



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الفترة الأولى

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moche.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWalTlym

+970-2-2983250 | هاتف | فاكس +970-2-2983280

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

المحتويات

الفترة ١

٣	Matrix	المصفوفة
٦	Summation and Subtraction of Matrices	جمع المصفوفات وطرحها
١٠	Matrix Multiplication	ضرب المصفوفات
١٣	Determinants	المحددات
١٥	Inverse Matrix	النظير الضربي للمصفوفة المربعة
١٨	Solving Linear System of Equations by Matrices	حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
٢١	Rate of Change	متوسط التغير
٢٣	First Derivative	مفهوم المشتقة الأولى
٢٦	Differentiation Rules	قواعد الاشتقاق

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات وقواعد الاشتقاق في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرف على مفهوم المصفوفة.
- تنظيم بيانات معطاة على شكل مصفوفة وتحديد رتبة هذه المصفوفة.
- إيجاد ناتج جمع وطرح المصفوفات.
- إيجاد ناتج ضرب المصفوفات.
- إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة 2×2 ، 3×3 .
- إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة 2×2 .
- حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.
- توظيف المصفوفات في مسائل عملية وحل تمارين عامة.
- التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتان ق(س) وإيجاده.
- التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتان، وإيجادها باستخدام التعريف.
- التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.



المصفوفة (Matrix)

تعريف:

المصفوفة: ترتيب من الأعداد الحقيقية على شكل مستطيل، مكونة من عدد من الصفوف وعدد من الأعمدة ومحصورة بالحاصلتين []، ويرمز للمصفوفة بأحد الرموز: P ، B ، J ،

(١) إذا كانت P مصفوفة تتكون من m صف، n عمود ($m, n \in \mathbb{N}^+$) فإن $m \times n$ تسمى رتبة المصفوفة P ، وتقرأ m في n ، ويرمز لها بالرمز $(n \times m)_P$.

(٢) الأعداد الحقيقية المكونة للمصفوفة تسمى عناصر (مدخلات)، P_{ij} تعني مدخلة الصف i والعمود j في المصفوفة P .

(٣) ناتج الضرب $m \times n$ يمثل عدد مدخلات (عناصر) المصفوفة P .



$$\begin{bmatrix} P & P \\ P_{21} & P_{11} \\ P & P \\ P_{22} & P_{12} \end{bmatrix} = {}_{2 \times 2} P, \quad \begin{bmatrix} P & P \\ P_{21} & P_{11} \\ P & P \\ P_{22} & P_{12} \\ P & P \\ P_{23} & P_{13} \end{bmatrix} = {}_{3 \times 3} P \quad (٤) \text{ تكتب المصفوفات حسب مدخلاتها، فمثلاً: } P$$

$$\text{نشاط: إذا كانت: } P = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

رتبة P تساوي 3×3 ، رتبة B ، ، رتبة J
 P_{21} هي مدخلة الصف الأول والعمود الثاني وتساوي ٣ ، $B_{22} = \dots$ ، $J_{31} = \dots$
 العدد -٤ هو مدخلة الصف الثاني والعمود الأول في المصفوفة P وتمثل بالرموز P_{12}
مثال (١): المصفوفة P من الرتبة 2×2 ، إذا عرفت مدخلات المصفوفة P بحيث أن $P_{ij} = y + h$ ، اكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها؟

$$\text{الحل: } {}_{2 \times 2} P = \begin{bmatrix} P & P \\ P_{21} & P_{11} \\ P & P \\ P_{22} & P_{12} \end{bmatrix}, \quad P_{21} = 1 + 1 = 2, \quad P_{11} = 2 + 1 = 3, \quad P_{22} = 2 + 2 = 4, \quad P_{12} = 1 + 2 = 3$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = P$$



مصفوفات خاصة:

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

مثال: $P = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5} & \pi \end{bmatrix}$ ، رتبها 1×3 ، تسمى P مصفوفة صف.

مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثال: $J = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، ج رتبها 2×1 ، تسمى J مصفوفة عمود.

المصفوفة المربعة: المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

مثال (١): $P = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 ويمكن تسميتها مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

تسمى المدخلات $\sqrt{2}$ ، 3 القطر الرئيس للمصفوفة P ، والمدخلات 1 ، $\frac{1}{2}$ القطر الثانوي للمصفوفة P .

مثال (٢): $J = \begin{bmatrix} 12 & 4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ويمكن كتابتها بالصورة J_3 أو $J_{3 \times 3}$.

المصفوفة الصفيرية: المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، ويرمز لها بالرمز (O) .

تعريف:

تساوي المصفوفتان P ، B إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية ($P_{ij} = B_{ij}$) والعكس صحيح.



مثال (١): إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢- & ٦ & \frac{١}{٢} \\ ٦- & ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ص & \frac{١}{٢} \\ س٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ما قيمة س، ص؟

الحل: المصفوفتان متساويتان، فمدخلاتهما المتناظرة متساوية.

$$٦ = ص$$

$$٣ = س \quad \text{ومنها} \quad ٦ = س٢$$

تمارين ومسائل

س١: إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣- & ٨ \\ ٤ & \sqrt{١٦} \\ ٥- & ٢,٣ \end{bmatrix} = ج$ ، $\begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix} = ب$ ، $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ١- \\ ٠ & \frac{٢}{٣} & \sqrt{٥} \end{bmatrix} = پ$

(١) ما رتبة كل من المصفوفات $پ$ ، $ب$ ، $ج$ ؟

(٢) ما قيمة $پ$ ، $ب$ ، $ج$ ، ١٢ ، $ج١٣$ ، $ج٢٣$ ؟

(٣) ما قيمة $پ + ج١١$ ؟

س٢: أجد قيمة س، ص في المصفوفات الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ س٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤+س \\ ص \end{bmatrix} \quad (٢) \quad \begin{bmatrix} ٩ & ٦ \\ ٢- & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص٣ & ٦ \\ ٢- & س-١ \end{bmatrix} \quad (١)$$

س٣: المصفوفة $ج$ من الرتبة ٣×٢ ، إذا عرفت مدخلاتها بحيث أن $ج١٢ = ٢ي - هـ$ ، أكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها.



جمع المصفوفات وطرحها (Summation and Subtraction of Matrices)

تعريف:

تجمع المصفوفتان A ، B إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية جمع المصفوفتين بجمع مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.
تطرح المصفوفتان A ، B إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية طرح المصفوفتين بطرح مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

مثال (١): إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، أجد $A + B$ ، $A - B$ ؟

الحل: $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 1 & 3 + 9 & 6 + 3 \\ 1 + 3 & 4 + 2 & 0 + 1 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 1 & 3 - 9 & 6 - 3 \\ 1 - 3 & 4 - 2 & 0 - 1 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة بعدد حقيقي:

إذا كان k عدداً حقيقياً، A مصفوفة، فإن (kA) مصفوفة، تنتج مدخلاتها من ضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة A في k .

مثال (٢): إذا كان $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ أجد: (١) $2A$ (٢) $\frac{1}{2}A$ (٣) $-A$

الحل: (١) $2A = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \times 2 & 3 \times 2 \\ 5 \times 2 & 0 \times 2 \end{bmatrix}$ (٢) $\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(٣) $-A = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمعكوس الجمعي للمصفوفة A .



$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1- \\ 3- & 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{ب} , \begin{bmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \text{پ إذا كان پ}$$

أجد: (١) $\text{ب} + \text{پ}$ (٢) $\text{ب} - \text{پ}$

$$\begin{bmatrix} 2 + 11- & 6 + 3- & 2- + 2- \\ 6- + 5- & 0 + 6- & 4 + 9- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1- \\ 3- & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ب} + \begin{bmatrix} 11- & 3- & 2- \\ 5- & 6- & 9- \end{bmatrix} = \text{ب} + \text{پ-}$$

$$\begin{bmatrix} 9- & 3 & 4- \\ 11- & 6- & 5- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 6 & 4 \\ 10 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3- \\ 9- & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \text{ب} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1- \\ 3- & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ب} = \text{ب} - \text{ب} = \text{پ} - \text{ب}$$

$$\begin{bmatrix} 19- & 3 & 7- \\ 19- & 12- & 12- \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ص} - \begin{bmatrix} \text{س} \\ 3 \end{bmatrix} \text{ب} : \text{أجد قيمة س، ص فيما يأتي: ٢}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ص} - \begin{bmatrix} \text{س} \\ 6 \end{bmatrix} \text{ب} : \text{الحل:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - \text{س} \\ 3 \text{ص} - 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = 12 - 2 \quad \text{ومن هنا}$$

$$\text{ص} = 3 - 9 \quad \text{ومن هنا}$$



خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

إذا كانت P ، B ، C مصفوفات من نفس الرتبة، \exists ح:

- (أ) $P + B = B + P$ (الخاصية التبديلية).
 (ب) $(P + B) + C = C + (P + B)$ (الخاصية التجميعية).
 (ج) $P + (O + B) = (P + O) + B$ (المصفوفة الصفرية).
 (د) $(-P) + P = P + (-P) = O$ (المعكوس الجمعي).
 (هـ) $k(P + B) = kP + kB$ (ضرب عدد في مجموع مصفوفتين).

مثال (٥): أجد المصفوفة S في المعادلة الآتية: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = S + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = S + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ (بإضافة المعكوس الجمعي)

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = S$ ومنها $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = S + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

المعادلة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = S + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ تسمى معادلة مصفوفية، حيث S مصفوفة،

وكذلك $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S \\ 2 \end{bmatrix}$ تسمى معادلة مصفوفية، حيث S ، V أعداد حقيقية.



تمارين ومسائل

س٢: أجد ناتج ما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 2- \\ 2- & 3 \\ 1- & 5- \end{bmatrix} \quad (1)$$

س٣: إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 2- \\ 4 & 1- \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3- & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $J = \begin{bmatrix} 4 & 2- \\ 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(٣) $P + (B + J)$

(٦) $(B + J)$

(٢) $J + (B + P)$

(٥) $(B + J)$

أجد: (١) $P + (B + J) - 2J$

(٤) $2(P + J)$

س٤: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 3ص - 3ص \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2ص \\ 1- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3ص \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

س٥: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} 5- & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = 3\tilde{3} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3- & 10 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}\tilde{3} + \begin{bmatrix} 2- & 0 & 2- \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3- \\ 6- & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$



ضرب المصفوفات (Matrix Multiplication)

تعريف:

إذا كانت P ، B مصفوفتين، وكان عدد الأعمدة في P يساوي عدد الصفوف في B ، فإن المصفوفة $P \cdot B$ معرفة، والنتيجة مصفوفة B من الرتبة (عدد صفوف P في عدد أعمدة B)، أي أن $P_{n \times m} \cdot B_{m \times p} = C_{n \times p}$

نشاط (١): أكمل الجدول الآتي:

رتبة المصفوفة الناتجة	$P \cdot B$ غير معرفة	$P \cdot B$ معرفة	رتبة المصفوفة B	رتبة المصفوفة P
2×2	_____	✓	2×3	3×2
_____	2×3	2×3
3×3	_____	✓	1×3

مثال (١): إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

أجد: $P \cdot B$ ، $B \cdot P$ ، إن أمكن؟

الحل: $P_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{2 \times 3}$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = 5 \times 4 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 26$ وهي ناتج جمع (ضرب مدخلات الصف الأول من المصفوفة P في مدخلات العمود الأول من المصفوفة B). وهكذا بقية مدخلات المصفوفة C .



$$\begin{bmatrix} 1- \times 4 + 2- \times 1- + 0- \times 2 & 2- \times 4 + 1 \times 1- + 2 \times 2 & 1- \times 4 + 0 \times 1- + 1- \times 2 \\ 1- \times 2- + 2- \times 1 + 0- \times 0 & 2- \times 2- + 1 \times 1 + 2 \times 0 & 1- \times 2- + 0 \times 1 + 1- \times 0 \end{bmatrix} = ج$$

$$\begin{bmatrix} 12- & 0- & 6- \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = ب . ب = ج$$

ب . ب غير معرفة، لأن عدد أعمدة ب لا يساوي عدد صفوف ب .

المدخلة ج_{٢١} = مجموع حواصل ضرب المدخلات في الصف ي من المصفوفة ب في مدخلات العمود هـ من المصفوفة ب .



خصائص عملية الضرب على المصفوفات:

- إذا كانت ب ، ج مصفوفات بحيث أن عملية الضرب والجمع في العبارات الآتية معرفة، ك ∃ فإن:
- ١ . (ب . ب) . ج = ب . (ب . ج) الخاصية التجميعية .
 - ٢ . (ب + ج) = (ب . ب) + (ب . ج) ... توزيع الضرب على الجمع من اليمين .
 - ٣ . (ب + ج) . ج = (ب . ج) + (ج . ج) .. توزيع الضرب على الجمع من اليسار .
 - ٤ . ب . م = م . ب = م (م) المصفوفة المحايدة .
 - ٥ . ك (ب . ب) = (ب . ك) . ب = ب . (ك ب)



تمارين ومسائل

س١: أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن):

$$(1) \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

س٢: إذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = P$ ، $\begin{bmatrix} 15 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} = B$ ، $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} = J$ ،

أجد (إن أمكن):

(١) ب . ج (٢) $P \cdot B$ (ب) (٣) ج J (٤) P^2

س٣: أجد قيم س ، ص فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ ص & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & س \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

س٤: إذا كان $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = P$ ، $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = B$ ، $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = J$ أجد:

(١) $P \cdot B$. ج (٢) $P \cdot B$. ج (٣) $J \cdot P$. ب (٤) P^2 . ب



المحددات (Determinants)

تعريف: إذا كانت $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ ، فإن المقدار $(p_{11} \times p_{22}) - (p_{12} \times p_{21})$ يسمى محدد المصفوفة P ويرمز له بالرمز $|P|$.

مثال (١): إذا كان $P = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

أجد: (١) $|P|$ (٢) $|B|$ (٣) $|B \cdot P|$

الحل: (١) $|P| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$

(٢) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

(٣) $|B \cdot P| = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2,5 & 2,5 \end{vmatrix} = 3 \times 2,5 - 2,5 \times 9 = 7,5 - 22,5 = -15$

مثال (٢): إذا كان $\gamma = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ ، أجد قيمة ϵ .

الحل: $\epsilon = (3 \times 5) - (2 \times 3) = 15 - 6 = 9$ ومنها $\epsilon = 9$

تعريف: إذا كانت $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد المصفوفة P هو:

$$|P| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = p_{11} \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} - p_{12} \begin{vmatrix} p_{21} & p_{23} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} + p_{13} \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix}$$



مثال (٣): أجد محدد المصفوفة P = $\begin{bmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 2 & 3- & 1 \\ 5 & 2- & 0 \end{bmatrix}$ ؟

الحل: $|P| = \begin{vmatrix} 2 & 3- \\ 5 & 2- \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 2- & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1- & 1 \\ 2- & 0 \end{vmatrix}$

$$= ((0 \times 3-) - (2 \times 1)) (1-) + ((0 \times 2) - (5 \times 1)) 3 - ((2 \times 2) - (5 \times 3-)) 2 =$$

$$30- = 2+10 - 22- = (2-)1- (5)3 - (11-)2 =$$

تمارين ومسائل

س١: أجد: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3- \\ 1- & 2 & 3- \\ 2- & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

س٢: إذا كانت $\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = P$ ، $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = B$ ، أجد $|P \cdot B|$ ، $|P + B|$ ، $|P - 2B|$

س٣: أجد قيمة س بحيث $5 = \begin{vmatrix} 1 & س \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

س٤: أجد قيمة س بحيث $11 = \begin{vmatrix} 1 & 2- & س \\ 1- & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$



النظير الضربي للمصفوفة المربعة (Inverse Matrix)

تعريف:

إذا كانت P ، B مصفوفتين ثنائيتين، وكان $P \cdot B = B \cdot P = M$ (M المصفوفة المحايدة أو مصفوفة الوحدة).
فإن B تسمى النظير الضربي لـ P ، وبالرموز $B = P^{-1}$ ، (P^{-1} النظير الضربي للمصفوفة P).

مثال (١): إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{bmatrix}$ أيبين أن $B = P^{-1}$ ؟

الحل: $P \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2- \times 1 & 2- \times 2 + 5 \times 1 \\ 1 \times 5 + 2- \times 2 & 2- \times 5 + 5 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = B$

$B \cdot P = \begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 2- + 2 \times 5 & 2 \times 2- + 1 \times 5 \\ 5 \times 1 + 2- \times 2 & 2 \times 1 + 1 \times 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = B$

$P \cdot B = B \cdot P = M$ ومنها $B = P^{-1}$ وكذلك $P = B^{-1}$.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة الثنائية:

تعريف:

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ فإن $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{bmatrix}$ حيث $|P| \neq 0$

إذا كان $|P| = 0$ فإن P ليس لها نظير ضربي (تسمى P مصفوفة مفردة).

مثال (٢): أي من المصفوفات الآتية مفردة؟

(١) $\begin{bmatrix} 3- & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} 10 & 5- \\ 2- & 1 \end{bmatrix}$ (٣) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (٤) $\begin{bmatrix} \sqrt{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$



الحل: (١) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 3) - (4 \times 1) = 6 - 4 = 2 \neq 0$ ليست مفردة. (٢) $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0$ مفردة.

الحل: (٣) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ مفردة. (٤) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$ ليست مفردة.

مثال (٣): أجد P^{-1} (إن أمكن) حيث $P = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

الحل: $|P| = 36 - 35 = 9 \times 4 - 5 \times 7 = 1$

أتحقق من أن النظير الضربي لـ P^{-1} هو P . $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{1} = P^{-1}$

مثال (٤): أحل المعادلة المصفوفية الآتية: $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل: أضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي للمصفوفة من اليسار. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ لماذا؟

$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ س.

$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ لماذا؟ س.

$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$ ومنها $\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$ س م.



تمارين ومسائل

س١: أجد النظير الضربي للمصفوفات الآتية (إن أمكن):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} (١) \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 \end{bmatrix} (٢) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (٣)$$

س٢: أجد قيمة س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة حيث (١) $\begin{bmatrix} 2 & س \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ (٢) $\begin{bmatrix} 9 & س \\ س & 4 \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = P$ ، وكانت $B = P^{-1}$ ، أجد B^{-1} ؟

س٤: إذا كانت $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = P$ ، $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$ ، أجد: (١) $B \cdot P^{-1}$ ، $B^{-1} \cdot P$. ماذا تلاحظ؟

س٥: أحل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.



حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات (Solving Linear System of Equations by Matrices)

١- طريقة النظير الضربي:

مثال (١): أحل النظام الآتي باستخدام النظير الضربي: $٢س + ص = ٤$

$$٥س - ٢ص = ١$$

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$$

أضرب طرفي المعادلة المصفوفية بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$ من اليمين.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{٢}{٩} \\ \frac{٢-}{٩} & \frac{٥}{٩} \end{bmatrix}$ لماذا؟

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{٢}{٩} \\ \frac{٢-}{٩} & \frac{٥}{٩} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{٢}{٩} \\ \frac{٢-}{٩} & \frac{٥}{٩} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \text{ ومنها } \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

ومنها $س = ١$ ، $ص = ٢$ (أتحقق من ذلك).

٢- طريقة المحددات (طريقة كرامر):

طريقة كرامر: في النظام $١س + ٢ص = ك$

$$٢س + ٥ص = ل$$

تكون $س = \frac{|ك \ ٢|}{|١ \ ٢|}$ ، $ص = \frac{|١ \ ل|}{|١ \ ٢|}$ حيث $|١ \ ٢| \neq ٠$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$



مثال (٢): أحل النظام الآتي باستخدام طريقة كرامر: $٧ = ص - س٢$ ، $٧ = ص + ٢ ص$ = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$٥ = (١- \times ١) - (٢ \times ٢) = |P| \text{ ومنها } |P| = ٥$$

$$١٥ = |س| = \begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

استبدال العمود الأول في المصفوفة P بالثوابت، ومنها |س| = ١٥

$$٥- = |ص| = \begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$$

استبدال العمود الثاني في المصفوفة P بالثوابت، ومنها |ص| = ٥-

ومنها $س = \frac{١٥}{٥} = \frac{|س|}{|P|} = ٣$ ، $ص = \frac{٥-}{٥} = \frac{|ص|}{|P|} = ١-$ (أتحقق).

مثال (٣): أحل المعادلة المصفوفية الآتية بطريقة كرامر

$$\begin{bmatrix} ٩ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$$

الحل: $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = P$ ، $\begin{bmatrix} ٢ & ٩ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = س$ ، $\begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = ص$

$$٧ = |P| ، ٧ = |س| ، ١٤ = |ص|$$

س = $\frac{٧}{٧} = \frac{|س|}{|P|} = ١$ ، ص = $\frac{١٤}{٧} = \frac{|ص|}{|P|} = ٢$ (أتحقق).



تمارين ومسائل

س١: أحل الأنظمة الخطية الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

$$(١) \quad ٣س - ٤ص = ٤ \quad , \quad -٢س + ٤ص = ٤$$

$$(٢) \quad ٣ = ص - س \quad , \quad ٢س = ٦ - ص$$

س٢: أحل الأنظمة الخطية الآتية باستخدام طريقة كرامر:

$$(١) \quad ٨ = ص - س \quad , \quad ٢س + ص = ١$$

$$(٢) \quad ٢ص - س = ١ \quad , \quad ٢س + ص = ٨$$

س٣: في نظام من معادلتين خطيتين كانت $|١١| = |٢|$ ، $|٣٣| = |٢|$ ، $|١١| = |١١|$ ، أجد قيم س ، ص ؟

س٤: في نظام من معادلتين خطيتين على الصورة أس + ب ص + ج = د ، كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ٣ \end{bmatrix}$ هي

مصفوفة المعاملات ، $\begin{bmatrix} ٢- \\ ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت .

أ) أكتب المعادلتين الخطيتين بدلالة س ، ص .

ب) أستخدم طريقة كرامر لحل النظام .



متوسط التغير (Rate of Change)

تعريف:

إذا كان $ص = ق(س)$ اقتراناً، وتغيرت فيه $س$ من $س_1$ إلى $س_2$ فإن $\Delta س = س_2 - س_1$ تمثل التغير في $س$ وتقرأ دلتا $س$.
وبناءً على التغير في $س$ تتغير $ص$ ، حيث $\Delta ص = ص_2 - ص_1 = ق(س_2) - ق(س_1)$ تمثل التغير في $ص$ وتقرأ دلتا $ص$.

مثال (١): إذا كان $ص = ق(س) = ٢س + ٣$ أجد $\Delta س$ ، $\Delta ص$ ، عندما تتغير $س$ من $س_1 = ١$ إلى $س_2 = ٤$.

الحل: $\Delta س = س_2 - س_1 = ٤ - ١ = ٣$

$$\Delta ص = ص_2 - ص_1 = ق(س_2) - ق(س_1) = ١١ - ٥ = ٦$$

تعريف:

يسمى المقدار $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ عندما تتغير $س$ من $س_1$ إلى $س_2$.

مثال (٢): إذا كان $ص = ق(س) = ٢س^٢ + ٤س + ٣$ ، وتغيرت $س$ من $س_1 = ٢$ إلى $س_2 = ٥$ ، أجد متوسط التغير للاقتران $ق(س)$.

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

$$١٤ = \frac{١٢ - ٥٤}{٢ - ٥} = \frac{ق(٢) - ق(٥)}{٢ - ٥} =$$

مثال (٣): إذا كان $ص = ق(س) = ١ - ٣س$ ، $س \in ح$ ، وزادت $س$ من $س_1 = ٣$ بمقدار ٢ ، أجد متوسط التغير للاقتران $ق(س)$.

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

$$\Delta س = س_2 - س_1$$

$$٢ = س_2 - ٣ \quad \text{ومنها} \quad س_2 = ٥$$

$$٣ = \frac{١٤ - ٨}{٣ - ٥} = \frac{ق(٥) - ق(٣)}{٣ - ٥} =$$





أُتذكر

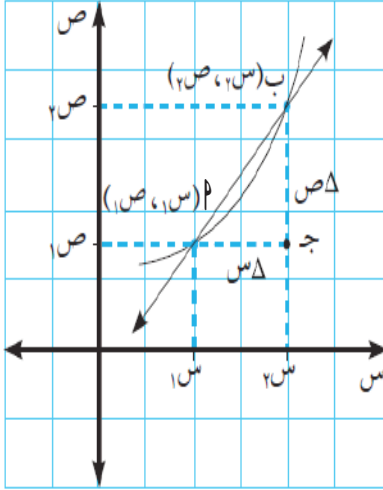
إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران

ص = ق(س)، والنقطتان أ(س_١، ص_١) ، ب(س_٢، ص_٢)

واقعتين عليه، فإن ميل المستقيم القاطع أ ب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

ومتوسط التغير للاقتران ص = ق(س) يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ أي

أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع.



مثال (٤): تقع النقطتان أ(١-، ٣-)، ب(٣، ٩) على منحنى الاقتران

ص = ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع أ ب.

الحل: ميل المستقيم القاطع أ ب = $\frac{ص \Delta}{س \Delta} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$$٣ = \frac{٣ - ٩}{١ - ٣} =$$

تمارين ومسائل

س١: إذا كان ص = ق(س) = ٥س - ١ أجد $\Delta س$ ، $\Delta ص$ عندما تتغير س:

أ) من س_١ = ٢ إلى س_٢ = ٣,٨

ب) من س_١ = ٤ إلى س_٢ = ٢-

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) في الحالات الآتية:

أ) ق(س) = $\sqrt{٣ - س}$ ، عندما تتغير س من س_١ = ٧ إلى س_٢ = ٤

ب) ق(س) = س^٢ - ١ ، عندما س_١ = ٢ ، $\Delta س = ٤$

س٣: ليكن ص = ق(س) اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من س_١ = ١ إلى س_٢ = ٤ هو ١٣، أجد:

أ) التغير في ص

ب) ق(٤) علماً بأن ق(١) = ٦

س٤: إذا كان ق(س) = س + ٧ ، أجد ميل القاطع المارّ بالنقطتين أ(٢-، ق(٢-)) ، ب(٣، ق(٣)).



مفهوم المشتقة الأولى (First Derivative)

تعريف: المشتقة الأولى للاقتران $y = f(x)$ عند النقطة (x_0, y_0) هي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ويتمثلها بالرمز $f'(x_0)$ أو $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx}$ وللتبسيط يمكن كتابة $\Delta x = h$ ، فتكون $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

مثال (١): إذا كان $y = x^2$ ، أوجد $f'(2)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

$$\text{الحل: } f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

مثال (٢): إذا كان $y = x^3$ ، أوجد $f'(1)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

$$\text{الحل: } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3$$

مثال (٣): إذا كان $y = x^3 + 1$ ، أوجد $f'(2)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

$$\text{الحل: } f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 + 1 - (2^3 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(8 + 12h + 6h^2 + h^3) + 1 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12$$



مثال (٤): إذا كان ق(٢) = ٨ ، ق'(٢) = ٢ أجد نها $\frac{ق(٢) - ق(٢+٢هـ)}{٥هـ}$

الحل: نها $\frac{ق(٢) - ق(٢+٢هـ)}{٥هـ} = \frac{١-}{٥} =$ نها $\frac{ق(٢) - ق(٢+٢هـ)}{٥هـ}$

لماذا؟ $\frac{١-}{٥} = ق'(٢)$

$$\frac{٢-}{٥} = ٢ \times \frac{١-}{٥} =$$

مثال (٥): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س في الفترة [٣، ٣ + هـ].

يساوي $\frac{٥هـ - ٢هـ}{هـ}$ ، أجد ق'(٣).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(٣) - ق(٣+٣هـ)}{٥هـ} = \frac{٥هـ - ٢هـ}{هـ}$

ق'(٣) = نها $\frac{ق(٣) - ق(٣+٣هـ)}{٥هـ} =$ نها $\frac{٥هـ - ٢هـ}{هـ}$

$$٥هـ = \frac{٥هـ - ٢هـ}{هـ} =$$

ألاحظ أن ق'(س) تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [س، س + هـ] عندما تؤول هـ إلى الصفر.

مثال (٦): إذا كان ق(س) = ٣ + ٢س ، أجد ق'(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد ق'(٢) ؟

الحل: ق'(س) = نها $\frac{ق(س) - ق(س+٢هـ)}{٥هـ} =$ نها $\frac{ق(س) - ق(س+٢هـ)}{٥هـ}$

$$= \frac{ق(س) - ق(س+٢هـ)}{٥هـ} = \frac{٣ + ٢س - (٣ + ٢(س+٢هـ))}{٥هـ}$$

$$= \frac{٣ + ٢س - ٣ - ٢س - ٤هـ}{٥هـ} = \frac{٣ - ٢س - ٣ - ٢س - ٤هـ}{٥هـ}$$

$$= \frac{٣ - ٢س - ٣ - ٢س - ٤هـ}{٥هـ} = \frac{٣ - ٢س - ٣ - ٢س - ٤هـ}{٥هـ}$$

$$= \frac{٣ - ٢س - ٣ - ٢س - ٤هـ}{٥هـ} =$$

$$٤ = ٢ \times ٢ = ق'(٢) \text{ ومنها}$$

ملاحظة: سنقتصر إيجاد المشتقة باستخدام التعريف على الإقترانات كثيرة الحدود التي درجتها أقل من ٣.



تمارين ومسائل

س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد ق' (س) عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ) ق(س) = ٢س - ٧ ، س = -٣

ب) ق(س) = ٣ - س ، س = ٢

ج) ق(س) = ٢س + س ، س = -١/٢

س٢: إذا كان ق' (٣) = ٨ ، أجد:

أ) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{ق(٣+h) - ق(٣)}{h}$ هنا

ب) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{ق(٣) - ق(٣-h)}{h}$ هنا

ج) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{ق(٣) - ق(٣-h)}{h}$ هنا

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س_١ = ٣ إلى س_٢ = ٣ + هـ

يساوي $\frac{٢}{(١-هـ)}$ ، أجد قيمة ق' (٣).

س٤: إذا كانت Δ ص = $\frac{٧هـ - هـ^٢}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س_١ = ٥ إلى س_٢ = ٥ + هـ ، أجد ق' (٥).

س٥: إذا كان ص = ق(س) = ١ + ٢س ، أجد ق' (س) باستخدام تعريف المشتقة.



قواعد الاشتقاق (Differentiation Rules)

قاعدة (١): إذا كان $ق(س) = ج$ حيث $ج$ عدد حقيقي، فإن $ق'(س) = صفر$. $\forall س \in ح$.

مثال (١): إذا كان $ق(س) = ٣$ ، أجد $ق'(س)$ ، $ق'(٥)$

الحل: $ق'(س) = صفر$ لجميع قيم $س \in ح$
 $ق'(٥) = صفر$

قاعدة (٢): إذا كان $ق(س) = س^n$ ، فإن $ق'(س) = n س^{n-١}$ ، n عدد حقيقي، $س \neq ٠$.

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{ص}{س}$ في كل من الحالات الآتية:

(أ) $ص = س^٤$

(ب) $ص = س^{-١}$ ، $س \neq ٠$

(ج) $ص = \frac{١}{س^٣}$ ، $س \neq ٠$

(د) $ص = \sqrt{س}$ ، $س \geq ٠$

الحل: (أ) $ص = س^٤$

$$\frac{ص}{س} = \frac{س^٤}{س} = س^٣ = ٤ س^٢، \forall س \in ح$$

(ب) $ص = س^{-١}$ ، $س \neq ٠$

$$\frac{ص}{س} = \frac{س^{-١}}{س} = س^{-٢}$$

$$= -٢ س^{-٣}$$

(ج) $ص = \frac{١}{س^٣} = س^{-٣}$

$$\frac{ص}{س} = \frac{س^{-٣}}{س} = س^{-٤} = -٤ س^{-٥} = -\frac{٤}{س^٥}$$

(د) $ص = \sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$ ، $س \geq ٠$

$$\frac{ص}{س} = \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{س} = س^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١}{٢} \frac{١}{\sqrt{س}} = -\frac{١}{٢\sqrt{س}}$$



قاعدة (٣): إذا كان الاقترانان ق(س)، ه(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س، وكانت $h \ni c$ ، وكان ه(س) = ق(س)، فإن ه'(س) = ق'(س).

قاعدة (٤): إذا كان الاقترانان ك(س)، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) + ع(س)، فإن ق'(س) = ك'(س) + ع'(س).

مثال (٣): إذا كان ك(س) = s^2 ، ع(س) = $2s$ ، ق(س) = ك(س) + ع(س)، أجد ق'(س)، ق'(٠)؟

الحل: ق'(س) = ك'(س) + ع'(س)

$$(2) + (2s) =$$

$$2 + 2s =$$

$$2 = 2 + 0 \times 2 = (0) \text{ ق'}$$

قاعدة (٥): إذا كان الاقترانان ك(س)، ع(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س، وكان

ق(س) = ك(س) - ع(س)، فإن ق'(س) = ك'(س) - ع'(س).

مثال (٤): إذا كان ك(س) = $5s$ ، ع(س) = $2s^2$ ، ق(س) = ك(س) - ع(س)، أجد ق'(س)، ق'(-٢)؟

الحل: ق'(س) = ك'(س) - ع'(س)

$$ق'(س) = 5 - 4s$$

$$ق'(-٢) = 5 - 4(-٢)$$

$$= 5 + 8$$

$$= 13$$

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان ك(س) = 3 ، ع(س) = 2 وكان ق(س) = ك(س) - ع(س)، أجد ق'(١)؟

الحل: ق'(س) = ك'(س) - ع'(س)

$$ق'(١) = ك'(١) - ع'(١)$$

$$= 0 - 0 = 0$$



قاعدة (٦): إذا كان الاقترانان ق(س) ، ه(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان ل(س) = ق(س) × ه(س) فإن

$$ل'(س) = ق(س) × ه'(س) + ه(س) × ق'(س)$$
 وبالكلمات ل'(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

مثال (٦): إذا كان $ص = (س^٢ + ٣س + ٢)(٥س + ١)$ أجد $\frac{ص}{س}$ | $ص = ٢$

الحل: $ص = (س^٢ + ٣س + ٢)(٥س + ١)$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$$

$$١٣٧ = ٧٧ + ٦٠ =$$

مثال (٧): إذا كان ك(٢) = ٥ ، ك'(٢) = ٣ ، ع(٢) = ٤ ، ع'(٢) = ٦ وكان
 ق(س) = ك(س) × ع(س) ، أجد ق'(٢).

الحل: ق'(س) = ك'(س) × ع(س) + ك(س) × ع'(س)

$$ق'(٢) = ك'(٢) × ع(٢) + ك(٢) × ع'(٢)$$

$$٣ × ٤ + ٦ × ٥ =$$

$$٤٢ = ١٢ + ٣٠ =$$

قاعدة (٧): إذا كان الاقتران ل(س) = $\frac{ق(س)}{ه(س)}$ ، ق(س) ، ه(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، ه(س) ≠ ٠ فإن:

$$ل'(س) = \frac{ق'(س) × ه(س) - ق(س) × ه'(س)}{ه(س)^٢}$$

$$\frac{المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام}{(المقام)^٢} = ل'(س)$$



مثال (٨): إذا كان ق(س) = $\frac{1 + 3س}{5 - 2س}$ ، س $\neq \frac{5}{2}$ ، أجد ق'(س).

الحل: ق'(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{بسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$\frac{2 \times (1 + 3س) - 3 \times (5 - 2س)}{(5 - 2س)^2} =$$

$$\frac{17 - 2س}{(5 - 2س)^2} = \frac{2س - 15 - 10 - 2س}{(5 - 2س)^2} =$$

مثال (٩): إذا كان ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ه(س)}}$ ، ه(س) \neq صفر، وكان ق'(٢) = ١- ، ق(٢) = ١ ، ه(٢) = ٢ ،

ل(٢) = ٢- أجد ه'(٢).

الحل: ل'(س) = $\frac{\text{ه(س)} \times \text{ق'(س)} - \text{ق(س)} \times \text{ه'(س)}}{(\text{ه(س)})^2}$

$$\frac{\text{ه(٢)} \times \text{ق'(٢)} - \text{ق(٢)} \times \text{ه'(٢)}}{(\text{ه(٢)})^2} = \text{ل'(٢)}$$

$$\frac{٢ \times ١ - ١ \times ٢}{(٢)^2} = ٢-$$

$$٨- = ٢- - \text{ه'(٢)}$$

ومنها ه'(٢) = ٦ لماذا؟

مثال (١٠): إذا كان ق(س) = $\frac{\text{ه(س)}}{١ + س}$ ، س \neq ١- أجد ق'(١)، علماً بأن ه(١) = ٢ ، ه'(١) = ٣

الحل: ق'(س) = $\frac{١ \times \text{ه'(س)} - \text{ه(س)} \times (١ + س)'}{(١ + س)^2}$

$$\frac{(١) \times ٣ - (١) \times (١ + ١)'}{(١ + ١)^2} = \text{ق'(١)}$$

$$\frac{٣ - ٢}{٤} =$$

$$١ = \frac{٤}{٤} = \frac{٢ - ٣ \times ٢}{٤} =$$



قاعدة (٨): إذا كان $ص = ق(س)$ اقتراً قابلاً للاشتقاق، وكانت $ق(س)$ هي المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$ ، فإن المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$ تسمى المشتقة الثانية للاقتران $ق(س)$ ويرمز لها بالرمز $ق''(س)$ أو $\frac{د^2ص}{دس^2}$ أو $ص''$. وكذلك يرمز للمشتقة الثالثة للاقتران $ق(س)$ بالرمز $ق'''(س)$ أو $\frac{د^3ص}{دس^3}$ أو $ق^{(3)}$ أو $ص'''$ ، وهكذا*.

مثال (١١): إذا كان $ق(س) = س^٣ - ٤س^٢ + ٣س + ٢$ أجد $ق'(س)$ ، $ق''(س)$ ، $ق^{(3)}$ (س).

الحل: $ق'(س) = ٣س^٢ - ٨س + ٣$
 $ق''(س) = ٦س - ٨$
 $ق^{(3)}$ (س) = ٦

مثال (١٢): إذا كان $ص = ٣س^٥ - ٥س + ٧$ ، أجد $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=٢}$ ، $\frac{د^٢ص}{دس^٢} \Big|_{س=٢}$ ، $\frac{د^٣ص}{دس^٣} \Big|_{س=٢}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = ١٥س^٤ - ٥$ ومنها $\frac{دص}{دس} \Big|_{س=٢} = ٧$
 $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = ٦٠س^٣$ ومنها $\frac{د^٢ص}{دس^٢} \Big|_{س=٢} = ٦$
 $\frac{د^٣ص}{دس^٣} = ١٨٠س^٢$ ومنها $\frac{د^٣ص}{دس^٣} \Big|_{س=٢} = ٧٢٠$

مثال (١٣): إذا كان $ع(س) = ٣س^٤ + ٢س^٢$ ، وكانت $ع'(١) = ٢٢$ ، أجد قيمة الثابت $ب$ ، ثم أجد $ع''(٠)$.

الحل: $ع'(س) = ١٢س^٣ + ٤س$
 $ع'(١) = ١٢(١) + ٤ = ١٦ + ٤ = ٢٠$
 $٢٢ = ١٦ + ٤ب$
 $٦ = ٤ب$
 $ب = ١.٥$
 $ع''(س) = ٣٦س^٢ + ٤$
 $ع''(٠) = ٤$

* المشتقة النونية يرمز لها بالرمز $ق^{(ن)}$ ، $٣ \leq ن$



تمارين ومسائل

س١: أجد $\frac{Kص}{Kس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

$$\text{أ) ص} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ب) ص} = ٥س + ٣$$

$$\text{ج) ص} = \frac{٣}{٢س} + ٥س ، س \neq ٠ \quad \text{د) ص} = ٧س^٢ + \sqrt[٢]{٣س}$$

$$\text{هـ) ص} = (٥ + ٢س)(٣ - س) \quad \text{و) ص} = \frac{س}{٣ + س} ، س \neq ٣ ، \text{عندما } س = ١$$

س٢: أجد ق/(٣)، علماً بأن ق(س) = ٥س - ٢س + ٥

س٣: إذا كان ق(س) = ٣س + ٢س، وكان ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥، هـ(٢) = ١ أجد ل(٢).

س٤: إذا كان ق(س) = $\frac{٢+٣س}{١+٤س}$ ، س $\neq \frac{١}{٤}$ ، أحسب ق(٢)؟

س٥: إذا كانت ق(س) = ٢س ل(س) + هـ(س)، وكان ل(٢) = ٥، هـ(٢) = ٧، ل(٢) = ٣- فما قيمة ق(٢)؟

س٦: أجد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات إزاء النقط الميينة بجانبها:

$$\text{أ) ق(س) = } ٤س - ٢س^٢ + ٣س + ١ ، \quad س = ٢$$

$$\text{ب) هـ(س) = } \frac{1}{\sqrt{س}} ، \quad س < ٠ ، \quad س = ١$$

س٧: أجد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ق(س) = ٢س^٤ + ٢س^٣ - ٤س + ١، ثم أبين أن ق^(٥)(١) = صفر.



ورقة عمل

س(١): إذا كان $\begin{bmatrix} 2 & س \\ س & ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ ص & ع \end{bmatrix}$ أجد قيم كل من س، ص، ع؟

س(٢): إذا كانت المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3- \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ، أجد المصفوفة $B_{3 \times 3}$ بحيث $P + B = O$

س(٣): إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2- & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 2 & 3- \end{bmatrix}$ وكانت $J = P \cdot B$ ، أجد قيمة J_{11} .

س(٤): إذا كان $\begin{vmatrix} 1 & 2- & 3- \\ 1- & 2 & س \\ 2- & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2-$ ، أجد قيمة س.

س(٥): إذا كان $C(س) = 5 - 2س$ ، أجد $C'(4)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

س(٦): إذا كان $C(س) = 2س^\circ$ ، أجد $C'(س)$ ، $C'(1-)$.



نموذج إختبار

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١. إذا كان $\begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣+س٢ \\ ٢-ص & ٤ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ، ص على الترتيب ؟

أ) ١-،٧ (ب) ٣-،٥ (ج) ١،٢ (د) ٢،١

٢. إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥- & ٢ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = س$ فما قيمة |س٢| ؟

أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ١٢ (د) ٢٨-

٣. ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤- & ٢ \\ ٣س & ٣ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة؟

أ) ١٢ (ب) ٢- (ج) ٢ (د) صفر

٤. إذا كان $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix} = س$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = ص$ أجد المصفوفة P ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

٥. ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) المارّ في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

أ) ٣- (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ٦

٦. إذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، ما قيمة ق(٤)؟

أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢} -$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) ٢

٧. ما ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٥}{١-٢س}$ عند س = ٢ ؟

أ) $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٢٠}{٩} -$ (ج) ١٥ (د) $\frac{٥}{٣}$



س٢: إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix} = \text{ب}$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- & ٢ \\ ٤ & ٥- & ٦ \end{bmatrix} = \text{ج}$ ، $\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \text{د}$ ،

$\begin{bmatrix} ٢- & ٦ & ٢ \\ ٥ & ١ & ٤- \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix} = \text{د}$ ، $\begin{bmatrix} ٤- & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \text{ل}$ أجد الآتي (إن أمكن):

(أ) ج + ل (ب) ٣ج - ٢ل (ج) (١.ب) . د (د) ل - ١ (هـ) | ج |

س٣: أستخدم طريقة كرامير لحل النظام الآتي:

$$٢ \text{ ص} - ٤ \text{ س} = ٢ ، ٥ \text{ س} + \text{ص} = ٨$$

س٤: إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٥$ هو ١٠ ، أجد ق(٥) علماً بأن ق(٢) = ٦ ؟

س٥: إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = $س^٢ + ٣$ عندما تتغير س من ٢ إلى ١ يساوي ٦ فما قيمة الثابت ١ ؟

س٦: إذا كان ق(س) = $س^٢ + ١$ ، أجد ق'(٣) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

