\int١دس$

$=\frac{٧س^{٤}}{٤}-\frac{٢س^{-١}}{-١}+س+جـ=\frac{٧س^{٤}}{٤}+\frac{٢}{س}+س+جـ$

و. $\int ك^{٢}دس=ك^{٢}س+جـ$

س٢: $\int (٢ص-٥)(ص+٣)\,دص = \int (٢ص^{٢}+ص-١٥)\,دص = \frac{٢ص^{٣}}{٣}+\frac{ص^{٢}}{٢}-١٥ص+جـ$

س٣: $\int \frac{ل^{٢}-٥ل+٦}{ل-٢}\,دل = \int \frac{(ل-٢)(ل-٣)}{(ل-٢)}\,دل = \int (ل-٣)\,دل = \frac{ل^{٢}}{٢}-٣ل+جـ$

س٤: $\int (٢س+١)(س^{٣}+س^{٢}-٣س+٤)\,دس = \int (٢س^{٤}+٣س^{٣}-٥س^{٢}+٥س+٤)\,دس$

$= \frac{٢س^{٥}}{٥}+\frac{٣س^{٤}}{٤}-\frac{٥س^{٣}}{٣}+\frac{٥س^{٢}}{٢}+٤س+جـ$

س٥: $ن'(س) = ٣س^{٣}+٥س^{٢}-٢س+٤$

س٦: $\frac{دص}{دس} = (٢س+٢)(س^{٢}+٢س)^{٥}$

حلول تمارين ومسائل ٤- ٣

س١: $ه(س) = \int ه'(س)\,دس = \int ٥\,دس = ٥س+جـ$

$ه(س)$ يمر بالنقطة (٢ ، ٣)، $ه(٢) = ٣$

$ه(٢) = ٥\times٢+جـ$ ومنها $٣ = ١٠+جـ$ ، ومنها $جـ = -٧$

$ه(س) = ٥س-٧$

س٢: $ه(س) = \int ه'(س)\,دس = \int (س+٣)\,دس = \frac{س^{٢}}{٢}+٣س+جـ$

$ه(س)$ يمر بالنقطة (٢ ، ٧)، $ه(٢) = ٧$

$ه(٢) = ٢+٦+جـ = ٧$ ، ومنها $جـ = -١$

$ه(س) = \frac{س^{٢}}{٢}+٣س-١$

س٣: $ك(س) = \int ك'(س)\,دس = \int (س+١)^{٣}\,دس = \int (س^{٣}+٣س^{٢}+٣س+١)\,دس$

$= \frac{س^{٤}}{٤}+س^{٣}+\frac{٣س^{٢}}{٢}+س+جـ$

$$ك(٠) = ٢ = جـ$$

$$ك(س) = \frac{س^{٤}}{٤} + س^{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + س + ٢$$

$$ك(٢) = ٢٢$$

س٤: $ع'(س) = ٢س - ٥$

$$ع(س) = \int (٢س - ٥)دس = س^{٢} - ٥س + جـ$$

$$ع(٠) = ٣ \Leftarrow جـ = ٣$$

$$ع(س) = س^{٢} - ٥س + ٣$$

معادلة المماس عند س =٢ هي :

$$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$$

$$ص - ع(٢) = ع'(٢)(س - ٢)$$

لكن $ع(٢) = -٣$ ، $ع'(٢) = -١$

المعادلة هي $ص + ٣ = -١(س - ٢)$

$$ص + س + ١ = ٠$$

حلول تمارين ومسائل ٤ - ٤

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ. $$\int_{-١}^{٢} ٦\pi دس = \left| ٦\pi س \right|_{-١}^{٢} = ١٢\pi - (-٦\pi) = ١٨\pi$$

ب. $$\int_{٠}^{٢} (٥ - ٣س^{٢})دس = \left| (٥س - س^{٣}) \right|_{٠}^{٢} = (٥ \times ٢ - ٨) - (٠ - ٠) = ٢$$

ج. $$\int_{١}^{٣} (\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}})دس = \int_{١}^{٣} (س^{-٢} - س^{-٣})دس$$

$$= \left| (\frac{س^{-١}}{-١} - \frac{س^{-٢}}{-٢}) \right|_{١}^{٣} = \left| (\frac{-١}{س} + \frac{١}{٢س^{٢}}) \right|_{١}^{٣}$$

$$= (\frac{-١}{٣} + \frac{١}{١٨}) - (\frac{-١}{١} + \frac{١}{٢}) = -١ - \frac{-١}{٩} = \frac{٢}{٩}$$

د. $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{س}\, د س = \int_{1}^{8} س^{\frac{1}{3}}\, د س = \left| \frac{3 س^{\frac{4}{3}}}{4} \right|_{1}^{8}$

$= \left| \frac{3 \sqrt[3]{س^4}}{4} \right|_{1}^{8} = (\frac{3 \times 16}{4}) - (\frac{3 \times 1}{4}) = \frac{45}{4}$

س٢: $\int_{3}^{ب} ب^2\, د س = 32$، منها $\left| س^2 \right|_{3}^{ب} = 32$

$ب^2 - 9 = 32$ ومنها $ب^2 = 32$

$ب^2 = 16$ ومنها $ب = \pm 4$.

س٣: $\int_{-2}^{أ} (3 - 2س)\, د س =$ صفر، منها $\left| (3س - س^2) \right|_{-2}^{أ} = 0$

$(3أ - أ^2) - (3 \times -2 - 4) = 0$ ومنها $3أ - أ^2 + 10 = 0$

$أ^2 - 3أ - 10 = 0$ ومنها $(أ - 5)(أ + 2) = 0$

$أ = 5$ ، -2

س٤: $\int_{0}^{2} (2س - 1)^2\, د س = \int_{0}^{2} (4س^2 - 4س + 1)\, د س$

$= \left| (\frac{4س^3}{3} - 2س^2 + س) \right|_{0}^{2}$

$= (\frac{32}{3} - 8 + 2) - (0) = \frac{14}{3}$

س٥:

أ. $ص = \int (4س^3 + 2س - 5)\, د س$ ، $\frac{د ص}{د س} = 4س^3 + 2س - 5$

ب. $ص = \int_{2}^{7} (4س^3 + 2س - 5)\, د س$ ، $\frac{د ص}{د س} =$ صفر.

حلول تمارين ومسائل ٤ – ٥

س١: $\int_{٢}^{٢} (س^{٢} - ٦س)\,ds$ = صفر

س٢: أ. $\int_{٢}^{٣} (س - ٦)\,ds = \left|(\frac{س^{٢}}{٢} - ٦س)\right|_{٢}^{٣} = (١٨ - \frac{٩}{٢}) - (١٢ - \frac{٤}{٢}) = \frac{-٧}{٢}$

ب. $\int_{٢}^{٥} (س - ٦)\,ds = (س^{٢} - ٦س) = \left|(\frac{٢٥}{٢} - ٣٠) - (١٢ - \frac{٤}{٢})\right|_{٢}^{٥} = \frac{-١٥}{٢}$

ج. $\int_{٣}^{٠} (س - ٦)\,ds = \int_{٢}^{٠} (س - ٦)\,ds - \int_{٢}^{٣} (س - ٦)\,ds = -٤$

س٣: إذا كان $\int_{-١}^{٢} ن(س)\,ds = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} ن٢(س)\,ds = ٤$ ، فإن:

أ- $\int_{٠}^{٢} -٣ن(س)\,ds = -٣^{-} \int_{٠}^{٢} هـ(س)\,ds$

لكن $\int_{٠}^{٢} هـ(س)\,ds = \frac{٤}{٢} = ٢$ ومنها

$\int_{٠}^{٢} -٣ن(س)\,ds = -٣^{-} \int_{٠}^{٢} هـ(س)\,ds = -٣^{-} \times ٢ = ٦^{-}$

ب- $\int_{-١}^{٠} ن(س)\,ds = \int_{-١}^{٢} هـ(س)\,ds + \int_{٢}^{٠} هـ(س)\,ds$

لكن $\int_{-١}^{٢} ن(س)\,ds = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} هـ(س)\,ds = ٢$ ، $\int_{٢}^{٠} هـ(س)\,ds = -٢^{-}$

ومن ذلك $\int_{-١}^{٠} ن(س)\,ds = \int_{-١}^{٢} هـ(س)\,ds + \int_{٢}^{٠} هـ(س)\,ds = -٣^{-} + -٢^{-} = -٥^{-}$

ج- $\int_{-١}^{٢} ن٣(س) + س)\,ds = \int_{-١}^{٢} ٣هـ(س)\,ds + \int_{-١}^{٢} س\,ds$

$$= ٣\int_{-١}^{٢} هـ(س)\,د س + \int_{-١}^{٢} س\,د س = ٣ \times ٣^{-} + \left|\left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)\right|_{-١}^{٢}$$

$$= ٩^{-} + (٢) - \left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١٥^{-}}{٢}$$

س٤: $\int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣ن(س))\,د س = ٥\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,د س - ٣\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,د س$

لكن $\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,د س = \frac{١٢}{٣} = ٤$ ، $\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,د س = \frac{٦}{٢^{-}} = ٣^{-}$

ومن ذلك $\int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣ن(س))\,د س = ٥ \times ٣^{-} - ٣ \times ٤ = ٢٧^{-}$

حلول تمارين ومسائل ٤-٦

س١: $\int (٢ - ٣س)^{٣}\,د س$

نفرض ص $= ٢ - ٣س$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٣^{-}$ ، $د س = \frac{د ص}{٣^{-}}$

نعوض في التكامل $\int (٢ - ٣س)^{٣}\,د س = \int ص^{٣}\,\frac{د ص}{٣^{-}}$

$$= \frac{١^{-}}{٣}\int ص^{٣}\,د ص = \frac{١^{-}}{٣} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{-(٢ - ٣س)^{٤}}{١٢} + جـ$$

س٢: $\int \frac{٣}{(س - ١)^{٥}}\,د س = ٣\int (س - ١)^{-٥}\,د س$

نفرض ص $= س - ١$

$\frac{د ص}{د س} = ١$ ، $د س = د ص$

نعوض في التكامل $٣\int (س - ١)^{-٥}\,د س = ٣\int ص^{-٥}\,د ص = \frac{٣ص^{-٤}}{-٤} + جـ$

$$= \frac{-٣(س - ١)^{-٤}}{٤} + جـ = \frac{-٣}{٤(س - ١)^{٤}} + جـ$$

س٣: $\int (أس + ب)^{٤}\, د س$ =

نفرض ص $= أس + ب$ ، $\frac{د ص}{د س} = أ$ ، $د س = \frac{د ص}{أ}$

نعوض في التكامل $\int (أس + ب)^{٤}\, د س = \int ص^{٤} \frac{د ص}{أ} = \frac{ص^{٥}}{أ٥} + جـ$

$= \frac{(أس + ب)^{٥}}{أ٥} + جـ$

س٤: $\int س^{٢} (س^{٣} + ١)^{٤}\, د س$

نفرض ص $= س^{٣} + ١$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٣س^{٢}$ ، $د س = \frac{د ص}{٣س^{٢}}$

نعوض في التكامل $\int س^{٢} (س^{٣} + ١)^{٤}\, د س = \int س^{٢} ص^{٤} \frac{د ص}{٣س^{٢}}$

$= \frac{١}{٣} \int ص^{٤}\, د ص = \frac{ص^{٥}}{١٥} + جـ$

$= \frac{(س^{٣} + ١)^{٥}}{١٥} + جـ$

س٥: $\int_{١}^{٢} (٢س - ١)^{٢}\, د س$

نجد التكامل غير المحدود $\int (٢س - ١)^{٢}\, د س$

نفرض ص $= ٢س - ١$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢$ ، $د س = \frac{د ص}{٢}$

نعوض في التكامل $\int (٢س - ١)^{٢}\, د س = \int ص^{٢} \frac{د ص}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ = \frac{ص^{٣}}{٦} + جـ = \frac{(٢س - ١)^{٣}}{٦} + جـ$

$\int_{١}^{٢} (٢س - ١)^{٢}\, د س = \left| \frac{(٢س - ١)^{٣}}{٦} \right|_{١}^{٢} = \frac{(٢ - ١)^{٣}}{٦} - \frac{(٤ - ١)^{٣}}{٦}$

$= \frac{٢٧}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{٢٦}{٦} = \frac{١٣}{٣}$

س٦: $\int_{0}^{1} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, د س$

نجد التكامل غير المحدود $\int (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, د س$

نفرض ص $= س^{٢} - ٥س + ٧$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢س - ٥$ ، $د س = \frac{د ص}{(٢س - ٥)}$

نعوض في التكامل $\int (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, د س$

$$= \int (٢س - ٥) ص^{-٢} \frac{د ص}{(٢س - ٥)} = \int ص^{-٢}\, د ص = -ص^{-١} + جـ$$

$$= -(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-١} + جـ$$

ومن ذلك $\int_{0}^{1} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, د س = -(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-١} \Big|_{0}^{1}$

$$= -(-١ + ٥ + ٧)^{-١} + (٧)^{-١} \text{ ، } = \frac{-١}{٣} + \frac{١}{٧} = \frac{-٣ + ٧}{٢١} = \frac{-٤}{٢١}$$

س٧: $\int \sqrt{٣س - ١}\, د س = \int (٣س - ١)^{\frac{١}{٢}}\, د س$

نفرض ص $= ٣س - ١$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٣$ ، $د س = \frac{د ص}{٣}$

نعوض في التكامل $= \int (٣س - ١)^{\frac{١}{٢}}\, د س = \int ص^{\frac{١}{٢}} \frac{د ص}{٣} = \frac{١}{٣} \times \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

$$= \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ = \frac{٢(٣س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ$$

س٨: $= \int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س + ٥}\, د س$

نفرض ص $= س^{٢} + ٤س + ٥$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س + ٤$ ، $د س = \frac{د ص}{(٢س + ٤)}$ $\qquad د س = \frac{د ص}{٢(س + ٢)}$

نعوض في التكامل

$$\int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س + ٥}\, د س = \int (س + ٢) ص^{\frac{١}{٣}} \frac{د ص}{٢(س + ٢)}$$

$$= \frac{1}{2} \int ص^{\frac{1}{3}} \, ود ص = \frac{3}{8} ص^{\frac{4}{3}} + جـ$$

$$= \frac{3}{8} (س^2 + 4س + 5)^{\frac{4}{3}} + جـ$$

حلول تمارين ومسائل ٤-٧

س١: المساحة المطلوبة $= \int_{-1}^{3} |هـ(س)| ود س = \int_{-1}^{3} |3 ود س| = 3(3 - (-1)) = 12$ وحدة مساحة.

س٢: المساحة المطلوبة $= \int_{1}^{3} |هـ(س)| ود س = \int_{1}^{3} |(3س - 2)| ود س$

$$= \left| \left(\frac{3س^2}{2} - 2س \right) \right|_{1}^{3} = (6 - \frac{27}{2}) - (2 - \frac{3}{2})$$

$= 8$ وحدات مساحة.

س٣: المساحة المطلوبة $= \int_{0}^{1} |هـ(س)| ود س = \int_{0}^{1} |س^3| ود س = \left| \frac{س^4}{4} \right|_{0}^{1} = \frac{1}{4}$ وحدة مساحة.

س٤: المساحة المطلوبة $= \int_{1}^{5} |هـ(س)| ود س = \int_{1}^{5} |أس| ود س$

$$= \left| \frac{أس^2}{2} \right|_{1}^{5} = \frac{25أ}{2} - \frac{أ}{2} = 12أ = 8 \quad \text{ومنها} \quad أ = \frac{2}{3}$$

س٥: المساحة المطلوبة $= \int_{0}^{9} \sqrt{3س + 9} \, ود س = \int_{0}^{9} (3س + 9)^{\frac{1}{2}} ود س$

نجد التكامل غير المحدود $= \int (3س + 9)^{\frac{1}{2}} ود س$

نفرض ص $= 3س + 9$ ، $\frac{ود ص}{ود س} = 3$ ، $ود س = \frac{ود ص}{3}$

نعوض في التكامل $= \int (3س + 9)^{\frac{1}{2}} ود س = \int ص^{\frac{1}{2}} \frac{ود ص}{3}$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2ص^{\frac{3}{2}}}{3} + جـ = \frac{2ص^{\frac{3}{2}}}{9} + جـ = \frac{2(3س + 9)^{\frac{3}{2}}}{9} + جـ$$

المساحة المطلوبة $= \left| \frac{٢(٣س+٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} \right|_{٠}^{٩} = ٤٢$ وحدة مساحة

حلول تمارين عامة ٤ – ٨

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	ج	أ	ب	د	أ	أ	ج	د	أ	ج

س٢: $ق(س) = \int ق'(س) ى س = \int (٤س^{٣} + س^{٢} - ٢س) ى س$

$= س^{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + جـ$

لكن $ق(٠) = ٣ = جـ$ ، منها $ق(س) = س^{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + ٣$

$ق(١) = ١ + \frac{١}{٣} - ١ + ٣ = \frac{١٠}{٣}$

س٣: $ق(س) = \int ق'(س) ى س = \int (٣ - ٢س) ى س$

$= ٣س - س^{٢} + جـ$

$ق(س)$ يمر بالنقطة $(١ ، ٦)$، $ق(١) = ٦$

$ق(١) = ٦ = ٣ - ١ + جـ$ ، ومنها $جـ = ٤$

$ق(س) = ٣س - س^{٢} + ٤$

س٤: $\int_{١}^{٣} (٢ق(س) - ٥هـ(س) + ٢) ى س = \int_{١}^{٣} ٢ق(س) ى س - \int_{١}^{٣} ٥هـ(س) ى س + \int_{١}^{٣} ٢ ى س$

$= ٢\int_{١}^{٣} ق(س) ى س - ٥\int_{١}^{٣} هـ(س) ى س + \int_{١}^{٣} ٢ ى س$

$= ٢ \times ٧ - ٥ \times -٤ + ٤ = ٣٨$

س٥: $\int (٢س+١) \sqrt{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}} ى س = \int (٢س+١)(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٢}{٣}} ى س$

نفرض ص $= س^{٢} + س + ٤$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢س + ١$ ، $د س = \frac{د ص}{٢س + ١}$

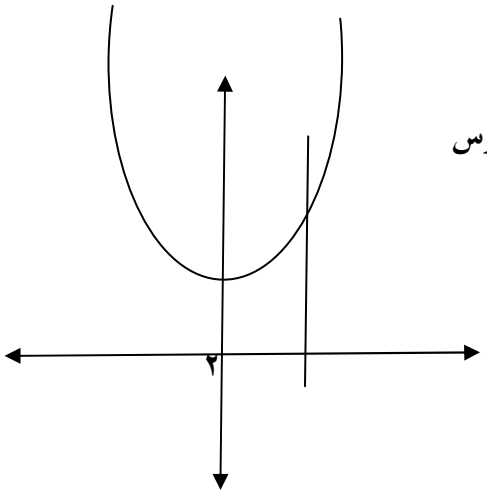
نعوض في التكامل $= \int (٢س + ١)(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٢}{٣}} د س$

$= \int (٢س + ١) ص^{\frac{٢}{٣}} \frac{د ص}{(٢س + ١)}$

$= \int ص^{\frac{٢}{٣}} د ص = \frac{٣ ص^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$

$= \frac{٣(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$

السؤال السادس:



المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٢} ق(س) د س = \int_{٠}^{٢} (س^{٢} + ٥) د س$

$= \left| (\frac{س^{٣}}{٣} + ٥س) \right|_{٠}^{٢}$

$= (\frac{٨}{٣} + ١٠) - (٠)$

$= \frac{٣٨}{٣}$ وحدة مساحة.

الوحدة الخامسة

الأعداد المركبة

تمارين ومسائل (٥ - ١)

س١: أ) $٢ + \sqrt{-٢} = ٢ + \sqrt{-١ \times ٢} = ٢ + \sqrt{٢} \times \sqrt{-١} = ٢ + \sqrt{٢}ت$

ب) $\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩} = ٢ت + ٣ت = ٠ + ٥ت$

جـ) $\sqrt{-٨} \times \sqrt{-٢} = ٢\sqrt{٢}ت \times \sqrt{٢}ت = ٤ت^{٢} = -٤ + ٠ت$

س٢: أ) $\frac{٢}{٥}ت - ٣ = -٣ + \frac{٢}{٥}ت \Leftarrow -٣ ، \frac{٢}{٥}$

ب) $\sqrt{-٩} = \sqrt{-١ \times ٩} = ٣ت = ٠ + ٣ت \Leftarrow ٠ ، ٣$

جـ) $١ - \sqrt{-١} = ١ - ت \Leftarrow ١ ، -١$

د) $٦ت \Leftarrow ٠ ، ٦$

هـ) $٠ ، -٢$

و) $\frac{١}{٣} ، ٠$

س٣: $(١ + ت - ت^{٢})^{٣}(١ - ت - ت^{٢})^{٣} = (١ + ت + ١)^{٣}(١ - ت + ١)^{٣}$

$= (٢ + ت)^{٣}(٢ - ت)^{٣}$

$= ((٢ + ت)(٢ - ت))^{٣}$

$= (٤ - ت^{٢})^{٣}$

$= (-١)^{٥} \cdot ٤^{٣} = ١٢٥$

س٤: أ) $ت^{٤٣} = ت^{٤٢} \cdot ت = (ت^{٢})^{٢١} \cdot ت = -ت$

ب) $\frac{١}{ت^{-٦٥}} = \frac{١}{ت^{٦٤} \cdot ت} = \frac{١}{ت} = \frac{ت}{ت^{٢}} = -ت$

جـ) $ت^{٢٧} + \frac{١}{ت^{-٢٧}} = ت^{٢٧} + (\frac{١}{ت})^{٢٧} = ت^{٢٧} + (-ت)^{٢٧} = ت^{٢٧} - (ت)^{٢٧} = ٠$

أو

$ت^{٢٧} + \frac{١}{ت^{-٢٧}} = ت^{٣} + \frac{١}{ت^{-٣}} = -ت + \frac{١}{-ت} = -ت - \frac{١}{ت} = \frac{-ت^{٢} - ١}{ت} = \frac{-١ - ١}{ت} = ٠$

س٥: $\frac{١ + ٢ت^{٢} + ت^{٣} + ٢ت}{ت^{٣} + ت^{٤}} = \frac{١ - ٢ - ت + ٢ت}{-ت + ١} = \frac{ت - ١}{-ت + ١} = \frac{-(-ت + ١)}{-ت + ١} = -١$

تمارين ومسائل (٥ – ٢)

س١: أ) $٤(٢+٤ت)+٥(٣-٢ت)=٨+١٦ت+١٥-١٠ت=٢٣+٦ت$

ب) $(٣+٤ت)(٣-٥ت)=٩-٣ت-٢٠ت^{٢}=٩-٣ت+٢٠=٢٩-٣ت$

جـ) $(٣+٤ت)^{٣}=(٣+٤ت)^{٢}(٣+٤ت)$

$=(٣+٤ت)^{٢}(٣+٤ت)=(٩+٢٤ت+١٦ت^{٢})(٣+٤ت)$

$=(-٧+٢٤ت)(٣+٤ت)=-٢١+٢٨ت+٧٢ت+٩٦ت^{٢}$

$-٢١+٢٨ت+٧٢ت+٩٦ت^{٢}=-١١٧+٤٤ت$

د) $٤ت(١-٥ت)^{٢}=٤ت(-٢٤-١٠ت)=-٩٦ت+٤٠=٤٠-٩٦ت$

هـ) $(١-ت)^{٦}=(١-ت)^{٢})^{٣}=(-٢ت)^{٣}=-٨ت^{٣}=٨ت$

س٢: $س+٢سص=-٥(س-٤ص)$

$أ+بت+٢(أ+بت)ت=-٥(أ+بت)+٢٠ت$

$أ+بت+٢أت+٢بت^{٢}=-٥أ-٥بت+٢٠ت$

$١٦أ-٢ب+(١٢أ+ب)ت=(٢٠-٥ب)ت$

ومنها

$١٦أ-٢ب=٠$

$١٢أ+ب=٢٠-٥ب$

$١٦أ-٢ب=٠$

$١٢أ+٦ب=٢٠$

وبحل المعادلتين ينتج أن: $ب=٣$ ، $أ=١$، $س=١+٣ت$

س٣: $س-ص-٢=ص^{٢}ت-سص$

$س-ص-٢=(ص^{٢}-س)ت$ ومنها

$ص=س-٢$

$ص^{٢}-س=٠$

$(س-٢)^{٢}-س=٠$

$س^{٢}-٥س+٤=٠$

$س=٤$ ، $ص=٢$

$س=١$ ، $ص=-١$

س٤: بتعويض $ع = ت$ في $ع^{٥} + ع^{٢} = ع - ١$ ينتج أن

الطرف الأيمن $ع^{٥} + ع^{٢} = ت^{٥} + ت^{٢} = ت - ١$

الطرف الأيسر $ع - ١ = ت - ١$

الطرفين متساويين، $ع = ت$ تحقق المعادلة $ع^{٥} + ع^{٢} = ع - ١$.

س٥: بتعويض $ع = -١ + ت$ في $ع^{٢} + ٢ع + ٢ = ٠$ ينتج أن

$$(-١ + ت)^{٢} + ٢(-١ + ت) + ٢ = ١ - ٢ت + ت^{٢} - ٢ + ٢ت + ٢ =$$
$$= ١ + ت^{٢}$$
$$= ١ - ١ = ٠$$

س٦: بالضرب التبادلي ينتج أن: $أ ت = ٣ + ١٠ ت + ٣ت^{٢}$

$$أ ت = ٣ + ١٠ ت - ٣$$
$$أ ت = ١٠ ت$$
$$أ = ١٠$$

س٧: أ) $ع = ٢ + \sqrt{١٢}ت$ ، $س = ٢، ص = \sqrt{١٢}$

$$ع^{-١} = \frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} + \frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}} ت$$
$$ع^{-١} = \frac{٢}{١٢ + ٤} - \frac{\sqrt{١٢}}{١٢ + ٤} ت$$
$$ع^{-١} = \frac{١}{٨} - \frac{\sqrt{٣}}{٨} ت$$

ب) $ع = \frac{ت}{ت - ٣}$ ،

نفرض أن $\left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)^{-١} = س + ص ت$

$$\Leftarrow \left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)(س + ص ت) = ١$$
$$ت(س + ص ت) = ت - ٣$$
$$ت س + ص ت^{٢} = ت - ٣$$
$$ت س - ص = ت - ٣$$
$$س = ١، ص = ٣$$
$$\left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)^{-١} = ١ + ٣ت$$

جـ) $ع = (١+ت)^{١٣}$

$$ع^{-١} = ((١+ت)^{١٣})^{-١} = (١+ت)^{-١٣}$$
$$= (١+ت)^{-١٤} \times (١+ت)$$
$$= ((١+ت)^{٢})^{-٧} \times (١+ت)$$
$$= (١+٢ت+ت^{٢})^{-٧} \times (١+ت)$$
$$= (٢ت)^{-٧} \times (١+ت)$$
$$= \frac{١}{١٢٨} \times ت^{-٨} \times ت \times (١+ت)$$
$$= \frac{ت}{١٢٨} \times (١+ت) = \frac{-١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨} ت$$

س٨: بجمع المعادلتين ينتج أن:

$$٣ ع_{١} = (-٨ \overline{/} + ٥ \overline{/}) ت = (-٢ \overline{/} + ٢ \overline{/}) ت = ٣ \overline{/} ت$$
$$\Leftarrow ع_{١} = \overline{/} ت$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج أن:

$$\overline{/} ت + ٣ ع_{٢} = -\overline{/} ٨ ت \Leftarrow ٣ ع_{٢} = -\overline{/} ٨ ت - \overline{/} ت$$
$$\Leftarrow ٣ ع_{٢} = -٢ \overline{/} ت - \overline{/} ت = -٣ \overline{/} ت$$
$$\Leftarrow ع_{٢} = -\overline{/} ت$$

تمارين ومسائل (٥ – ٣)

س١: $١ + \overline{/} -٤ + ١ = ٢ ت + ١$

$$\therefore |١ + \overline{/} -٤| = |٢ ت + ١|$$
$$= \overline{/} ٢^{٢} + ١^{٢}$$
$$= \overline{/} ٤ + ١$$
$$= \overline{/} ٥$$

س٢: أ) $|-٣ ع_{١}| = |-٣ ت - ٣| = \overline{/} (-٣)^{٢} + (-٣)^{٢} = \overline{/} ٩ + ٩ = \overline{/} ١٨$

ب) $ع_١ \overline{ع_١} = (١+ت)(١-ت) = ١-ت^{٢} = ٢$

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|٢ \times \frac{١}{٢}\right| = |١| = ١$$

أو

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢}\left((١)^{٢} + (١)^{٢}\right)\right|$$

$$= \sqrt{٢ \times \frac{١}{٢}} = \sqrt{١} = ١$$

ج) $$\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١-ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{١+ت^{٢}-٢ت}{١+١}$$

$$= \frac{-٢ت}{٢} = -ت$$

$$\therefore \left|\frac{ع_٢}{ع_١}\right| = |-ت| = \sqrt{(٠)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{١} = ١$$

د) $ع_١ ع_٢ = (١+ت)(١-ت) = ١-ت^{٢} = ٢$

$$|٢ع_١ ع_٢| = |٢ \times ٢| = |٤| = \sqrt{(٤)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

أو

$$|٢ع_١ ع_٢| = \left|٢\left((١)^{٢} + (١)^{٢}\right)\right| = |٢ \times ٢|$$

$$= |٤| = \sqrt{(٤)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

س٣: $ع = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

أ) $$ع^{-١} = \frac{١}{\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت} = \frac{٥}{٣-٤ت} \times \frac{٣+٤ت}{٣+٤ت}$$

$$= \frac{١٥+٢٠ت}{٩+١٦} = \frac{١٥}{٢٥} + \frac{٢٠}{٢٥}ت = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$$

ب) $(ع٣)^{-١} = \left(\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}ت\right)^{-١} = \frac{١}{\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}ت}$

$= \frac{٥}{٩ - ١٢ت} \times \frac{٩ + ١٢ت}{٩ + ١٢ت} = \frac{٤٥ + ٦٠ت}{٨١ + ١٤٤}$

$= \frac{٤٥}{٢٢٥} + \frac{٦٠}{٢٢٥}ت = \frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥}ت = \frac{١}{٣}ع^{-١}$

ج) $|ع^{-١}| = \left|\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}\right| = \sqrt{\frac{٩ + ١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = \sqrt{١} = ١$

د) $\left|\frac{ع}{٥}\right| = \left|\frac{١}{٥}\left(\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت\right)\right| = \left|\frac{١}{٥}\left(\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت\right)\right|$

$= \left|\frac{٣}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥}ت\right| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٢٥}\right)^{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٩}{٦٢٥} + \frac{١٦}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{١}{٢٥}} = \frac{١}{٥}$

س٤: أ) $\frac{-١ + \sqrt{٢}ت}{٢ + ت} = \frac{-١ + \sqrt{٢}ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت}$

$= \frac{-٢ + ت + ٢\sqrt{٢}ت - \sqrt{٢}ت^{٢}}{١ + ٤}$

$= \frac{-٢ + \sqrt{٢}}{٥} + \frac{١ + ٢\sqrt{٢}}{٥}ت$

ب) $\frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٥ت} + \frac{٢ + ٣ت}{٢ - ٣ت} = \frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٥ت} \times \frac{٣ + ٥ت}{٣ + ٥ت} + \frac{٢ + ٣ت}{٢ - ٣ت} \times \frac{٢ + ٣ت}{٢ + ٣ت}$

$= \frac{٩ + ٢٧ت + ٢٠ت^{٢}}{٩ + ٢٥} + \frac{٤ + ١٢ت + ٩ت^{٢}}{٩ + ٤}$

$= \frac{-١١ + ٢٧ت}{٣٤} + \frac{-٥ + ١٢ت}{١٣}$

$= \frac{-١٤٣ + ٣٥١ت - ١٧٠ + ٤٠٨ت}{٤٤٢}$

$= \frac{-٣١٣}{٤٤٢} + \frac{٧٥٩+}{٤٤٢}ت$

س٥: نفرض أن: $ع = ا + ب ت$

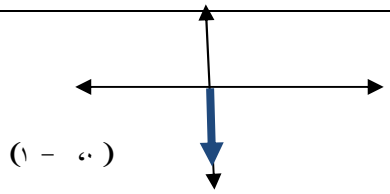
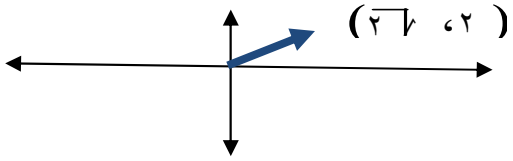
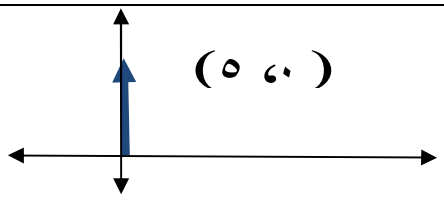
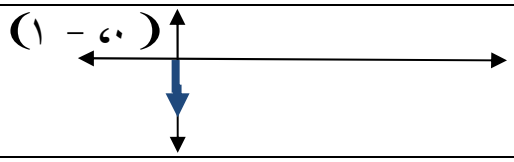
الطرف الأيمن $= ع - ١ = ا + ب ت - ١ \Leftarrow |ع - ١| = \sqrt{(ا-١)^{٢} + ب^{٢}}$

الطرف الأيسر $= \bar{ع} - ١ = ا - ب ت - ١ \Leftarrow |\bar{ع} - ١| = \sqrt{(ا-١)^{٢} + (-ب)^{٢}}$

$= \sqrt{(ا-١)^{٢} + (ب)^{٢}}$

أي أن $|ع - ١| = |\bar{ع} - ١|$

س٦:

العدد	تمثيله في مستوى الأعداد المركبة
$ت^{٤٣} = ت^{٤٠} \times ت^{٣} = ١ \times -ت = -ت$ $= ٠ - ت = (-١، ٠)$	
$٢ + \sqrt{-٢} = ٢ + \sqrt{٢}ت = (\sqrt{٢}، ٢)$	
$\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩} = \sqrt{-١} \times \sqrt{٤} + \sqrt{-١} \times \sqrt{٩}$ $= ٢ت + ٣ت = ٥ت = ٠ + ٥ت = (٥، ٠)$	
$\frac{١}{ت^{٦٥}} = \frac{١}{ت^{٦٤} . ت} = ت^{-١} = -ت$	

س٧: بفرض $ع = ا + ب ت$، $\bar{ع} = ا - ب ت$

$ع^{٢} = (\bar{ع})^{٢} \Leftarrow (ا + ب ت)^{٢} = (ا - ب ت)^{٢}$

$\Leftarrow ا^{٢} - ب^{٢} + ٢ا ب ت = ا^{٢} - ب^{٢} - ٢ا ب ت$

$٢ا ب = -٢ا ب \Leftarrow ٤ا ب = ٠$

إما $ا = ٠ \Leftarrow ع = ب ت$ (عدد تخيلي)

أو $ب = ٠ \Leftarrow ع = ا$ (عدد حقيقي)

س٨: أ) $ع = -١ + ت$

$$|ع| = \sqrt{(-١)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{٢}$$

$$جتاهـ = \frac{-١}{\sqrt{٢}} \text{ ، } جاهـ = \frac{١}{\sqrt{٢}}، \text{ ومنها } هـ = \frac{٣\pi}{٤}$$

$$ع = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}\right)$$

ب) $ع = \frac{-١}{٢} + ٠ت$

$$|ع| = \sqrt{\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$$

$$جتاهـ = \frac{\frac{-١}{٢}}{\frac{١}{٢}} = -١ \text{ ، } جاهـ = \frac{٠}{\frac{١}{٢}} = ٠، \text{ ومنها } هـ = \pi$$

$$ع = \frac{١}{٢}(جتا\pi + ت جا\pi)$$

ج) $ع = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$ ،

$$|ع| = \sqrt{(\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}} = ١$$

$$جتاهـ = -\frac{١}{٢} \text{ ، } جاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow هـ = \pi\frac{٢}{٣}$$

$$ع = (جتا\ \pi\frac{٢}{٣} + ت\ جا\ \pi\frac{٢}{٣})$$

س٩: أ) $ع = ٧\left(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}\right) = ٧\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} ت\right)$

$$= \frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}} ت$$

ب) $ع = ٣\left(جتا\frac{-\pi}{٦} + ت جا\frac{-\pi}{٦}\right) = ٣جتا\frac{\pi}{٦} - ٣ت جا\frac{\pi}{٦}$

$$= ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣ \times \frac{١}{٢} ت = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢} ت$$

ج) $ع = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٤} - ت جا\frac{\pi}{٤}\right) = ٢\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}ت\right)$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}ت = \sqrt{٢} - \sqrt{٢}ت$

د) $ع = ٣\left(جتا\frac{\pi}{٣} + ت جا\frac{\pi}{٣}\right) = ٣\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right)$

$= \frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}ت$

تمارين عامة (٥ – ٤)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الإجابة	جـ	جـ	د	أ	ب	ب	د

س٢: $ع_١ = ١ + ٢ت$ ، $ع_٢ = ٢ - ت$

أ) $|ع_١| = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

ب) $|ع_٢| = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$

ج) $|ع_١ + ع_٢| = |(١ + ٢ت) + (٢ - ت)| = |٣ + ت| = \sqrt{١٠}$

د) $|ع_١| + |ع_٢| = \sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$ نلاحظ أن $|ع_١ + ع_٢| \neq |ع_١| + |ع_٢|$

س٣: $س^٢ + س + (ص - ١)ت = -ت س^٢$

$س^٢ + س + (ص + س^٢ - ١)ت = ٠$

ومنها $ص + س^٢ - ١ = ٠ \Leftarrow ص = ١ - س^٢$

$س^٢ + س = ٠ \Leftarrow س(س + ١) = ٠$ ، $س = ٠$ ، -١

ومن ذلك $س = ٠ \Leftarrow ص = ١$

أو $س = -١ \Leftarrow ص = ٠$

س٤: أ) $ل = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت}$، $م = \frac{١١ات-٢}{١+٢ت}$

$$ل = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{٣-ت}{٣-ت}$$

$$= \frac{٥(٩-٦ت-١)}{١+٩} = \frac{٨-٦ت}{٢} = ٤-٣ت$$

$$م = \frac{١١ات-٢}{١+٢ت} = \frac{١١ات-٢}{١+٢ت} \times \frac{١-٢ت}{١-٢ت}$$

$$= \frac{١١ات+٢٢-٢٤ت}{٤+١} = \frac{٢٠+١٥ات}{٥} = ٤+٣ت$$

$= \bar{ل}$

ل ، م مترافقان

ب) $ل + م = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} + \frac{١١ات-٣}{١+٢ت} = ٤-٣ت+٤+٣ت = ٨$

$ل م = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{١١ات-٣}{١+٢ت} = (٤-٣ت)(٤+٣ت) = ١٦+٩ = ٢٥$

$ل^{٢} + م^{٢} = (ل+م)^{٢} - ٢ل م = ٨^{٢} - ٢ \times ٢٥ = ١٤$ ، **ويمكن حسابها بطريقة أخرى.**

س٥: $\frac{ت-\sqrt{٣}}{١+\sqrt{٣}ت} = \frac{ت-\sqrt{٣}}{١+\sqrt{٣}ت} \times \frac{١-\sqrt{٣}ت}{١-\sqrt{٣}ت} = \frac{\sqrt{٣}-٤ت-\sqrt{٣}}{٣+١} = \frac{-٤ت}{٤} = -ت$

$$\left(\frac{ت-\sqrt{٣}}{١+\sqrt{٣}ت}\right)^{٧} = (-ت)^{٧} = -١ \times ت^{٤} \times ت^{٣} = -١ \times ١ \times -ت = ت$$