

١١

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين

وَأَرْزُقُوا آلَ النَّبِيِّ وَالْعَجَلِيمِ

الرياضيات

الفرع الأدبي والشرعي

الفترة الثالثة

دولة فلسطين
وَأَرْزُقُوا آلَ النَّبِيِّ وَالْعَجَلِيمِ



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

	المتاليات	الوحدة
٤	المتاليات ١ - ٣	٣
٧	المتالية الحسابية ٢ - ٣	
١١	المتالية الهندسية ٣ - ٣	

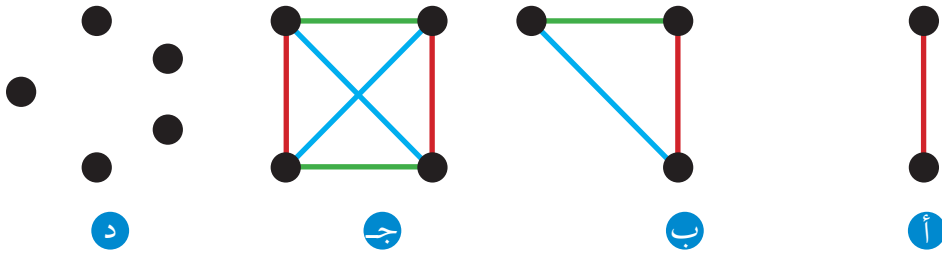
يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المتاليات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى مفهوم المتالية الحسابية.
- ٢ استنتاج الحدّ العام للمتالية الحسابية.
- ٣ إدخال عدد من الأوساط الحسابية بين عددين.
- ٤ التعرف إلى المتالية الهندسية.
- ٥ التمييز بين المتالية الحسابية والمتالية الهندسية.
- ٦ إدخال عدد من الأوساط الهندسية بين عددين.

أتعلم: تسمى الأعداد التي تكتب على صورة: $س_١، س_٢، س_٣، ...، س_n$ بالمتتالية.

نشاط ١:

أتأمل الشكل الآتي ثم أجيب عن الأسئلة الآتية:



- عد القطع المستقيمة الواصلة بين النقاط في الشكل السابق الفرع (د): _____ .
 المتتالية التي تُمثل عدد القطع المستقيمة في الشكل السابق: ١، ٣، ٦، ١٠ .
 عدد القطع المستقيمة إذا احتوى الشكل على ٦ نقاط: _____ .
 عدد القطع المستقيمة إذا احتوى الشكل على ٧ نقاط: _____ .

أتعلم: تصنف المتتالية من حيث عدد الحدود إلى نوعين متتالية منتهية وغير منتهية.

نشاط ٢:

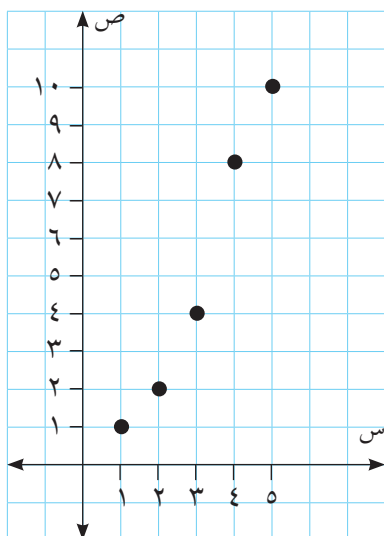
المتتالية $٥-، ٢-، ١، ...، ٢٢$ متتالية منتهية لأننا نستطيع عدّ حدودها.

المتتالية $\frac{1}{٢}، \frac{1}{٣}، \frac{1}{٤}، ...$ متتالية غير منتهية. (لماذا؟)

أعطي مثلاً على متتالية منتهية ومثلاً على متتالية غير منتهية.

تعريف: المتتالية: هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو جزء منها على النمط

$\{١، ٢، ٣، ...، ن\}$ ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.



نشاط ٣:

في المتتالية : ١٠، ٨، ٤، ٢، ١ .

يمكن كتابة المتتالية على الصورة:

(١٠، ٥)، (٨، ٤)، (٤، ٣)، (٢، ٢)، (١، ١)

مجال هذه المتتالية : _____ .

مدى هذه المتتالية : _____ .

التمثيل البياني للمتتالية كما في الشكل المجاور.

الحد العام للمتتالية:

نشاط ٤:

أرادت مؤسسة اختيار عينة حجمها ٨٠ شخصاً من المشاركين في ندوة علمية والبالغ عددهم

٤٠٠ شخص باستخدام طريقة العينة العشوائية المنتظمة حيث كان رقم الشخص الأول

يساوي ٣. أجد رقم الشخص الأخير في العينة.

أكمل الجدول الآتي:

رقم الشخص الأول (ح _١)	رقم الشخص الثاني (ح _٢)	رقم الشخص الثالث (ح _٣)	رقم الشخص الرابع (ح _٤)	رقم الشخص الأخير (ح _{٨٠})	المتتالية التي تُمثل أرقام العينة ...، ١٣، ٨، ٣
٢ - ١ × ٥	٢ - ٢ × ٥	٢ - ٣ × ٥		

الحد العام هو $ح_n = ٥n - ٢$

هل $ح_{٨٠} = ٤٨$ في المتتالية السابقة؟ لماذا؟.

مثال :

اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتاليات التي حدها العام $ح_n = ٣n + ١$.

الحل :

$ح_١ = ٣ \times ١ + ١ = ٤$ ، $ح_٢ = ٣ \times ٢ + ١ = ٧$ ، $ح_٣ = ٣ \times ٣ + ١ = ١٠$

تمارين ومسائل ١-٣:

١ أكتب الحدود الستة الأولى في كل من المتتاليات الآتية:

أ ٨ ، ٤ ، ٢ ، ب $\frac{1}{4 \times 2}$ ، $\frac{3}{6 \times 4}$ ، $\frac{5}{8 \times 6}$ ،

ج $5 - 3 = n$ د $\frac{n}{1+2n} = n$

هـ $n = n - 1$ ، $2 - 1 = n$ ، علماً أن $n = 3$

٢ أكمل المتتاليات الآتية، ثم أمثلها بيانياً.

أ $\frac{1}{3}$ ، ١ ، ٣ ، ، ب ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ،

٣ أجد الحد العام في كل من المتتاليات الآتية:

أ ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ب ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ج $\frac{3}{2}$ ، ١ ، $\frac{3}{4}$ ،

تعريف: المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون الفرق فيها بين الحد وسابقه مقداراً ثابتاً دائماً ويسمى هذا الثابت أساس المتتالية الحسابية ويُرمز له بالرمز (د) كما يرمز للحد الأول بالرمز (أ) وتكتب على الصورة: أ، أ+د، أ+د، أ+د، أ+د، أ+د، ...

مثال ١: أتمل المتتالية $٥^-، ٨^-، ١١^-، ١٤^-، \dots$

الفرق بين الحد الثاني والأول: $٨^- - ٥^- = ٣^-$.

الفرق بين الحدين الثالث والثاني: $١١^- - ٨^- = ٣^-$.

ماذا ألاحظ؟

تسمى مثل هذه المتتاليات بالمتتاليات الحسابية

مثال ٢: في المتتالية الحسابية الآتية: $٢٦^-، ٢٣^-، ٢٠^-، ١٧^- \dots$ أجد:

١ الحد الأول للمتتالية وأساسها.

٢ الحد الخامس.

١ الحل: الحد الأول للمتتالية (أ) $٢٦^- =$

أساس المتتالية (د) $٣ = (٢٦^-) - ٢٣^- =$

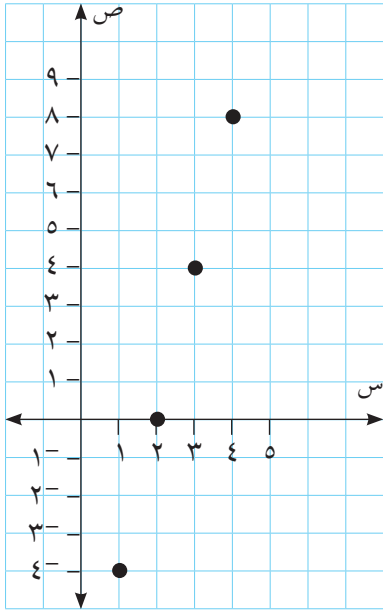
٢ ح. $١٤^- = ٣ \times ٤ + ٢٦^- = ١٢ + ٢٦^- =$

نشاط ١: أُميّز المتتالية الحسابية فيما يأتي، ثم أجد أساسها وحدها الأول.

١ $\dots، ١٧، ١١، ٦، ٢$

المتتالية $٢، ٦، ١١، ١٧، \dots$ ليست متتالية حسابية

لأن الفرق بين أي حد وسابقه ليس ثابتاً.



٢ ح $٣ = ٢ - ١$ وتكتب المتتالية على الشكل:
١، ٤، ٧، ...

متتالية حسابية وأساسها $= ٣$ وحدها الأول ١

٣ ١، ١-، ١، ١-، ... متتالية: _____
لأن: _____

٤ المتتالية في الشكل المجاور متتالية: _____
لأن: _____

الحد العام للمتتالية الحسابية:

أتعلم: الحد العام للمتتالية الحسابية $ح = أ + (ن - ١) \times د$
حيث أ الحد الأول، د: أساس المتتالية الحسابية، ن: رتبة الحد

٣ مثال: لاحظ مراقب أن الأخطاء المطبعية لدى موظفة جديدة تقل كلما زادت خبرتها بمعدل ١٠ أخطاء شهرياً حيث كان عدد أخطائها المطبعية ٥٠٠ خطأ في الشهر الأول.

المتتالية التي تمثل عدد الأخطاء الشهرية: ٥٠٠، ٤٩٠، ٤٨٠، ...

عدد الأخطاء في الشهر العاشر: ٤١٠

عدد الأخطاء في الشهر الأربعين: ١١٠.

يصبح عدد الأخطاء الشهرية ٣٢٠ بعد ١٩ شهراً.

٤ مثال: متتالية حسابية مجموع الحدين: الثاني والثالث منها ٤٣، وحدها الثامن ٥. أجد الحد الأول والأساس.

ح $٢ = أ + (١ - ٢) \times د = أ + د$

ح $٣ = أ + (١ - ٣) \times د = أ + ٢د$

$$ح_٢ + ح_٣ = (أ + د) + (أ + د)$$

$$(١) \quad \dots \quad ٤٣ = د٣ + أ٢ =$$

$$(٢) \quad \dots \quad ٥ = د٧ + أ = ح_٨$$

أضربُ المعادلة (٢) بالعدد ٢- ينتج:

$$(٣) \quad \dots \quad ١٠- = د١٤- + أ٢-$$

$$(١) \quad \dots \quad ٤٣ = د٣ + أ٢$$

بجمع المعادلتين (١)، (٣) ينتج:

$$١١- = د٣٣ ، ومنها: د = ٣- ، أ = ٢٦ ، أوضِّح ذلك.$$

تعريف: تسمّى الأعداد $س_١$ ، $س_٢$ ، ...، $س_٧$ أوساطاً حسابية بين العددين $أ$ ، $ب$: إذا كانت $أ$ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، ...، $س_٧$ ، $ب$ متتالية حسابية.

نشاط ٢:

إذا كانت ١٥، $س$ ، $ص$ ، ٣٦ متتالية حسابية. أجد قيمة كل من $س$ ، $ص$

بها أن المتتالية حسابية فإن:

$$ح_٧ = أ + (٧ - ١) \times د$$

$$٣٦ = ١٥ + (٧ - ١) \times د$$

$$د = ٧ . لماذا؟$$

$$\text{ينتج أن } س = ٢٢$$

$$ص = \underline{\hspace{2cm}} .$$

فتصبح المتتالية: ١٥، ٢٢، ٢٩، ٣٦. أوضِّح ذلك؟

نشاط ٣:

في المتتالية الحسابية الآتية أجد قيمة $س$ ، ثم أكتب المتتالية.

$$٥-، س، \dots، ٣-، س + ٣٦، ٣٥$$

$$س + ٥ = ١- + ٣س . لماذا؟$$

$$\text{قيمة } س = \underline{\hspace{2cm}} .$$

المتتالية: ٥-، ٣، ١١، ١٩، ٢٧، ٣٥. أفسر ذلك؟

تمارين ومسائل ٣-٢:

- ١ أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتاليات الحسابية التي:
 - أ) حدها الأول ١٢ وأساسها ٤
 - ب) حدها الأول ٨ وأساسها ٣-
- ٢ أجد قيمة s التي تجعل $s + ٨$ ، $٤s + ٦$ ، $٣s$ متتالية حسابية.
- ٣ أدخلت ٦ أوساط حسابية بين العددين ٣٠ ، ٢ . أجد هذه الأوساط.

مهمة تعليمية (١)

في سباق جري ٢٠٠٠ متر، سجل مدرب أوقات فريقه على النحو الآتي:
٤٠٠ متر في دقيقة و٣٢ ثانية، ٨٠٠ متر في ٣ دقائق و٤ ثواني، ١٢٠٠ متر في ٤ دقائق و٣٦ ثانية، وهكذا...
علماً بأن السرعة ثابتة. كم يحتاج الفريق من الوقت لإنهاء السباق؟

مثال ٢: أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الهندسية التي حدها الأول ٢٧ وأساسها $\frac{2}{3}$

الحل: $ح_١ = ٢٧$ ، $ح_٢ = \frac{2}{3} \times ٢٧ = ١٨$ ، $ح_٣ = \frac{2}{3} \times ١٨ = ١٢$

تصبح المتتالية: ٢٧، $\frac{2}{3} \times ٢٧$ ، $\frac{2}{3} \times ١٨$ ، $\frac{2}{3} \times ١٢$ ، $\frac{2}{3} \times ٨$ ، ٢٧، ١٨، ١٢، ٨، $\frac{١٦}{٣}$

الحد العام للمتتالية الهندسية:

نشاط ٢: تريد مريم أن تقيم حفلة، فدعت ٤ صديقات وطلبت من كل صديقة أن تدعو ٣ صديقات أخريات وهكذا، فإذا استمرت عملية الدعوة على ٥ مراحل.

عدد المدعوات إلى الحفلة في المرحلة الثانية $١٢ = ٣ \times ٤$

عدد المدعوات إلى الحفلة في المرحلة الثالثة $٣٦ = ٣ \times ٤$

المتتالية التي تمثل عدد الدعوات في المراحل الخمس: _____، _____، _____، _____، _____.

أتعلم: الحد العام للمتتالية الهندسية $ح_n = أ \times ر^{n-١}$ حيث أ الحد الأول، ر: أساس المتتالية الحسابية، ن: رتبة الحد

نشاط ٣: في المتتالية الهندسية الآتية: _____، ١٥، ٤٥، ١٣٥، ...

$ر = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{١٣٥}{٤٥} = ٣$

$ح_١ =$ _____

$ح_٢ = ١٢١٥ = ١^{-٦٣} \times ٥$

$ح_٨ =$ _____

$ح_{١٠} =$ _____

مثال ٣:

أكتب الحد النوني (الحد العام) في المتتاليات الهندسية الآتية:

١ ... ، ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...
٢ ... ، ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

الحل :

١ في المتتالية ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...

$$أ = ٢ ، ر = ٣$$

$$ح_n = ٢ \times (٣)^{n-١}$$

٢ في المتتالية ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

$$أ = ٤٠ ، ر = \frac{١}{٢}$$

$$ح_n = ٤٠ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{n-١}$$

نشاط ٤:

سقطت كرة مطاطية عن ارتفاع مترين، وكانت بعد كل صدمة ترتد إلى ارتفاع يساوي ثلث أرباع الارتفاع الذي سقطت منه.

المتتالية الهندسية التي تمثل ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام: $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٨}$ ، $\frac{٢٧}{٣٢}$ ، ... أوضِّح ذلك.

ارتفاع الكرة الذي ترتد إليه بعد الصدمة الخامسة = _____ متراً.

بعد أي صدمة يكون الارتفاع الذي ترتد إليه الكرة مساوياً $\frac{٨١}{١٢٨}$ متراً؟

$$ح_n = أ \times ر^{n-١}$$

$$\frac{٨١}{١٢٨} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{n-١} \times \left(\frac{٣}{٢}\right)$$

$$\frac{٢٧}{٦٤} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{n-١} \text{ لماذا؟ إذن } n = \text{_____} .$$

أتعلم: إذا كان أ ، ب عددين ثابتين معلومين فإن: $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_n$

تسمى أوساطاً هندسية عددها ن تقع بين أ ، ب إذا كان:

أ ، $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_n$ ، ب متتالية هندسية.

مثال ٤ :

أدخل ٣ أوساط هندسية بين العددين ٦٤ ، ٤ ،
لإدخال أوساط هندسية بين العددين ٦٤ ، ٤ نُكوّن المتتالية الهندسية :

$$٤ ، ١س ، ٢س ، ٣س ، ٤$$

$$ح \times ر^{١-٥} = ٤$$

$$٤ = ٦٤ \times ر^٤ ، قيمة ر = \pm \frac{١}{٢} \text{ لماذا؟}$$

نستطيع تكوين متتاليتين هندسيتين الأولى: ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ٤ . (ر = \frac{١}{٢}).

المتتالية الثانية: ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ٤ ، (ر = \frac{١}{٢}).

تمارين ومسائل ٣-٣:

١ أجد:

أ الحد السادس من المتتالية الهندسية التي فيها $٢ = ٤$ وأساسها $(\frac{١}{٢})^-$.

ب الحد الأول من المتتالية الهندسية التي $٦٤ = ٤$ وأساسها $٢ = ٤$.

ج أساس المتتالية الهندسية التي $٢٥٠ = ٤$ وحدها الأول $٢ = ٤$.

٢ أدخل ٣ أوساط هندسية بين العددين ١٥^- ، ٢٤٠^- .

٣ إذا كان الحد الثالث من متتالية هندسية هو ١٢ والحد السادس منها هو ٩٦ أجد الحدود الأربعة الأولى من المتتالية.

٤ إذا كانت: $١ - س$ ، $س$ ، $س + ٣$ ، ... متتالية هندسية، أجد حدودها الخمسة الأولى.

مهمة تعليمية (٢)



أرادت إحدى البلديات تصميم نافورة مياه مكونة من أربعة صحنون دائرية كما في الشكل المجاور، حيث يكون قطر الصحن الأول ١٢٠ سم، وقطر الصحن الرابع ١٥ سم والنسبة بين قطري كل صحنين متتاليين ثابتة.
أجد طول قطر الصحن الثاني وطول قطر الصحن الثالث.

١ اختر رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما الحد العام للمتتالية ١، ٨، ٢٧، ٦٤، ...؟

أ) $n + 7$ ب) $8n$ ج) n^3 د) n^2

٢ إذا كان الحد العام للمتتالية $ح_n = 2n + 1$ ، فما قيمة الحد الخامس؟

أ) $8-$ ب) 11 ج) 6 د) 36

٣ المتتالية الحسابية: $1^-، 1^-، 3^-، 5^-، ...، 37^-$ ما قيمة حدها الأول وأساسها على الترتيب؟

أ) $1^-، 2^-$ ب) $1، 2$ ج) $1، 2^-$ د) $2، 1$

٤ إذا كانت الأعداد: $5، 2ك، ...، 5ك، 30$ متتالية حسابية، فما قيمة ك؟

أ) $5، 0$ ب) 5 ج) 5^- د) 10

٥ ما عدد حدود المتتالية الحسابية: $63، 60، ...، 33، 30$ ؟

أ) 10 ب) 11 ج) 12 د) 13

٦ ما نوع المتتالية $3^-، 3^-، 3^-، 3^-، ...$ ؟

أ) حسابية ب) هندسية

ج) حسابية وهندسية د) لا حسابية ولا هندسية

٧ متتالية هندسية حدها الأول 1 ، وأساسها 3 ما قيمة حدها السابع؟

أ) 21 ب) 81 ج) 243 د) 729

٨ ما ترتيب الحد الذي قيمته 486 من حدود المتتالية الهندسية: $2، 6، 18، ...$

أ) 4 ب) 5 ج) 6 د) 7

٢ أُميِّز بين المتتالية الحسابية والهندسية فيما يأتي مع ذكر السبب.

(أ) ٦، ٦، ٦، ... (ب) س، ٣س، ٩س، ٢٧س، ...

(ج) ٣س - ١، ٥س + ٢، ٧س + ٥ (د) $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{3}$ ، 1^{-} ، ...

٣ أجد الحدود الأربعة الأولى في المتتالية الآتية: $ح_n = \frac{ن}{ن+٢}$

٤ كم وسطاً هندسياً يمكن إدخاله بين العددين ٧، ٢٢٤ حتى تتكون متتالية هندسية أساسها ٢؟ أكتب هذه المتتالية؟

٥ ثلاثة أعداد تكوّن متتالية حسابية مجموعها 12^{-} وحاصل ضربها ٨٠، أجد الأعداد الثلاثة.

٦ متتالية حسابية حدها الأول = ٣، فإذا كان حدها الثاني والرابع والثامن تكوّن متتالية هندسية، أجد هذه المتتالية الحسابية.

أقيم ذاتي أكمل الجدول الآتي:

متدني	متوسط	مرتفع	المهارة
			أميز بين المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية
			أجد أي حد لمتتالية حسابية / هندسية
			أجد مجموع حدود لمتتالية حسابية / هندسية

نموذج اختبار نهاية الفترة الثالثة

السؤال الأول: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

١- أي المتتاليات الآتية تعدّ متتالية غير منتهية؟

(أ) $٢^-، ٤^-، ٨^-، \dots، ٣٢^-$

(ب) $١-٧٢=٧٢، \{٤، ٣، ٢، ١\} \ni ٧$

(ج) $٧٤=٧٤، ٦+٧٤ \ni ط*$

(د) كيس فيه ٤٢ كرة، قام احمد بسحبها حسب المتتالية التالية ٢، ٤، ٦، ..

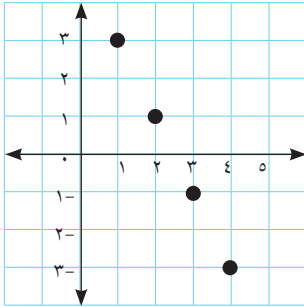
٢- ما الحد الخامس في المتتالية الآتية: $\frac{1}{4}^-، ١^-، ٤^-، \dots، \dots$ ؟

(أ) ٦٤^- (ب) ١٦^- (ج) ٨^- (د) ٦٤

٣- بدأ احمد العمل في مؤسسة براتب قدره ٥٠٠ دينار شرط أن يحصل على زيادة شهرية قدرها ٥٠ ديناراً لمدة سنة، ثم بعد ذلك زيادة سنوية قدرها ١٠٠ دينار، فما الحد العام للمتتالية التي تُمثل راتبه في السنة الأولى؟

(أ) $٧٥٠=٧٥٠$ (ب) $٧٥٠+٥٥٠=٧٥٠$

(ج) $٧٥٠+٥٥٠=٧٥٠$ (د) $٧٥٠+٤٥٠=٧٥٠$



٤- ما نوع المتتالية في الشكل المجاور؟

(أ) هندسية لأن الفرق بين كل حد وسابقه لا يساوي مقداراً ثابتاً.

(ب) حسابية لأن حدها الأول ١ و أساسها ١

(ج) حسابية لأن حدها الأول ٣ و أساسها ٣

(د) حسابية لأن حدها الأول ٣ و أساسها ١

٥- ما الحد الخامس من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٤ و أساسها $\frac{1}{٢}^-$ ؟

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{٤}$ (ج) $\frac{1}{٤}^-$ (د) $\frac{1}{٢}^-$

السؤال الثاني:

أ) أكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التي حدها العام $u_n = \frac{1+n}{1-2n}$.

ب) أجد قيمة u_2 التي تجعل $u_1 - 1$ ، $u_2 + 2$ ، $u_3 - 4$ متتالية حسابية.

السؤال الثالث:

أدخل 3 أوساط هندسية بين العددين 3، 243:

السؤال الرابع:

أ) متتالية حسابية مجموع الحدين الثالث والرابع فيها = 33، وقيمة حدها السابع = 34 أجد الحد الأول والأساس.

ب) في النمو المبكر للأجنة تنقسم الخلية البشرية إلى خليتين، وكل واحدة منهما تنقسم إلى خليتين وهكذا، أكتب القاعدة التي تعبر عن عدد الخلايا بعد انقسامات عددها n .