

الهندسة الفراغية

الحادي عشر العلمي

منهاج الرزم 220/2021

إعداد

أ/صلاح الدين فياض

المقدمة

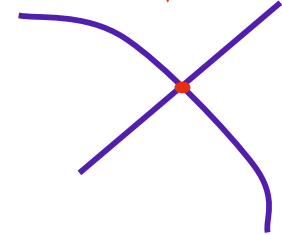
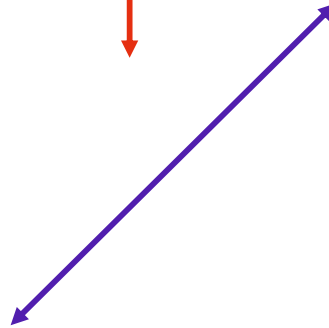
مفاهيم أولية :

المستوى

المستقيم

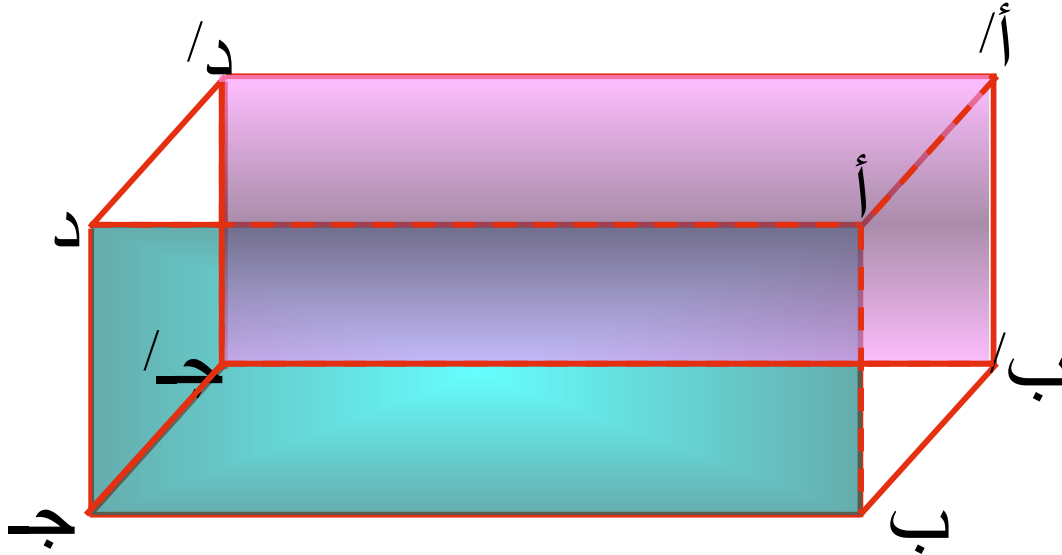
النقطة

كلمات أولية لا تعرّف و لكن يمكن وصفها



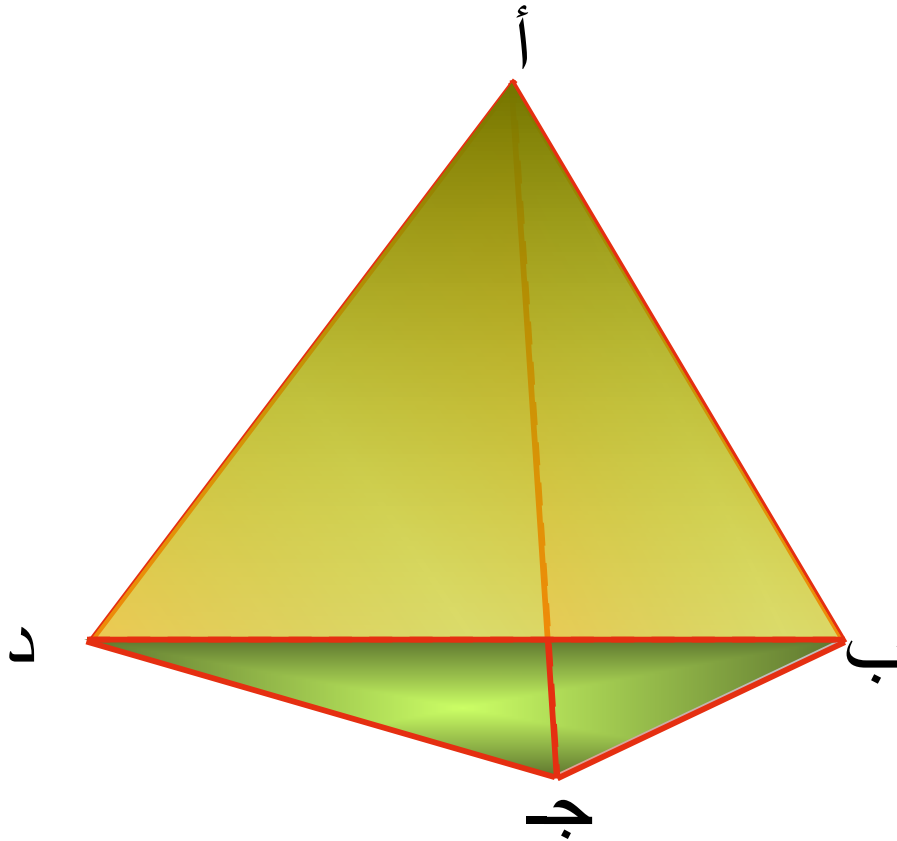
ملاحظات هامة

من الضروري تدريب النظر على مشاهدة الأشكال المجسمة من رسم في المستوي



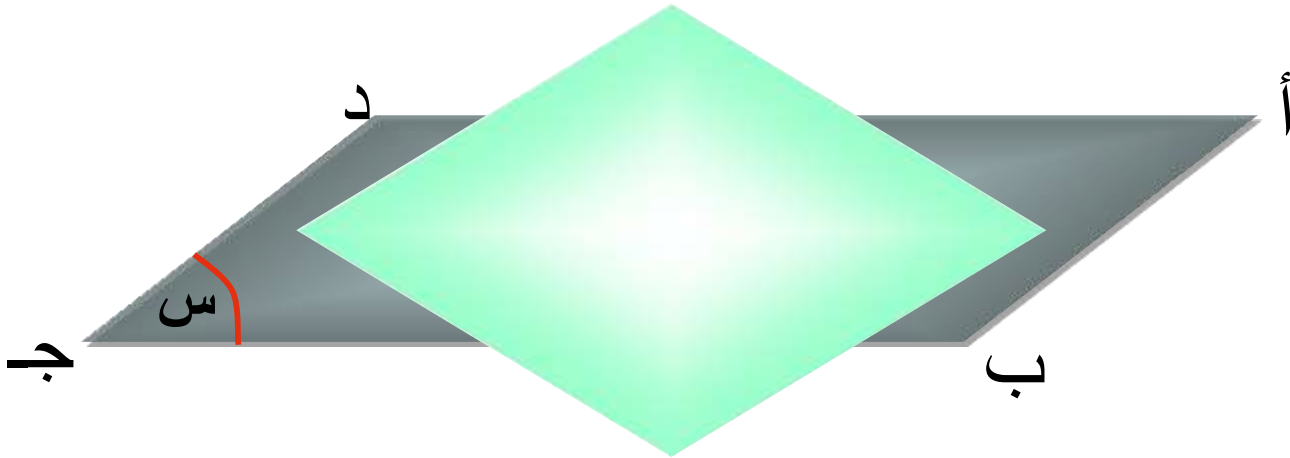
ملاحظات هامة

من الضروري تدريب النظر على مشاهدة الأشكال المجسمة من رسم في المستوي

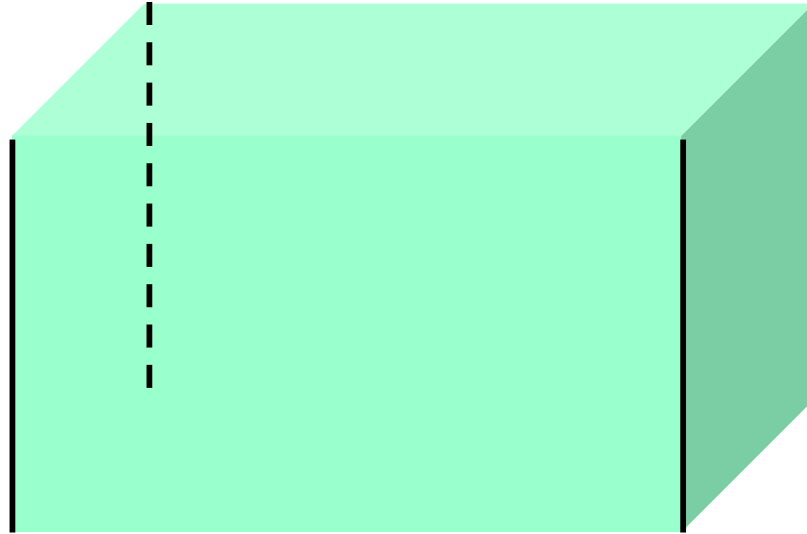


مهارات هامة

- 1- عند رسم مستوى عادة ما نعبر عنه برسم متوازي أضلاع أو أي شكل مستوي مثل المثلث أو المربع أو المعين ... إلخ .
و نعبر عنه إما بذكر رؤوسه أو برمز واحد عند أحد أركان الشكل



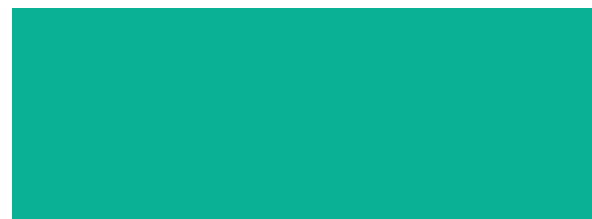
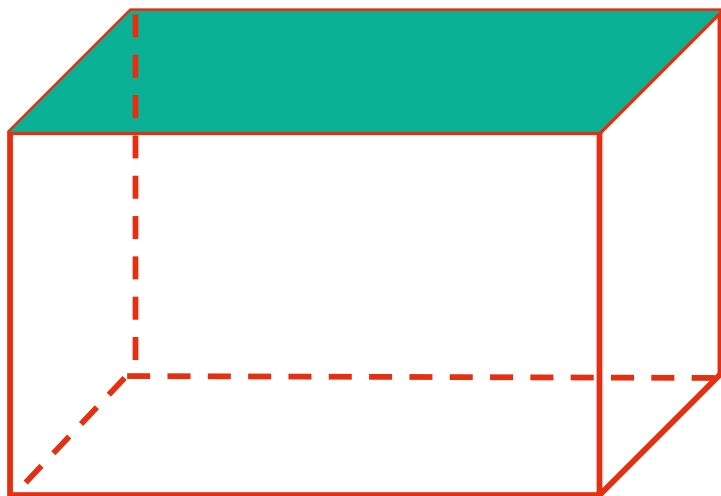
2- عند رسم قطعة مستقيمة رأسية في مجسم فإننا نرسم قطعة مستقيمة توازي حافة الصفحة.



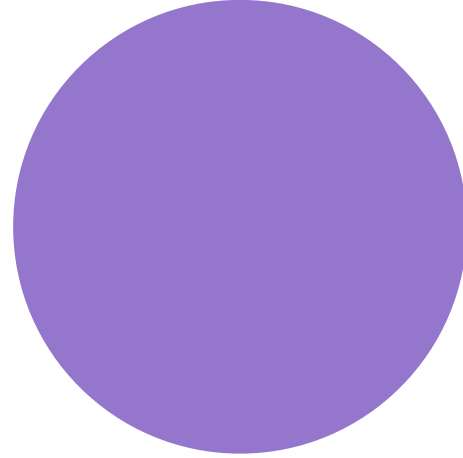
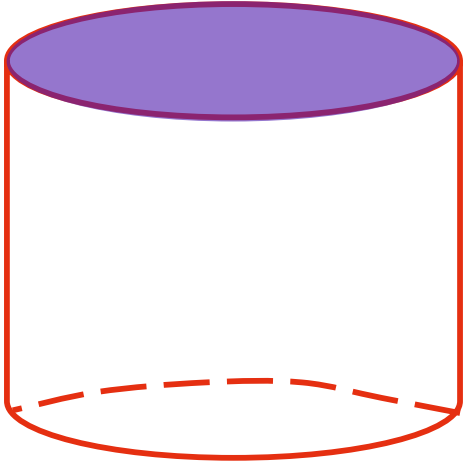
3- عند رسم قطعة مستقيمة أفقية في مجسم فإننا نرسم قطعة مستقيمة أفقية أو مائلة .



4- للتعبير بالرسم عن مستطيل في الفضاء فإننا عادة نرسم متوازي أضلاع .



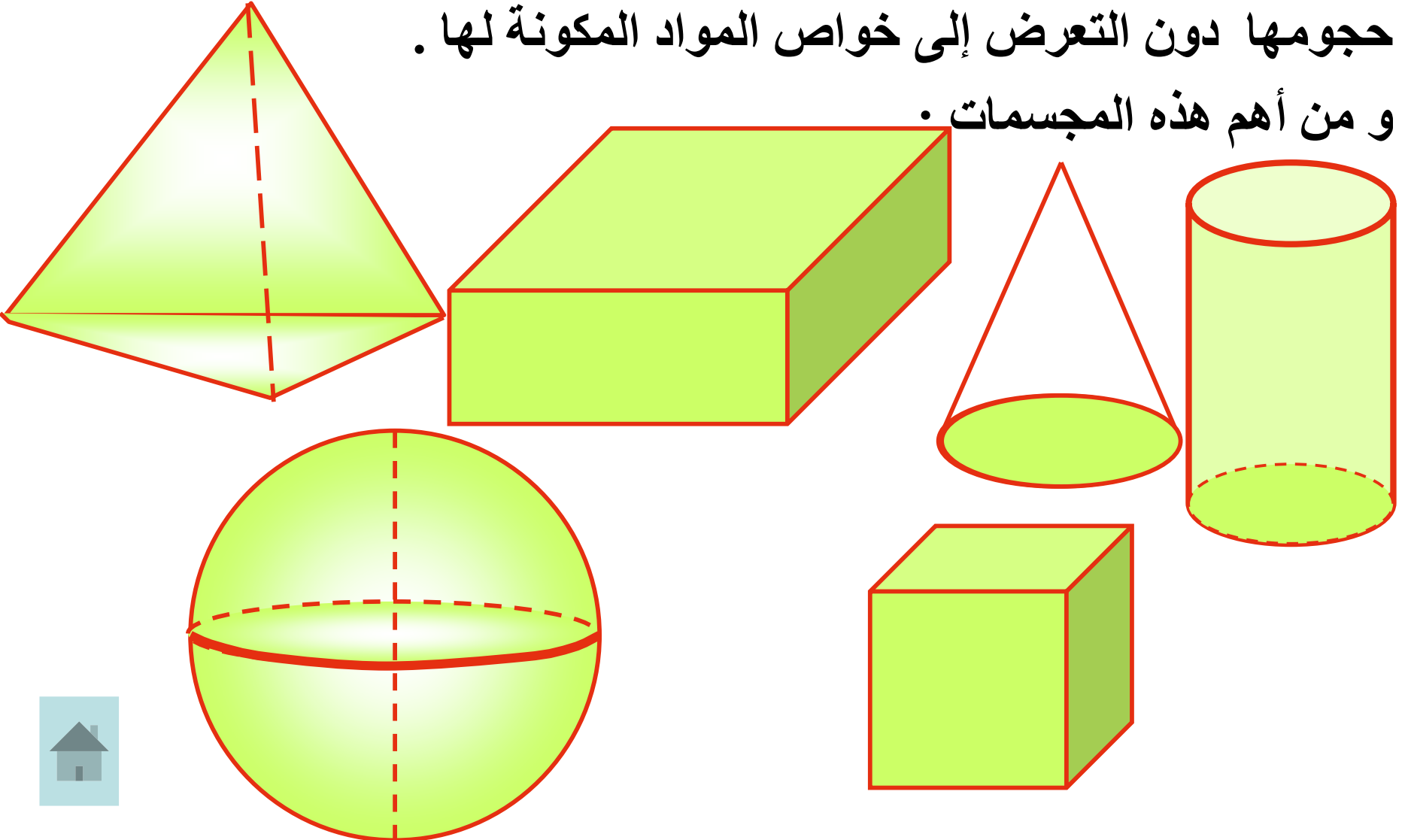
5- للتعبير بالرسم عن دائرة في الفضاء فإننا عادة نرسم قطع ناقص .



هندسة الفراغ :

هي علم يبحث في خواص الأجسام و الأشكال التي لا تقع كل عناصرها في مستوى واحد من حيث خواصها الأساسية و أبعادها و مساحاتها و حجومها دون التعرض إلى خواص المواد المكونة لها .

و من أهم هذه المجسمات .



المسئلة :

هي عبارة أولية (رياضية) نسلم بصحتها (نقبلها) دون برهان .

علاقة نقطة بنقطة في الفضاء

النقطتان منطبقتان

أ•ب

النقطتان مختلفتان

ب•

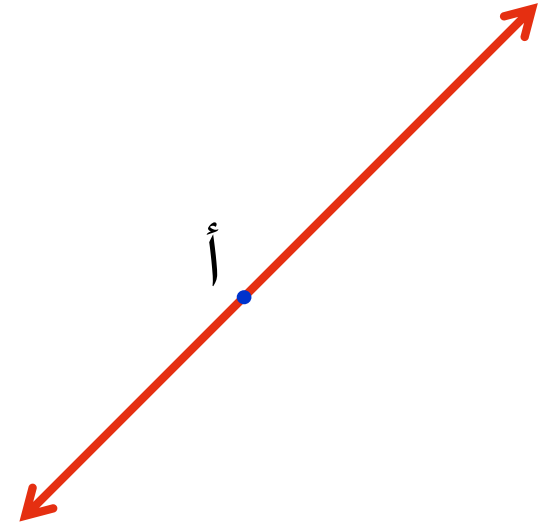
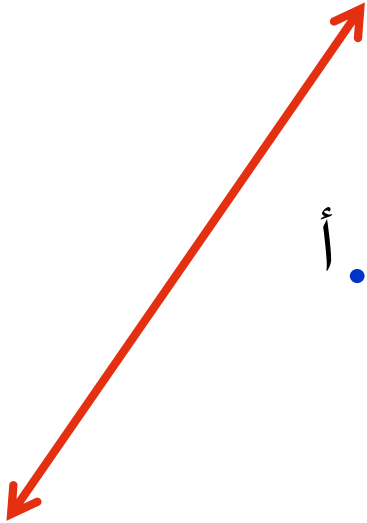
أ•



علاقة نقطة بمستقيم في الفضاء

النقطة \notin المستقيم

النقطة \in المستقيم



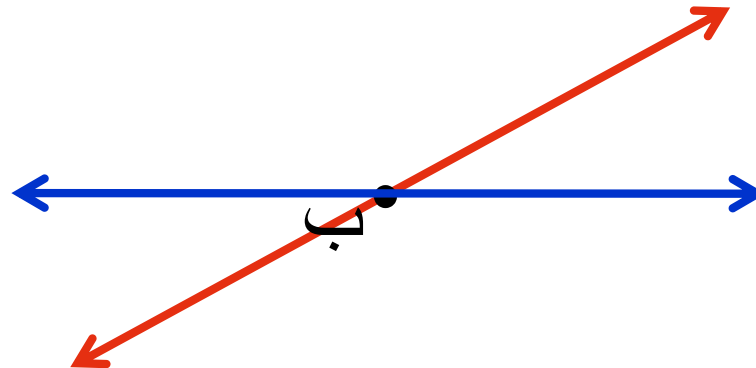
أولاً: المستقيم :

كل مستقيم في الفضاء يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين



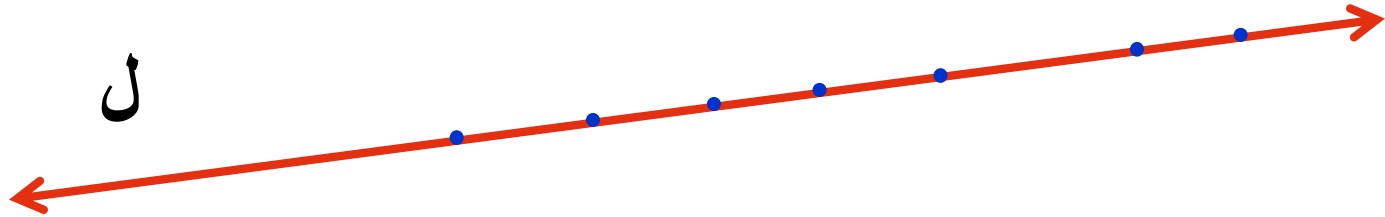
أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد

مسلمة: إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط



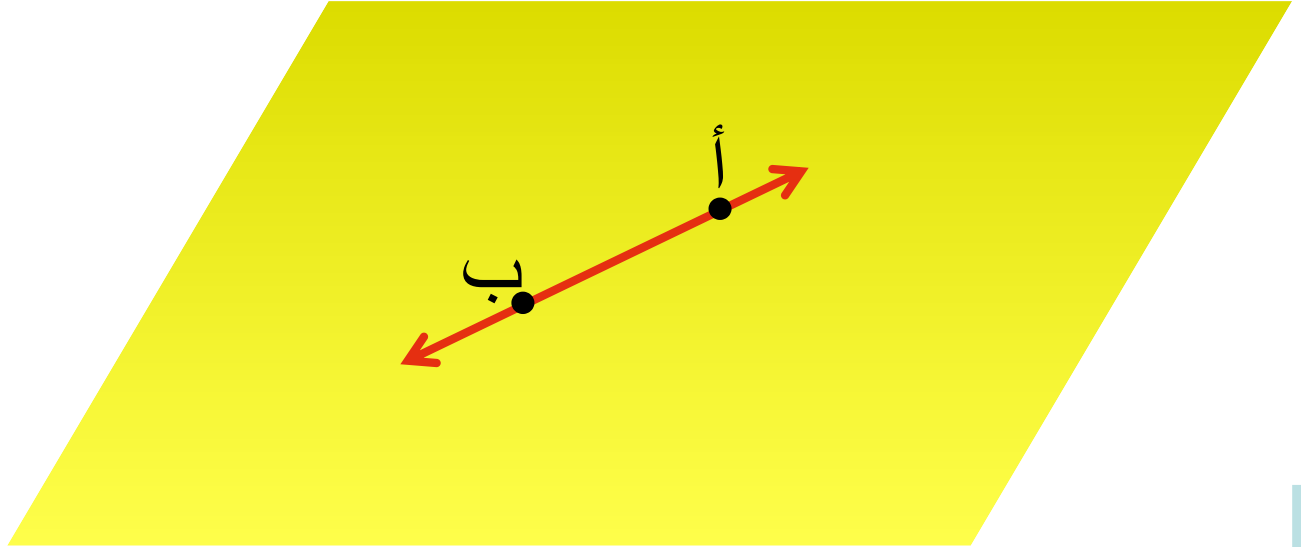
تعريف (1)

يقال لمجموعة من النقاط في الفضاء ف أنها مستقيمة إذا وجد في الفضاء ف مستقيم l تنتمي إليه هذه النقاط



ثانياً : المستوى :

المستوى يوصف بأنه السطح الذي لو أخذت فيه أي نقطتين مختلفتين ووصل بينهما بمستقيم لوقع المستقيم بتمامه في المستوى و المستوى يمتد في الفضاء بلا حدود

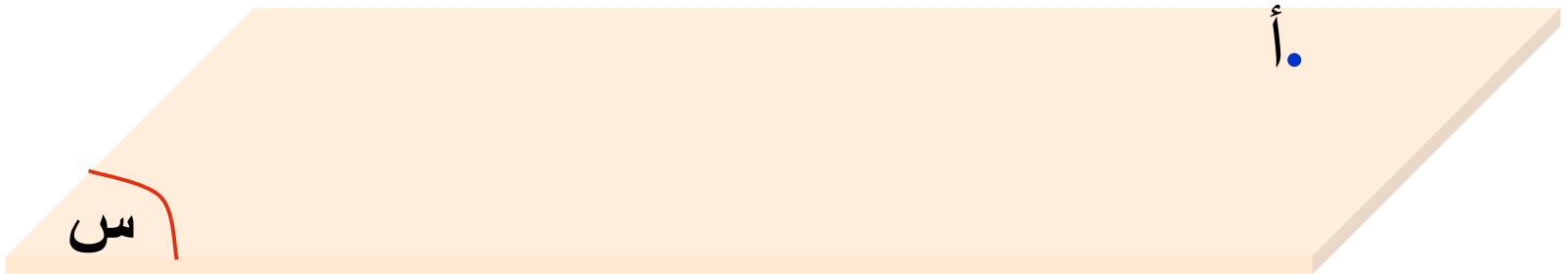


علاقة نقطة بمستوى في الفضاء

النقطة \ni المستوى

النقطة \in المستوى

ب.



في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست مستقيمة

مسلمة

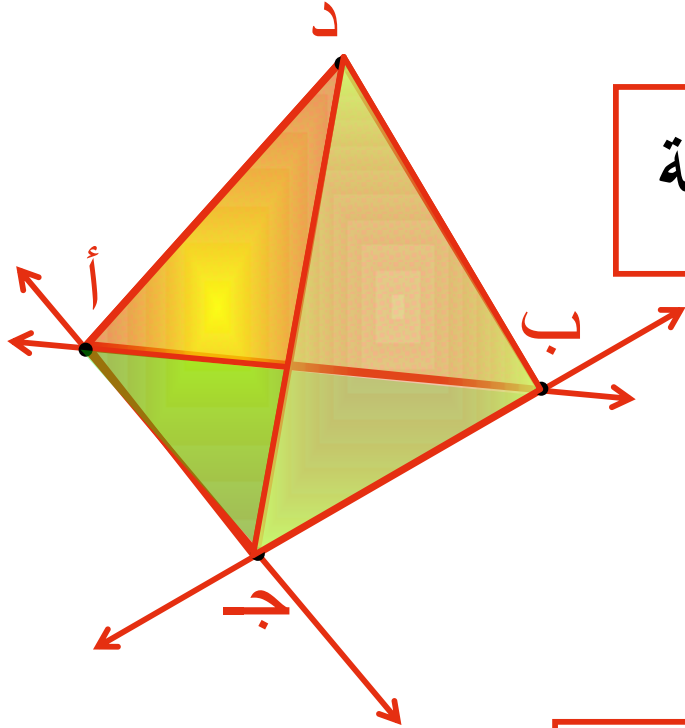
كل ثلاث نقاط مختلفة و ليست مستقيمة يمر بها مستوٍ وحيد

تعريف

نقول عن مجموعة من النقاط أنها مستوية (أو تقع في مستوٍ واحد) إذا وجد مستوٍ ما يحويها



ثالثاً : الفراغ

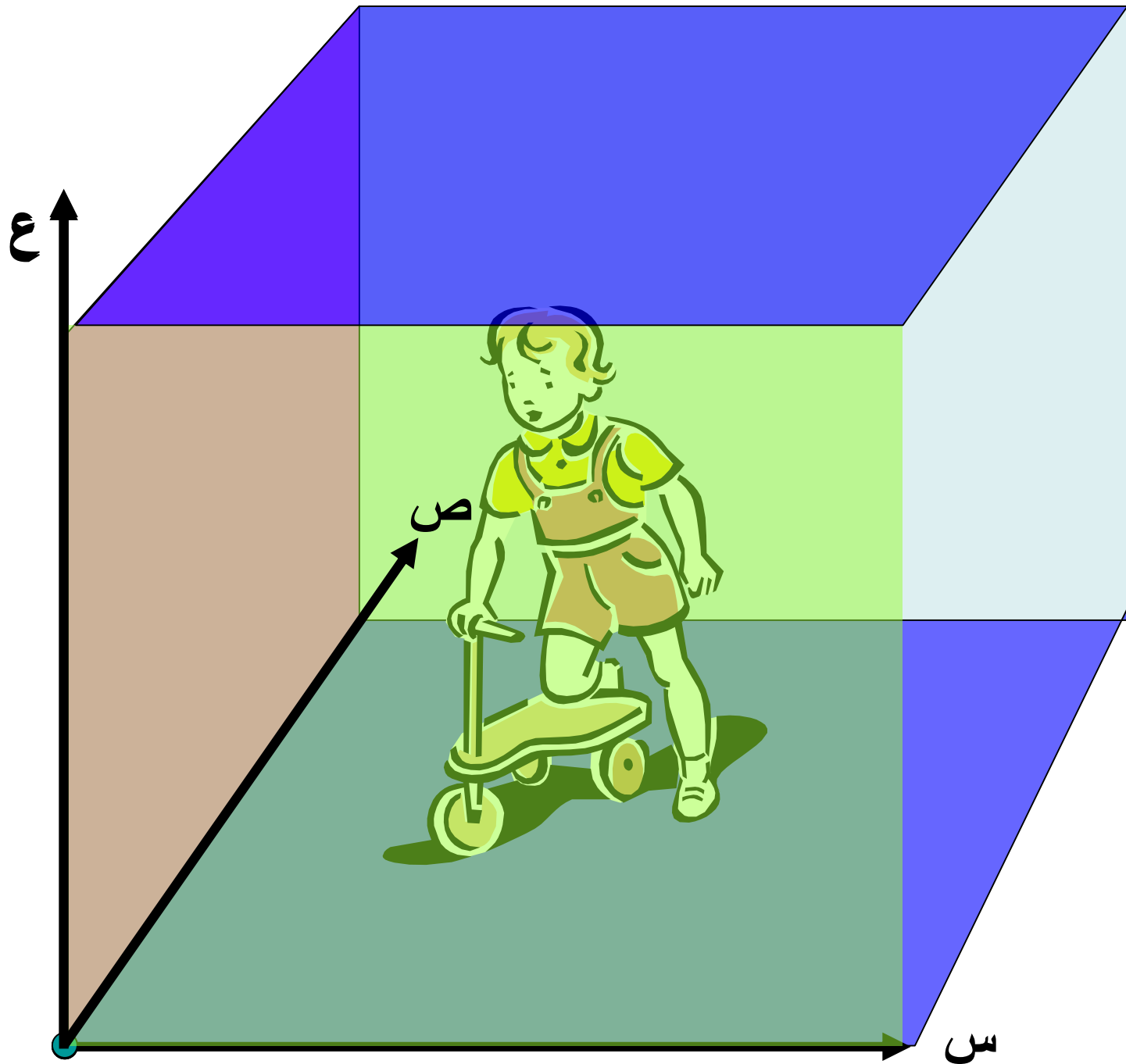


يحتوي الفضاء على الأقل أربع نقاط غير مستوية

ملاحظة

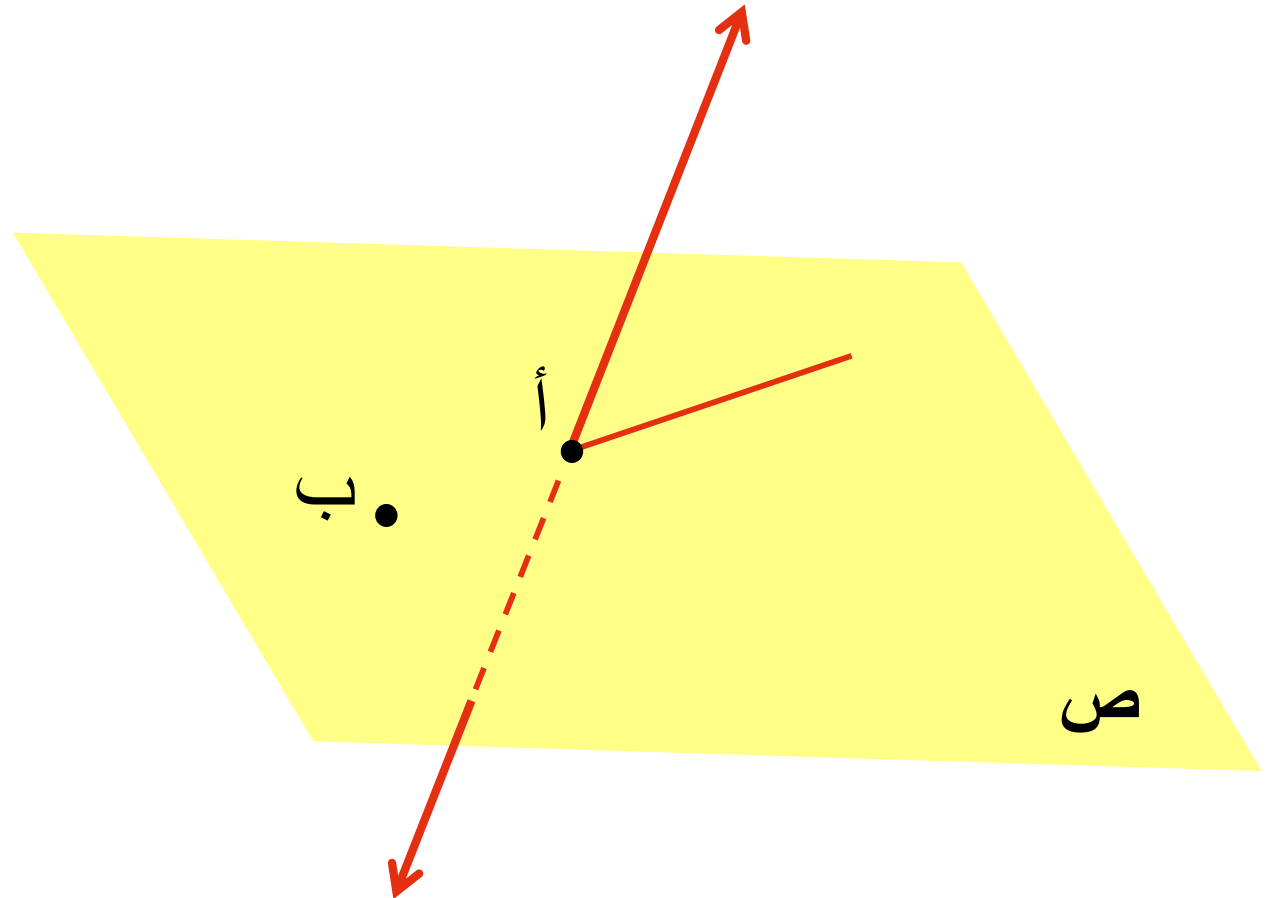
الفضاء يحتوي أربعة مستويات مختلفة على الأقل





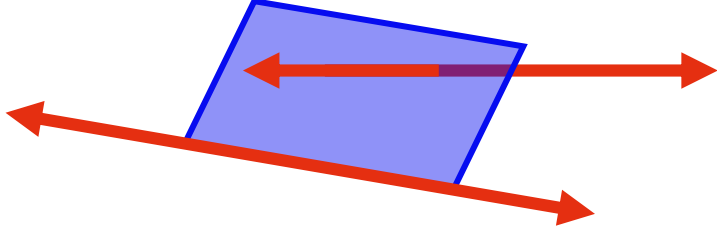
axiom

إذا أشرتك مستقيم ل مع مستوى ص في نقطتين مختلفتين فإن المستقيم ل يقع بكامله في المستوي ص



ملاحظة

مستقيمت الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد



تعريف (3)

يتقاطع مستقيمان $ل$ ، $م$ إذا وجدت نقطة وحيدة ا مشتركة بينهما

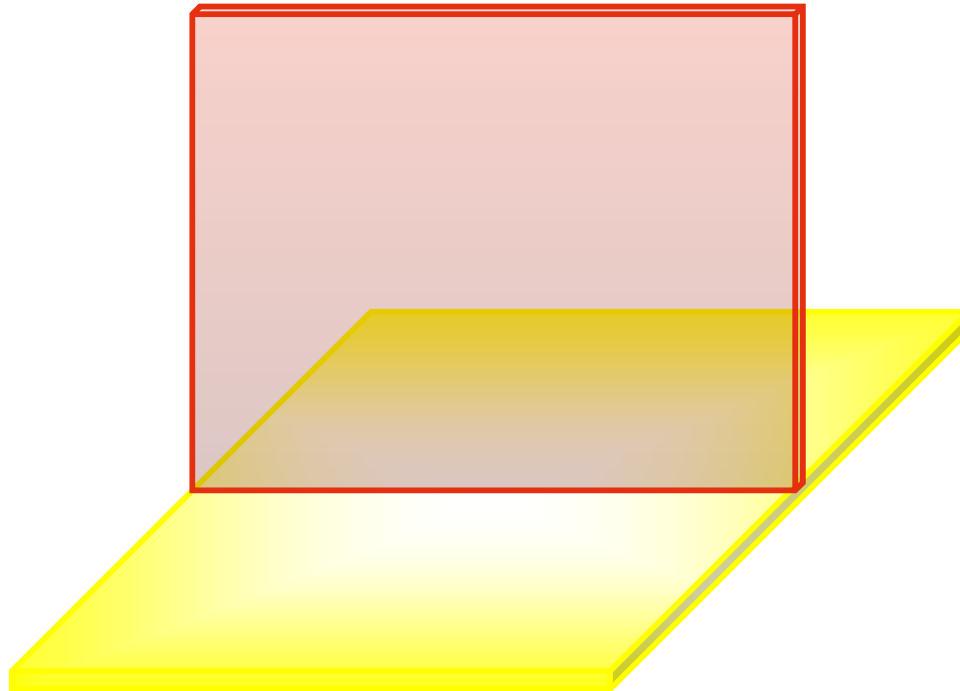
$$\{ أ \} = م \cap ل$$

و تتلاقى عدة مستقيمت مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة ا مشتركة بينهما

$$\{ أ \} = \{ م \cap ل \cap ن \dots \}$$

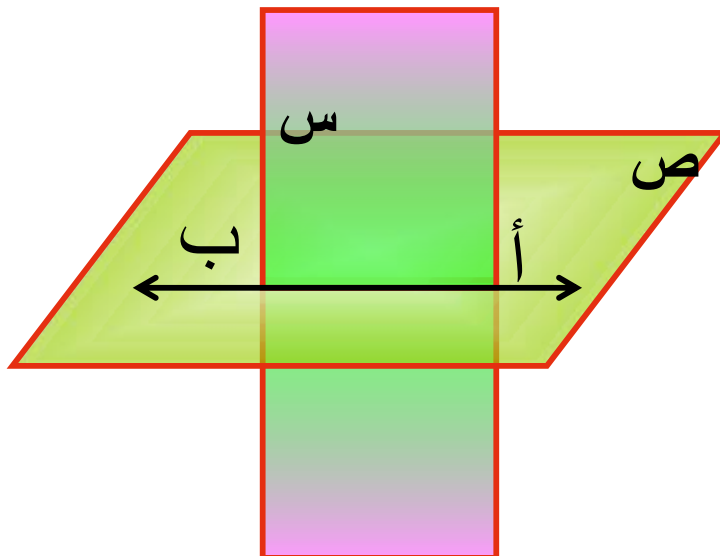
تعريف (4)

يكون المستويان المختلفان S ، S' متقاطعان إذا كان $S \cap S' \neq \emptyset$

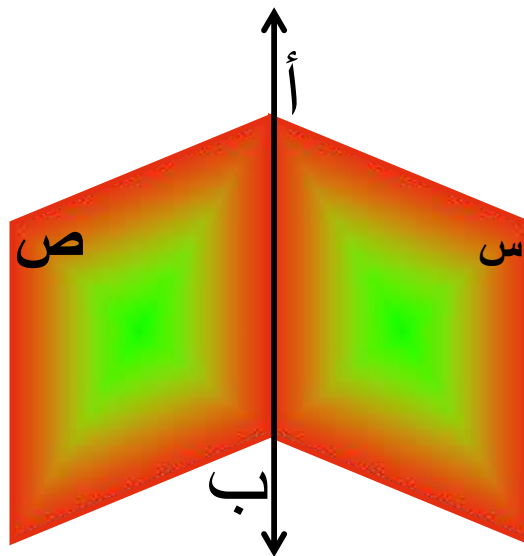


إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم

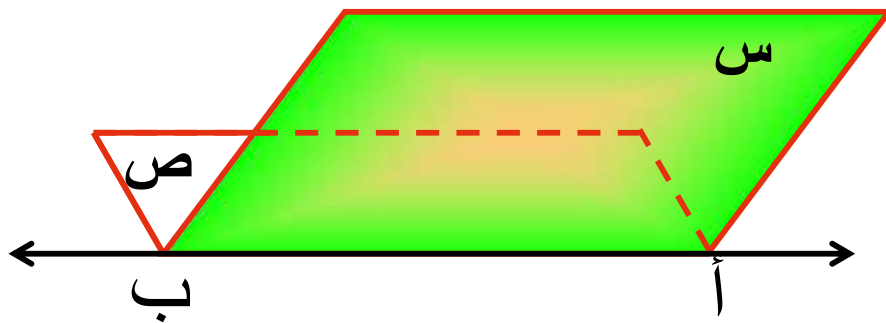
مسألة



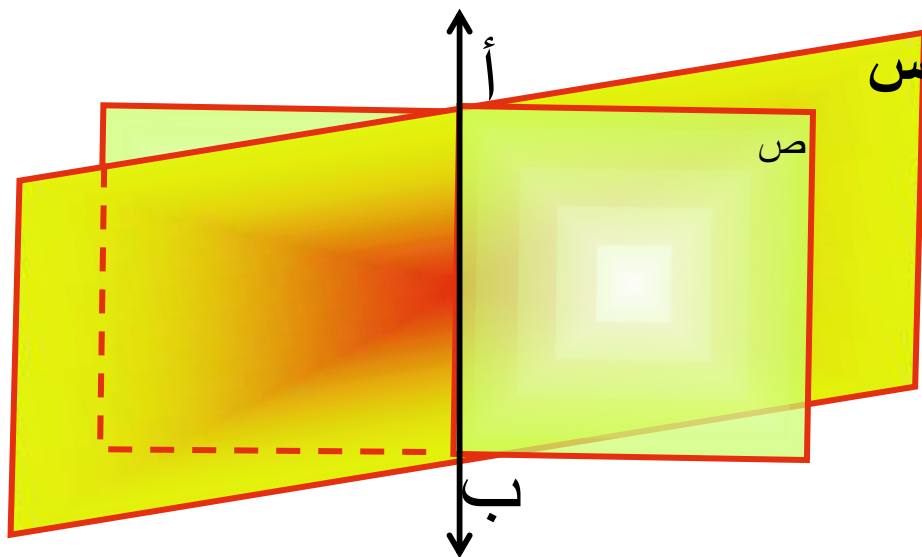
إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم



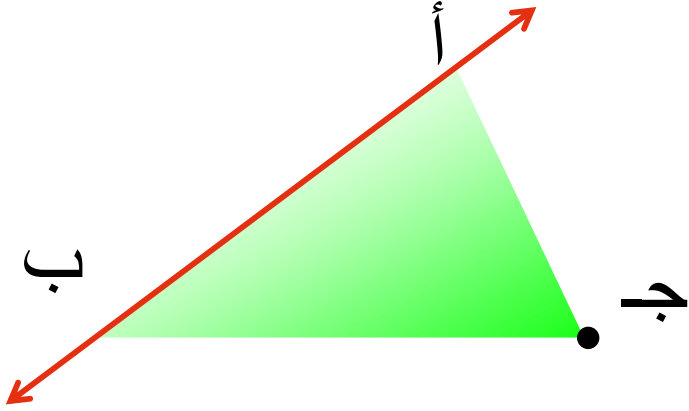
إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم



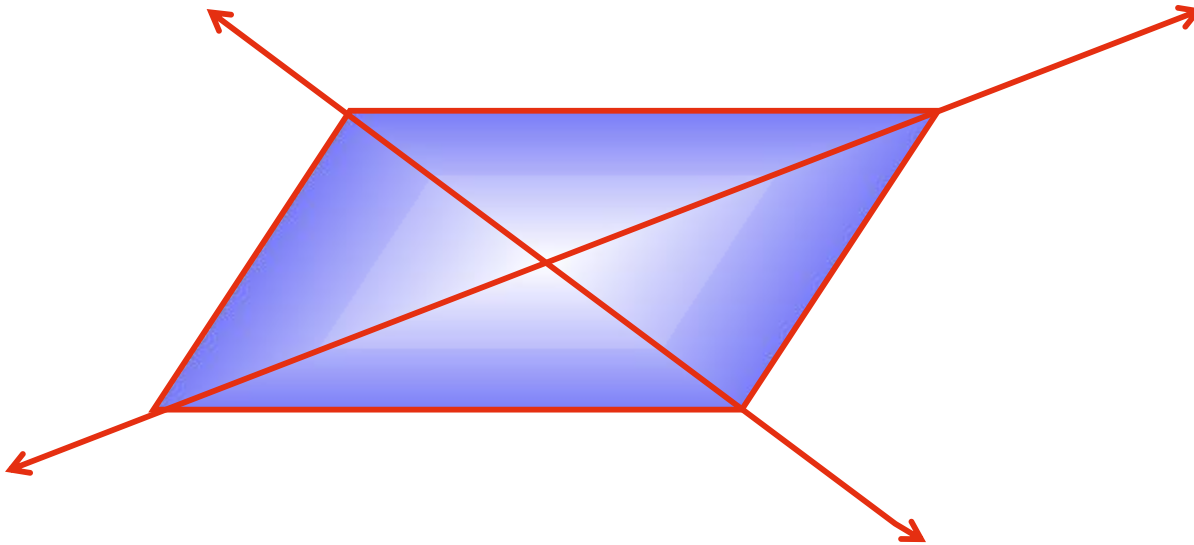
إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم



يوجد مستوي وحيد (واحد وواحد فقط) يحوي مستقيماً
معلوماً و يمر بنقطة خارجة عن هذا المستقيم

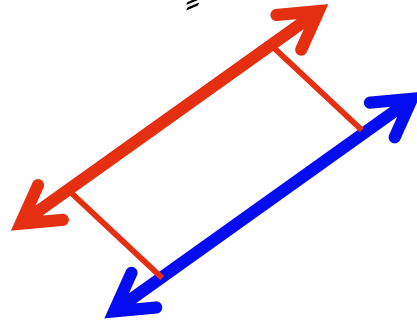


المستقيمان المتقاطعان يحددان مستويًا وحيداً



تعريف

يسمى المستقيمان ل ، ك متوازيين إذا كانا غير متقاطعين و يجمعهما
مستوي واحد



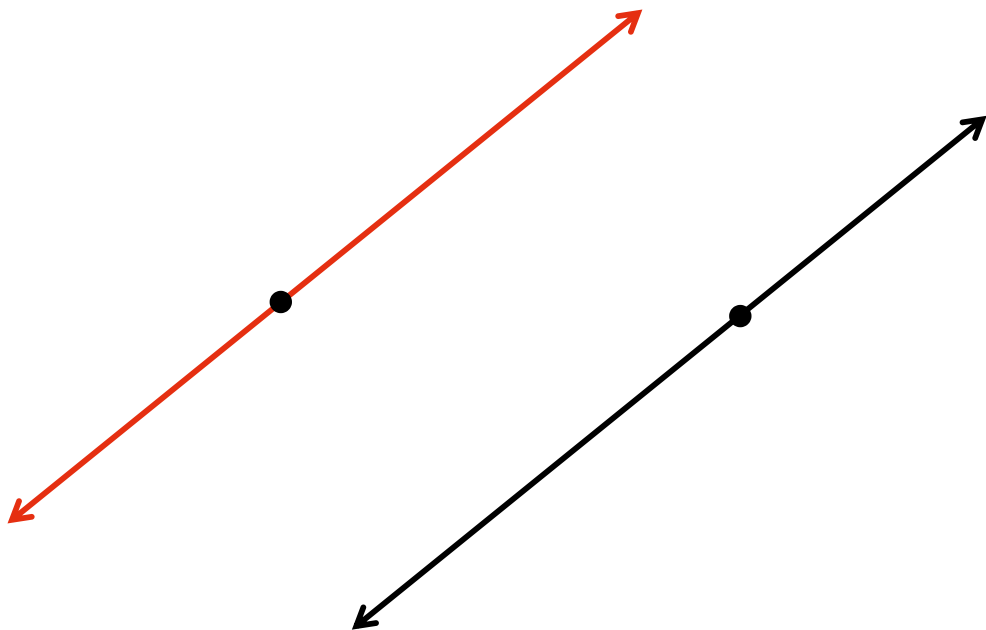
نستنتج ان : كل مستقيم موازٍ لنفسه

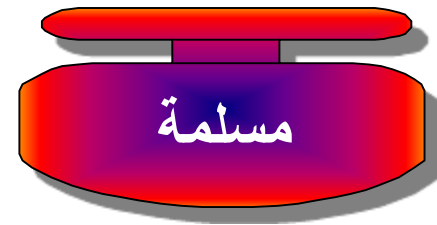
ملاحظة



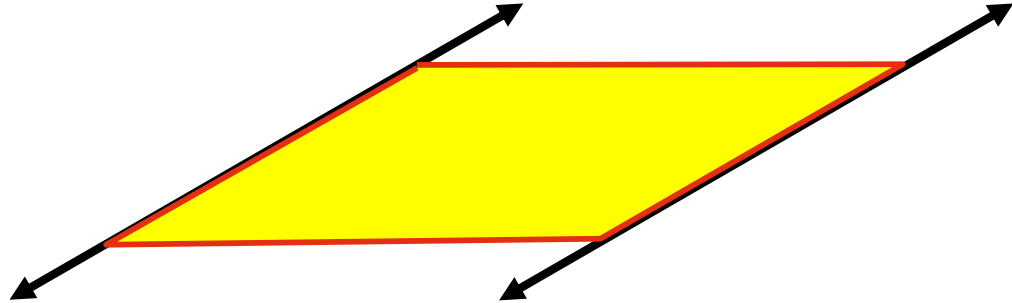
مسئمة

يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيماً معلوماً و يمر بنقطة معلومة



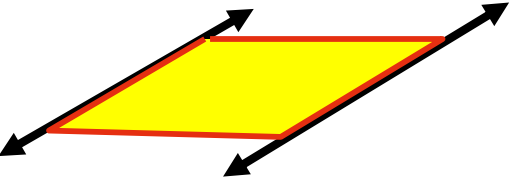


المستقيمان المختلفان و المتوازيان يحددان مستويًا وحيداً

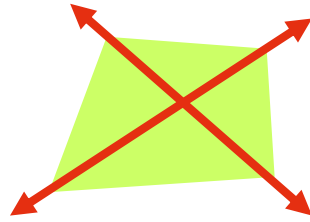


حالات تعيين المستوي

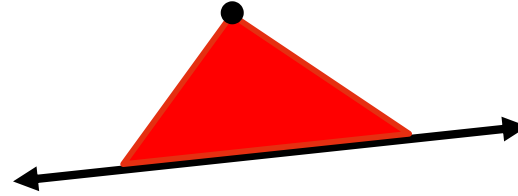
مستقيمين
متوازيين



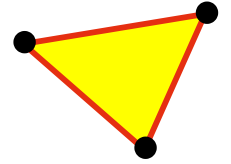
مستقيمين
متقاطعين



مستقيم و نقطة
خارجة عنه



ثلاث نقاط مختلفة
و ليست مستقيمة



الأهداف السلوكية

1 – التعرف الى الحالات الثلاث لعلاقة مستقيم بمستقيم

2 –أوضاع مستقيم بالنسبة لمستوي

3 – يذكر الأوضاع المختلفة لمستويين في الفضاء



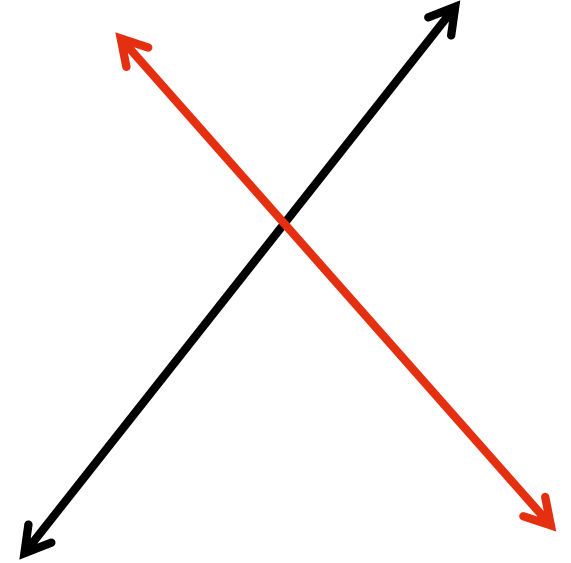
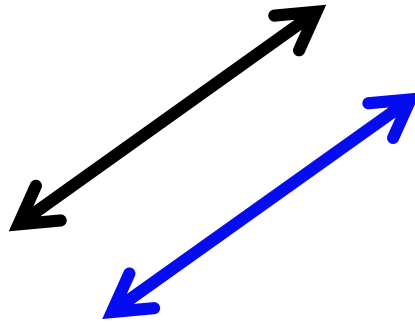
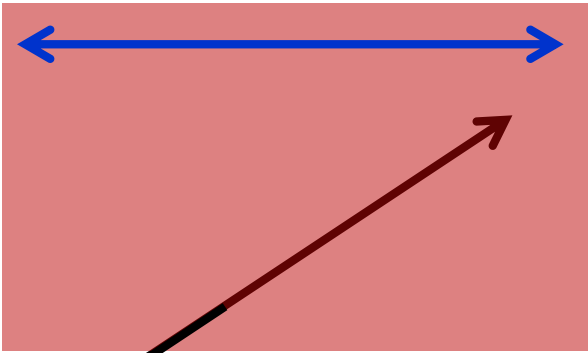
أوضاع المستقيمت و المستويات في الفراغ

علاقة مستقيم بمستقيم في الفضاء

المستقيمان متخالفان

المستقيمان متوازيان

المستقيمان يتقاطعان



تعريف

يقال لمستقيمين ل ، م إنهما :

(1) متقاطعان ، إذا كان بينهما نقطة مشتركة و احدة فقط .

(2) متوازيان ، إذا وقعا في مستوٍ واحد و كانا غير متقاطعين .

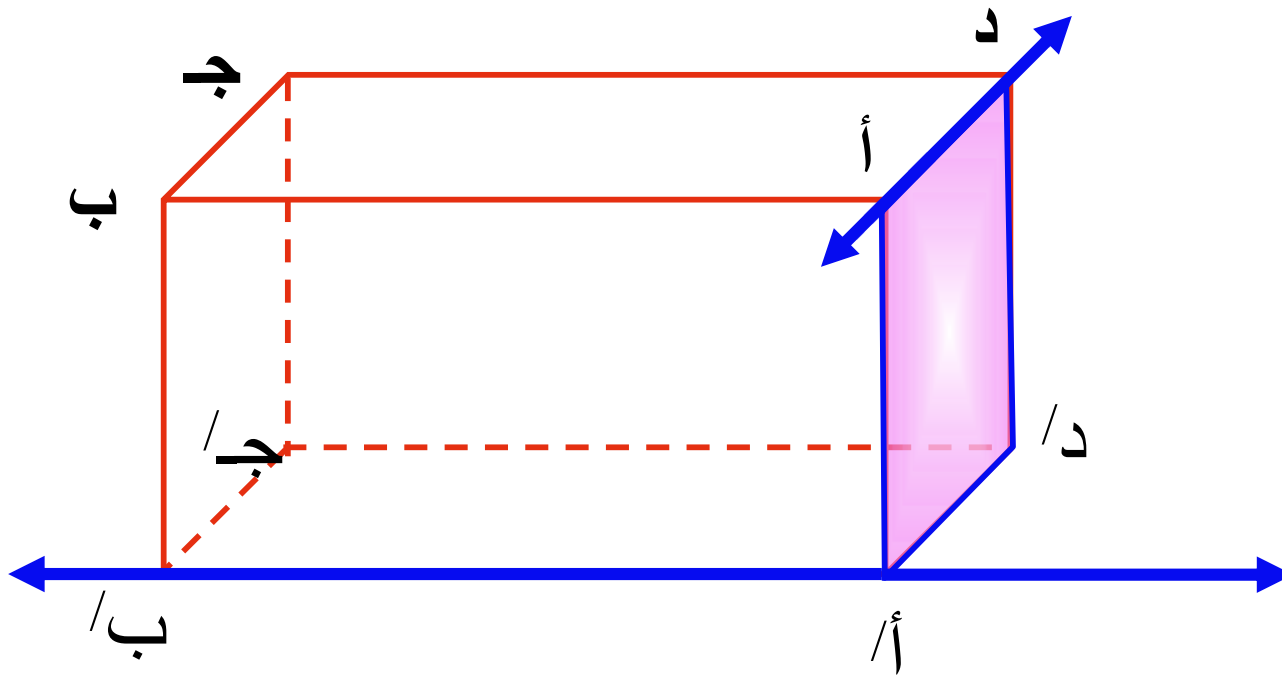
(3) متخالفان ، إذا كانا لا يحويهما مستوٍ واحد .



نظرية (4)

إذا كان l ، m مستقيمين متخالفين فإن $l \cap m = \emptyset$

تدريب

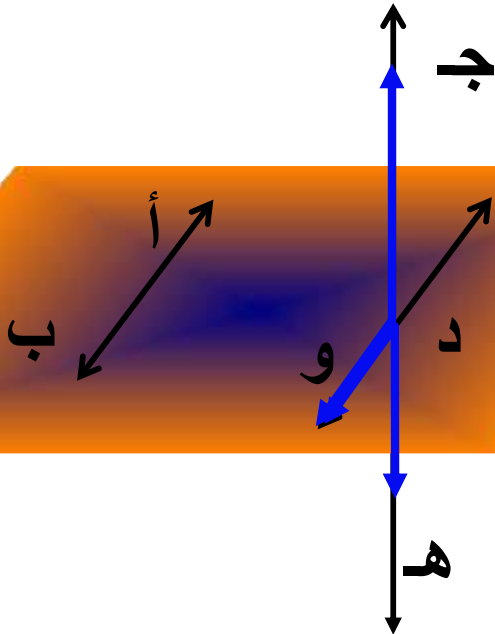


الزاوية بين مستقيمين متخالفين

تعريف (7)

قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين هو قياس إحدى الزاويين التي يصنعها أحد هذين المستقيمين مع أي مستقيم ثالث مرسوم من نقطة عليه موازياً للمستقيم الآخر

قياس الزاوية بين المستقيمين $أ ب$ ، $ج د$
هو قياس الزاوية الحادة من إحدى الزاويتين
 $ج د و$ ، $و د ه$

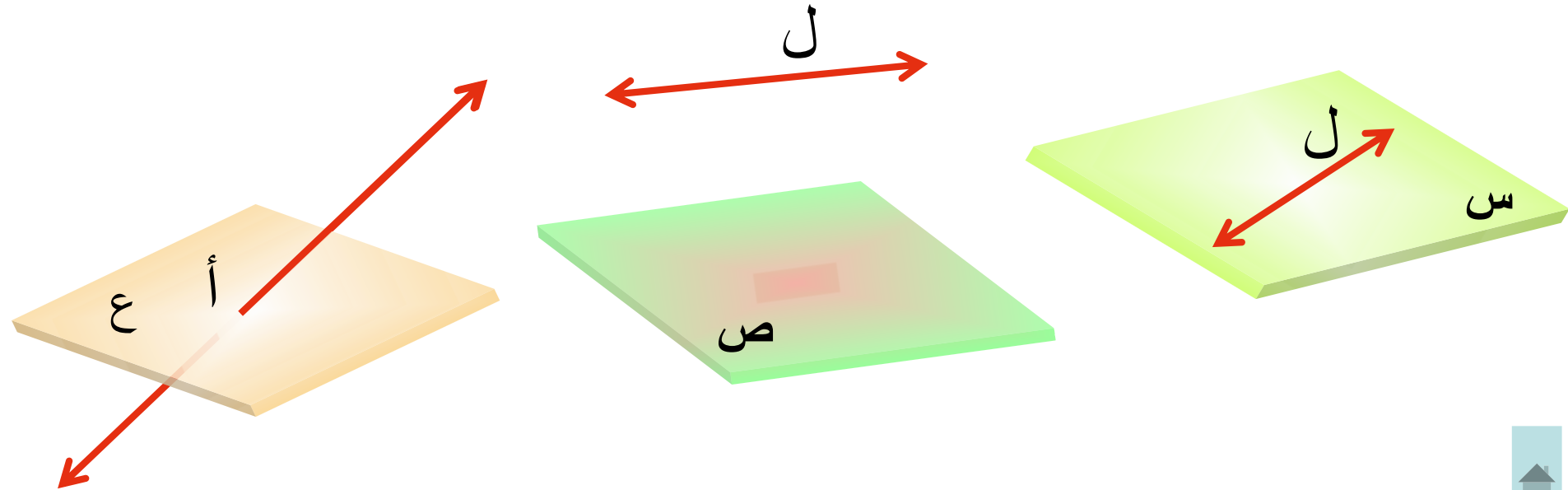


علاقة مستقيم بمستوى في الفضاء

المستقيم يقطع المستوى
في نقطة واحدة

المستقيم لا يشترك مع
المستوى في أي نقطة

المستقيم يقع بتمامه
في المستوى



تعريف

إن المستقيم l يقطع المستوي s إذا كان بين l ، s نقطة مشتركة واحدة

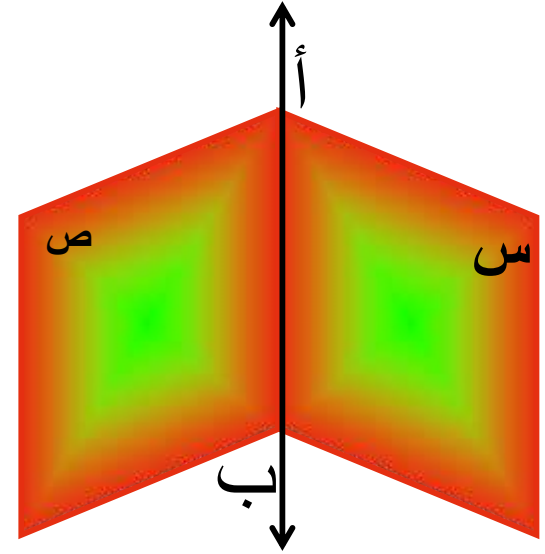
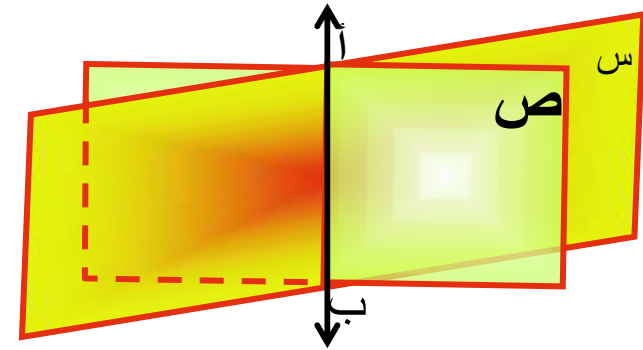
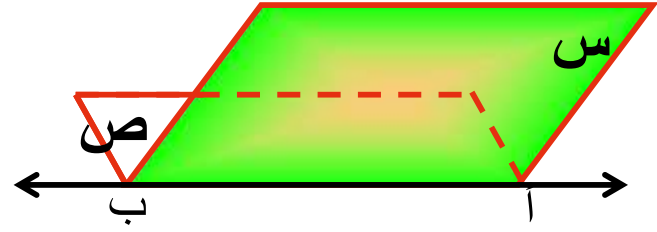
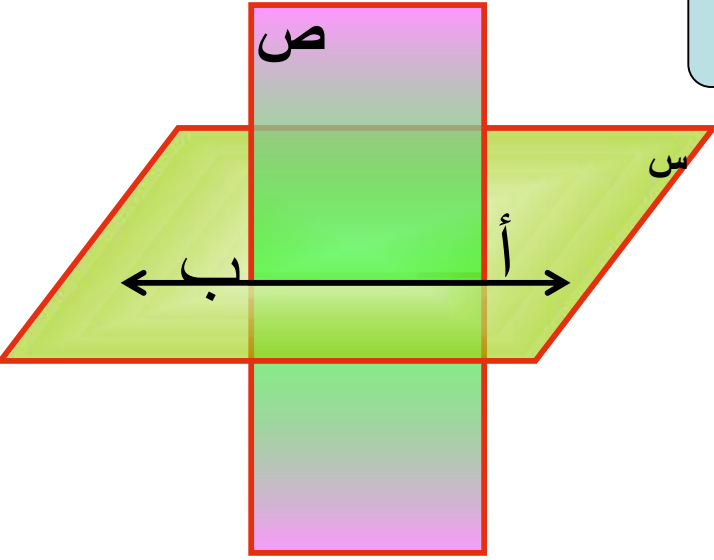
تعريف

المستقيم l الذي لا يقطع المستوي s يسمى مستقيماً موازياً للمستوي s



الأوضاع المختلفة لمستويين في الفضاء

المستويان يتقاطعان في مستقيم



$$S \cap V = AB$$



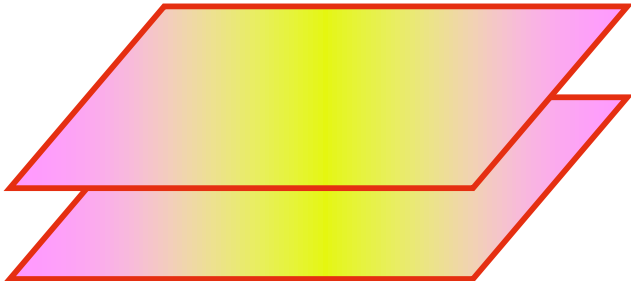
الأوضاع المختلفة لمستويين في الفضاء

المستويان يشتركان في جميع النقاط

$$S = V$$



المستويان لا يشتركان في أي نقطة



$$S \cap V = \emptyset$$



تعريف

يقال لمستويين π ، σ إنهما متوازيين (و نكتب $\pi // \sigma$)
إذا كان $\pi \cap \sigma = \emptyset$ أو متطابقان

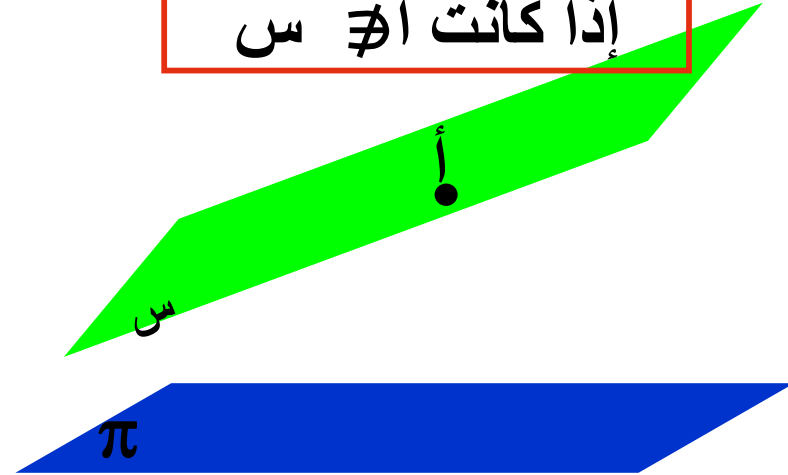
مسئمة

يوجد مستويٌ وحيدٌ يوازي مستويًا معلوماً و يمر بنقطة معلومة

إذا كانت $A \in \pi$



إذا كانت $A \notin \pi$



تمارين (2 - 3)

البنود الموضوعية :

- ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (✗) أمام العبارة غير الصحيحة مع ذكر السبب (باعتبار ل ، م مستقيمين ، π مستويًا) .

1 يكون المستقيم قاطعاً للمستوى عندما تكون إحدى نقاطه فقط واقعة في المستوى .

()

2 يكون المستقيم واقعاً في المستوى في الحالة التي يشترك فيها مع المستوى في نقطتين من نقاطه على الأقل

()

3 إذا وازي مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما .

()





4 المستقيم الواقع في أحد مستويين متوازيين يوازي المستوي الآخر .

()

5 يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل .

()

6 يتقاطع المستويان في مستوٍ .

()

7 إذا كان $l \supseteq s$ فإن $l \cap s = \emptyset$.

()



الخلاصة

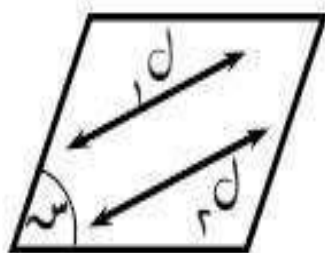


مفاهيم ومسلمات :

- (١) أى نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد وواحد فقط .
- (٢) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بهما مستوى واحد وواحد فقط .
- (٣) إذا اشترك مستقيم ومستوى فى نقطتين فإن المستقيم يقع بأكمله فى المستوى .

تعين المستوى :

يتعين المستوى فى كل من الحالات الآتية :



شكل (٤)

مستقيمان
متوازيان



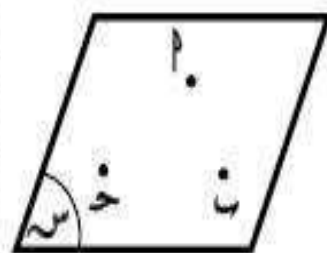
شكل (٣)

مستقيمان
متقاطعان



شكل (٢)

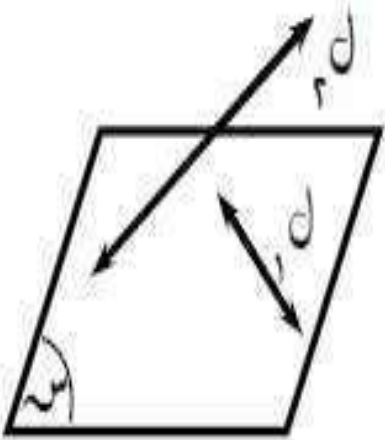
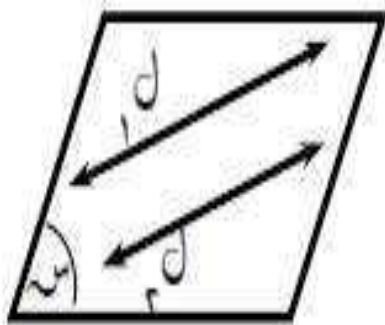
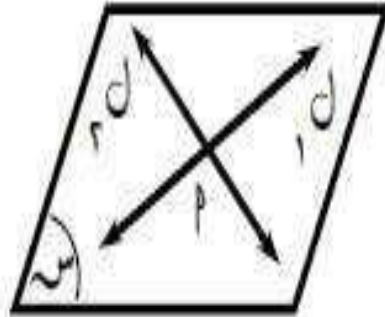
مستقيم ونقطة
لا تنتمى
إليه



شكل (١)

ثلاث نقط ليست
على استقامة
واحدة

أولاً: الأوضاع النسبية لمستقيمتين l_1, l_2 في الفراغ

<p>l_1, l_2 لا يجمعهما مستوى واحد</p>	<p>l_1, l_2 في مستوى واحد</p>	
<p>متخالفان (غير متقاطعين و غير متوازيين)</p>	<p>متوازيان $\emptyset = l_1 \cap l_2$</p>	<p>متقاطعان $\{P\} = l_1 \cap l_2$</p>
		

ثانيا: الأوضاع النسبية لمستقيم l ومستوى π :

l ، π متوازيان

l ، π متقاطعان

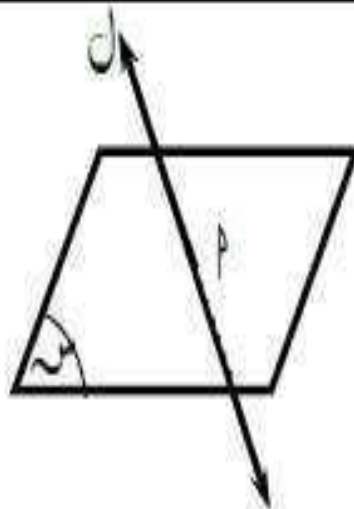
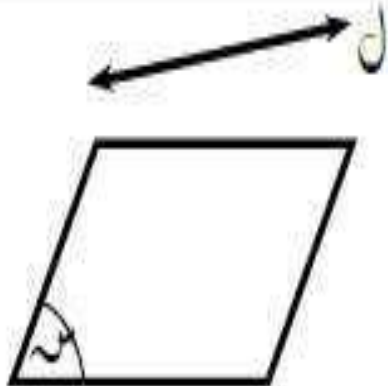
l يقع بتمامه في π

l ، π متوازيان فعلا

$\{P\} = \pi \cap l$

$l \subset \pi$

$\emptyset = \pi \cap l$



ثالثاً : الأوضاع النسبية لمستويين π_1 ، π_2 :

<p>π_1 ، π_2 متوازيان</p>	<p>π_1 ، π_2 متقاطعان</p>
<p>π_1 ، π_2 منطبقان</p> <p>$\pi_1 = \pi_2$</p>	<p>π_1 ، π_2 متوازيان فعلاً</p> <p>$\emptyset = \pi_1 \cap \pi_2$</p>
