الصف
12
علمي
الجزاء الاول

الممتاز
في الرياضيات

إعداد
أ.رامي عاشور

0599638419
abufadel1974@gmeil.com
Ramy Ashour

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

يسرنى ويشرفنى أن أقدم هذا العمل المتواضع لطلابى الأعزاء الذين أعتبرهم جميعاً أبنائى، وأقدمه كذلك لزملائى المعلمين الذين أعتبرهم جميعاً أساتذتى ، وأنا بهذا العمل لا أمتاز علي أحد منهم ،ولا أتفضل عليهم ، وكلى صدر رحب لاستقبال آرائهم وملاحظاتهم حول هذا الكتاب .

أقدم الطبعة الأولى من كتاب الممتاز للصف الثانى عشر (علمى وصناعى) ، وقد عمدت إلى تقديم موضوعات كتاب الوزارة حيث بدأت بالمفاهيم والنظريات والتعميمات كما وردت فى كتاب الوزارة ، وقمت بشرحها بطرق مختصرة موجزة ، وقدمت بعد كل مفهوم أو نظرية أو مهارة أمثلة توضيحية متدرجة فى الصعوبة حتى يتمكن الطالب من استيعاب ذلك المفهوم ، وفهم تلك النظرية وإتقان تلك المهارة .

ثم وضعت علي كل موضوع مجموعة من التمارين الاثرائية الهامة التى تغطى جميع جوانب المادة ، حيث أن كثيراً منها ورد فى امتحانات سابقة ، وقد أرفقت مع كل سؤال الجواب النهائى حتى يتسنى للطالب تقييم نفسه ، والحكم علي مدي تمكنه من أداء المهارة ، ومن ثم تدارك الأخطاء ومعالجتها وتجنبها فى أسئلة قادمة .

فى الختام أرجو أن يحوز هذا العمل علي إعجابكم ورضاكم ، وأن يكون حافزاً للطالب للانطلاق فى عالم الرياضيات ، ذلك العلم الذى هو أداة لتقدم الشعوب وتطورها وتقدمها إذا أرادت أن يكون لها مكان بين الأمم وأتمنى كذلك أن يكون دافعاً للطالب للتميز ، وأداة له للتقدم والتفوق والنجاح .....

أ.رامى عاشور

٢٠١٩/٨/٨

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

المحتويات

الوحدة الأولى	حساب التفاضل	٣
	(١- ١)متوسط التغير	٤
	(١- ٢) قواعد الاشتقاق	١١
	(١- ٣) مشتقة الاقترانات المثلثية	١٩
	(١- ٤) قاعدة لوبيتال ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي	٢٣
	(١- ٥)تطبيقات هندسية وفيزيائية	٢٨
	(١- ٦)قاعدة السلسلة	٣٧
	(١- ٧) الاشتقاق الضمني	٤٤
الوحدة الثانية	تطبيقات التفاضل	٥٠
	(٢- ١) نظريتا رول والقيمة المتوسطة	٥١
	(٢- ٢) الاقترانات المتزايدة والمتناقصة	٥٨
	(٢- ٣)القيم القصوى	٦٣
	(٢- ٤) التقعر ونقط الانعطاف	٧١
	(٢- ٥)تطبيقات عملية على القيم القصوى	٨١
الوحدة الثالثة	المصفوفات والمحددات	٨٨
	(٣- ١)المصفوفة	٨٩
	(٣- ٢)العمليات على المصفوفات	٩٢
	(٣- ٣)المحددات	٩٩
	(٣- ٤)النظير الضربي للمصفوفة	١٠٦
	(٣- ٥)حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات	١١٣

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الوحدة الأولى

حساب التفاضل

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تعريف :

إذا كان $ص = ن(س)$ اقترانا وتغيرت $س$ من $س_١$ إلى $س_٢$ ، $س_١ \neq س_٢$ فإن :

- التغير فى $س$ يساوى $س_٢ - س_١$ ونرمز له بالرمز $\Delta س$ ويقرأ دلتا $س$
- التغير فى الاقتران $ن(س)$ اقترانا يساوى $ن(س_٢) - ن(س_١)$ ويرمز له بالرمز $\Delta ص$
- متوسط التغير فى الاقتران $ص = ن(س)$ يساوى $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

$$= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ن(س_٢) - ن(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

ويمكن كتابته علي الصورة $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ن(س_١ + هـ) - ن(س_١)}{هـ}$

حيث $هـ = \Delta س \neq ٠$ ونسميه اقتران متوسط التغير عند $س_١$

مثال ١: إذا كان $ن(س) = س^٢ + س - ١$ فأوجد التغير فى $ص = ن(س)$ عندما تتغير $س$

١) من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٥$

٢) من $س_١ = ٤$ إلى $س_٢ = -٢$

٣) من $س_١ = -١$ إلى $س_٢$ بحيث $\Delta س = -٣$

الحـل:

١) $\Delta ص = ن(٥) - ن(٢)$

$$= (٢٥+٥-١) - (٤+٢-١) = ٢٤$$

٢) $\Delta ص = ن(-٢) - ن(٤)$

$$= ((-٢)^٢ + (-٢) - ١) - (٤^٢ + ٤ - ١)$$

$$= (٤-٢-١) - (١٦+٤-١) = -١٨$$

٣) $س_٢ = س_١ + \Delta س = -١ + -٣ = -٤$

$$\Delta ص = ن(س_٢) - ن(س_١)$$

$$= ن(-٤) - ن(-١)$$

$$= ((-٤)^٢ + (-٤) - ١) - ((-١)^٢ + (-١) - ١)$$

$$= (١٦-٤-١) - (١-١-١) = ١٢$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كان هـ(ق) = جتا ق ، أوجد متوسط التغير في هـ(ق) بين ق$_{1}$ = $\frac{\pi}{2}$ ، ق$_{2}$ = π٢

الحـل:

متوسط التغير = $\frac{\text{هـ}(\pi٣)-\text{هـ}(\frac{\pi}{2})}{\pi٣-\frac{\pi}{2}} = \frac{(\text{جتا}\pi٣-\text{جا}\pi٣)-(\text{جتا}\frac{\pi}{2}-\text{جا}\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi٥}{2}}$

$= \frac{(١-٠)-(٠-١-)}{\frac{\pi٥}{2}} = \frac{١+١-}{\frac{\pi٥}{2}} = ٠$

مثال٣: إذا كان متوسط تغير ن(س) عندما تتغير س من س$_{1}$ = ١ إلى س$_{2}$ = ٩ مساوياً ٥ ، أوجد متوسط التغير في الاقتران ل(س) = س^{٢} ن(٢س + ٥) بين س$_{1}$ = −٢ ، س$_{2}$ = ٢

الحـل:

متوسط التغير في ن(س) = $\frac{\text{ن}(٩)-\text{ن}(١)}{٩-١}$ = ٥

ن(٩) − ن(١) = ٤٠ ..... (١)

متوسط التغير في ل(س) = $\frac{\text{ل}(٢)-\text{ل}(-٢)}{٢-(-٢)}$ = $\frac{٢\times(٢\times٢+٥)\text{ن}^{٢}(٢)-(-٢\times٢+٥)\text{ن}^{٢}(-٢)}{٤}$

$= \frac{٤\text{ن}(٩)-٤\text{ن}(١)}{٤} = \text{ن}(٩)-\text{ن}(١) = ٤٠$

تعريف :

متوسط التغير للاقتران ن(س) عندما تتغير س من س$_{1}$ إلى س$_{2}$ يساوى ميل القاطع المار بالنقطتين (س$_{1}$ ، ن(س$_{1}$)) ، (س$_{2}$ ، ن(س$_{2}$)) ونسمى الزاوية ي التى يصنعها القاطع للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحورالسينات **بزاوية ميل المستقيم** ، ويكون (ظاي = ميل القاطع)

مثال٤: إذا قطع مستقيم منحنى الاقتران ن(س) = س^{٢} − ٤س + ٦ عند النقطتين (٢ ، ن(٢)) ، (٣ ، ن(٣)) ، جد :

١) متوسط تغير الاقتران فى الفترة [٢ ، ٣] .

٢) قياس زاوية ميل المستقيم ل

الحل :

١) متوسط تغير ق(س) فى الفترة [٢ ، ٣] = ميل المستقيم ل

$= \frac{\text{ن}(٣)-\text{ن}(٢)}{٣-٢} = \frac{(٦+(٣)٤-^{٢}٣)-(٦+(٢)٤-^{٢}٢)}{٣-٢}$

$= \frac{(٦+١٢-٩)-(٦+٨-٤)}{٣-٢} = \frac{٣-٢}{١} = ١$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذن ظاي = ١ ، ومنها $\text{ي} = \text{ظا}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

مثال ٥: إذا كان متوسط تغير الاقتران $\text{ن}(\text{س})$ في الفترة $[٥،٢]$ يساوى ٦ ، احسب متوسط تغير الاقتران $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\text{ن}(\text{س}) - ٢\text{س}$ علما بأن $\text{هـ}(\text{س})$ يمر بالنقطة $(٢، -١٦)$

الحـل :

بما أن متوسط تغير الاقتران $\text{ن}(\text{س})$ في الفترة $[٥،٢]$ يساوى ٦

إذن $٦ = \frac{\text{ن}(٥) - \text{ن}(٢)}{٥ - ٢} \Leftarrow \text{ن}(٥) - \text{ن}(٢) = ١٨$ ..... (١)

$\because \text{هـ}(\text{س})$ يمر بالنقطة $(٢، -١٦)$ $\therefore \text{هـ}(٢) = -١٦$

ومنها $٢ \times ٢ - ٢\text{ن}(٢)^{٢} = -١٦ \Leftarrow ٤\text{ن}(٢) = -١٢ \Leftarrow \text{ن}(٢) = -٣$

بالتعويض في المعادلة (١) $\text{ن}(٥) - (-٣) = ١٨$ $\therefore \text{ن}(٥) = ١٥$

متوسط تغير الاقتران $\text{هـ}(\text{س})$ في الفترة $[٥،٢] = \frac{\text{هـ}(٥) - \text{هـ}(٢)}{٥ - ٢}$

$$= \frac{(٥ \times ٢ - (٥)\text{ن}^{٢}٢) - (٢ \times ٢ - (٢)\text{ن}^{٢}٢)}{٥ - ٢}$$

$$= \frac{(٤ - ٣ - \times ٤) - (١٠ - ١٥ \times ٢٥)}{٣}$$

$$= \frac{(-١٦) - (٣٦٥)}{٣}$$

$$= \frac{٣٨١}{٣} = \boxed{١٢٧}$$

المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير :

تعريف :

إذا كانت $\text{ف} = \text{ن}(\text{ز})$ حيث ف المسافة التي يقطعها الجسم ، ن الزمن ، فإن متوسط التغير في المسافة عندما تتغير ن من $\text{ن}_{١}$ إلى $\text{ن}_{٢}$ هو $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}_{٢} - \text{ف}_{١}}{\text{ن}_{٢} - \text{ن}_{١}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}_{٢}) - \text{ن}(\text{ن}_{١})}{\text{ن}_{٢} - \text{ن}_{١}}$

وتسمي السرعة المتوسطة في الفترة $[\text{ن}_{١}، \text{ن}_{٢}]$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

بالقاعدة : $ف = ع(ن) = ٢ن^{٢} + ن - ٣$ ، جد :

١) السرعة المتوسطة فى الفترة $[٢، ٥]$

٢) إذا كانت السرعة المتوسطة فى الفترة $[١، أ]$ تساوى ٢٥ م/ث . جد قيمة أ

الحـل:

١) السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ع(٢) - ع(٠)}{٢ - ٠} = \frac{(٣-٠+٢^{٢}(٠)٢)-(٣-٢+٢^{٢}(٢)٢)}{٠-٢}$

$= \frac{(٣-) - ٧}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

٢) $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ع(أ) - ع(١)}{أ - ١} = \frac{(٣-أ+٢أ^{٢}) - (٣-١+٢^{٢}(١)٢)}{أ-١} = \frac{٠-٣-أ+٢أ^{٢}}{أ-١}$

إذن $\frac{٣-أ+٢أ^{٢}}{أ-١} = ٢٥$

ومنها $٢أ^{٢} + أ - ٣ = ٢٥(أ-١)$

$٢أ^{٢} + أ - ٣ = ٢٥أ - ٢٥$

$٢أ^{٢} - ٢٤أ + ٢٢ = ٠$

$أ^{٢} - ١٢أ + ١١ = ٠$

$(أ-١)(أ-١١) = ٠$

إما $أ = ١$(مرفوض) أو $أ = ١١$

مثال ٧:

لتكن $ع(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، \ س \leq ١ \\ ٢س - ١ & ، \ س > ١ \end{cases}$:

جد : ١) متوسط التغير فى الاقتران عندما تتغير س من ١ إلى صفر

٢)قيمة هـ الموجبة التى تجعل متوسط التغير فى الفترة $[٢، ٢+هـ]$ يساوى ٧

الحـل:

١) متوسط التغير $= \frac{ع(١) - ع(٠)}{١ - ٠} = \frac{(١)ع - (٠)ع}{١-٠} = \frac{(١)^{٢} - (١-٠\times٢)}{١-} = \frac{١-١-}{١-} = ٢$

٢) $٧ = \frac{ع(٢) - ع(٢+هـ)}{٢ - (٢+هـ)}$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$٧ = \frac{(٤+هـ)^{٢}}{هـ}$$

$$٤ + ٤هـ + هـ^{٢} - ٤ = ٧هـ$$

$$هـ^{٢} - ٣هـ = ٠$$

$$هـ(هـ - ٣) = ٠$$

إما $هـ = ٠$ (مرفوض) أو $هـ = ٣$

مثال٨: إذا كان $ن(س) = \frac{أ}{س} + ب$ ، $س \in [جـ، د]$ ، $جـ \neq ٠$ ، $د \neq ٠$ ، $أ، ب \in ح$،

أثبت أن متوسط التغير للاقتران $ن(س)$ في الفترة $[جـ، د]$ يساوى $\frac{-أ}{جـد}$

الحـل:

متوسط تغير $ن(س)$ في الفترة $[جـ، د]$ $= \frac{ن(د) - ن(جـ)}{د - جـ}$

$$= \frac{(\frac{أ}{د} + ب) - (\frac{أ}{جـ} + ب)}{د - جـ} = \frac{\frac{أ}{د} - \frac{أ}{جـ}}{د - جـ}$$

$$= \frac{\frac{أجـ - أد}{جـد}}{د - جـ} = \frac{أ(جـ - د)}{جـد} \times \frac{١}{د - جـ} = \frac{-أ}{جـد}$$

تمارين ١-١

١- إذا كان $ن(س) = \frac{٤}{س^{٢}}$، جد قيمة متوسط التغير للاقتران $ن(س)$عندما تتغير س من ٢ إلى ٣

الجواب: $\frac{-٥}{٩}$

٢- ليكن $ن(س) = \begin{cases} ٣س + ٤ & ، \quad س < ٢ \\ س^{٢} + ٣س & ، \quad س \leq ٢ \end{cases}$ ، جد

أ- التغير في الاقتران $ن(س)$ عندما تتغير س من ١ إلى ٣

الجواب ١١

ب- متوسط تغير $ن(س)$ عندما تتغير س من ٢ إلى -١

الجواب ٣

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

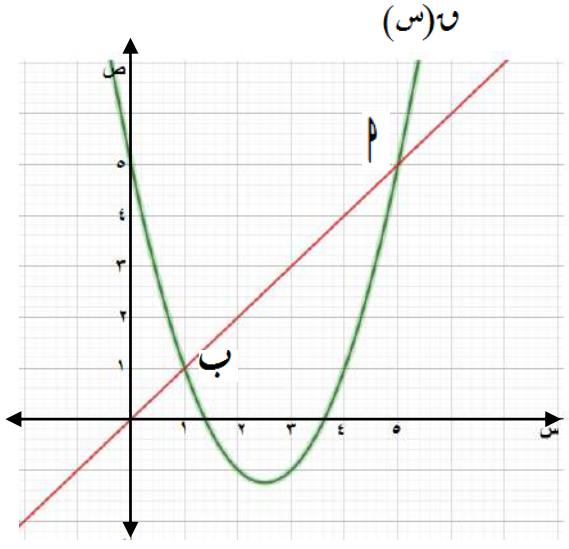
إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ن(س ٣) − ٥س + ١، جد متوسط التغير للاقتران ن(س) في الفترة [١، ٠]

الجواب ١١

٤- يمثل الشكل المقابل منحنى ق

١- جد متوسط تغير ن(س) في الفترة [٥، ١]

٢- احسب ميل العمودى علي القاطع أب



الجواب −١

٥- تحرك جسم في المستوي الاحداثي علي خط مستقيم أ(س، ص) إلى ب(٢، ٥)، إذا كانت Δس = ٠,١،

Δص = ٠,٦، جد إحداثيي النقطة أ

الجواب : (١,٩٠٤,٤)

٦- إذا كان متوسط التغير للاقتران ن(س) في الفترة [١، ٤] يساوى ٣ وكان ن(١) + ن(٤) = ٢، **جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ن(س ٢) علي الفترة [١، ٤]**

الجواب ٦

٧- إذا كان متوسط التغير للاقتران ن(س) في الفترة [٢، ٥] يساوى ٧ ، وكان متوسط التغير له في الفترة [٥، ٩] يساوى ١٤، جد متوسط التغير للاقتران ن(س) في الفترة [٢، ٩]

الجواب ١١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

٨- إذا كان $ن(س) = |٢س + ١| + [٣س]$ ، أوجد متوسط التغير فى ق(س) بين $س_١ = \frac{-}{٢}$ ، $س_٢ = \frac{}{٢}$

الجواب ٣

٩- إذا كان مقدار متوسط التغير فى الاقتران $ن(س) = ٢س^٢ + س - ١$ يساوى ٤ عندما $س = س_١ ، Δس = ١$ ، جد قيمة $س_١$

الجواب $س_١ = \frac{١}{٤}$

١٠- إذا كان متوسط التغير فى الاقتران $ن(س) = ٢س^٢ + ٣س$ فى الفترة $[أ، ٣]$ يساوى ١١ ، أوجد قيمة أ

الجواب : $أ = ١$

١١- ما متوسط التغير فى الاقتران $ن(س) = \frac{ك}{س} + جـ$ فى الفترة $[أ، ب]$ حيث $أ، ب، جـ، ك \in ع^+$

الجواب : $\frac{-ك}{ب أ}$

١٢- إذا كان $ن(س) = |٢س - ٦|$ ، جد متوسط تغير الاقتران $ن(س)$ فى الفترة $[١، ٤]$

الجواب : $\frac{-٢}{٣}$

١٣- إذا كان القاطع المار بالنقطتين $(١، ن(١))$ ، $(٢، ٤)$ الواقعتين علي منحنى $ن(س)$ يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، جد $ن(١)$

الجواب ٥

١٤- إذا كان مقدار التغير فى الاقتران $ن(س)$ يعطي بالعلاقة $Δص = ٣س^٢ (Δس) + ٢(Δس) + أ(Δس)^٢$

وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣ + ٢هـ) - ن(٣)}{٤هـ} = ١٤$ ، ما قيمة أ ؟

الجواب $أ = ١$

١٥- إذا كان متوسط التغير للاقتران $هـ(س)$ فى الفترة $[-٢، ١]$ يساوى ٤ ، جد متوسط التغير للاقتران $ن(س)$ فى الفترة $[-٣، ٣]$ حيث $ن(٢س + ١) = ٣هـ(س^٢ - ٢) + ٥س - ١$

الجواب $\frac{-٧}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تعريف (١):

إذا كانت $ص = ن(س)$ اقترانا معرفا عند $س_١$ فى مجاله ، وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(س + هـ) - ن(س)}{هـ}$ موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمي المشتقة الأولى للاقتران $ن(س)$ عند $س_١$ ،

ونرمز لها بأحد الرموز الآتية : $ن'(س_١)$ او $ص'_{|س=س_١}$ أو $\frac{د ص}{د س}_{|س=س_١}$ ويمكن كتابتها علي الصورة

$$ن'(س_١) = \lim_{س \to س_١} \frac{ن(س) - ن(س_١)}{س - س_١}$$

تعريف (٢):

إذا كانت $ن(س)$ اقترانا معرفا عند $س = س_١$ فإن :

$ن'(س_١)^+ = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{ن(س_١ + هـ) - ن(س_١)}{هـ}$ (مشتقة $ن(س)$ من يمين العدد $س_١$)

$ن'(س_١)^- = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{ن(س_١ + هـ) - ن(س_١)}{هـ}$ (مشتقة $ن(س)$ من يسار العدد $س_١$)

وعندما $ن'(س_١)^+ = ن'(س_١)^- = ل$ ، فإن ق(س) قابل للاشتقاق عند $س_١$ وتكون $ن'(س_١) = ل$

تعريف (٣) :

إذا كان الاقتران $ن(س)$ معرفا علي $[أ، ب]$ فإن $ن(س)$ **غير قابل للاشتقاق** عند أطراف الفترة $[أ، ب]$.

يكون $ن(س)$ قابلا للاشتقاق علي $]أ، ب[$ إذا كان قابلا للاشتقاق عند كل نقطة فيها .

قاعدة (١)

إذا كان $ن(س) = جـ$ حيث $جـ \in ع$ فإن $ن'(س) = ٠$ لجميع قيم $س \in ع$

مثال ١: جد $ن'(س)$ لكل مما يلى : (١) $ن(س) = \sqrt{٣}$ (٢) $ن(س) = \frac{\pi ٢}{٣}$

الحـــل:

(١) $ن'(س) = ٠$

(٢) $ن'(س) = ٠$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كان $ن(س) = س$ فإن $ن'(س) = ١$

قاعدة (٣) :

إذا كان $ن(س)$ قابلا للاشتقاق وكان $جـ \in ح$ فإن $ك(س) = جـ ن(س)$ قابلا للاشتقاق ويكون $ك'(س) = جـ ن'(س)$

مثال ٢: إذا كان $ن(س) = -٣س$ ، جد $ن'(س)$

الحـل :

$$ن'(س) = -٣ \times ١ = -٣$$

قاعدة (٤)

إذا كان $ن(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن $ك(س) = ن(س) \pm هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق وتكون $ك'(س) = ن'(س) \pm هـ'(س)$

ملاحظة :

تبقي القاعدة (٤) صحيحة لأكثر من اقترانين

مثال ٣: إذا كان $م'(٣) = ٤$ ، $ل'(٣) = -٢$ ، وكان $ن(س) = ٣م(س) - ٢ل(س)$ ، جد $ن'(٣)$

الحـل :

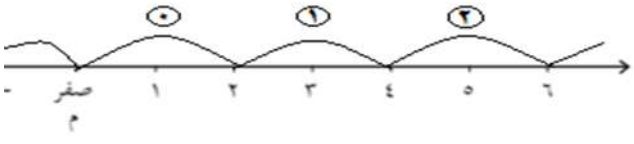
$$ن'(س) = ٣م'(س) - ٢ل'(س)$$

$$ن'(٣) = ٣م'(٣) - ٢ل'(٣) = ٣ \times ٤ - ٢ \times -٢ = ١٦$$

مثال ٤: إذا كان $ن(س) = \left[\frac{١}{٢} س\right]$ ، $س \in [٠، ٤]$. جد $ن'(س)$

الحـل :

نعيد تعريف $ن(س)$ كما تعلمنا سابقا



$$ن(س) = \begin{cases} ٠ & ، \ ٠ \leq س < ٢ \\ ١ & ، \ ٢ \leq س < ٤ \\ ٢ & ، \ س = ٤ \end{cases}$$

لاحظ أن $ن(س)$ منفصلاً عند $س = ٢$ وكذلك عند $س = ٤$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$ن'(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad ٢ < س < ٤ \\ غ.م & ، \quad س = ٠، س = ٢، س = ٤ \end{cases}$$

أى أن $ن'(٠)$ غير موجودة ، $ن'(٢)$ أيضا غير موجودة وكذلك $ن'(٤)$ غير موجودة

ملاحظة :

عند إيجاد المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق لابد من فحص الاتصال أولا

قاعدة (٥)

إذا كان $ن(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن $ك(س) = ن(س) \times هـ(س)$ قابل للاشتقاق

وتكون $ك'(س) = ن(س) \times هـ'(س) + ن'(س) \times هـ(س)$

مثال ٥: إذا كان $ن(س) = (٣س - ٢)(س + ٥)$ جد $ن'(١)$

الحـل :

$$ن'(س) = (٣س - ٢) \times ١ + ٣(س + ٥)$$

ومنها $ن'(١) = (٣)(١) - (٢) \times ١ + ٣(١ + ٥) = ١ + ١٨ = ١٩$

نظرية:

إذا كان $ن(س) = س^{ن}$ ، فإن $ن'(س) = ن س^{ن-١}$ $ن ≠ ١، ن ∈ ص^{+}$

مثال ٦: إذا كان $ن(س) = س^{٢} + ٢س - ٧$ ، جد $ن'(س)$ ثم $ن'(-٤)$

الحـل :

$ن'(س) = ٢س + ٢$ ومنها $ن'(-٤) = ٢(-٤) + ٢ = -٨ + ٢ = -٦$

ملاحظة

إذا كان $ن(س)$ كثير حدود فإنه يكون قابلا للاشتقاق

نظرية :

إذا كان $ن(س)$ قابلاً للاشتقاق عند $س = س_{١}$ فإنه يكون متصلاً عند هذه النقطة

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كان $ن(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & ، \ س \leq ١ \\ ٢س^{٢} + ١ & ، \ س > ١ \end{cases}$

قابلا للاشتقاق عند $س = ١$. أوجد قيمة الثابت $ا$

الحـل :

بما أن $ن(س)$ قابل للاشتقاق عند $س = ١$ ∴ $ن(س)$ متصل عند $س = ١$

وهذا يعنى أن $\lim_{س \to ١^{+}} ن(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ن(س)$

$$١ + ٢ - ٣ = ٣ + ١ \times ا٢$$

$$ا = \frac{-١}{٢} \Leftarrow ٣ - ٢ = ا٢ \Leftarrow ٢ = ٣ + ا٢$$

قاعدة (٦)

إذا كان $ك(س)$ ، $م(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فإن $ن(س) = \frac{ك(س)}{م(س)}$ ، $م(س) \neq ٠$ قابل للاشتقاق

وتكون $ن'(س) = \frac{م(س) \times ك'(س) - ك(س) \times م'(س)}{(م(س))^{٢}}$

نتيجة

إذا كان $ن(س) = س^{ن}$ ، فإن $ن'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ن \in ط$ ، $س \neq ٠$

مثال٨:

إذا كان $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٥س - ١}{٣س - ٦}$ ، $س \neq ٢$ فجد $ن'(س)$

الحـل :

$$ن'(س) = \frac{(٣س - ٦)(٢س + ٥) - (س^{٢} + ٥س - ١) \times ٣}{(٣س - ٦)^{٢}}$$

$$ن'(س) = \frac{٦س^{٢} + ١٥س - ١٢س - ٣٠ - ٣س^{٢} - ١٥س + ٣}{(٣س - ٦)^{٢}} = \frac{٣س^{٢} - ١٢س - ٢٧}{(٣س - ٦)^{٢}}$$

المشتقات العليا

إذا كانت ص = ق(س) حيث ق قابل للاشتقاق ، فإن المشتقة الأولى هى $ص' = \frac{د ص}{د س} = ن'(س)$ تمثل اقترانا جديدا . وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق ، فإن مشتقتها $\frac{د}{د س}(\frac{د ص}{د س})$ تسمي المشتقة الثانية ، ويرمز لها بالرمز $ص''$ أو $ن''(س)$ أو $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ وتقرأ (دال اثنين ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة والرابعة ..... ونعبر عن المشتقة من الرتبة ن بإحدي الصور الآتية :

$ص^{(ن)}$ أو $\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}}$ أو $ن^{(ن)}(س)$ ، حيث $ن \in ط^{+}$ ، $ن > ٢$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$\left(\frac{ص}{س}\right)^{٢} \neq \frac{ص^{٢}}{س^{٢}}$

مثال ٩: إذا كان $ن(س) = س^{٦} + ٢س^{٣} - ٧$ ، جد $ن''(س)$ ثم جد $ن^{(٤)}(٣)$

الحل :

$ن'(س) = ٦س^{٥} + ٦س^{٢}$

$ن''(س) = ٣٠س^{٤} + ١٢س$

$ن'''(س) = ١٢٠س^{٣} + ١٢$

$ن^{(٤)}(س) = ٣٦٠س^{٢}$

$ن^{(٤)}(٣) = ٣٦٠ \times ٣^{٢} = ٣٦٠ \times ٩ = ٣٢٤٠$

مثال ١٠: إذا كان $ص = ا س^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$ ، $ن$ عدد صحيح موجب ، أثبت أن :

$س^{٢} ص'' = ن(ن-١) ص$

الحل :

$ص = ا س^{ن} + \frac{ب}{س^{ن-١}}$

$= ا س^{ن} + ب س^{-(ن-١)}$

$= ا س^{ن} + ب س^{-ن+١}$

$ص' = ن ا س^{ن-١} + ب(١-ن) س^{-ن}$

$ص'' = ن(ن-١) ا س^{ن-٢} - ب ن(١-ن) س^{-ن-١}$ (بالضرب فى $س^{٢}$)

$س^{٢} ص'' = ن(ن-١) ا س^{ن-٢} \times س^{٢} - ب ن(١-ن) س^{-ن-١} \times س^{٢}$

$س^{٢} ص'' = ن(ن-١) ا س^{ن} - ب ن(١-ن) س^{-ن+١}$

$س^{٢} ص'' = ن(ن-١)\left(ا س^{ن} - ب س^{-ن+١}\right)$

$س^{٢} ص'' = ن(ن-١) ص$ (وهو المطلوب)

مثال ١١: إذا كان $ن(س) = س^{٢} + ٢$ ، $هـ(س) = |٤س - ٥|$ ، أوجد $(ن \times هـ)'(١)$

الحل :

$ن'(س) = ٢س$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$هـ(س) = \begin{cases} ٤س - ٥ & ، \quad س \leq \frac{٥}{٤} \\ ٥ - ٤س & ، \quad س > \frac{٥}{٤} \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} ٤ & ، \quad س < \frac{٥}{٤} \\ -٤ & ، \quad س > \frac{٥}{٤} \\ \text{غ.م} & ، \quad س = \frac{٥}{٤} \end{cases}$$

$$(ن \times هـ)'(١) = ن'(١) \times هـ(١) + ن(١) \times هـ'(١)$$

$$= ٢(١) \times (-٤) + (٥ - ٤ \times ١) \times (٢ + ١^{٢})$$

$$= ٢ + (-١٢) = -١٠$$

مثال ١٢: إذا كان $ن(س)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان $ن(س) + ن''(س) = ٢س^{٣} - ٣س$ ، جد $ن'(١)$

الحـل :

∵ $ن(س)$ **كثير حدود من الدرجة الثالثة**

∴ $ن(س) = أس^{٣} + بس^{٢} + جس + د$

$ن'(س) = ٣أس^{٢} + ٢بس + ج$

$ن''(س) = ٦أس + ٢ب$

∵ $ن(س) + ن''(س) = ٢س^{٣} - ٣س$

∴ $أس^{٣} + بس^{٢} + جس + د + ٦أس + ٢ب = ٢س^{٣} - ٣س$

∴ $أس^{٣} + بس^{٢} + (ج + ٦أ)س + د + ٢ب = ٢س^{٣} - ٣س$

بمقارنة المعاملات $\boxed{أ = ٢}$ ، $\boxed{ب = ٠}$ ، $ج + ٦أ = -٣$ ومنها $ج + ١٢ = -٣ \Leftarrow \boxed{ج = -١٥}$

$٢ب + د = -٣ \Leftarrow ٢(٠) + د = -٣ \Leftarrow \boxed{د = -٣}$

∴ $ن(س) = ٢س^{٣} - ١٥س - ٣$

∴ $ن'(س) = ٦س^{٢} - ١٥$

ومنها $ن'(١) = ٦(١)^{٢} - ١٥ = -٩$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

١- ليكن $ن(س) = \frac{س^{٣}+١}{هـ(س)}$ ، $ن(١) = ٢$ ، $هـ'(١) = ٤$ ، جد $ن'(١)$

الجواب -٥

٢- إذا كان $ن(١) = ١$ ، $ن'(١) = ٣$ ، $ك(١) = -٢$ ، $ك'(١) = -١$ أوجد :

$\frac{ء}{ءس}(ن(س) \times ك(س))$ عندما $س = ١$

الجواب -٧

٣- إذا كان $ن(س) = س^{ن}$ ، وكان $ن''(س) = ١٢ س^{ن-٢}$ ، جد قيمة $ن$

الجواب ٤

٤- جد المشتقة الثانية للاقتران $ص = |س|(س^{٢} + س)$

الجواب: $ص'' = \begin{cases} ٦س + ٢ & ، \quad س < ٠ \\ -٦س - ٢ & ، \quad س > ٠ \\ غ.م & ، \quad س = ٠ \end{cases}$

٥- إذا كان $ن(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س)}$ ، $هـ$ ، $ل$ قابلان للاشتقاق عند $س = ا$ وكان $ن'(ا) = ٠$ ،

أثبت أن $ن(ا) = \frac{هـ''(ا)}{ل''(ا)}$

٦- إذا كان $ن(س) = ٨س - ٤(م - ٣)س^{٢}$ ، جد قيم الثابت $م$ التي تجعل $ن''(س) > ٠$

الجواب $م > ٣$

٧- إذا كان $ل$ ، $هـ$ ، $ن$ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان $هـ(س) = ل(س) \times ن(س)$ ،

$ل'(س) \times ن'(س) = جـ$ ، حيث $جـ$ عدد ثابت ، أثبت أن :

$هـ'''(س) = ل(س) \times ن'''(س) + ن(س) \times ل'''(س)$

٨- إذا كان $ص = Δس^{٣} - ٥س^{٢}(Δس)^{٣}$ ، أوجد $ن''(٣)$

الجواب : ٢٧

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

٩- إذا كان $ن(س) = س هـ(س)$ وكان $هـ^{(١٠٠)}(٢) = ٣$ ، $هـ^{(٩٩)}(٢) = -٤$ ، جد $ن^{(١٠٠)}(٢)$

الجواب -٦

١٠- إذا كان $ن(س) = س^{٤}|س|$ ، جد $ن'(-٢)$

الجواب : -٨٠

١١- إذا كان $ن(س) = ٤س^{٣} - [٢س+١]$ ، جد $ن'(٠,٦)$

الجواب : ٤,٣٢

١٢- جد $ن'(س)$ للاقتران $ن(س) = ٣س + [س+١,٠] - |س|$ عند $س = -١$

الجواب : ٤

١٣- جد $ن'\left(\frac{٧}{٢}\right)$ حيث $ن(س) = \frac{\left[\frac{س}{٣}\right]}{س - ٣}$

الجواب :-٤

١٤- إذا كان $ن(س) = س^{٤} + أس^{٣} - ٣$ ، وكان $ن^{(٣)}(٢) = ١٨$ ، ما قيمة أ ؟

الجواب أ $= -٥$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

قاعدة (١) :

إذا كان $ق(س) = جاس$ ، س بالتقدير الدائرى فإن $ق'(س) = جتاس$

قاعدة (٢) :

إذا كان $ق(س) = جتاس$ ، س بالتقدير الدائرى فإن $ق'(س) = -جاس$

مثال ١ : إذا كان $ق(س) = س^{٢} جتاس - جاس$ ، جد $ق'(س)$ ثم $ق'\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

الحل :

$ق'(س) = س^{٢} \times -جاس + ٢س جتاس - جتاس$

$ق'(س) = -س^{٢} جاس + ٢س جتاس - جتاس$

$ق'\left(\frac{\pi}{٢}\right) = -\left(\frac{\pi}{٢}\right)^{٢} \times جا\left(\frac{\pi}{٢}\right) + ٢\left(\frac{\pi}{٢}\right) جتا\left(\frac{\pi}{٢}\right) - جتا\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

$= -\left(\frac{\pi}{٢}\right)^{٢} \times ١ + ٢\left(\frac{\pi}{٢}\right) \times ٠ - ٠ = -\frac{\pi^{٢}}{٤}$

قاعدة (٣) :

- إذا كان $ق(س) = ظاس$ فإن $ق'(س) = قا^{٢} س$.
- إذا كان $ق(س) = ظتاس$ فإن $ق'(س) = -قتا^{٢} س$.
- إذا كان $ق(س) = قاس$ فإن $ق'(س) = قاس ظاس$.
- إذا كان $ق(س) = ظاس$ فإن $ق'(س) = -قتاس ظتاس$.

نشاط ٢ : إذا كان $س\Delta ص = \Delta س ظاس - ٢(\Delta س)^{٢}$ ، حيث $\Delta س \neq ٠$ ، جد $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{س = \frac{\pi}{٤}}$

الحل :

$س\Delta ص = \Delta س ظاس - ٢(\Delta س)^{٢}$ (بقسمة طرفى المعادلة علي $\Delta س$)

$س \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta س ظاس - ٢(\Delta س)^{٢}}{\Delta س}$

$س \frac{\Delta ص}{\Delta س} = ظاس - ٢(\Delta س)$

بقسمة طرفى المعادلة علي س $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ظاس}{س} - \frac{٢(\Delta س)}{س}$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

لكن $\frac{ص}{س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ $\Rightarrow$ نهـا$_{\Delta س \to 0}$ $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = نهـا$_{\Delta س \to 0}$ $\left(\frac{\text{ظا}(س+\Delta س)}{س} - \frac{\text{ظا}س}{س}\right)$ = $\frac{\text{ظا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{\left(\frac{\pi}{٤}\right)}$ = $\frac{١}{\frac{\pi}{٤}}$ = $\frac{٤}{\pi}$

$\left|\frac{ص}{س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}}$

مثال ٢: إذا كان $ن(س) =$ جاس $-$ جتاس ، أوجد قيمة س التي تجعل $ن''(س) = ٠$ حيث $[\pi ٢, ٠]$

الحـل:

$ن'(س) =$ جتاس $+$ جاس

$ن''(س) = -$ جاس $+$ جتاس

بوضع $ن''(س) = ٠ \Leftarrow$ $-$ جاس $+$ جتاس $= ٠ \Leftarrow$ جاس $=$ جتاس

ومنها ظاس $= ١$ $\therefore$ س $= \frac{\pi}{٤}$ أو س $= \frac{\pi ٥}{٤}$

مثال ٣ : إذا كان $ن(س) = س^{٢}$ ظاس ، جد $ن'\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

الحـل :

$ن'(س) = ٢$س ظاس $+ س^{٢}$ قا^{٢}س

$ن'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٢\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ظا$\frac{\pi}{٤} + \left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}$ قا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$

$= ٢ \times \frac{\pi}{٤} \times ١ + \left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢} (\sqrt{٢})^{٢} = \frac{\pi}{٢} + \frac{\pi^{٢}}{٨} = \frac{\pi ٤ + \pi^{٢}}{٨}$

مثال ٤: إذا كان ص $=$ أ جاس $+$ ب جتاس ، أ ، ب $\in$ ح أثبت أن $(ص')^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

الحـل :

ص $' =$ أ جتاس $-$ ب جاس

$(ص')^{٢} + ص^{٢} = (أ$ جتاس $-$ ب جاس$)^{٢} + (أ$ جاس $+$ ب جتاس$)^{٢}$

$= أ^{٢}$ جتا^{٢}س $- ٢أب$ جاس جتاس $+ ب^{٢}$ جا^{٢}س $+ أ^{٢}$ جا^{٢}س $+ ٢أب$ جاس جتاس $+ ب^{٢}$ جتا^{٢}س

$= أ^{٢}$ جتا^{٢}س $+ ب^{٢}$ جتا^{٢}س $+ أ^{٢}$ جا^{٢}س $+ ب^{٢}$ جا^{٢}س

$=$ جتا^{٢}س $(أ^{٢} + ب^{٢}) +$ جا^{٢}س $(أ^{٢} + ب^{٢})$

$= (أ^{٢} + ب^{٢})$ (جتا^{٢}س $+$ جا^{٢}س)

$= (أ^{٢} + ب^{٢}) \times ١ = أ^{٢} + ب^{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٥: جد $\lim_{هـ \to 0} \frac{\text{ظا}(س^{٣}+هـ)-\text{ظا}س^{٣}}{هـ}$

الحل : نفرض ص = $س^{٣}$ ، ق(ص) = ظاص

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{\text{ظا}(س^{٣}+هـ)-\text{ظا}س^{٣}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{\text{ظا}(ص+هـ)-\text{ظاص}}{هـ} = ق'(ص) = \text{قا}^{٢}ص = \text{قا}^{٢}س^{٣}$$

مثال ٦: إذا كان ق(س) = قاس + ظاس . أثبت أن : $ق'(س) = \frac{١}{١-\text{جاس}}$

الحل :

ق'(س) = قاسظاس+$\text{قا}^{٢}$س

ق'(س) = قاس(ظاس+قاس)

$$= \frac{١}{\text{جتاس}}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}+\frac{١}{\text{جتاس}}\right)$$

$$= \frac{\text{جاس}+١}{\text{جتا}^{٢}س} = \frac{\text{جاس}+١}{١-\text{جا}^{٢}س} = \frac{١+\text{جاس}}{(١-\text{جاس})(١+\text{جاس})} = \frac{١}{١-\text{جاس}}$$

تمارين ١-٣

١- أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ. ص = ٣جاس−جتاس

الجواب: $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣جتاس+جاس

ب. ص = ظاس − $\sqrt{٣}$ س

الجواب: ص ' = $\text{قا}^{٢}$س − $\sqrt{٣}$

ج. ص = $\text{جا}^{٢}$س+$\text{جتا}^{٢}$س

د. $ص = \frac{س}{\text{جاس}}$

الجواب $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{\text{جاس}-س\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}س}$

ه. ص = قاس − سظاس

الجواب: $\frac{ء ص}{ء س}$ = قاسظاس−ظاس−سقا^{٢}س

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

٢- إذا كانت $ص = س - ظاس$ جد $\frac{د ص}{د س}$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = ٢س ظاس - س^{٢} قا^{٢} س$

٣- إذا كان $ص = أ جاس + ب جتاس$ ، $أ، ب \in ع$ أثبت أن $ص'' + ص = ٠$

٤- جد قيم س في الفترة $[-٢\pi، ٢\pi]$ التي تحقق المعادلة $ن'(س) = ٠$ في كل مما يلي :

أ- $ن(س) = س + جتاس$

الجواب : مجموعة الحل $= \left\{\frac{\pi}{٢}، \frac{-٣\pi}{٢}\right\}$

ب- $ص = قاس$

الجواب : مجموعة الحل $= \{-٢\pi، \pi، ٠، \pi، ٢\pi\}$

٥- إذا كان $هـ(س) = قاس + ظاس$ فأثبت أن $هـ'(س) = قاس \cdot هـ(س)$

٦- إذا كانت $ن(س) = جتاس - \frac{١}{٢} س$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$. جد قيمة/قيم س التي تجعل المماس لمنحنى $ن(س)$ أفقياً

مجموعة الحل $= \left\{\frac{١١\pi}{٦}، \frac{٧\pi}{٦}\right\}$

٧- جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{قتا(س + هـ)^{٣} - قتاس^{٣}}{هـ}$

الجواب : $-قتاس^{٣} ظتاس^{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

١-٤ قاعدة لوبيتال ، ومشتقة الاقتران الأسي واللوغاريتمي :

أولا : قاعدة لوبيتال

وضع العالم لوبيتال طريقة تستخدم لحساب بعض النهايات المعقدة والتى تحتاج الى خطوات عديدة

قاعدة لوبيتال :

إذا كان $ن(س)$ ، $هـ(س)$ قابلين للاشتقاق عند النقطة $س = ا$ ، $ل \in ح$، وكانت $\frac{ن(ا)}{هـ(ا)} = \frac{٠}{٠}$ ،

$$\text{نهـا}_{س \to ا} \frac{ن'(س)}{هـ'(س)} = ل \quad \text{فإن} \quad \text{نهـا}_{س \to ا} \frac{ن(س)}{هـ(س)} = ل$$

مثال ١ : جد $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظاس}}{س}$ باستخدام قاعدة لوبيتال

الحـل : من خلال التعويض المباشر تكون $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظاس}}{س} = \frac{\text{ظا}٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$ ، ومنها تطبيق قاعدة لوبيتال فتكون

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظاس}}{س} = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{قا}^٢س}{١} = \frac{\text{قا}^٢(٠)}{١} = \frac{١^٢}{١} = ١$$

مثال ٢ : جد $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{س}$ بطريقتين مختلفتين

الحل : طريقة(١): من تعريف المشتقة عند نقطة

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{س} = - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٠ - \text{جتاس}}{س - ٠} = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}٠}{س - ٠}$$ باعتبار $ن(س) = \text{جتاس}$

تصبح النهاية علي الصورة $- \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{ن(س) - ن(٠)}{س - ٠} = -ن'(٠) = -\text{جا}(٠) = ٠$

طريقة(٢): قاعدة لوبيتال

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{س} = \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جاس}}{١} = \frac{\text{جا}(٠)}{١} = ٠$$

ملاحظة :

عند استخدام قاعدة لوبيتال ، إذا كانت $\frac{ن'(ا)}{هـ'(ا)} = \frac{٠}{٠}$ فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل علي عدد حقيقى

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

جد $\lim_{س\to 0} \frac{\text{قا}(س)-1}{س^2}$

الحـل : من خلال التعويض المباشر تكون $\frac{\text{قا}(0)-1}{(0)^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{س\to 0} \frac{\text{قاس}-1}{س^2} = \lim_{س\to 0} \frac{\text{قاس ظاس}}{2س} = \frac{0}{0}$$

نطبق قاعدة لوبيتال مرة أخري :

$$\lim_{س\to 0} \frac{\text{قاس ظاس}}{2س} = \lim_{س\to 0} \frac{-(\text{قاس}\,\text{قا}^2 س + \text{قاس}\times\text{قاس ظاس})}{2} = \frac{-(1\times 1^2 + 0)}{2} = -\frac{1}{2}$$

ثانيا : مشتقة الاقتران الأسى واللوغاريتمى :

تعريف :

العدد النيبيرى هو العدد الحقيقى ، الذى قيمته التقريبية هـ $\simeq$ ٢,٧١٨٢٨١٨ ويحقق العلاقة $\lim_{س\to 0} \frac{هـ^{س}-1}{س} = 1$

بعض خصائص الاقتران الأسى واللوغاريتمى :

الاقتران الأسى الطبيعى / مجاله ح

١) $هـ^{س} \times هـ^{ص} = هـ^{س+ص}$

٢) $\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}} = هـ^{س-ص}$

٣) $(هـ^{س})^{ص} = هـ^{سص}$

٤) $هـ^{0} = 1$

٥) $هـ^{\text{لـو}_{هـ} س} = س \ ، \ س > 0$

الاقتران اللوغاريتمى الطبيعى مجاله ح$^+$

١) $\text{لـو}_{هـ} س ص = \text{لـو}_{هـ} س + \text{لـو}_{هـ} ص$

٢) $\text{لـو}_{هـ} \frac{س}{ص} = \text{لـو}_{هـ} س - \text{لـو}_{هـ} ص$

٣) $\text{لـو}_{هـ} س^{ن} = ن \text{لـو}_{هـ} س \ ، \ س > 0$

٤) $\text{لـو}_{هـ} هـ^{س} = س$

قاعدة (١) :

إذا كان ص $= هـ^{س}$ ،فإن $\text{لـو}_{هـ} ص = س \ ، \ س > 0$.

مثال ٤: إذا كان $ن(س) = \text{لـو}_{هـ}(هـ + س)$ وتغيرت س من ٠ إلى هـ ، فما قيمة متوسط التغير للاقتران $ن(س)$

الحـل : متوسط التغير $= \frac{ن(هـ) - ن(0)}{هـ - 0} = \frac{\text{لـو}_{هـ}(2هـ) - \text{لـو}_{هـ} هـ}{هـ} = \frac{\text{لـو}_{هـ} 2 + \text{لـو}_{هـ} هـ - \text{لـو}_{هـ} هـ}{هـ} = \frac{\text{لـو}_{هـ} 2}{هـ}$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كان $ن(س) = هـ^{س}$ فإن $ن'(س) = هـ^{س}$

قاعدة(٤)

إذا كان $ن(س) = لـو_{هـ} س$ ، $س > ٠$ فإن $ن'(س) = \frac{١}{س}$

مثال ٥ : جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند النقطة إزاء كل منها :

١) $ن(س) = س لـو_{هـ}(س) - س$ عند $س = هـ^{٢}$

٢) $ع(س) = لـو_{هـ} س^{٦}$ عند $س = ٣$

الحـل :

١) $ن'(س) = س \times \frac{١}{س} + ١ \times لـو_{هـ} س - ١$

$= ١ + لـو_{هـ} س - ١ = لـو_{هـ} س$

$ن'(هـ^{٢}) = لـو_{هـ} هـ^{٢} = ٢ لـو_{هـ} هـ = ٢$

٢) بما أن $ع(س) = لـو_{هـ} س^{٦}$ ومنها $ع(س) = ٦ لـو_{هـ} س$

إذن $ع'(س) = ٦ \times \frac{١}{س} = \frac{٦}{س}$ ومنها $ع'(٣) = \frac{٦}{٣} = ٢$

مثال ٦: باستخدام قاعدة لوبيتال أثبت أن $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١^{٢}}{س - ١} = ٢ \times ١^{٢-١}$

الحـل : بالتعويض المباشر نجد أن : $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١^{٢}}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{١^{٢} - ١^{٢}}{١ - ١} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام قاعدة لوبيتال $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ١^{٢}}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٢ س^{٢-١}}{١} = ٢ \times ١^{٢-١}$

مثال ٧ : إذا كان $ص = هـ^{س}$ أوجد قيمة س التي تجعل $(ص')^{٢} = ٦ - ٥ص$

الحـل : $ص' = هـ^{س} \Leftarrow (ص')^{٢} = هـ^{٢س}$

$\because (ص')^{٢} = ٦ - ٥ص$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$\therefore$ $هـ^{٢س} + ٥هـ^{س} - ٦ = ٠$

$(هـ^{س} + ٦)(هـ^{س} - ١) = ٠$

إما $هـ^{س} = -٦$ (مرفوض) أو $هـ^{س} = ١$ ومنها $س = ٠$

مثال٨ : إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ٢} = ٦$ ، فما قيمة $أ$

الحـل : بالتعويض المباشر عن قيمة $س = ٢$ فى البسط (لابد أن تكون قيمة البسط تساوى صفراً عندما $س = ٢$)

$٢^{٢} + ٢أ + ب = ٠$

$٢أ + ب = -٤$ ..... (١)

$\because$ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ٢} = ٦$

باستخدام لوبيتال $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س + أ}{١} = ٦$

ومنها $٢(٢) + أ = ٦$

$\therefore$ $أ = ٦ - ٤ = ٢$

بالتعويض فى المعادلة (١) $٢(٢) + ب = -٤$ ومنها $ب = -٤ - ٤ = -٨$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) جد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يلى :

أ- $ص = س^{٢} لـو_{هـ} س$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = ٢س لـو_{هـ} س + س$

ب- $ص = لـو_{هـ} \sqrt[٣]{س^{٢}}$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{٣س}$

ج- $ص = (هـ^{س} + ١)^{٢}$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = ٢هـ^{س} (هـ^{س} + ١)$

(٢) إذا كان $ص = هـ^{س} جاس$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$ ، جد قيم س حيث $ص = ص'$

الجواب: $\left\{\frac{\pi}{٢}، \frac{٣\pi}{٢}\right\}$

(٣) أوجد قيمة كلا من النهايات الآتية :

أ- $\lim_{س \to ١} \frac{هـ^{س} - هـ}{لـو_{هـ} س}$ الجواب: $هـ$

ب- $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{س - \frac{\pi}{٢}}$ الجواب: -١

ج- $\lim_{س \to ٠} \frac{س هـ^{س}}{١ - هـ^{س}}$ الجواب: -١

د- $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س(١ + جتاس)}$ الجواب: $\frac{١}{٢}$

(٤) إذا كان $ن(٢) = ٤$ ، $ن'(٢) = -١$ ، أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} ن(س) - ٨ ن(٢)}{س - ٢}$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{٣س}$

(٥) إذا كان $\lim_{س \to ٢} \frac{٣س^{٣} + أس^{٢} + ٤س - ٨}{س^{٢} - ٤} = ٤$ ، أوجد قيمة أ بطرقتين مختلفتين

الجواب -٦

(٦) جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا(٢س + ٢هـ) - ظا٢س}{هـ^{٢} + ٢هـ}$ بطريقتين مختلفتين .

الجواب : $قا^{٢} ٢س$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

أولاً: تطبيقات هندسية :

تعريف :

إذا كان $ن(س)$ اقترانا قابلا للاشتقاق عند النقطة $(س_١ ، ن(س_١))$ ، $(س_٢ ، ن(س_٢))$ ، فإن ميل المنحنى عند النقطة أ هو ميل المماس المرسوم لمنحنى $ن(س)$ ، ويساوى $ن'(س)$

ويعرف العمودى علي منحنى الاقتران ، بأنه العمودى علي المماس للمنحنى عند نقطة التماس

قاعدة :

معادلة المماس لمنحنى $ن(س)$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هى

$ص - ص_١ = م(س - س_١) \Leftarrow ن(س) - ن(س_١) = ن'(س_١)(س - س_١)$

وتكون معادلة العمودى لمنحنى $ن(س)$ عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$ هى

$$ص - ص_١ = \frac{-١}{م}(س - س_١) \Leftarrow ن(س) - ن(س_١) = \frac{-١}{ن'(س_١)}(س - س_١)$$

مثال ١ : جد ميل منحنى الاقتران $ن(س) = س^٣ - ٤س$ عند $س = ٢$ ، ثم جد معادلتى المماس والعمودى علي المماس عند تلك النقطة .

الحـل :

ميل المنحنى عند $س = ٢$ يساوى $ن'(٢)$

$ن'(س) = ٣س^٢ - ٤$

$ن'(٢) = ٣(٢)^٢ - ٤ = ٨$

ولكن نقطة التماس هى $(٢ ، ن(٢)) = (٢ ، ٢^٣ - ٤ \times ٢) = (٢ ، ٠)$

معادلة المماس هى :

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٠ = ٨(س - ٢)$ ومنها $\boxed{ص = ٨س - ١٦}$

ميل العمودى علي المماس $= \frac{-١}{م} = \frac{-١}{٨}$

ومنها تكون معادلة العمودى هى : $ص - ٠ = \frac{-١}{٨}(س - ٢) \Leftarrow \boxed{ص = \frac{-١}{٨}س + \frac{١}{٤}}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٢ : أوجد معادلة العمودى علي المماس لمنحنى $ص = س^{٢}$ عند النقطة التى يصنع المماس عندها زاوية قياسها $\frac{\pi ٣}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات الموجب .

الحـل : نفرض أن نقطة التماس هى $(س_{١}، ن(س_{١}))$

∵ ميل المماس $ن'(س_{١}) = ٢س_{١}$ ∴ $٢س_{١} = ظا\frac{\pi ٣}{٤}$

ومنها $٢س_{١} = -١ \Leftarrow س_{١} = \frac{-١}{٢}$

إذن نقطة التماس هى $(\frac{-١}{٢}، ن(\frac{-١}{٢})) = (\frac{-١}{٢}، (\frac{-١}{٢})^{٢}) = (\frac{-١}{٤}، \frac{-١}{٢})$

وحيث أن ميل العمودى علي المماس = $\frac{-١}{م} = -(-١) = ١$

إذن معادلة العمودى علي المماس هى :

$ص - \frac{١}{٤} = ١(س - (\frac{-١}{٢}))$

$ص - \frac{١}{٤} = س + \frac{١}{٢} \Leftarrow$ $\boxed{ص = س + \frac{٣}{٤}}$

مثال ٣ : إذا كان المستقيم $ص = ١٠س - ٧$ يمس منحنى الاقتران $ن(س) = ٣س^{٢} - ٨س + ٢٠$،

جد نقطة / نقط التماس

الحـل : نفرض أن $(س_{١}، ص_{١})$ هى نقطة التماس ، $ن'(س) = ٦س - ٨$

بما أن ميل المماس = ميل المنحنى

∴ $١٠ = ٦س_{١} - ٨ \Leftarrow ٦س_{١} = ١٨ \Leftarrow س_{١} = ٣$

إذن نقطة التماس هى $(س_{١}، ن(س_{١})) = (٣، ن(٣)) = (٣، ٢٣)$

مثال ٤: إذا كان المستقيم $ص = أس + ب$ يمس منحنى الاقتران $ن(س) = س^{٣} - جس^{٢}$ عند النقطة $(٢، ١٢)$

فما قيم $أ، ب، جـ$ ؟

الحـل : ∵ النقطة $(٢، ١٢)$ تحقق معادلة المنحنى ∴ $ن(٢) = ١٢$

$٢^{٣} - جـ \times ٢^{٢} = ١٢ \Leftarrow ٨ - ٤جـ = ١٢ \Leftarrow$ $\boxed{جـ = -١}$

أيضا النقطة $(٢، ١٢)$ تحقق معادلة المستقيم $ص = أس + ب$

∴ $١٢ = ٢أ + ب$ ..... (١)

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذن $ن'(س) = ٣س^{٢} + ٢س$

ومنها $ن'(٢) = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) = ١٦$

بما أن ميل المماس = أ إذن أ = ١٦

بالتعويض فى المعادلة (١) :

$١٢ = ٢(١٦) + ب$ $\Leftarrow$ $ب = ١٢ - ٣٢ = -٢٠$

مثال ٥: ليكن $ن(س) = |٣س - ٥|$، أوجد ميل العمودى علي المماس لمنحنى $ن(س)$ عند $س = ٢$

الحـل :

$$ن(س) = \begin{cases} ٣س - ٥ & ، \quad س \leq \frac{٥}{٣} \\ ٥ - ٣س & ، \quad س > \frac{٥}{٣} \end{cases}$$

لاحظ أن $ن(س)$ متصل عند $س = ٢$

$$ن'(س) = \begin{cases} ٣ & ، \quad س < \frac{٥}{٣} \\ -٣ & ، \quad س > \frac{٥}{٣} \\ \text{غ.م} & ، \quad س = \frac{٥}{٣} \end{cases}$$

∵ ميل المماس عند $(س = ٢) = ن'(٢) = ٣$

∴ ميل العمودى عند (س=٢) $= -\frac{١}{٣}$

مثال ٦: بين أن لمنحنى الاقتران $ن(س) = س^{٢} - ٦س + ١٢$ مماساً أفقياً عند النقطة $(٣، ٣)$

الحـل : يكون المماس أفقياً عندما $ن'(س) = ٠$

∵ $ن'(س) = ٢س - ٦$

بوضع $ن'(س) = ٠$ يكون $٢س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٣$

∴ يوجد لمنحنى $ن(س)$ مماساً أفقياً عند النقطة $((٣)ن، ٣)$

وحيث أن $ن(٣) = ٣^{٢} - ٦(٣) + ١٢ = ٣$ ∴ يوجد مماس أفقى عند النقطة $(٣، ٣)$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

جد معادلة المماس والعمودى علي المماس لمنحنى $ن(س) = ٣ظتاس + قا^٢ س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

الحـل :

$ن(س) = ٣ظتاس + قاس \times قاس$

$ن'(س) = -٣قتا^٢ س + ٢قاس \times قاس ظاس$

$= -٣قتا^٢ س + ٢قا^٢ س ظاس$

∵ ميل المماس $= ن'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -٣قتا^٢\left(\frac{\pi}{٤}\right) + ٢قا^٢\left(\frac{\pi}{٤}\right) ظا\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

$= -٣\left(\sqrt{٢}\right)^٢ + ٢\left(\sqrt{٢}\right)^٢ \times ١$

$= -٦ + ٤ = -٢$

∵ $ن\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٣ظتا\left(\frac{\pi}{٤}\right) + قا^٢\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٣ + ٢ = ٥$

∴ $ن(س)$ يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٤}، ٥\right)$، وميله $= -٢$

تكون معادلة المماس $ص - ٥ = -٢\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$

ومنها $\boxed{ص = -٢س + \frac{\pi}{٢} + ٥}$

ميل العمودى عند $س = \frac{\pi}{٤}$ هو $\frac{١}{٢}$

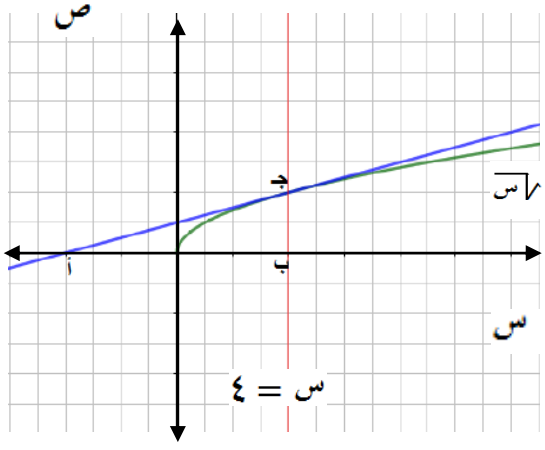
تكون معادلة العمودى : $ص - ٥ = \frac{١}{٢}\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ ومنها $ص = \frac{١}{٢}س - \frac{\pi}{٨} + ٥$

مثال٨ : جد مساحة المثلث القائم الزاوية ، المكون من المماس المرسوم لمنحنى $ن(س) = \sqrt{س}$ ، $س > ٠$ عند النقطة $(٢، ٤)$ ومحور السينات والمستقيم $س = ٤$

الحـل :

لدينا المثلث أبجـ حيث طول بجـ $= ٢$ وحدة

ولمعرفة احداثيات النقطة أ لابد من إيجاد معادلة المماس عند النقطة $(٢، ٤)$



$ن'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

ميل المماس $= ن'(٤) = \frac{١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٤}$

∴ المماس يمر بالنقطة $(٢، ٤)$ وميله $= \frac{١}{٤}$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

∴ معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

$$ص = \frac{١}{٤}(س - ٤) + ٢$$

$$ص = \frac{١}{٤}س + ١$$

لمعرفة نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع $ص = ٠$ و منها $\frac{١}{٤}س + ١ = ٠$ فيكون $س = -٤$

∴ المثلث **اب جـ** فيه طول **اب** $= ٨$ وحدة ، طول **ب جـ** $= ٢$ وحدة

∴ **مساحة المثلث** اب جـ $= \frac{١}{٢} \times |اب||ب جـ| = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢ = ٨$ **وحدة مساحة**

ثانيا: تطبيقات فيزيائية

تعريف :

السرعة اللحظية ع عند الزمن ن هى $ع(ن) = \frac{ع ف}{ع ن} = ف'$

التسارع اللحظى (ت) عند الزمن ن هى $ت(ن) = \frac{ع ع}{ع ن} = \frac{ع^{٢} ف}{ع ن^{٢}} = ف''$

مثال ٩ : تحرك جسم علي خط مستقيم ، بحيث أن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعلاقة $ف = ٢ن^{٣} - ٤ن^{٢} + ٥$

حيث ف بعده بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى ، جد :

(أ) سرعة الجسم وتسارعه بعد مرور ٣ ثوانى من بدء الحركة

(ب)المسافة التى يقطعها الجسم قبل ان يغير إتجاه حركته

الحـل :

(أ) $ف'(ن) = ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٨ن$

$ع(٣) = ٦(٣)^{٢} - ٨(٣) = ٦ \times ٩ - ٢٤ = ٣٠$ م/ث

التسارع = $ف''(ن) = ت(ن) = ١٢ن - ٨$

$ت(٣) = ١٢(٣) - ٨ = ٣٦ - ٨ = ٢٦$ م/ث^{٢}

(ب) يعكس الجسم حركته فى اللحظة التى تتغير فيها إشارة ع

أى عندما $ع(ن) = ٠$ ومنها $٦ن^{٢} - ٨ن = ٠$

$٢ن(٣ن - ٤) = ٠$ ومنها $ن = \frac{٤}{٣}$ ثانية

$$ف\left(\frac{٤}{٣}\right) = ٢\left(\frac{٤}{٣}\right)^{٣} - ٤\left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢} + ٥ = \frac{٧١}{٢٧}$$

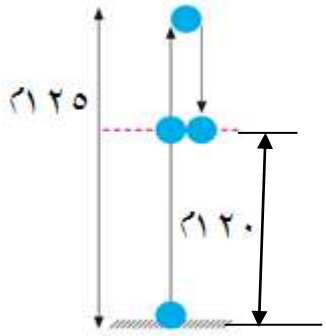
الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ١٠: قذف جسم رأسيا للأعلي فكانت العلاقة بين ارتفاعه ف بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته ن هى ف = ٥٠ن − ٥ن^{٢} ، جد أقصي ارتفاع يصل إليه الجسم والمسافة التى قطعها الجسم فى الثوانى الست الأولى .

الحـل :



عندما يصل الجسم إلى أقصي ارتفاع تكون ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٥٠ − ١٠ن = ٠ أى أن ن = ٥ ثانية

إذن أقصي ارتفاع ف(٥) = ٥٠(٥) − ٥(٥)^{٢}

= ٢٥٠ − ١٢٥ = ١٢٥ م

نحسب ارتفاع الجسم بعد مرور ٦ ثوانى من بدء الحركة

ف(٦) = ٥٠(٦) − ٥(٦)^{٢} = ٣٠٠ − ١٨٠ = ١٢٠م

المسافة التى قطعها الجسم فى الثوانى الست الأولى = ١٢٥ + ٥ = ١٣٠م

مثال ١١: أطلق جسم للأعلي من قمة برج بحيث أن ارتفاعه بالأمتار عن سطح الأرض بعد ن ثانية يعطي بالعلاقة ف = ٢٤ − ٦٤ن + ١٦ن^{٢} ، جد أقصي ارتفاع عن قمة البرج يصل إليه الجسم .

الحـل :

ارتفاع الجسم عن سطح الأرض يعطي بالعلاقة ف = ٢٤ − ٦٤ن + ١٦ن^{٢} ..... (١)

يكون الجسم علي أقصي ارتفاع عن سطح الأرض عندما ع(ن) = ٠

ع(ن) = ٦٤ − ٣٢ن = ٠ أى أن ن = ٢ ثانية

أى أن الجسم يصل إلى أقصي ارتفاع عن سطح الأرض بعد مرور ٢ ثانية من بدء الحركة

أقصي ارتفاع عن سطح الأرض = ف(٢) = ٢٤ − ٦٤(٢) + ١٦(٢)^{٢} = ٨٨م

لمعرفة ارتفاع البرج نعوض فى المعادلة (١) عن ن = ٠

ارتفاع البرج = ف(٠) = ٢٤ − ٦٤(٠) + ١٦(٠)^{٢} = ٢٤م

أقصي ارتفاع عن قمة البرج يصل إليه الجسم = أقصي ارتفاع عن سطح الأرض − ارتفاع البرج

= ٨٨ − ٢٤ = ٦٤ م

مثال ١٢: قذف جسيم رأسياً إلى أعلي بحيث أن المسافة ف بالأمتار معطاة بالعلاقة : ف = ٣٠ن − ٥ن^{٢} ، ن بالثوانى ، أوجد سرعة الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة إذا كان أقصي ارتفاع يصل إليه الجسيم ٤٥ متراً.

الحـل :

ع = $\frac{ف}{ن}$ = ٣٠ − ١٠ن ..... (١)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

بالتعويض من (٢) فى معادلة الحركة : $ف = ٣٠ن - ١٥ن^{٢} \Leftarrow ٤٥ = ٣٠ن - \frac{١٥}{ن} \times ن^{٢}$

$\therefore ٤٥ = ٣٠ن - ١٥ن \Leftarrow ٤٥ = ١٥ن \Leftarrow ن = ٣$ ث

بالتعويض فى المعادلة (٢) : $أ \times ٣ = ١٥$ ومنها $\boxed{أ = ٥}$

بالتعويض فى المعادلة (١) :

$ع = ٣٠ - ٢ \times ٥ن = ٣٠ - ١٠ن$

$\therefore$ سرعة الجسيم بعد ٢ ث من بدء الحركة $= ع(٢) = ٣٠ - ١٠ \times ٢ = ١٠$ م/ث

مثال ١٣:

قذف جسمان معا رأسيا إلى أعلي ،الأول يتحرك وفق العلاقة $ف = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$ ،والثانى وفقا لعلاقة $ف = ١٠ن - ٥ن^{٢}$ ،حيث ف بالأمتار ، ن بالثوانى، أوجد ارتفاع الجسم الثانى عندما يصل الأول لأقصي ارتفاع له .

الحـل :

نحسب زمن أقصي ارتفاع للجسم الأول حيث $ف = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$

ومنها $ع = \frac{ف}{ن} = ٢٠ - ١٠ن$ ..... (١)

عندما يصل الجسم الأول إلى أقصي تكون $ع = ٠$

ومنها $٢٠ - ١٠ن = ٠$

$\therefore ن = ٢$ ث

ارتفاع الجسم الثانى $= ف(٢) = ١٠ \times ٢ - ٥ \times ٢^{٢} = ٢٠ - ٢٠ = ٠$

أى أن الجسم الثانى يكون قد وصل إلى سطح الأرض بعد مرور ٢ ثانية

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) جد معادلة المماس للمنحنى $ن(س) = س^{٣} - ٤س$ عند النقطة $(١-، ٣)$

الجواب : $ص = -س - ٢$

(٢) جد معادلة العمودى علي المماس لمنحنى الاقتران $ن(س) = \frac{١}{٢} + جا^{٢}س$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$

الجواب : $ص = -س + \frac{\pi}{٤} + ١$

(٣) أوجد معادلة المماس لمنحنى $ن(س) = لـو_{هـ}\left(\frac{س}{٢}\right)$ عند النقطة $(٢هـ، ١)$

الجواب : $ص = \frac{١}{٢هـ} س$

(٤) إذا كان ميل العمودى علي المماس لمنحنى الاقتران $ن(س)$ عند النقطة $(١-، ٣)$ الواقعة عليه يساوى $\frac{١}{٢}$ ،أوجد معادلة المماس لمنحنى $ن(س)$ عند تلك النقطة .

الجواب : $ص = -٢س - ١$

(٥) يتحرك جسيم فى خط مستقيم حسب العلاقة $ف = ن^{٣} - ٢ن^{٢} + ٧$ ،حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى ، أوجد سرعة الجسم وتسارعه بعد ثانيتين من بدء الحركة .

٤م/ث ، ٨م/ث^{٢}

(٦) إذا كانت معادلة العمودى علي منحنى ق(س) عند النقطة (٠،٣) هى $٢س - ٣ص = ٦$ ، أوجد $ن'(٣)$

الجواب: $\frac{-٣}{٢}$

(٧) قذف جسم رأسيا إلى أعلي وفق العلاقة $ف = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$ ،حيث ف ارتفاعه بالأمتار ،ن بالثوانى . جد سرعة الجسم عندما تكون المسافة الكلية المقطوعة ١٠٠مترا .

ع=٤٠م/ث أو ع = -٤٠م/ث

(٨) قذف جسم رأسياً للأعلي من نقطة علي سطح الأرض وكان ارتفاعه يعطي بالقاعدة $ف = ٣٠ن - ٥ن^{٢}$ ، ن الزمن بالثوانى.

أ. جد السرعة الابتدائية للجسم — الجواب: ٣٠متر/ثانية

ب. أثبت أن زمن الصعود = زمن الهبوط

ج. جد المسافة الكلية التى قطعها الجسم فى الثوانى الأربع الأولى — الجواب: ٥٠متر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(٩) إذا كان $ن(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = س^{٢} - ٢س + ١$ ، جد النقطة التى يكون عندها مماسا منحيى الاقترانين $ن، هـ$ متعامدين .

الجواب: $\left(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٤}\right)$

(١٠) بين أن لمنحنى الاقتران $ن(س) = جا^{٢}س$ مماساً أفقياً فى الفترة $[\pi، ٠]$

(١١) جد قيمة كلاً من الثابتين ب ، جـ اللذين يجعلان المستقيم الذى معادلته $ص - س - ٢ = ٠$ مماساً لمنحنى $ن(س) = س^{٢} + بس + جـ$ عند النقطة $(٢، ٠)$

الجواب : $جـ = ٢$ ، $ب = ١$

(١٢) قذف جسم رأسياً إلى أعلي من نقطة علي ارتفاع ٦٠ متراً عن سطح الأرض وفق العلاقة $ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^{٢}$ حيث ن الزمن بالثوانى ، ف المسافة بالأمتار ، جد ما يلى :

أ. الزمن الذى يستغرقه الجسم حتى يعود إلى نقطة القذف .

الجواب: ٨ث

ب. الزمن الذى يستغرقه الجسم حتى يعود إلى سطح الأرض .

الجواب: $٤ + ٢\sqrt{٧}$ ث

ج. أقصي ارتفاع يصل إليه الجسم .

الجواب: ١٤٠ متر

د. متى تصبح سرعة الجسم ٣٠ متر/ث

الجواب: ن=١ث

ه. متى يكون ارتفاع الجسم ١٣٥ متراً عن سطح الأرض

الجواب: ن=٣ث أو ٥ث

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$ف_{١}(ن) = ٥ن^{٢}$ ، وفى الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلي حيث أن المسافة التى يقطعها

$ف_{٢}(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢}$ ، جد اللحظة التى يكون لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض .

الجواب: بعد ٢ ث من بدء الحركة

(١٥) أسقط جسم للأسفل من سطح بناية سقوطا حراً وفق العلاقة $ف_{١}(ن) = ١٦ن^{٢}$ وفى نفس الوقت رمى جسم آخر ليسقط عمودياً إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م/ث وفق العلاقة $ف_{٢}(ن) = ٢٠ن + ١٦ن^{٢}$ ، فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من ارتطام الجسم الثانى بالأرض ، جد :

أ- سرعة كلاً من الجسمين لحظة ارتطامهما بالأرض .

الجواب: ٤٨م/ث ، ٥٢م/ث

ب- ارتفاع البناية .

الجواب: ٣٦ متر

(١٦) قذف جسم رأسياً لأعلي من سطح بناية فكان ارتفاعه عن قمة البناية يعطي بالعلاقة $ف(ن) = ١٦ن - ن^{٢}$ ، ف : المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى ، إذا كانت سرعة ارتطام الجسم بالأرض -١٤م/ث . **ما ارتفاع البناية ؟**

الجواب: ٤٠متر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تذكر أن :

$(ن \circ هـ)(س) = ن(هـ(س))$ هو الاقتران المركب من $ن$ ، $هـ$

قاعدة السلسلة :

إذا كانت $ص = ن(ع)$ ، $ع = هـ(س)$ وكان $هـ(س)$ قابلا للاشتقاق

$ن(س)$ قابلا للاشتقاق عند $هـ(س)$ ، مدي $هـ \subseteq$ مجال $ن$ فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ أى أن

$(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

مثال ١ : إذا كان $ن(س) = ٢س^{٣} - ٣س + ١$ ، $هـ(س) = س^{٢} + س$ فجد :

(١) $(ن \circ هـ)'(س)$

(٢) $(هـ \circ ن)'(س)$

(٣) $(هـ \circ هـ)'(-١)$

الحـل:

$ن'(س) = ٦س^{٢} - ٣$ ، $هـ'(س) = ٢س + ١$

(١) $(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= ن'(س^{٢} + س) \times (٢س + ١)$

$= (٦(س^{٢} + س)^{٢} - ٣) \times (٢س + ١)$

(٢) $(هـ \circ ن)'(س) = هـ'(ن(س)) \times ن'(س)$

$= (٢(٢س^{٣} - ٣س + ١) + ١)(٦س^{٢} - ٣)$

$= (٤س^{٣} - ٦س + ٣)(٦س^{٢} - ٣)$

(٣) $(هـ \circ هـ)'(-١) = هـ'(هـ(-١)) \times هـ'(-١)$

$= هـ'((-١)^{٢} + (-١)) \times (٢(-١) + ١)$

$= هـ'(٠) \times (-١)$

$= ١ \times -١$

$= -١$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كان ص = ع + ٢ع ، ع = س − ٤ ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحـل :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$$

$$\frac{د ص}{د س} = (٣ + ٤ع)(٣س^{٢})$$

$$= (٣ + (٤ - ٢س^{٣}))(٣س^{٢})$$

$$= (٢س^{٣} - ٥)(٣س^{٢})$$

$$= ٦س^{٥} - ١٥س^{٢}$$

نتيجة :

إذا كان ص = (هـ(س))^ن ، وكان هـ(س) قابلا للاشتقاق ، ن ∈ ص

فإن $\frac{د ص}{د س} = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

مثال٣: إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{(س^{٢} - ٥س + ٢)^{٤}}$ ، جد ق'(س)

الحـل :

$$ق(س) = ٣(س^{٢} - ٥س + ٢)^{-٤}$$

$$ق'(س) = -٤ \times ٣(س^{٢} - ٥س + ٢)^{-٥} \times (٢س - ٥) = \frac{-١٢(٢س - ٥)}{(س^{٢} - ٥س + ٢)^{٥}}$$

نشاط (٢) صفحة ٤٦ من الكتاب المدرسي : إذا كان ص = (قاس+ظاس)^ن ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحـل :

$$\frac{د ص}{د س} = ن(قاس+ظاس)^{ن-١}(قاسظاس+قا^{٢}س)$$

$$= نقاس(قاس+ظاس)^{ن-١}(ظاس+قاس)$$

$$= نقاس(قاس+ظاس)^{ن}$$

$$= نقاسص$$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

يمكن تعميم قاعدة السلسلة لتشمل أكثر من اقترانين

مثال ٤: إذا كان ع = ل^{٣} + ٢ل^{٢} + ٣ ، ل = ص^{٢} − ص + ٥ ، ص = س^{٣} + س^{٢} + ٣س ، جد $\frac{ع}{س}\Big|_{س=٠}$

الحل :

$$\frac{ع}{س} = \frac{ع}{ل} \times \frac{ل}{ص} \times \frac{ص}{س}$$

$$= (٣ل^{٢} + ٤ل)(٢ص - ١)(٣س^{٢} + ٢س + ٣)$$

وعندما س = ٠ فإن ص = ٠ ، ل = ٥

$$\frac{ع}{س}\Big|_{س=٠} = (٣ \times ٢٥ + ٤ \times ٥)(-١)(٣) = -٢٨٥$$

قاعدة:

إذا كان ك(س) اقترانا قابلا للاشتقاق فإن :

- ن(س) = هـ$^{ك(س)}$ قابل للاشتقاق ، وتكون ن′(س) = ك′(س) هـ$^{ك(س)}$
- م(س) = لـو ك(س) ، ك(س) > ٠ قابل للاشتقاق وتكون م′(س) = $\frac{ك'(س)}{ك(س)}$

مثال ٥: إذا كان ص = لـو$_{هـ}$(جاس) ، جد $\frac{ص}{س}$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = \frac{١}{جاس} \times جتاس = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس \Leftarrow \frac{ص}{س}\Big|_{س=\frac{\pi}{٦}} = ظتا\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \sqrt{٣}$$

نشاط صفحة ٤٧ من الكتاب المدرسي:

إذا كانت ص = $\frac{(س+١)^{٥}(٢+س)^{٤}}{(١+س^{٢})}$ فأوجد $\frac{ص}{س}$

الحل:

بأخذ لوغاريتم الطرفين

لـو$_{هـ}$ ص = لـو$_{هـ}$ $\frac{(س+١)^{٥}(٢+س)^{٤}}{(١+س^{٢})}$

لـو$_{هـ}$ ص = ٥لـو$_{هـ}$(س + ١) + ٤لـو$_{هـ}$(٢ + س) − لـو$_{هـ}$(١ + س^{٢})

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$ص' = ص\left(\frac{٢س}{س^{٢}+١} - \frac{٤}{س+٢} + \frac{٥}{(س+١)}\right)$$

مثال ٦: جد مشتقة كلا من الاقترانات الآتية

أ- $ن(س) = لـو_{هـ}(س+٢)^{٢}$

ب- $ن(س) = هـ^{جا^{٢}س}$

الحـل :

أ- $ن(س) = لـو_{هـ}(س+٢)^{-٢} = -٢لـو_{هـ}(س+٢)$

$$ن'(س) = \frac{-٢}{س+٢}$$

ب- $ن'(س) = هـ^{جا^{٢}س} \times ٢جاس جتاس = هـ^{جا^{٢}س} جا٢س$

مثال ٧: إذا كان $ص = ظا^{٢}س$ ، أثبت أن : $ص'' = ٢(١+ص)(١+٣ص)$

الحـل :

$ص' = ٢ظاس قا^{٢}س$

$= ٢ظاس(١+ظا^{٢}س)$

$= ٢(ظاس+ظا^{٣}س)$

$ص'' = ٢(قا^{٢}س+٣ظا^{٢}س قا^{٢}س)$

$= ٢قا^{٢}س(١+٣ظا^{٢}س)$

$= ٢(١+ظا^{٢}س)(١+٣ظا^{٢}س)$

$= ٢(١+ص)(١+٣ص)$

مثال ٨: أوجد قيمة $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا(٢س+هـ) - جتا٢س}{هـ}$

الحـل:

بالتعويض المباشر

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا(٢س+هـ) - جتا٢س}{هـ} = \frac{جتا(٢س+٠) - جتا٢س}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نطبق قاعدة لوبيتال $= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-جا(٢س+هـ) - ٠}{١} = \frac{-جا(٢س+٠)}{١} = -جا٢س$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٩: إذا كان $ن(س) = \left(\frac{١}{٢}س\right)^{٣}$ ، جد $ن''(-١)$

الحـل:

$$|س| = \begin{cases} س & ، \ س \geq ٠ \\ -س & ، \ س < ٠ \end{cases} \Leftarrow |س|^{٣} = \begin{cases} س^{٣} & ، \ س \geq ٠ \\ -س^{٣} & ، \ س < ٠ \end{cases}$$

$\because ن(س) = \left(\frac{١}{٢}س\right)^{٣} = |س|^{٣} = -س^{٣}$ ، $س < ٠$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$$ن'\left(\frac{١}{٢}س\right) = \frac{١}{٢} \times ٣-س^{٢} = -\frac{٣}{٢}س^{٢} \Leftarrow ن''\left(\frac{١}{٢}س\right) = -٦س^{٢}$$

$$\Leftarrow ن''\left(\frac{١}{٢}س\right) = \frac{١}{٢} \times -١٢س^{٢}$$

نعوض عن $س = -٢$ $\Leftarrow ن''\left(\frac{١}{٢} \times -٢\right) = -١٢(-٢)^{٢}$

$$\Leftarrow ن''(-١) = ٢ \times -١٢ \times \frac{١}{٢} \Leftarrow \boxed{ن''(-١) = -٤٨}$$

تمارين ١-٦

(١) جد $\frac{ص}{س}$ عند $س = ١$ لكل مما يلي :

أ- $ص = \frac{١}{(٢س^{٣} - س)^{٤}}$

الجواب: -٢٠

ب- $ص = هـ^{جتا\left(\frac{\pi}{٣}س\right)}$

الجواب: $\frac{\pi هـ\sqrt{٣}}{٦}$

ج- $ص = ع^{٢} + ٣ع + ١$ ، $ع = س^{٣} + ٢س - ٣$

الجواب: ١٥

د- $ص = ظا\left(\frac{\pi}{س}\right) - جا^{٢}(\pi س)$ ، $س \neq ٠$

الجواب : $-\pi$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الجواب: ٦هـ ٢

(٣)بالاعتماد علي الجدول المقابل ليكن ل(س) = س ن(س ٢) ، أوجد قيمة الاقتران ل ومشتقته الأولى والثانية عند

س = ١ ، س = ٢

س	١	٢	٤
ن(س)	١	٣	٦
ن ´(س)	١	٢	٣
ن ´´(س)	٢	١	٠

الجواب:

ل(١) = ١	ل ´(١) = ٣	ل ´´(١) = ١٤
ل(٢) = ١٢	ل ´(٢) = ٣٠	ل ´´(٢) = ٣٦

(٤) إذا كانت ص =ظاس جا٢س ، أثبت أن $\frac{د ص}{د س}$ = ٢جا٢س

(٥)أوجد قيمة كلا من النهايات الآتية :

أ- $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٣(١+هـ)^{٦} - ٣}{هـ}$

الجواب : ١٨

ب- $\lim_{هـ \to ٠} \frac{جتا(٢س + هـ) - جتا٢س}{هـ}$

الجواب : −جا٢س

ج- $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ظا^{٣}(س + ٣هـ) - ظا^{٣}س}{٣هـ}$

الجواب : ٣قا^٢س ظا^٢س

(٦)إذا كان ن(س) = ٢س^٤ − ٣س^٣ ، وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن ´(١) - ن ´(١+هـ)}{٢هـ}$ = ٢١ ، فما قيمة ؟أ

الجواب : أ = ١١

(٧)إذا كان (ن ٥ هـ)´(٣) = ١٥ ، ن(س) = س^٢ − ٩ ، هـ ´(٣) = ٥ ، ما قيمة هـ(٣) ؟

الجواب $\frac{٣}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(٨) إذا كان $ن(س) = س^{٣} + ٢س$ ، $هـ(س) = س^{٢}$ ، أوجد $(ن \circ هـ)'(١)$

الجواب: ١٢

(٩) إذا كان $(م \circ ل)(س) = س$ وكان $ل$، $م$ قابلين للاشتقاق حيث $م'(س) = \frac{١}{س}$ ، جد $ل'(س)$

الجواب ل(س)

(١٠) إذا كان $ن(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان $(ن \circ هـ)'(٣) = ١٠$ ، $(ن \circ هـ)(٣) = ٤$

أوجد $٢هـ'(٣)$

الجواب : $٢هـ'(٣) = ٥$

(١١) إذا كان $ن(س) = ١ + ظا س$ ، $هـ(س) = \frac{ب}{س + ٢}$ وكان $(هـ \circ ن)'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٣}{٨}$ ، جد قيمة ب

الجواب : $ب = -٣$

(١٢) إذا كان $ل(س) = ظا^{٣} س$ ؛ جد $ل'(س)$

الجواب: $ل'(س) = ٣ظا^{٢} س قا^{٢} س$

(١٣) إذا كان $هـ(س) = ن(جا٢س)$ وكان $ن'(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = ٨$ ، جد $هـ'(\frac{\pi}{٦})$

الجواب: $هـ'(\frac{\pi}{٦}) = ٨$

(١٤) إذا كان $ن(س)$ ، اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان $ن(جا٢س) = قتا٢س$ حيث $س \in [٠، \frac{\pi}{٣}]$ ، جد $ن'(\frac{١}{٢})$

الجواب: $ن'(\frac{١}{٢}) = -٤$

(١٥) إذا كان $ن(س) = ٢ظا س$ ، $هـ(س) = \frac{أ}{١ + ٢س}$,كان $(هـ \circ ن)'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٨}{٢٥}$ ، ما قيمة أ ؟

الجواب : $أ = -١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ١ : إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحـل : نشتق طرفى العلاقة ضمنياً بالنسبة إلى س :

$$٢س + ٢ص \frac{د ص}{د س} = ٠$$

$$٢ص \frac{د ص}{د س} = -٢س \quad \text{ومنها} \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{ص}$$

مثال ٢ : إذا كان $س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٣س ص$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(-١، ١)$

الحـل : بالاشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س:

$$٢س + ٤ص \frac{د ص}{د س} = ٣ص + ٣س \frac{د ص}{د س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

بالتعويض بالنقطة $(-١، ١)$ فى العلاقة (١)

$$٢(-١) + ٤(١) \frac{د ص}{د س} = ٣(١) + ٣(-١) \frac{د ص}{د س}$$

$$-٢ + ٤ \frac{د ص}{د س} = ٣ - ٣ \frac{د ص}{د س}$$

$$٤ \frac{د ص}{د س} + ٣ \frac{د ص}{د س} = ٢ + ٣ \quad \text{ومنها} \quad \boxed{\frac{د ص}{د س} = \frac{٥}{٧}}$$

مثال ٣ : إذا كان $\frac{٢ص}{س} - \frac{س}{ص} = ١$ ، $س \neq ٠، ص \neq ٠$ ، $ص > ٠$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٢$

الحـل : بضرب طرفى العلاقة فى $س ص$

$$\frac{٢ص}{س} \times س ص - \frac{س}{ص} \times س ص = ١ \times س ص$$

$$٢ص^{٢} - س^{٢} = س ص \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

بالاشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س تصبح العلاقة $٤ص \frac{د ص}{د س} - ٢س = س \times \frac{د ص}{د س} + ١ \times ص$ ..... (٢)

نعوض فى العلاقة (١) عن قيمة س=٢ فتصبح المعادلة $٢ص^{٢} - ٢^{٢} = ٢ص$

إذن $ص^{٢} - ص - ٢ = ٠ \Leftarrow (ص - ٢)(ص + ١) = ٠ \Leftarrow ص = ٢$ أو $ص = -١$ (مرفوض)

بالتعويض فى العلاقة (٢) عن قيمتى س ، ص نحصل علي $٤(٢) \frac{د ص}{د س} - ٢(٢) = ٢ \times \frac{د ص}{د س} + ١ \times ٢$

$$٨ \frac{د ص}{د س} - ٢ = ٤ + ٢ \frac{د ص}{د س}$$

$$٨ \frac{د ص}{د س} - ٢ \frac{د ص}{د س} = ٤ + ٢ \quad \text{ومنها} \quad ٦ \frac{د ص}{د س} = ٦ \quad \text{أى أن} \quad \frac{د ص}{د س} = ١$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كانت $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $ن \in ص$ ، $ص \in م$ ، $ن \neq ٠$ ، فإن $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

نتيجة :

إذا كان $ق(س) = (هـ(س))^{ن}$ ، $ع \in ن$

وكان $هـ(س)$ قابلاً للاشتقاق فإن $ق'(س) = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

مثال ٤ : إذا كان $ص = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

$$ص' = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٢}{٣}-١} = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣ س^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{س}}$$

مثال ٥ : إذا كانت $ص = \sqrt[٣]{س^{٢} + ٥س + ٢}$ ، جد $\frac{د ص}{د س}|_{س=١}$

الحل :

$$ص = (س^{٢} + ٥س + ٢)^{\frac{١}{٣}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٣}(س^{٢} + ٥س + ٢)^{\frac{١}{٣}-١} (٢س + ٥)$$

$$= \frac{١}{٣}(س^{٢} + ٥س + ٢)^{-\frac{٢}{٣}} (٢س + ٥)$$

$$\frac{د ص}{د س}|_{س=١} = \frac{١}{٣}(١ + ٥ + ٢)^{-\frac{٢}{٣}} (٢ + ٥)$$

$$= \frac{١}{٣}(٨)^{-\frac{٢}{٣}} \times ٧ = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} \times ٧ = \frac{٧}{١٢}$$

مثال ٦ : أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٣٠} - ٢}{س - ٢}$

الحل :

نحسب النهاية بالتعويض المباشر

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٣٠} - ٢}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٢^{٢} + ٣٠} - ٢}{٢ - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣٢} - ٢}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$$

نستخدم قاعدة لوبيتال :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٣٠} - ٢}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س^{٢} + ٣٠)^{\frac{١}{٥}} - ٢}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٥}(س^{٢} + ٣٠)^{-\frac{٤}{٥}}}{١} = \frac{\frac{١}{٥}(٢ + ٣٠)^{-\frac{٤}{٥}}}{١} = \frac{١}{٥}(٣٢)^{-\frac{٤}{٥}} = \frac{١}{٥} \times \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٨٠}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الحـل : نعوض بالنقطة $\left(١، \frac{\pi}{٢}\right)$ فى العلاقة المعطاة : $١ = جا\left(١ \times \frac{\pi}{٢}\right)$ (عبارة صحيحة)

إذن النقطة $\left(١، \frac{\pi}{٢}\right)$ هى نقطة التماس

لحساب الميل نشتق الطرفين ضمنياً

$ص' = جتا(س ص)[١ \times ص + س \times ص']$ ..... (١)

نعوض بالنقطة $\left(١، \frac{\pi}{٢}\right)$ فى العلاقة (١) فنحصل علي

$ص' = جتا\left(١ \times \frac{\pi}{٢}\right)\left[١ \times ١ + \frac{\pi}{٢} \times ص'\right]$ = صفر ∴ الميل = ٠

تكون معادلة المماس $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ١ = ٠ \Leftarrow ص = ١$

مثال٨ : يسير جسم فى خط مستقيم وفق العلاقة $ف = ا جتا(بن + جـ)$ ، $ا، ب، جـ$ ثوابت .

أثبت أن تسارع الجسم $= -ب^{٢} ف$ ، علماً بأن الإزاحة ف بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى

الحـل :

$ف = ا جتا(بن + جـ)$

$ع = \frac{د ف}{د ن} = ا \times -جا(بن + جـ) \times ب$

$= -اب جا(بن + جـ)$

$ت = \frac{د ع}{د ن} = -اب \times ب جتا(بن + جـ)$

$= -ب^{٢} ا جتا(بن + جـ) = -ب^{٢} ف$

مثال٩ : إذا كانت $ن(٢) = ٤$ ، $ن'(٢) = ٦$ ، وكان $س^{٢} = ن(٢ص)$ ، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(١، ٢)$

الحـل : $س^{٢} = ن(٢ص)$ بالاشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س

$٢س = ن'(٢ص) \times ٢ \frac{د ص}{د س}$ ..... (١)

بالتعويض بالنقطة $(١، ٢)$ فى المعادلة (١)

$٢ \times ٢ = ن'(٢) \times ٢ \frac{د ص}{د س}$

ومنها $٤ = ٦ \times ٢ \frac{د ص}{د س}$.

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الحـل : نفرض المستقيم يمس المنحنى عند النقطة $(س_١ ، ص_١)$

∵ ميل المستقيم من المشتقة = ميل المستقيم من النقطتين

لحساب ميل المستقيم من المشتقة نشتق معادلة المنحنى ضمنياً : $٢ص ص' - ١٦ = ٠$

ومنها $\boxed{ص' = \frac{٨}{ص}}$ ..... (١)

ميل المستقيم من النقطتين = $\frac{ص_١ - ٢}{س_١ - ٠}$ أى أن $\boxed{م = \frac{ص_١ - ٢}{س_١}}$ ..... (٢)

∵ $ص' = م$ ∴ $\frac{ص_١ - ٢}{س_١} = \frac{٨}{ص_١}$

ومنها $ص_١^{٢} - ٢ص_١ = ٨س_١$ ..... (٣)

من معادلة المنحنى $س_١ = \frac{ص_١^{٢}}{١٦}$

بالتعويض فى المعادلة (٣) عن قيمة $س_١$

$ص_١^{٢} - ٢ص_١ = ٨ \times \frac{ص_١^{٢}}{١٦}$

بالضرب فى ٢ : $٢ص_١^{٢} - ٤ص_١ = ص_١^{٢} \Leftarrow ص_١^{٢} - ٤ص_١ = ٠ \Leftarrow ص_١(ص_١ - ٤) = ٠$

إما $ص_١ = ٠$ (مرفوض) أو $ص_١ = ٤$

∴ $س_١ = \frac{١٦}{١٦} = ١$ ومنها نقطة التماس هى $(٤ ، ١)$

مثال ١١: إذا كان $ص = ظاس + \frac{١}{٣}ظا^{٣}س$ ، برهن أن $\frac{د ص}{د س} = قا^{٤}س$

الحـل :

$$\frac{د ص}{د س} = قا^{٢}س + ٣ \times \frac{١}{٣}ظا^{٢}س \times قا^{٢}س$$

$$= قا^{٢}س + ظا^{٢}س \times قا^{٢}س$$

$$= قا^{٢}س(١ + ظا^{٢}س)$$

$$= قا^{٢}س \times قا^{٢}س$$

$$= قا^{٤}س$$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) جد $\frac{د ص}{د س}$ فى كل مما يلى :

أ- $\sqrt{س ص} = ١$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ص}{س}$

ب- $ص = جتا \sqrt{١ + س^{٢}}$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{- س جا \sqrt{١ + س^{٢}}}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$

ج- $ص = قا \sqrt{س + \pi}$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{قا \sqrt{س + \pi} \, ظا \sqrt{س + \pi}}{٢ \sqrt{س + \pi}}$

د- $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٤$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - ص ٤}{١ - س ٤}$

(٢) إذا كانت $ص = ٣ + جا م$ ، $م = ٥ + جتا ٣س$ ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = - ٣ جتا م جا ٣س$

(٣) إذا كانت $ف = جا ٣ن + جتا ٢ن$ هى العلاقة بين الازاحة ف بالأمتار ، والزمن ن باثوانى لجسم يتحرك فى خط مستقيم . أوجد سرعة وتسارع هذا الجسم عندما $ن = \frac{\pi}{٦}$

الجواب: $ع = - \sqrt{٣}$ م/ث ، $ت = - ١١$ م/ث^{٢}

(٤) إذا كان $س = ق ا ص$ فى الفترة $\left[\frac{\pi ٥}{٦} ، \frac{\pi ٣}{٤} \right]$ ، أثبت أن $ص' = \frac{\sqrt{س^{٢} - ١}}{س^{٣} - س}$.

(٥) إذا كان المستقيم $ص = س$ مماساً للقطع المكافئ $ص = س^{٢} + ا$ ، ما قيمة $ا$ ؟

الجواب: $ا = \frac{١}{٤}$

(٦) لتكن $\sqrt{ص} = لـو_{هـ} (س ص)$ ، جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (هـ، ١)

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٢}{هـ}$

(٧) إذا كان $س ص = ظا (س ص)$ ، أثبت أن $س ص' + ص = ٠$

(٨) إذا كان $٤ ص^{٢} - جتا ص = س^{٢}$ ، جد $ص'$

الجواب: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س}{٨ ص + جا ص}$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الجواب: $\frac{٣}{٥}$

(١٠) إذا كانت س = جتا٣ن ، ص = جتا٣ن ، أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند ن = $\frac{\pi}{٢}$

الجواب: $\left|\frac{ء ص}{ء س}\right|_{ن=\frac{\pi}{٢}} = ١$

(١١) جد النقطة علي منحنى $|\overline{س}| + |\overline{ص}| = ٣$ التى يكون عندها المماس أفقياً .

الجواب: (٠،٩)

(١٢) إذا كان هـ$^{س^{٢}}$ = لـو$_{هـ}$ (س + ٢ص) جد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند النقطة $\left(\frac{هـ}{٢}، ٠\right)$

الجواب: $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١ - ٢هـ}{٢}$

(١٣) إذا كان ص^{٢} + ٥ = س^{٣} + س ، حيث ص > ٠ ، وكان $\frac{ء ص}{ء م} = ٢$ ، جد $\frac{ء س}{ء م}$ عند س = ٣

الجواب $\frac{ء س}{ء م} = \frac{٥}{٧}$

(١٤) إذا كان ص = (ع − ١)^{٣} ، س = $\frac{١}{ع + ١}$ ، أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند ع = ٠

الجواب $\frac{ء ص}{ء س} = -٣$

(١٥) إذا كان جا^{٢} $|\overline{ص}$ − جتا^{٢} $|\overline{ص}$ = س ، أثبت أن ص$'$ = $|\overline{ص}$ (قتا٢ $|\overline{ص}$)

(١٦) إذا كان المماس لمنحنى ص^{٢} = ٢س + ب عند النقطة (١، ٢) الواقعة عليه يميل بزاوية ظلها = ٣ مع محور السينات الموجب ، جد قيمة كلاً من ا ، ب.

الجواب: ا = ٦ ، ب = −٨

(١٧) إذا كانت ص^{٢} = $|\overline{س^{٢} + ص}$ ، أثبت أن $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢س}{١ - ٤ص^{٣}}$.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الوحدة الثانية

تطبيقات التفاضل

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

أولا / نظرية رول:

إذا كان $ن(س)$ اقترانا متصلا فى الفترة $[أ،ب]$ ، وقابلاً للاشتقاق فى الفترة $]أ،ب[$ ، وكان $ن(أ) = ن(ب)$ فإنه يوجد عدد حقيقى واحد علي الأقل $جـ \in]أ،ب[$ بحيث $ن'(جـ) = ٠$

مثال ١: بين أن الاقتران $ن(س) = س^{٢} - ٥س + ٤$ يحقق شروط نظرية رول فى الفترة $[١،٢]$ ، ثم جد قيمة أو قيم $جـ$ التى تعينها النظرية .

الحل :

١) **نبحث فى تحقق شروط نظرية رول علي الاقتران** $ن(س)$ فى الفترة $[١،٢]$

$ن(س)$ متصل فى الفترة $[١،٢]$ وقابل للاشتقاق فى الفترة $]١،٢[$ لأنه كثير حدود

$ن(٢) = ٢^{٢} - ٥(٢) + ٤ = ٤ - ١٠ + ٤ = -٢$

$ن(١) = ١^{٢} - ٥(١) + ٤ = ١ - ٥ + ٤ = -٢$

إذن تحققت نظرية رول $\therefore$ يوجد عدد حقيقى $جـ \in]١،٢[$ بحيث $ن'(جـ) = ٠$

٢) **نجد قيمة / قيم جـ التى تحددها النظرية حيث** $ن'(س) = ٢س - ٥$

ومنها $ن'(جـ) = ٢جـ - ٥$ $\therefore$ $٢جـ - ٥ = ٠$ ومنها $جـ = \frac{٥}{٢} \in]١،٢[$

مثال ٢ : إذا علمت أن الاقتران $ن(س) = س^{٣} - ٤س + ١$ يحقق شروط نظرية رول فى الفترة $[-أ،٢]$

فما قيمة الثابت $أ$ ؟

الحل :

$\because$ $ن(س)$ يحقق شروط نظرية رول فى الفترة $[-أ،٢]$

$\therefore$ $ن(-٢) = ن(أ)$ ومنها $(-٢)^{٣} - ٤(-٢) + ١ = أ^{٣} - ٤أ + ١$

$أ^{٣} - ٤أ = ٠$ $\Leftarrow$ $أ(أ^{٢} - ٤) = ٠$

إما $أ = ٠$ أو $أ = ٢$

مثال ٣ : إذا كان $ن(س) = \begin{cases} ٥ - س^{٢} & ، \ -٣ \leq س \leq ١ \\ ٦ - ٢س & ، \ ١ < س \leq ٥ \end{cases}$

ابحث فى تحقق شروط نظرية رول علي الفترة $[-٣،٥]$

الحل :

١) $ن(س)$ متصل فى الفترة $[-٣،١]$ لأنه كثير حدود

$ن(س)$ متصل فى الفترة $]١،٥]$ لأنه كثير حدود

ولمعرفة فيما إذا كان $ن(س)$ متصل عند $س = ١$ نحسب

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$\therefore$ ن(س) متصل عند س = ١ $\therefore$ ن(س) متصل علي الفترة [−٣،٥]

٢) ن´(س) = $\begin{cases} -٢س & ، \quad -٣ < س < ١ \\ -٢ & ، \quad ١ < س < ٥ \\ غ.م & ، \quad س = -٣ ، س = ٥ \end{cases}$

$\because$ ن(س) متصل عند س = ١، ن´(١)$^{+}$ = ن´(١)$^{-}$ $\therefore$ ن(س) قابل للاشتقاق عند س = ١

أى أن ن(س) قابل للاشتقاق فى الفترة]−٣،٥[

٣) ن(−٣) = ٥ − $٣^{٢}$ = −٤ ، ن(٥) = ٦ − ٢ × ٥ = −٤

$\therefore$ ن(س) يحقق شروط نظرية رول فى الفترة [−٣،٥]

نحسب قيمة جـ :

أ) إذا كانت −٣ < جـ < ١ فإن −٢جـ = ٠ ومنها جـ = ٠ (مقبول)

ب) إذا كانت ١ < جـ < ٥ فإن ن´(جـ) = ٠ ومنها −٢ = ٠ وهذا مستحيل

$\therefore$ قيمة جـ التى تعينها النظرية هى جـ = ٠

مثال ٤: إذا كان ن(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق علي الفترة [أ،ب] وكان ن(أ) = هـ(أ) ، ن(ب) = هـ(ب) ، أثبت أنه يوجد علي الأقل عدد مثل جـ∈]أ،ب[بحيث أن المماس المرسوم لمنحنى ن(س) عند جـ يوازى المماس المرسوم لمنحنى هـ(س) عند جـ

الحـل : نفرض أن ع(س) = ن(س) − هـ(س)

$\because$ ن(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق علي]أ،ب[$\therefore$ ن(س) ، هـ(س)متصلين علي [أ،ب]

ع(س) متصل علي [أ،ب] لأنه فرق بين اقترانين متصلين

كذلك ع(س) قابل للاشتقاق علي]أ،ب[لأنه فرق بين اقترانين قابلين للاشتقاق

ع(أ) = ن(أ) − هـ(أ) = ٠ & ع(ب) = ن(ب) − هـ(ب) = ٠

$\therefore$ ع(س) يحقق شروط رول علي الفترة [أ،ب]

$\therefore$ يوجد عدد مثل جـ∈]أ،ب[بحيث ع´(جـ) = ٠ $\Leftarrow$ ن´(جـ) − هـ´(جـ) = ٠

ومنها ن´(جـ) = هـ´(جـ)

$\therefore$ ميل المماس للاقتران ن(س) يساوى ميل المماس للاقتران هـ(س)عند س = جـ

$\therefore$ المماس المرسوم للاقتران ن(س) يوازى المماس المرسوم للاقتران هـ(س)عند س = جـ

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

المماس عندها أفقياً ، ثم جد قيمة/قيم جـ التى تحددها النظرية

الحـل : $ن(س) = ٤ - س^{٢}$ **متصل علي الفترة** $[-١،١]$ **لأنه كثير حدود**

$ن(س)$ قابل للاشتقاق علي الفترة $]-١،١[$ لأنه كثير حدود

$\because ن(١) = ٤ - ١^{٢}$ ، $ن(-١) = ٤ - ١^{٢}$

$\therefore ن(١) = ن(-١)$

$\therefore ن(س)$ يحقق شروط نظرية رول

$\therefore$ يوجد $جـ \in]-١،١[$ بحيث $ن'(جـ) = ٠$

أى أن المماس يكون أفقياً عند $س = جـ$

وحيث أن $ن'(س) = ٢س$ $\therefore ٢جـ = ٠$ ومنها $جـ = ٠$

ثانياً/ نظرية القيمة المتوسطة :

إذا كان $ن(س)$ اقترانا متصلا فى الفترة $[١،ب]$ ، وقابلاً للاشتقاق فى الفترة $]١،ب[$ ،

فإنه يوجد عدد حقيقى واحد علي الأقل $جـ \in]١،ب[$ بحيث $ن'(جـ) = \frac{ن(ب) - ن(أ)}{ب - أ}$

مثال ٦ : بين أن الاقتران $ن(س) = \sqrt[٣]{س} + ٢$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة فى الفترة $[-١،٨]$

ثم جد قيمة /قيم جـ التى تحقق النظرية

الحل : $ن(س)$ متصل علي الفترة $[-١،٨]$ لأنه معرف علي ح

$ن(س)$ قابل للاشتقاق فى الفترة $]-١،٨[$

$\therefore$ توجد $جـ \in]-١،٨[$ بحيث $ن'(جـ) = \frac{ن(٨) - ن(-١)}{٨ - (-١)} = \frac{(٢ + \sqrt[٣]{٨}) - (٢ + \sqrt[٣]{-١})}{١ + ٨} = \frac{٤ - ١}{٩} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

وحيث أن $ن(س) = \sqrt[٣]{س} + ٢ = س^{\frac{١}{٣}} + ٢$

$\therefore ن'(س) = \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}}$ ومنها $ن'(جـ) = \frac{١}{٣} جـ^{-\frac{٢}{٣}}$

$\therefore \frac{١}{٣} جـ^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣}$ $\Leftarrow$ $جـ = ١ \in]-١،٨[$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

التى تعينها النظرية حيث : $$\text{ن}(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢ & ، \quad س \geq ١ \\ ٢س - ٣ & ، \quad س < ١ \end{cases}$$

الحـل : لا بد من إعادة كتابة الاقتران ن(س) حتى يتم تعريفه علي الفترة المطلوبة كما يلى :

$$\text{ن}(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢ & ، \quad -١ \leq س \leq ١ \\ ٢س - ٣ & ، \quad ١ < س \leq ٣ \end{cases}$$

أولاً : البحث فى شروط النظرية :

(١) **الاتصال علي الفترة [−١،٣] :**

الاقتران ق متصل علي [−١،١] لأنه كثير حدود & الاقتران ق متصل علي]١،٣] لأنه كثير حدود .

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^{+}} \text{ن}(س) = \text{نهـــا}_{س \to ١^{+}} (٢س - ٣) = -١$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ١^{-}} \text{ن}(س) = \text{نهـــا}_{س \to ١^{-}} (س^{٢} - ٢) = -١ \quad \& \quad \text{ن}(١) = ١ - ٢ = -١$$

∴ ق متصل علي الفترة [−١،٣]

(٢) **قابلية الاشتقاق علي الفترة]−١،٣[**

$$\text{ن}'(س) = \begin{cases} ٢س & ، \quad -١ < س < ١ \\ ٢ & ، \quad ١ < س < ٣ \end{cases}$$

بما أن ق متصل عند س = ١ & $\text{ن}'(١)^{+} = ٢$ & $\text{ن}'(١)^{-} = ١ \times ٢ = ٢$

∴ $\text{ن}'(١)$ موجود ، أى أن ق قابل للاشتقاق علي الفترة]−١،٣[

∴ ق يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة [−١،٣]

ثانياً / إيجاد قيمة جـ :

$$\text{ن}'(جـ) = \frac{\text{ن}(٣) - \text{ن}(-١)}{٣ - (-١)} = \frac{(-١) - ٣}{٤} = ١$$

وحيث أن $\text{ن}'(س) = ٢س$ ، $-١ < س < ١$

∴ $\text{ن}'(جـ) = ٢جـ$ ، $-١ < جـ < ١$ ومنها $جـ = \frac{١}{٢}$

وعندما $س < ١$ ، فإن $\text{ن}'(س) = ٢ \neq ١$

∴ لا توجد جـ تحقق النظرية عندما $س < ١$

∴ $جـ = \frac{١}{٢}$ هى القيمة الوحيدة فى الفترة]−١،٣[التى تعينها النظرية .

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٨: جد الثوابت أ ، ب ، جـ التى تجعل الاقتران الآتى يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة :

$$ن(س) = \begin{cases} ٣ & ، \quad س = ٠ \\ -س^{٢} + ٣س + جـ & ، \quad ٠ < س < ١ \\ أس + ب & ، \quad ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$$

الحـل :

∵ ن(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

∴ $\lim_{س \to ٠^{+}} ن(س) = ن(٠)$ ⇐ $\boxed{جـ = ٣}$

∵ ن(س) متصل عند س = ١

∴ $\lim_{س \to ١^{+}} ن(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ن(س)$

$أ + ب = -١ + ٣ + جـ$ ∴ $\boxed{أ + ب = ٥}$ ..... (١)

∵ ن(س) قابل للاشتقاق علي الفترة]٠،٢[

∴ $ن'(س) = \begin{cases} -٢س + ٣ & ، \quad ٠ < س < ١ \\ أ & ، \quad ١ < س < ٢ \\ غ.م & ، \quad س = ٠ \text{ أو } س = ٢ \end{cases}$

$ن'(١)^{+} = ن'(١)^{-}$ ومنها $أ = -٢ + ٣$ ∴ $\boxed{أ = ١}$

بالتعويض فى المعادلة (١) نجد أن $\boxed{ب = ٤}$

مثال ٩: إذا كان $ن(س) = س^{٣}$ ، $س \in [أ،ب]$ ، باستخدام نظرية القيمة المتوسطة أثبت أن المقدار $\frac{ب^{٣} - أ^{٣}}{ب - أ}$ يقع بين $٣أ^{٢}$ ، $٣ب^{٢}$ حيث $٠ < أ < ب$.

الحـل :

$ن(س) = س^{٣}$ متصل علي الفترة $[أ،ب]$ لأنه كثير حدود

$ن(س) = س^{٣}$ قابل للاشتقاق علي الفترة $]أ،ب[$ لأنه كثير حدود ، $ن'(س) = ٣س^{٢}$

حسب نظرية القيمة المتوسطة توجد $جـ \in]أ،ب[$ بحيث $ن'(جـ) = \frac{ن(ب) - ن(أ)}{ب - أ}$

$٣جـ^{٢} = \frac{ب^{٣} - أ^{٣}}{ب - أ}$ ..... (١)

∵ $جـ \in]أ،ب[$ ⇐ $أ < جـ < ب$ ⇐ $٣أ^{٢} < ٣جـ^{٢} < ٣ب^{٢}$ ..... (٢)

بالتعويض من العلاقة (١) فى العلاقة (٢) ينتج أن: $٣أ^{٢} < \frac{ب^{٣} - أ^{٣}}{ب - أ} < ٣ب^{٢}$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١)بين أياً من الاقترانات الاتية يحقق شروط نظرية رول علي الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة/قيم جـ التى تحددها النظرية :

أ. $ن(س) = \sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤}$ ، $س \in [٠،٢]$

لا توجد قيم ل جـ

ب. $ن(س) = س^{٤} - ٢$ ، $س \in [-٢،٢]$

الجواب: جـ = صفر

ج. $ن(س) = جتا٢س - ٢جتاس$ ، $س \in [٠،٢\pi]$

الجواب : $\left\{\frac{\pi}{٣}، \pi، \frac{\pi٥}{٣}\right\}$

(٢)بين أيا من الاقترانات الآتية يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة المعطاة ، ثم جد قيمة/قيم جـ التى تحددها النظرية فى كل حالة إن وجدت :

أ. $ن(س) = \frac{١}{س^{٢}}$ ، $س \in [١،٤]$

الجواب: جـ $= \sqrt[٣]{\frac{٣٢}{٥}}$

ب. $ن(س) = \sqrt{س - ١}$ ، $س \in [١،١٠]$

الجواب: جـ $= \frac{١٣}{٤}$

ج. $ن(س) = س^{٣} - ١$ ، $س \in [-٢،٢]$

الجواب: جـ $= \pm \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(٣)ابحث فى تحقق شروط نظرية رول للاقتران $ن(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ٥ & ، -٢ \leq س < ٠ \\ س^{٣} + ٥ & ، ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

ثم جد قيمة/قيم جـ التى تحددها النظرية

الجواب: جـ $= ٠$

(٤)إذا كان $ن(س)$ كثير حدود ، $هـ(س)$اقتراناً خطياً وكان منحنى $هـ(س)$ يقطع منحنى $ن(س)$ فى ثلاث نقاط $س_١، س_٢، س_٣$ بحيث $س_١ < س_٢ < س_٣$ ، أثبت أنه يوجد جـ $\in]س_١، س_٣[$ بحيث $ن''(جـ) = ٠$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(٥) إذا كان $ن(س) = \begin{cases} ٢س + ء & ، \ ٢ \geq س \geq ٤ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية رول فى الفترة [٤،٠] ، جد :

١- أ ، ب ، ء

الجواب: أ = ٢ ، ب = −٦ ، ء = −٦

٢- قيمة / قيم جـ التى تحددها النظرية

الجواب: $جـ = \frac{٣}{٢}$

(٦) بين أن الاقتران $ن(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣ & ، \ ١ \geq س \geq ٠ \\ \frac{-٢}{س} & ، \ ٢ \geq س > ١ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة فى الفترة [٢،٠]

ثم جد قيمة/ قيم جـ التى تحددها النظرية

الجواب: $جـ = \frac{١}{٢}$ أو $\sqrt{٢}$

(٧) أثبت أن الاقتران $ن(س) = \begin{cases} س^{٣} - [س + ٣]س & ، \ ١ > س \geq ٠ \\ ٢س^{٢} - ٤س & ، \ ٢ \geq س \geq ١ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية رول فى الفترة [٢،٠]

ثم جد قيمة جـ التى تعينها النظرية .

الجواب: جـ = ١

(٨) إذا كانت $ن(س) = س^{٢} + أس + ب$ ، $س \in]٥،١[$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ، وكانت معادلة المماس عند قيمة جـ التى تعينها النظرية هى $ص = ٢س - ٨$. أوجد قيمة كلاً من الثوابت أ ، ب ، جـ

الجواب: أ = −٤ ، ب = ٥ ، جـ = ٣

(٩) إذا كان $ن(س) = \frac{أ}{س} + س$ ، $أ \neq ٠$. $س \in]أ،ب[$ ، أثبت أنه يوجد $جـ \in]أ،ب[$ بحيث $جـ^{٢} = أ \times ب$

(١٠) إذا كان $ن(س)$ كثير حدود يمر بالنقاط (١،٢) ، (٢،٣) ، (٣،٤) . برهن باستخدام نظرية رول وجود عدد واحد علي الأقل $جـ \in]١،٣[$ بحيث $ن'(جـ) = ٠$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تعريف :

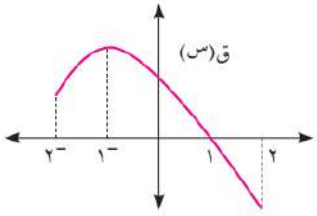
يكون منحنى الاقتران ن(س) المعرف فى [أ،ب] ، س١ ، س٢ ∈ [أ،ب]

(١) متزايداً فى [أ،ب] إذا تحقق الشرط : عندما س١ < س٢ فإن ن(س١) < ن(س٢)

(٢) متناقصاً فى [أ،ب] إذا تحقق الشرط : عندما س١ < س٢ فإن ن(س١) > ن(س٢)

(٣) ثابتاً فى [أ،ب] إذا تحقق الشرط : عندما س١ < س٢ فإن ن(س١) = ن(س٢)

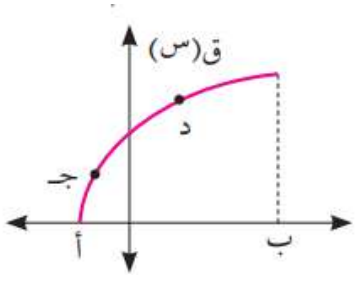
مثال ١ : فى الشكل المقابل : حدد الفترات التى يكون فيها منحنى الاقتران متزايداً أو متناقصاً ، أو ثابتاً:

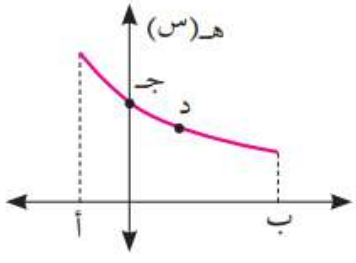


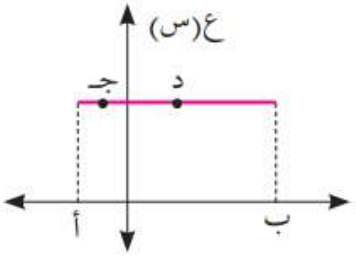
الحـل : من الرسم يتضح أن الاقتران ق(س) متزايد فى الفترة [-٢، -١] & متناقص فى الفترة [-١، ٢]

حل نشاط(٢) صفحة ٦٧من الكتاب

(١) ن(س) متزايد فى الفترة [أ،ب] ، هـ(س) متناقص فى الفترة [أ،ب] ، ع(س) ثابت فى الفترة [أ،ب]







(٢) زاوية ميل المماسات المرسومة عند جـ ، د للاقتران ن(س) حادة

زاوية ميل المماسات المرسومة عند جـ ، د للاقتران هـ(س) منفرجة

زاوية ميل المماسات المرسومة عند جـ ، د للاقتران ع(س) صفر

(٣) إشارة ظل زاوية ميل المماس :

إشارة ن`(س) موجب & إشارة هـ`(س) سالب & إشارة ع`(س) = صفر

(٤) عندما تكون إشارة مشتقة الاقتران موجبة يكون الاقتران متزايد

عندما تكون إشارة مشتقة الاقتران سالبة يكون الاقتران متناقص

عندما تكون إشارة مشتقة الاقتران صفر يكون الاقتران ثابت

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

نظرية :

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلا فى [أ،ب] وقابلاً للاشتقاق فى]أ،ب[فإن منحنى :

(١) الاقتران ق(س) يكون **متزايد** فى [أ،ب] إذا كانت ق´(س) > ٠ ، ∀س∈]أ،ب[

(٢) الاقتران ق(س) يكون **متناقص** فى [أ،ب] إذا كانت ق´(س) < ٠ ، ∀س∈]أ،ب[

(٣) الاقتران ق(س) يكون **ثابت** فى [أ،ب] إذا كانت ق´(س) = ٠ ، ∀س∈]أ،ب[

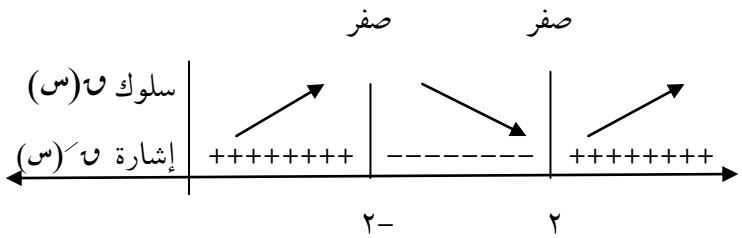
مثال ٢ : جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = س^{٣} − ١٢س ، س∈ح

الحـل :

ق´(س) = ٣س^{٢} − ١٢

نضع ق´(س) = ٠ ومنها ٣س^{٢} − ١٢ = ٠ ⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ±٢

نعين إشارة ق´(س) ومنها نحكم علي سلوك الاقتران من حيث التزايد والتناقص ونوضح ذلك من خلال الشكل المجاور



الاقتران ق(س) متزايد فى الفترتين]−∞،−٢] ، [٢،∞[، ومتناقص فى [−٢،٢]

مثال ٣: عين فترات التزايد والتناقص الاقتران ق(س) = $\frac{س-١}{س^{٢}-٤}$ ، س ≠ −٢ ، س ≠ ٢

الحـل :

$$ق´(س) = \frac{١\times(س^{٢}-٤)-(س-١)\times٢س}{(س^{٢}-٤)^{٢}} = \frac{س^{٢}-٤-٢س^{٢}+٢س}{(س^{٢}-٤)^{٢}} = \frac{-س^{٢}+٢س-٤}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$$

نضع ق´(س) = ٠ ⇐ س^{٢} − ٤ − ٢س^{٢} + ٢س = ٠

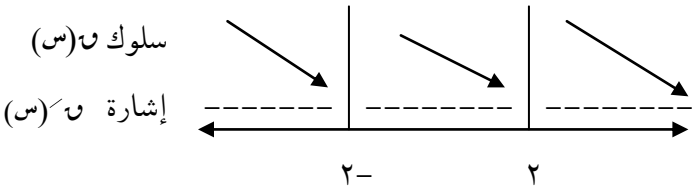
⇐ − س^{٢} + ٢س − ٤ = ٠

لا يوجد لها جذور

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b



الشكل المقابل يوضح إشارة ن´(س)

ن(س) متناقص فى الفترات]-∞،-٢[،]-٢،٢[،]٢،∞[

ملاحظة / لا يمكن القول أن ن(س) متناقص علي ح ، لماذا ؟

مثال ٤ : عين فترات التزايد والتناقص ،الاقتران ن(س) = جتا٢س - جاس ، علي الفترة]٠،π[

الحـل :

ن(س) = جتا٢س - جاس متصل فى الفترة]٠،π[

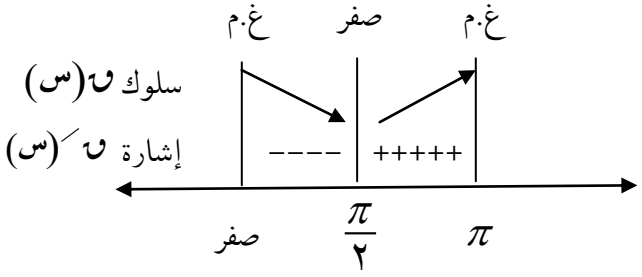
ن´(س) = -٢جتاس جاس - جتاس ، س ∈]٠،π[

نضع ن´(س) = ٠ ومنها -٢جتاس جاس - جتاس = ٠

جتاس (٢جاس + ١) = ٠ ⇐ إما جتاس = ٠ أو ٢جاس + ١ = ٠

عندما جتاس = ٠ فإن $س = \frac{\pi}{٢}$

عندما $جاس = \frac{-١}{٢}$ فإن س ليس لها قيمة فى الفترة]٠،π[



من اشارة ن´(س) فى الشكل المقابل يكون

الاقتران ن(س) متناقص فى $\left[\frac{\pi}{٢}، ٠ \right]$ ، ومتزايد فى $\left[\pi، \frac{\pi}{٢} \right]$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) جد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى ن(س) في كل من الاقترانات الآتية :

أ. ن(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س + ١٥

الجواب : متزايد في]−∞، −١[،]٣، ∞[متناقص في]−١، ٣[

ب. ن(س) = $\sqrt[٣]{س^{٣} - ٤س}$

الجواب: متزايد في الفترتين $\left]-\infty، \frac{-٢}{\sqrt{٣}}\right[$ ،]٢، ∞[& متناقص في الفترة $\left]\frac{-٢}{\sqrt{٣}}، ٠\right[$

ج. ن(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} + س - ٦}$

الجواب: متزايد في الفترة]٢، ∞[& متناقص في]−∞، −٣[

د. ن(س) = $\begin{cases} ٥ - س & ، \quad س \geq ٢ \\ \frac{٢}{س} & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

الجواب: متزايد في الفترة]−∞، ٠[، متناقص في الفترتين]٠، ٢] ،]٢، ∞[

هـ. ن(س) = جا^{٢}٢س ، $\pi > س > ٠$

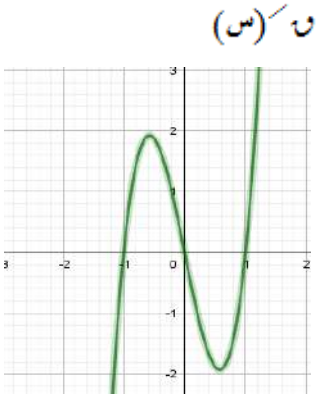
الجواب : متزايد في $\left]٠، \frac{\pi}{٢}\right]$ ، متناقص في $\left[\frac{\pi}{٢}، \pi\right[$

(٢) إذا كان ن(س) كثير حدود متناقص علي ح ، وكان هـ(س) = ن(س^{٢} − ٢س) ،حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س)

الجواب : متزايد في الفترة]−∞، ١] & متناقص في الفترة [١، ∞[

(٣) الشكل المقابل يوضح منحنى ن′(س)

حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ن(س) علي ح



الجواب: متزايد في الفترتين [−١، ٠] ، [١، ∞[& متناقص في الفترتين [٠، ١] ،]−∞، −١]

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(٤)إذا كان $ن(س) = \frac{}{س} + س$ ، $س \neq ٠$ ، جد مجالات التزايد والتناقص لمنحنى $ن$ ، $ن'(س)$

الجواب: متزايد فى الفترتين $]-\infty، -١[$ ، $]٠، \infty[$ & متناقص فى الفترة ، $[-١، ٠[$

(٥)عين فترات التزايد والتناقص علي مجال $ن(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٦س + ٤ & ، \quad س \geq ٠ \\ [س + ٤] & ، \quad ٠ < س < ١ \\ |٣س + ١| & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$

الجواب : متزايد علي الفترتين $[-٣، ٠]$، $[١، \infty[$ & متناقص فى الفترة $]-\infty، -٣[$ & ثابت فى الفترة $[١، ٠]$

(٦)إذا كان $ن(س)$ متصلاً علي الفترة $[أ، ب]$ وقابلاً للاشتقاق علي الفترة $]أ، ب[$ وكان $ن'(س) > ٠$ لكل $س \in]أ، ب[$ وكان $هـ(س) = ن(س) + س^{٣}$. أثبت أن $هـ(س)$ متزايد علي الفترة $[أ، ب]$

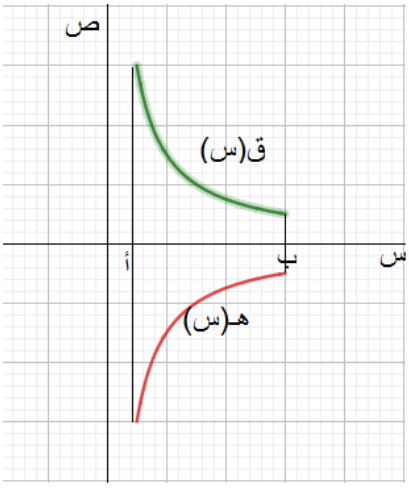
(٧)إذا كان $ن(س)$ كثير حدود متناقص علي ح ، وكان $ل(س) = ن(س^{٢} + ٢س)$ حدد فترات التزايد والتناقص لمنحنى $ل(س)$

الجواب: $ل(س)$ متزايد فى الفترة $]-\infty، -١[$ ومتناقص فى الفترة $[-١، \infty[$

(٨)إذا كان $ن(س)$ ، $هـ(س)$ كثيرى حدود معرفتين فى الفترة $[١، ٥]$ بحيث $ن(س)$متزايد فى مجاله ويقع فى الربع الأول ، ومنحنى $هـ(س)$ متناقص فى مجاله ويقع فى الربع الرابع . بين هل $ن(س) \times هـ(س)$ متناقص أم متزايد فى الفترة $[١، ٥]$

$ن(س) \times هـ(س)$ متناقص فى الفترة $[١، ٥]$

(٩)الشكل المقابل يوضح التمثيل البيانى لمنحنى كلاً من $ن(س)$ ، $هـ(س)$ فى الفترة $[أ، ب]$. أثبت أن : $(ن \times هـ)(س)$ متزايد علي الفترة $[أ، ب]$



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تعريف القيم الصغري والقصوي المحلية :

ليكن ن(س) اقتراناً معرفاً علي المجال ع ، ولتكن جـ ∈ ع ، عندها يكون للاقتران ن(س) :

(١) قيمة عظمي محلية عند س = جـ هى ن(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحوى جـ بحيث أن

ن(جـ) ≥ ن(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

(٢) قيمة صغري محلية عند س = جـ هى ن(جـ) إذا وجدت فترة مفتوحة ف تحوى جـ بحيث أن

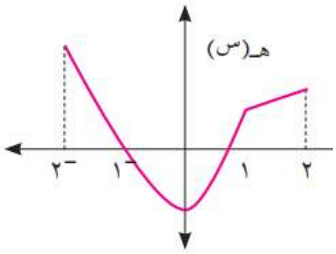
ن(جـ) ≤ ن(س) لجميع قيم س ∈ (ف ∩ ع)

(٣) قيمة عظمي مطلقة عند س = جـ هى ن(جـ) إذا كانت ن(جـ) ≥ ن(س) لجميع قيم س ∈ ع

(٤) قيمة عظمي مطلقة عند س = جـ هى ن(جـ) إذا كانت ن(جـ) ≤ ن(س) لجميع قيم س ∈ ع

مثال ١ : نشاط (٢) صفحة ٧٣ من الكتاب الوزارى :

يمثل الشكل المجاور منحنى هـ(س) فى الفترة [−٢،٢] ،



١- يوجد للاقتران هـ(س) قيمة عظمي محلية عند س = −٢

هى ن(−٢) لأنه يوجد ف =]−٣،−١[تحوى العدد −٢

بحيث أن ن(−٢) ≥ ن(س) ∀ س ∈ ف ∩]−٢،٢[=]−٢،−١[

ن´(−٢) غير موجودة لأن (−٢،ن(−٢)) نقطة طرفية

٢- يوجد للاقتران قيمة صغري محلية وهى مطلقة عند س = ٠ لأن ن(٠) ≤ ن(س) ∀ س ∈ [−٢،٢]

ن´(٠) = ٠ لأن ميل المماس عند (س=٠) يساوى صفر

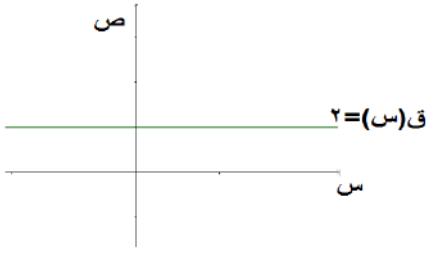
٣- يوجد قيمة عظمي محلية عند س = ٢ لأنه يوجد ف = [١،٣] تحوى العدد ٢ بحيث أن

ن(٢) ≥ ن(س) ∀ س ∈ ف ∩ [١،٣] = [١،٢]

ن´(٢) غير موجودة لأن (٢،ن(٢)) نقطة طرفية

لاحظ أن : عند س = ١ لا توجد قيمة عظمي أو صغري محلية

مثال ٢ : إذا كان ن(س) = ٢ ، س ∈ [٠،٥] . حدد القيم القصوي المحلية للاقتران ن(س)



الحـــل : ن(س) متصل فى الفترة [٠،٥] لأنه ثابت

ن´(س) = ٠ ∀ س ∈]٠،٥[

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

كما وأنه حسب التعريف $\forall$ س $\in$ [٠،٥] يوجد قيمة صغري محلية هى ٢ لأن $\forall$ س فى تلك الفترة $ن(س) \geq ٢$

ملاحظة هامة :

إذا كان $ن(س) = أ$ ، حيث أ ثابت فإن أ هى قيمة عظمي محلية ، أ هى قيمة صغري محلية

تعريف :

تسمي النقطة $(أ، ن(أ))$ نقطة حرجة للاقتران $ن(س)$ إذا كانت :

١ـ $أ \in ن(س)$

٢ـ $ن'(أ) = ٠$ أو $ن'(أ)$ غير موجودة

مثال ٣ : **جد جميع قيم س التى يكون للاقتران عندها نقط حرجة حيث** $ن(س) = س^{٣} - ٣س$ ، $س \in [-٢،٥]$

الحـــل :

$ن(س)$ متصل علي ح لأنه كثير حدود

$ن'(س) = ٣س^{٢} - ٣$ ، $س \in]-٢،٥[$

نجعل $ن'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٣ = ٠$ ومنها $س^{٢} = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

مجموعة قيم س التى يوجد للاقتران عندها نقط حرجة هى $\{-١، ١، ٢\}$

لاحظ أنه لا توجد نقطة حرجة عند $س = ٥$ لأنها لا تنتمى إلى مجال الاقتران

مثال ٤ : جد جميع النقط الحرجة للاقتران $ن(س) = |س^{٢} - ٤|$ ، $س \in [-٣،٣]$

الحـــل :

$$ن(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤ & ، -٣ < س \leq -٢ \\ ٤ - س^{٢} & ، -٢ < س < ٢ \\ س^{٢} - ٤ & ، ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢س & ، -٣ < س < -٢ \\ -٢س & ، -٢ < س < ٢ \\ ٢س & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

$ن'(س)$ غير موجودة عند $س = -٢،٢$

كذلك $ن'(س)$ غير موجودة عند $س = -٣،٣$ لأنها نقاط طرفية

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

∴ لا توجد نقط حرجة للاقتران فى الفترة]−٣،٢−[

عندما س∈]−٢،٢[⇐ ن´(س) = ٠ ⇐ −٣س٢ = ٠ ومنها س = ٠∈]−٢،٢[

∴ توجد نقط حرجة للاقتران عند س = ٠

لا يوجد نقطة حرجة عند س = −٣ لأنها لا تنتمى إلى مجال ن(س)

النقط الحرجة (٤،٠)،(−٢،٠)،(٢،٠)،(٣،٥)

اختبار المشتقة الأولى لتعيين القيم القصوي :

إذا كان ن(س) اقتراناً متصلاً فى الفترة [أ،ب] وكانت (جـ،ن(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ن(س)، جـ∈]أ،ب[فإنه :

(١) إذا كان ن´(س) > ٠ عندما أ < س <جـ ، وكان ن´(س) < ٠ عندما جـ < س < ب فإن ن(جـ) قيمة عظمي للاقتران ن(س).

(٢)إذا كان ن´(س) < ٠ عندما أ < س <جـ ، وكان ن´(س) > ٠ عندما جـ < س < ب فإن ن(جـ) قيمة صغري للاقتران ن(س).

مثال ٥: جد القيم القصوي المحلية للاقتران ن(س) = س^٣ − ٣س^٢

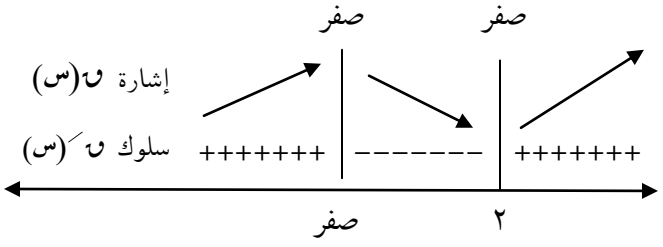
الحـل : ن(س) **متصل علي ح لأنه كثير حدود**

ن´(س) = ٣س^٢ − ٦س ∀س∈ح

نجعل ن´(س) = ٠ ومنها ٣س^٢ − ٦س = ٠

⇐ ٣س(س − ٢) = ٠ ⇐ إما س = ٠ أو س = ٢

نوضح إشارة ن´(س) فى الشكل المقابل



من إشارة ن´(س)

ن(٠) = ٠ قيمة عظمي محلية

ن(٢) = ٢^٣ − ٣(٢)^٢ = −٤ قيمة صغري محلية

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

جد القيم العظمي المحلية والصغري المحلية للاقتران $ن(س) = س + \frac{١٦}{س}$ ، $س \neq ٠$

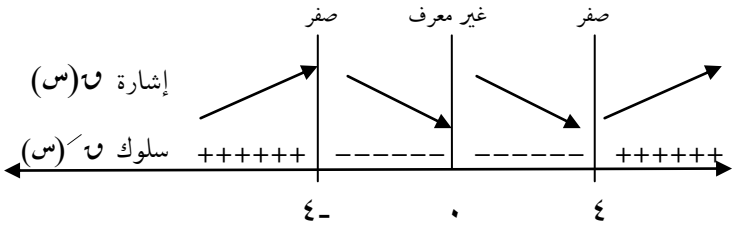
الحـــل :

$ن(س)$ متصل علي $ح - \{٠\}$

$$ن'(س) = ١ - \frac{١٦}{س^٢} = \frac{س^٢ - ١٦}{س^٢} \quad ، \quad س \neq ٠$$

نجعل $ن'(س) = ٠$ ومنها $\frac{س^٢ - ١٦}{س^٢} = ٠ \Leftarrow س^٢ - ١٦ = ٠$ ومنها $س = \pm ٤$

نوضح إشارة $ن'(س)$ في الشكل المقابل



من الشكل يتضح لنا أن $ن(-٤) = -٤ + \frac{١٦}{-٤} = -٨$ قيمة عظمي محلية

وكذلك $ن(٤) = ٤ + \frac{١٦}{٤} = ٨$ قيمة صغري محلية

لاحظ أنه لا توجد نقطة حرجة عند س = ٠ لأنها لا تنتمي إلى مجال ح

اختبار أطراف الفترة :

إذا كان $ن(س)$ اقترانا متصلاً في $[أ، ب]$ فإن :

(١) $ن(أ)$ قيمة صغري محلية ، إذا كانت $ن'(س) < ٠$ عندما $س > أ$ (بداية تزايد)

(٢) $ن(أ)$ قيمة عظمي محلية ، إذا كانت $ن'(س) > ٠$ عندما $س > أ$ (بداية تناقص)

(٣) $ن(ب)$ قيمة عظمي محلية ، إذا كانت $ن'(س) < ٠$ عندما $س < ب$ (نهاية تزايد)

(٤) $ن(ب)$ قيمة صغري محلية ، إذا كانت $ن'(س) > ٠$ عندما $س < ب$ (نهاية تناقص)

مثال ٧:

إذا كان $ن(س) = \begin{cases} س^٢ & ، \quad -١ \leq س \leq ١ \\ س - لـو_هـ س & ، \quad ١ < س \leq ٤ \end{cases}$

(١) جد مجموعة النقط الحرجة للاقتران $ن(س)$.

(٢) جد القيم القصوي المحلية للاقتران $ن(س)$.

الحـــل : ∵ $ن(س)$ متصل في الفترة $[-١، ٤]$ (تحقق من ذلك)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$\therefore \quad ن'(س) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{س} & ، \quad 1 < س < ٤ \\ غ.م & ، \quad س = -١،٤٦ \end{cases}$$

أولاً / عندما $س \in]-١،١[$ نجعل $ن'(س) = ٠$ فيكون $٢س = ٠$ ومنها $س = ٠$

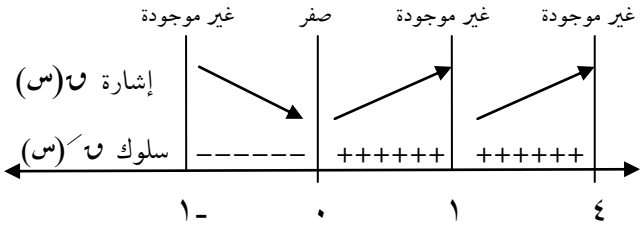
$\therefore$ توجد نقطة حرجة عند $س = ٠$

ثانياً / عندما $س \in]١،٤٦[$ نجعل $ن'(س) = ٠$ فيكون $1 - \frac{1}{س} = ٠$ ومنها $س = ١ \notin]١،٤٦[$

$\because ن'(س)$ غير موجودة عند $س = -١$ ، $س = ١$ ، $س = ٤$

$\therefore$ توجد نقاط حرجة عند هذه القيم

مجموعة قيم $س$ التى عندها نقط حرجة $\{-١،٠،١،٤٦\}$



من إشارة $ن'(س)$ فى الشكل السابق يتضح أن:

عند $س = -١$ يوجد قيمة عظمي محلية هى $ن(-١) = ١$ لأنها بداية تناقص

عند $س = ٠$ يوجد قيمة صغري محلية هى $ن(٠) = ٠$ وهى مطلقة

عند $س = ٤$ يوجد قيمة عظمي محلية هى $ن(٤) = ٤ - لـو_{ه} ٤$ لأنها نهاية تزايد

نظرية القيم القصوي المطلقة :

إذا كان $ن(س)$ اقترانا متصلاً فى $[ا،ب]$ فإن $ن(س)$ يتخذ قيمه القصوي المطلقة فى الفترة $[ا،ب]$

مثال ٨:

إذا كان $ن(س) = \begin{cases} ٤ - ٢س & ، \quad ٠ \leq س < ١ \\ س + ١ & ، \quad ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

(١) جد مجموعة النقط الحرجة للاقتران $ن(س)$

(٢) جد القيم القصوي المحلية للاقتران $ن(س)$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

لإيجاد النقط الحرجة :

$$ن'(س) = \begin{cases} -٢ & ، \quad ٠ < س < ١ \\ ١ & ، \quad ١ < س < ٢ \\ غ.م & ، \quad س = ١٫٠ ، ٢٫٠ \end{cases}$$

النقط الحرجة حيث $س = ١٫٠ ، ٢٫٠$

$ن(٠) = ٤$ ، $ن(١) = ٢$ ، $ن(٢) = ٣$

بمقارنة النتائج الثلاث نستنتج أن :

$ن(١) = ٢$ قيمة صغري مطلقة للاقتران $ن(س)$

$ن(٠) = ٤$ قيمة عظمي مطلقة للاقتران $ن(س)$

مثال ٩: أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران $ن(س) = ٢س^{٣} - ٦س$ في الفترة $\left[-\frac{٣}{٢}، \frac{٣}{٢}\right]$

الحـــل :

$ن(س)$ متصل علي الفترة $\left[-\frac{٣}{٢}، \frac{٣}{٢}\right]$ لأنه كثير حدود

$ن'(س) = ٦س^{٢} - ٦$ ، $س \in \left]-\frac{٣}{٢}، \frac{٣}{٢}\right[$

عندما $ن'(س) = ٠$ يكون $٦س^{٢} - ٦ = ٠$ ومنها $س = \pm ١$

نحسب $ن(س)$ عند النقط الحرجة

$ن(-١) = ٢(-١)^{٣} - ٦(-١) = -٢ + ٦ = ٤$

$ن(١) = ٢(١)^{٣} - ٦(١) = ٢ - ٦ = -٤$

$ن(-\frac{٣}{٢}) = ٢(-\frac{٣}{٢})^{٣} - ٦(-\frac{٣}{٢}) = \frac{٩}{٤}$

$ن(\frac{٣}{٢}) = ٢(\frac{٣}{٢})^{٣} - ٦(\frac{٣}{٢}) = -\frac{٩}{٤}$

∴ أكبر قيمة للاقتران $= ٤$ ، أصغر قيمة للاقتران $= -٤$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية :

أ. $ن(س) = ٩ - س^{٢}$

الجواب : $(٩،٠)$

ب. $ن(س) = ٥$ ، $س \in [٤،٠]$

الجواب : $(س،٥) \ \forall \ س \in [٤،٠]$

ج. $ن(س) = \sqrt[٣]{س - ٢}$ ، $س \in ع$

الجواب : لا توجد نقاط حرجة

د. $ن(س) = \sqrt{٤س - س^{٢}}$ ، $٠ \leq س \leq ٤$

الجواب : $(٠،٠)$ ، $(٢،٢)$ ، $(٤،٠)$

(٢) في كل مما يلي جد القيم العظمي والصغري المحلية للاقتران $ن(س)$ (إن وجدت)

أ. $ن(س) = \sqrt{٩ - س^{٢}}$

الجواب: كلاً من $ن(-٣) = ٠$ ، $ن(٣) = ٠$ قيمة صغري محلية ، $ن(٠) = ٣$ عظمي محلية وهي مطلقة

ب. $ن(س) = قا^{٢}س + ظا^{٢}س$ ، $س \in [\pi،٠]$

الجواب: توجد قيمة صغري محلية عند $س = ٠$ هي $ن(٠) = ١$ & توجد قيمة صغري محلية عند $س = \pi$ هي $ن(\pi) = ١$

ج. $ن(س) = هـ^{(س+١)^{٢}}$ ، $س \in ع$

الجواب: $ن(-١) = ١$ صغري محلية

د. $ن(س) = \left[\frac{١}{٢}س - ١ \right]$ ، $س \in [٢،٠]$

الجواب : $ن(س)$ ثابت لكل $س \in [٢،٠]$، $ن(٢) = -١$ صغري محلية

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

جد قيمتى كلا من أ ، ب .

الجواب: أ = ١ ، ب = −٥

(٤) إذا كان $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - س + ٢ & ، \quad -٣ \leq س < ١ \\ |س - ٣| & ، \quad ١ \leq س < ٨ \end{cases}$

أوجد القيم العظمي والصغري المحلية ، وبين المطلقة منها .

الجواب: القيم العظمي المحلية هى د(−٣) ، د(١) ، د(٨) & القيم الصغري المحلية هى $د(\frac{١}{٢})$ ، د(٣))

(٥) جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للاقتران $د(س) = جاس - \frac{١}{٣}جا^{٣}س$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

أكبر قيمة $د(\frac{\pi}{٢}) = \frac{٢}{٣}$ & أصغر قيمة $د(\frac{\pi ٣}{٢}) = -\frac{٢}{٣}$

(٦) إذا علمت أن للاقتران د(س) قيمة عظمي محلية عند النقطة (٣،٢) ، بين أن للاقتران هـ(س) = (١ − د(س))^{٣} قيمة صغري محلية عند النقطة (٢،−٨)

(٧) باستخدام القيم القصوي أثبت أن المقدار $٤س^{٤} - \frac{١}{٥}س^{٥} + ٢$ موجب دائماً .

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

اختبار التقعر باستخدام المشتقة الثانية :

إذا كان $ن(س)$ اقترانا متصلاً فى الفترة $[أ،ب]$ ، وكان $ن''(س)$ معرفاً فى الفترة $]أ،ب[$ فإن منحنى $ن(س)$ يكون :

(١) مقعراً لأعلي فى الفترة $]أ،ب[$ إذا كانت $ن''(س) > ٠$ لجميع قيم $س \in]أ،ب[$

(٢) مقعراً لأسفل فى الفترة $]أ،ب[$ إذا كانت $ن''(س) < ٠$ لجميع قيم $س \in]أ،ب[$

(٣) غيرمقعرللأعلي أو للأسفل فى الفترة $]أ،ب[$ إذا كانت $ن''(س) = ٠$ لجميع قيم $س \in]أ،ب[$

مثال ١: إذا كان $ن(س) = س^{٤} - س^{٣} + ٥س$ ، أوجد الفترة التى يكون منحنى $ن(س)$ فوق جميع مماساته ، والفترة التى يكون فيها $ن(س)$ تحت جميع مماساته

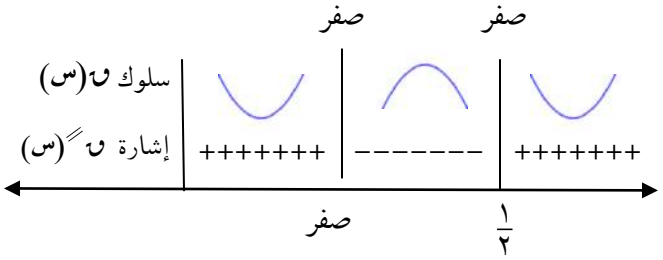
الحـــل: $ن(س)$ متصل علي ح لأنه كثير حدود

$ن'(س) = ٤س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥$

$ن''(س) = ١٢س^{٢} - ٦س$

بوضع $ن''(س) = ٠$ نجد أن $١٢س^{٢} - ٦س = ٠$ ومنها $٦س(٢س - ١) = ٠$

$\therefore$ $س = ٠$ أو $س = \frac{١}{٢}$



من الشكل يتضح أن $ن(س)$ يقع فوق جميع مماساته (مقعر لأعلي) فى الفترات $]-\infty، ٠[$ ، $]\frac{١}{٢}، \infty[$

$ن(س)$ يقع تحت جميع مماساته (مقعر لأسفل) فى الفترة $]\frac{١}{٢}، \infty[$

مثال ٢: إذا كان $ن(س) = \sqrt[٣]{س}$ أوجد مجالات التقعر لأعلي والتقعر لأسفل للاقتران $ن(س)$

الحـــل: $ن(س)$ متصل علي ح لأن مجال الاقتران معرف علي ح

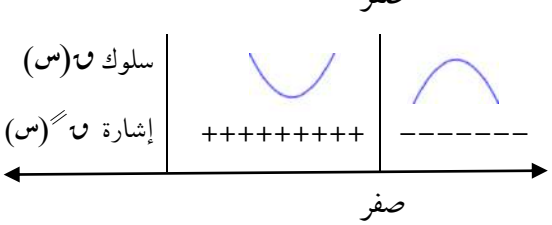
$ن(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ $\therefore$ $ن'(س) = \frac{١}{٣} س^{-\frac{٢}{٣}}$ ومنها $ن''(س) = -\frac{٢}{٩} س^{-\frac{٥}{٣}}$

نجعل $ن''(س) = ٠$ فيكون $-\frac{٢}{٩} س^{-\frac{٥}{٣}} = ٠$ ومنها $س = ٠$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b



من إشارة ن ′(س) فى الشكل السابق يتضح أن: ن(س) مقعر لأعلي فى الفترة]−∞،٠[

ن(س) مقعر لأسفل فى الفترة]٠،∞[

تعريف :

(١) تسمي النقطة (جـ،ن(جـ)) نقطة انعطاف للاقتران ن(س) إذا كان :

- ن(س) اقتراناً متصلاً عند س = جـ
- يغير الاقتران إتجاه تقعر منحناه عند س = جـ من الأعلي إلى الأسفل أو العكس

(٢) زاوية الانعطاف : هى زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة الانعطاف

(٣) إذا كانت (جـ،ن(جـ)) نقطة انعطاف وكان ن ′(جـ) = ٠ فتسمي النقطة (جـ،ن(جـ)) نقطة انعطاف أفقى

مثال ٣: إذا كان $ن(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٩}$ ، أوجد مجالات التقعر لأعلي ولأسفل ونقط الانعطاف للاقتران ن(س)

الحـــل:

ن(س) متصل علي ح

$$ن'(س) = \frac{١ \times (س^{٢} + ٩) - س(٢س)}{(س^{٢} + ٩)^{٢}} \Leftarrow ن'(س) = \frac{٩ - س^{٢}}{(س^{٢} + ٩)^{٢}}$$

$$ن''(س) = \frac{-٢س(س^{٢} + ٩)^{٢} - (٩ - س^{٢})(٢)(٢س^{٢} + ٩)س٢}{(س^{٢} + ٩)^{٢}}$$

بأخذ $-٢س(س^{٢} + ٩)$ عامل مشترك فى البسط

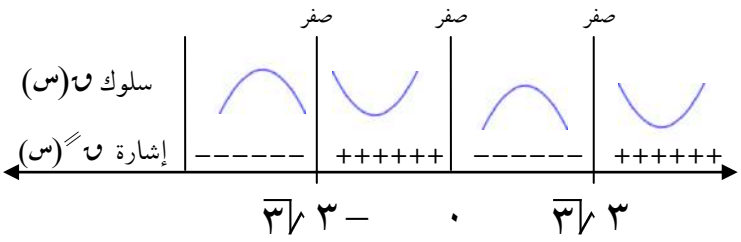
$$ن''(س) = \frac{-٢س(س^{٢} + ٩)(س^{٢} + ٩ + ١٨ - ٢س^{٢})}{(س^{٢} + ٩)^{٢}}$$

$$ن''(س) = \frac{-٢س(س^{٢} + ٩)(٢٧ - س^{٢})}{(س^{٢} + ٩)^{٢}}$$

عندما $ن''(س) = ٠ \Leftarrow \frac{-٢س(س^{٢} + ٩)(٢٧ - س^{٢})}{(س^{٢} + ٩)^{٢}} = ٠$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$\Leftarrow$ إما س = ٠ أو س = ٣ $\sqrt{٣}$ أو س = $-٣\sqrt{٣}$



من الشكل الموضح يتضح أن : ن(س) مقعر لأسفل فى الفترة $]-\infty، -٣\sqrt{٣}[$ ، $]٠، ٣\sqrt{٣}[$

ن(س) مقعر لأعلي فى الفترة $]-٣\sqrt{٣}، ٠[$ ، $]٣\sqrt{٣}، \infty[$

نقط الانعطاف : $(-٣\sqrt{٣}، ن(-٣\sqrt{٣})) = (-٣\sqrt{٣}، \frac{-\sqrt{٣}}{١٢})$ وكذلك $(٠،٠) = (٠، ن(٠))$

وكذلك $(٣\sqrt{٣}، ن(٣\sqrt{٣})) = (٣\sqrt{٣}، \frac{\sqrt{٣}}{١٢})$

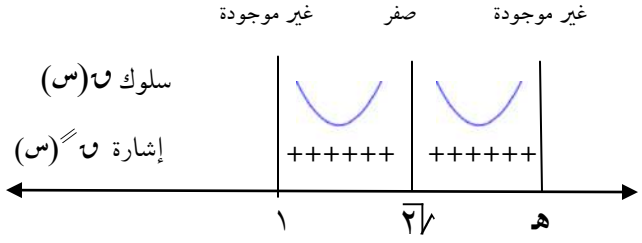
مثال ٤: بين أنه لا توجد للاقتران ن(س) = لـو$_{هـ}$(٢س) + س^{٢} نقطة انعطاف فى الفترة $[١، هـ]$ ، س > ٠

الحـــل:

$ن'(س) = \frac{٢}{٢س} + ٢س = \frac{١}{س} + ٢س$

$ن''(س) = -\frac{١}{س^{٢}} + ٢$

عندما $ن''(س) = ٠$ يكون $-\frac{١}{س^{٢}} + ٢ = ٠$ ومنها س = $\sqrt{٢}$



بما أن ن(س) لا يغير من اتجاه تقعره ، فلا توجد نقاط إنعطاف للاقتران ن(س) فى الفترة $[١، هـ]$

مثال ٥: إذا كان ن(س) = س − جاس ، س $\in \left[-\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$ ، أوجد فترات التقعر لأعلي ولأسفل للاقتران ن(س) ، ثم جد نقط الانعطاف وزوايا الانعطاف إن وجدت .

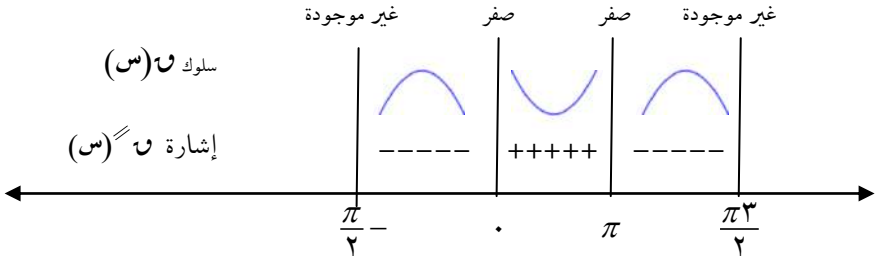
الحـل : ن(س) متصل علي $\left[-\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right]$ لأنه فرق اقترانين متصلين

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$\therefore$ ن$'$(س) = ١ − جتاس ، س $\in$ $\left]-\frac{\pi}{٢}, \frac{\pi ٣}{٢}\right[$

ومنها ن$''$(س) = جاس ، س $\in$ $\left]-\frac{\pi}{٢}, \frac{\pi ٣}{٢}\right[$

عندما ن$''$(س) = ٠ فإن جاس = ٠ ومنها س = π أو س = ٠



ومن إشارة ن$''$(س) في الشكل المقابل فإن :

ن(س) مقعر لأعلي في الفترة $]\pi, ٠[$

ن(س) مقعر لأسفل في الفترة $\left]\frac{\pi ٣}{٢}, \pi\right[$ ، $\left]٠, -\frac{\pi}{٢}\right[$

النقطتان (٠،٠) ، (π،π) نقطتا انعطاف

لإيجاد زوايا الانعطاف نفرض أن هـ$_١$ هي زاوية الانعطاف عند النقطة (٠،٠)

ومنها ظا هـ$_١$ = ن$'$(٠) = ٠ $\Leftarrow$ هـ$_١$ = ٠

نفرض أن هـ$_٢$ هي زاوية الانعطاف عند النقطة (π،π)

ظا هـ$_٢$ = ن$'$(π) = ٢ $\Leftarrow$ هـ$_٢$ = ظا$^{-١}$ ٢

مثال ٦: عين مجالات التقعر لأعلي ولأسفل للاقتران ن(س) = $|$س^{٢} − ٤$|$

الحـل :

$$\text{ن}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤ & ، \quad \text{س} < -٢ \\ ٤ - \text{س}^{٢} & ، \quad -٢ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٢} - ٤ & ، \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$$

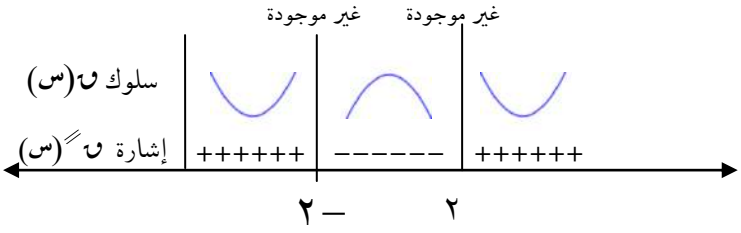
$$\text{ن}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، \quad \text{س} < -٢ \\ -٢\text{س} & ، \quad -٢ < \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} & ، \quad \text{س} > ٢ \\ \text{غ.م} & ، \quad \text{س} = -٢ \text{ أو } \text{س} = ٢ \end{cases}$$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$ن'(س) = \begin{cases} -٢ & ، \quad -٢ > س > -٢ \\ ٢ & ، \quad س < ٢ \\ غ.م & ، \quad س = -٢ \text{ أو } س = ٢ \end{cases}$$



ومن إشارة ن'(س) فى الشكل المقابل فإن :

ن(س) مقعر لأعلي فى الفترتين]-∞،-٢[،]٢،∞[

ن(س) مقعر لأسفل فى الفترة]-٢،٢[

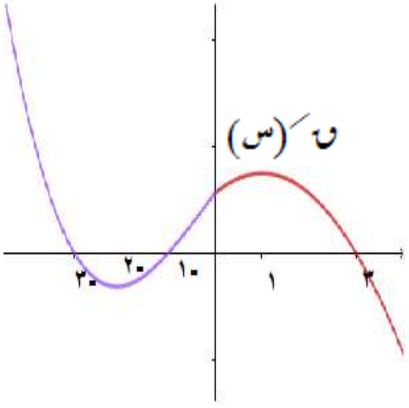
مثال٧: الشكل المجاور يمثل منحنى ن'(س) ، جد كلاً مما يلى :

(١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ن(س)

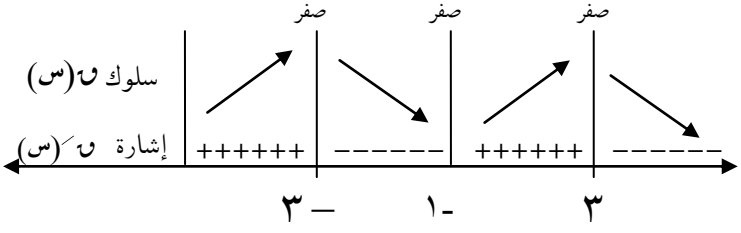
(٢) القيم القصوي المحلية للاقتران ن(س)

(٣) مجالات التقعر لأعلي ولأسفل

(٤) قيم س التى يكون عندها نقاط انعطاف



الحـل : (١) تمثيل إشارة ن'(س) :



من الشكل المجاور يتضح أن :

ن(س) متزايد فى الفترتين]-∞،-٣[ ]-١،٣[

ن(س) متناقص فى الفترتين]-٣،-١[ ]٣،∞[

من الرسم أيضاً يتضح أن :

ن(-٣) عظمي محلية ، ن(٣) عظمي محلية ، ن(-١) صغري محلية

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

	صفر	صفر	
ن(س) سلوك	∩	∪	∩
إشارة ن′(س)	-----	+++++	-----
	٢-	١	

من الشكل يتضح أن :

ن(س) مقعر لأسفل فى الفترتين]-∞، -٢[&]١، ∞[

ن(س) مقعر لأعلي فى الفترة]-٢، ١[

توجد نقطة انعطاف عند س = -٢ & عند س = ١

،

حل نشاط (٢) صفحة ٨٥ من الكتاب الوزاري :

∵ ن(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة

∴ ن(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

∵ ن(٠) = ٥ ⇐ د = ٥

∵ (١، ٢) نقطة انعطاف أفقى

∴ ن(٢) = ١ ، ن′(٢) = ٠ ، ن″(٢) = ٠

وحيث أن ن′(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ ⇐ ن″(س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ ن″(٢) = ٠

∴ ١٢ أ + ٢ ب = ٠

ومنها ٦ أ + ب = ٠ ..... (١)

∵ ن′(٢) = ٠

∴ ١٢ أ + ٤ ب + ٢ جـ = ٠

٢ أ + ٤ ب + جـ = ٠ ..... (٢)

∵ ن(٢) = ١

∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + د = ١

١٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ = -٤

١٤ أ + ٢ ب + جـ = -٢ ..... (٣)

بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن أ = $-\frac{١}{٢}$ ، ب = ٣ ، جـ = -٦

الاقتران المطلوب ن(س) = $-\frac{١}{٢}$ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٦ س + ٥

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

نظرية :

إذا كان $ن(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوى $جـ$ وكان $ن'(جـ)=٠$ فإن :

(١) $ن(جـ)$ قيمة عظمي محلية ، إذا كانت $ن''(جـ)<٠$

(٢) $ن(جـ)$ قيمة صغري محلية ، إذا كانت $ن''(جـ)>٠$

(٣) يفشل تطبيق الاختبار إذا كانت $ن''(جـ)=٠$ ، أو $ن''(جـ)$ غير موجودة.

مثال٨ : جد القيم العظمي والصغري المحلية للاقتران

$ن(س)=\frac{١}{٥}س^{٥}-٤س^{٢}+١$ باستخدام اختبار المشتقة الأولى إن أمكن :

الحـل : ∵ $ن(س)$ متصل وقابل للاشتقاق علي ح لأنه كثير حدود

∴ $ن'(س)=س^{٤}-٨س$

نجعل $ن'(س)=٠$ ∴ $س^{٤}-٨س=٠$

ومنها $س(س^{٣}-٨)=٠$

$س=٠$ أو $س=٢$

∵ $ن''(س)=٤س^{٣}-٨$

∴ $ن''(٠)=٤(٠)^{٣}-٨=-٨<٠$

$ن(٠)=١$ قيمة عظمي محلية

وكذلك $ن''(٢)=٤(٢)^{٣}-٨=٢٤>٠$

∴ $ن(٢)=-\frac{٤٣}{٥}$ قيمة صغري محلية.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) عين فترات التقعر لأعلي ولأسفل لمنحنى ق(س) في الحالات الآتية :

أ. $ق''(س) = (س^{٢} - ٤)(س + ١)$ ، $س \in ع$

مقعر لأسفل في الفترتين $]-\infty ، -٢[$ ، $]-١ ، ٢[$ ومقعر لأعلي في الفترة $]-٢ ، -١[$ ، $]٢ ، \infty[$

ب. $ق''(س) = ٣س^{٢} - ٢٧$

الجواب : مقعر لأسفل في الفترة $]-\infty ، ٠[$ ومقعر لأعلي في الفترة $]٠ ، \infty[$

ج. $ق(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - \frac{١}{٢}س^{٢}$

الجواب : مقعر لأسفل في الفترة $\left]-\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right[$ ومقعر لأعلي في الفترتين $\left]-\infty ، -\frac{١}{\sqrt{٣}}\right[$ ، $\left]\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \infty\right[$

د. $ق(س) = جتا٢س$ ، $س \in \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

الجواب : مقعر لأسفل في الفترة $\left]-\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤}\right[$ ومقعر لأعلي في الفترتين $\left]-\frac{\pi}{٢} ، -\frac{\pi}{٤}\right[$ ، $\left]\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

(٢) حدد نقاط الانعطاف لمنحنى ق(س) في الحالات الآتية :

أ. $ق(س) = \sqrt{٨ - س^{٣}}$

الجواب : $(٠ ، ٢\sqrt{٢})$ نقطة انعطاف

ب. $ق(س) = جاس + جتاس$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

الجواب : نقاط الانعطاف : $(٠ ، \frac{\pi ٣}{٤})$ ، $(٠ ، \frac{\pi ٧}{٤})$

ج. $ق(س) = س^{٢} - \frac{٢٧}{س}$ ، $س \neq ٠$

الجواب: نقطة الانعطاف $(٠ ، ٣)$

(٣) إذا كان $ق(س) = س^{٤} - ٦س^{٣} + أس^{٢}$ وكان للاقتران نقطتا انعطاف إحداهما $(١ ، ق(١))$ ، جد نقطة الانعطاف الأخري .

الجواب : نقطة الانعطاف $(٢ ، -١٦)$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

انعطاف عند $س = ١$ ومعادلة المماس لمنحنى $ن(س)$ عند نقطة الانعطاف هى $٢س + ص = ٥$ ، أوجد قاعدة الاقتران $ن(س)$

الجواب : $ن(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + س + ٤$

(٥) إذا كان $ن(س)$ قابلاً للاشتقاق علي $[أ،ب]$ ، $ك(س)$ كثير حدود متزايد فى $[أ،ب]$ ، $ك(س) \neq ٠$ فى هذه الفترة ، وكان $ن'(س) = \frac{٧}{ك(س)} - ٥س$ ، أثبت أن منحنى الاقتران $ن(س)$ مقعراً لأسفل فى الفترة $[أ،ب]$.

(٦) إذا كان لمنحنى $ن(س) = س^{٤} - ٦س^{٣} + ١٢س^{٢} - ١٠س$ ، $س \in ع$ نقطتا انعطاف :

أ. عين نقطة الانعطاف الأفقى منهما .

$(٣-،١)$

ب. عين معادلة المماس لمنحنى $ن(س)$ عند نقطة الانعطاف الثانية .

الجواب : $ص = -٢س$

(٧) جد قيم س التى يكون لمنحنى الاقتران $ن$ عندها نقط انعطاف حيث $ن(س) = ٢جاس + \frac{١}{٢}جا٢س$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

الجواب : $س = \frac{٢\pi}{٣}$ ، $س = \pi$ ، $س = \frac{٤\pi}{٣}$

(٨) استخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوي للاقترانات الآتية :

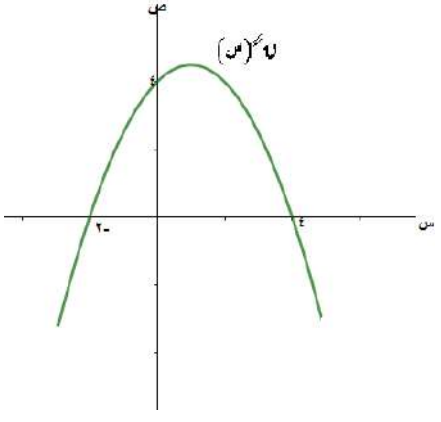
أ. $ن(س) = ٨س^{٢} - ٢س^{٤}$

الجواب: توجد قيمة صغري محلية عند $س = ٠$ ، توجد قيمة عظمي محلية عند $س = \sqrt{٢}$ ، $س = -\sqrt{٢}$

ب. $ن(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$

الجواب : $ن(-١)$ عظمي محلية & $ن(١)$ صغري محلية

(٩) الشكل المجاور يمثل منحنى $ن'(س)$ إذا علمت أن النقاط الحرجة للاقتران $ن(س)$ هى عند $س = -١ ، ٦$ ، أوجد :



أ. فترات التقعر لأعلي والتقعر لأسفل للاقتران $ن(س)$

الجواب: مقعر لأسفل فى الفترتين $]-\infty، -٢[$ ، $]٤، \infty[$ ، مقعر لأعلي فى الفترة $]-٢، ٤[$

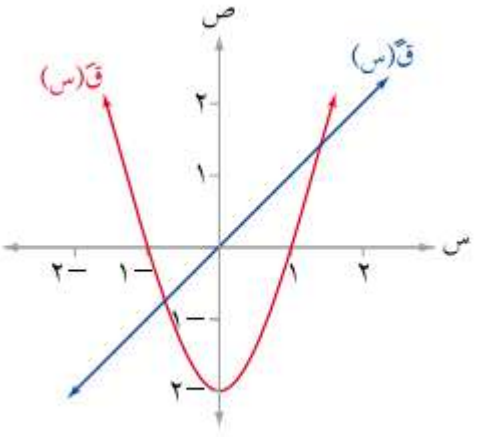
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الجواب : ن(−١) قيمة صغري محلية ، ن(٦) قيمة عظمي محلية

ج. نقطة/نقاط الانعطاف

الجواب: (−٢،ن(−٢)) ، (٤،ن(٤))

(١٠) يمثل الشكل المجاور منحنى ن´(س) ، ومنحنى ن´´(س) للاقتران ن(س) المعرف علي ح ، اعتمد علي ذلك فى الإجابة عن الأسئلة الآتية :



أ. عين مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق .

(الجواب : متزايد فى الفترتين]−∞،−١] ، [١،∞[& متناقص فى [−١،١])

ب. عين قيم س التى يكون للاقتران عندها قيم قصوي محلية باستخدام:

(١) اختبار المشتقة الأولى .

(٢) اختبار المشتقة الثانية .

(الجواب : عند س=−١ توجد قيمة عظمي محلية & عند س=١ توجد قيمة صغري محلية)

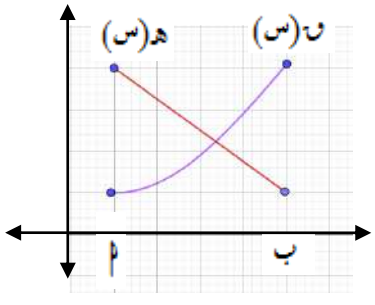
ج. عين مجالات التقعر للاقتران ق .

الجواب : ن(س) مقعر لأعلي فى الفترة]٠،∞[& مقعر لأسفل]−∞،٠[

د. عين نقط الانعطاف للاقتران ق .

الجواب: (٠،ن(٠)) نقطة انعطاف

(١١) الشكل المجاور يبين منحنى الاقترانين ن(س) ، هـ(س) المعرفين علي [أ،ب] ،



أثبت أن (ن´ ○ هـ)(س) اقتران متناقص فى [أ،ب]

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ١: ثنى سلك طوله ١٢ سم ليكون مثلثاً متساوى الساقين ، أوجد أطوال أضلاع المثلث إذا كانت مساحته أكبر ما يمكن

الحـل : نفرض أطوال أضلاع المثلث س ، س ، ٢ص (للتسهيل نفرض طول الضلع الثالث ٢ص)

∵ طول السلك = ١٢ ∴ س + س + ٢ص = ١٢

ومنها ٢س + ٢ص = ١٢ ∴ ٢ص = ١٢ − ٢س

فيكون $\boxed{ص = ٦ - س}$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٢} \times ٢ص \times \sqrt{س^{٢} - ص^{٢}}$

$م(س) = (٦ - س)\sqrt{س^{٢} - (٣٦ - ١٢س + س^{٢})}$

$= (٦ - س) \times \sqrt{١٢س - ٣٦}$

$م'(س) = (٦ - س) \times \frac{١٢}{٢\sqrt{١٢س - ٣٦}} - \sqrt{١٢س - ٣٦}$

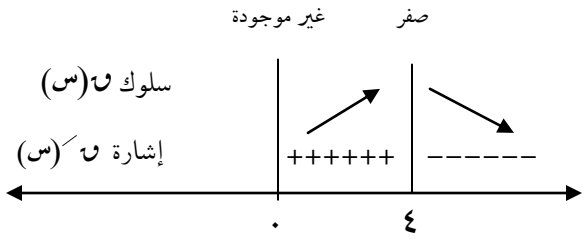
$= -\frac{٦(٦ - س)}{\sqrt{١٢س - ٣٦}} - \sqrt{١٢س - ٣٦}$

$م'(س) = \frac{٦(٦ - س) - (١٢س - ٣٦)}{\sqrt{١٢س - ٣٦}} = \frac{٣٦ - ٦س - ١٢س + ٣٦}{\sqrt{١٢س - ٣٦}}$

$\therefore م'(س) = \frac{٧٢ - ١٨س}{\sqrt{١٢س - ٣٦}}$

نضع $م'(س) = ٠$ فيكون $\frac{٧٢ - ١٨س}{\sqrt{١٢س - ٣٦}} = ٠$ ومنها ٧٢ − ١٨س = ٠

ومنها ١٨س = ٧٢ ⇐ س = ٤



من الشكل المجاور يتضح أنه توجد قيمة عظمي محلية عند س = ٤

أى أن مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما تكون أضلاعه ٤سم ، ٤سم ، ٤سم

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الحـل : نفرض العددين س ، ص

بما أن مجموع العددان = ٢٠ ∴ س + ص = ٢٠ ومنها $\boxed{ص = ٢٠ - س}$ ..... (١)

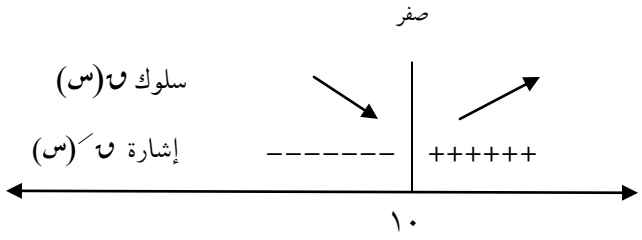
مجموع مربعى العددين = $س^{٢} + ص^{٢}$ = $س^{٢} + (٢٠ - س)^{٢}$

أى أن $م(س) = س^{٢} + ٤٠٠ - ٤٠س + س^{٢} = ٢س^{٢} - ٤٠س + ٤٠٠$

$م(س) = ٢س^{٢} - ٤٠س + ٤٠٠$

∴ $م'(س) = ٤س - ٤٠$

نجعل $م'(س) = ٠$ فيكون $٤س - ٤٠ = ٠$ ومنها س = ١٠



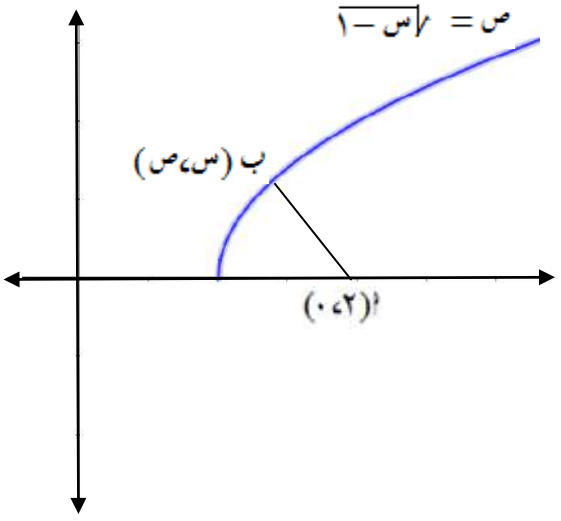
يتضح من الرسم أنه توجد قيمة صغري محلية عند س = ١٠

بالتعويض فى المعادلة (١) نجد أن ص = ١٠

∴ العددان هما ١٠ ، ١٠

مثال٣ : جد أقرب نقطة واقعة علي منحنى $ص = \sqrt{س - ١}$ إلى النقطة أ(٠،٢)

الحـل :



نفرض أن النقطة ب(س،ص) نقطة ما علي المنحنى ص

المسافة أب = ف = $\sqrt{(س - ٢)^{٢} + ص^{٢}}$ ..... (١)

لكن $ص = \sqrt{س - ١}$ ومنها $ص^{٢} = س - ١$

بالتعويض عن $ص^{٢}$ فى المعادلة (١)

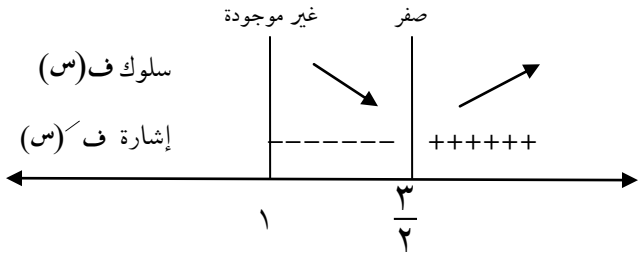
$ف = \sqrt{(س - ٢)^{٢} + س - ١} = \sqrt{س^{٢} - ٤س + ٤ + س - ١}$

∴ $ف(س) = \sqrt{س^{٢} - ٣س + ٣}$

$\frac{ع ف}{ع س} = \frac{٢س - ٣}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س + ٣}}$

عندما $\frac{ع ف}{ع س} = ٠$ يكون $\frac{٢س - ٣}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س + ٣}} = ٠ \Leftarrow ٢س - ٣ = ٠$ ومنها $\boxed{س = \frac{٣}{٢}}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b



من الرسم يتضح أنه توجد قيمة صغري محلية عند س $= \frac{٣}{٢}$ وهى مطلقة

∴ أقرب نقطة واقعة علي المنحنى للنقطة أ(١،٢) هى $\left(\frac{٣}{٢}، ب\left(\frac{٣}{٢}\right)\right) = \left(\frac{٣}{٢}، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

مثال ٤: جسم يتحرك فى خط مستقيم حسب العلاقة ف $=$ ن^{٣} $-$ ١٢ ن^{٢} $+$ ٨٠ ن حيث ف بالأمتار ، ن الزمن بالثوانى ، أوجد أقل سرعة ممكنة لهذا الجسم .

الحـل : ع(ن) $= \frac{ف د}{ن د}$ $= ٣$ ن^{٢} $-$ ٢٤ ن $+$ ٨٠ ..... (١)

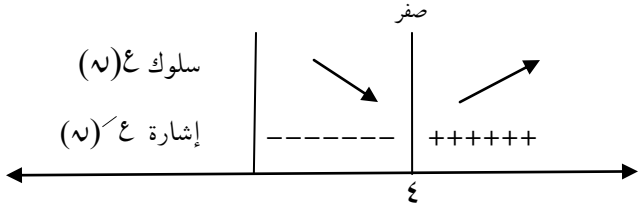
لحساب أقل سرعة ممكنة نحسب $\frac{ع د}{ن د}$ حيث $\frac{ع د}{ن د} = ٦$ ن $-$ ٢٤

عندما $\frac{ع د}{ن د} = ٠ \Leftarrow$ ٦ ن $-$ ٢٤ $= ٠$ ومنها ن $= ٤$ ث

يتضح من الرسم المجاور أنه توجد قيمة صغري محلية عند ن $= ٤$ ث

وحساب السرعة عند هذا الزمن نعوض فى المعادلة (١) :

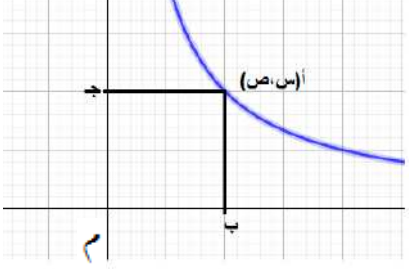
ع(٤) $= ٣$ (٤)^{٢} $-$ ٢٤ (٤) $+$ ٨٠ $= ٣٢$ م/ث



مثال ٥: من النقطة أ(س، ص) الواقعة علي منحنى ص $= \frac{١}{س}$ ، س $\neq ٠$ رسم العمودان أب، أجـ علي المحورين الإحداثيين ، أوجد بعدى المستطيل أب م جـ (حيث م نقطة الأصل) بحيث يكون محيطه أصغر ما يمكن .

الحـل : نفرض أن أ(س، ص) نقطة علي المنحنى فتكون إحداثيات ب $=$ (س، ٠)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b



∵ محيط المستطيل = مجموع أطوال أضلاعه

∴ محيط المستطيل = ٢س + ٢ص ..... (١)

∵ ص = $\frac{١}{س}$ ..... (٢)

بالتعويض من المعادلة (٢) فى المعادلة (١)

ع(س) = ٢س + $\frac{٢}{س}$ حيث ع(س) ترمز لمحيط المستطيل

ع′(س) = ٢ − $\frac{٢}{س^{٢}}$

عندما ع′(س) = ٠ تكون ٢ − $\frac{٢}{س^{٢}}$ = ٠

∴ س^{٢} = ١ ومنها س = ١

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوي حيث :

ع′(س) = ٢ − ٢س$^{-٢}$ ومنها ع″(س) = ٤س$^{-٣}$

ع″(١) = ٤(١)$^{-٣}$ = ٤ > ٠

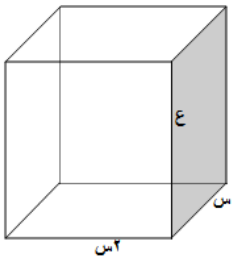
∴ توجد قيمة صغري محلية عند س = ١

بالتعويض فى المعادلة (٢) ⟸ ص = $\frac{١}{١}$ = ١

∴ يكون محيط المستطيل أصغر ما يمكن عندما تكون أبعاده ١ سم ، ١ سم

مثال ٦ : صندوق من االصفيح علي هيئة متوازى مستطيلات مفتوح من أعلي ، فإذا كان طول قاعدته مثلى عرضها وكان حجمه ٢٨٨ سم^{٣} ، أوجد أبعاد هذا الصندوق بحيث تكون مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن .

الحـل:



نفرض العرض = س ، الطول = ٢س ، الارتفاع = ع

∵ حجم متوازى المستطيلات = الطول ×العرض × الارتفاع

= ٢س × س × ع = ٢س^{٢} ع

وحيث حجم متوازى المستطيلات = ٢٨٨

∴ ٢س^{٢} ع = ٢٨٨ ⟸ ع = $\frac{١٤٤}{س^{٢}}$ ..... (١)

مساحة الصفيح المطلوب = مساحة القاعدة + مساحة الجوانب الأربعة

= ٢س × س + ٢ × س × ع + ٢ × ٢س × ع

= ٢س^{٢} + ٦س ع ..... (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) فى المعادلة (٢) عن قيمة ع

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$= ٢س^{٢} + \frac{٨٦٤}{س}$$

$$ن'(س) = ٤س - \frac{٨٦٤}{س^{٢}}$$

بوضع $ن'(س) = ٠$ يكون $٤س - \frac{٨٦٤}{س^{٢}} = ٠$ (بالضرب فى $س^{٢}$)

$٤س^{٣} - ٨٦٤ = ٠ \Leftarrow س^{٣} = ٢١٦ \quad \therefore س = ٦$

نستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوي حيث :

$\because ن'(س) = ٤س - ٨٦٤ س^{-٢}$

$\therefore ن''(س) = ٤ + ١٧٢٨ س^{-٣}$

$ن''(٦) = ٤ + ١٧٢٨(٦)^{-٣} = ٤ + \frac{١٧٢٨}{٣٦} = ٤ + \frac{١٧٢٨}{٢١٦} = ١٢ > ٠$

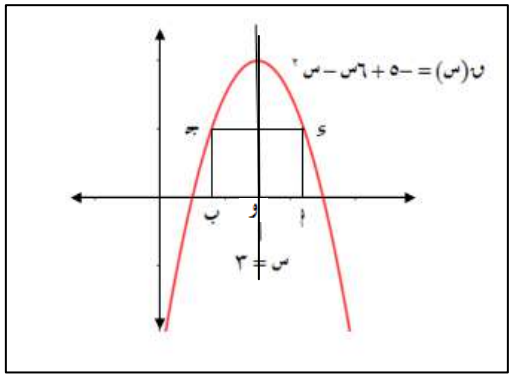
$\therefore$ توجد قيمة صغري محلية عند $س = ٦$

$\therefore ص = ٢س = ٢ \times ٦ = ١٢$سم ، $ع = \frac{١٤٤}{٣٦} = \frac{١٤٤}{٦^{٢}} = ٤$ سم

أبعاد الصندوق االتى تجعل مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن هى ٦ سم ، ١٢ سم ، ٤ سم

مثال٧: جد أبعاد المستطيل ذى المساحة الكبري والواقع فى الربع الأول بحيث تنطبق قاعدته علي محور السينات ويقع رأساه الآخران علي منحنى الاقتران $ن(س) = -٥ + ٦س - س^{٢}$

الحـل :



لرسم الاقتران نحدد احداثيات الرأس $= (-\frac{ب}{٢أ}، ن(-\frac{ب}{٢أ}))$

$-\frac{ب}{٢أ} = -\frac{٦}{-١ \times ٢} = ٣$

$ن(-\frac{ب}{٢أ}) = ن(٣) = -٥ + ١٨ - ٩ = ٤$

لتحديد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع $ن(س) = ٠$

ومنها $-٥ + ٦س - س^{٢} = ٠ \quad \therefore س = ٥$ أو $س = ١$

نفرض أن أب جـ د مستطيل يقع رأساه أ ، ب علي محور السينات ورأساه د ، جـ علي منحنى ق(س)

وحيث أن احداثيات رأس المنحنى $= (٣، ٤)$ $\therefore س = ٣$ هى معادلة محور تماثل القطع المكافئ

نفرض وب = س ، فيكون وأ = س

تكون احداثيات ب $= (٣ - س، ٠)$ و تكون و$(٣، ٠)$ ، أ$(٣ + س، ٠)$

ومنها إحداثيات جـ $= (٣ - س، ن(٣ - س))$

$ن(٣ - س) = -٥ + ٦(٣ - س) - (٣ - س)^{٢} = ١٣ - ٦س + ٩ + ٦س - س^{٢} = ٤ - س^{٢}$

مساحة المستطيل $=$ أب $\times$ بجـ

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

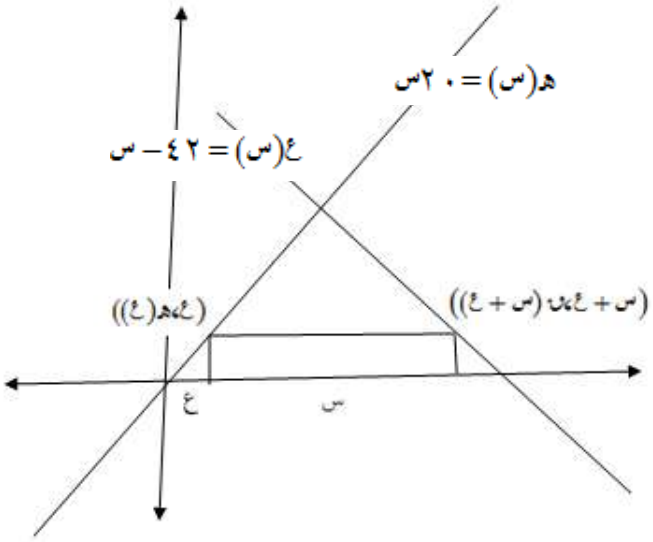
بوضع $م'(س) = ٠$ يكون $٨ - ٦س^{٢} = ٠$ ومنها $س^{٢} = \frac{٨}{٦}$ $\Leftarrow$ $س = \sqrt{\frac{٤}{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

$\because م''(س) = -١٢س$ $\therefore م''(\frac{٢}{\sqrt{٣}}) = -١٢(\frac{٢}{\sqrt{٣}}) < ٠$

$\therefore$ توجد قيمة عظمي محلية عند $س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ وعندها تكون $ص = -٤(\frac{٢}{\sqrt{٣}})^{٢} = \frac{٨}{٣}$

$\therefore$ أبعاد المستطيل ذو أكبر مساحة هى $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٨}{٣}$

حل نشاط (٢) صفحة ٨٩ من الكتاب الوزارى



نفرض طول المستطيل = س

عرض المستطيل = $هـ(ع) = ن(س + ع)$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$= س \times هـ(ع) = س \times ٢٠ع$

أى أن $م = ٢٠سع$ ..... (١)

العرض $هـ(ع) = ن(س + ع)$

$٢٠ع = ٤٢ - (س + ع)$

$٢٠ع = ٤٢ - س - ع$

$٢٠ع + ع = ٤٢ - س$ $\Leftarrow$ $٢١ع = ٤٢ - س$

ومنها $ع = ٢ - \frac{س}{٢١}$ ..... (٢)

بالتعويض من المعادلة (٢) فى المعادلة (١) : $م = ٢٠س(٢ - \frac{س}{٢١})$

$\therefore م(س) = \frac{٢٠س}{٢١}(٤٢ - س)$ ..... (٣)

$م'(س) = \frac{٢٠}{٢١}(٤٢ - س) + \frac{٢٠س}{٢١}(-١)$

بجعل $م'(س) = ٠$ يكون $\frac{٢٠}{٢١}(٤٢ - س) + \frac{٢٠س}{٢١}(-١) = ٠$

$٤٢ - س - س = ٠$ $\Leftarrow$ $٤٢ - ٢س = ٠$ $\Leftarrow$ $س = ٢١$

يمكن التأكد أنه توجد قيمة عظمي محلية عند $س = ٢١$ وعندها تكون $ع = ٢١ - \frac{٢١}{٢١} = ١$

نعوض فى المعادلة (١) للحصول علي أكبر مساحة ممكنة للمتنزه

$\therefore$ تكون مساحة أكبر متنزه $= ٢٠ \times ٢١ \times ١ = ٤٢٠$ وحدة مربعة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١)جد العدد الذى ينتمى للفترة $\left[\frac{١}{٢}، ٣\right]$ الذى يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أكبر ما يمكن .

الجواب: أكبر مجموع عندما $س = \frac{١}{٢}$

(٢)وعاء اسطوانى الشكل مفتوح من الأعلي ، حجمه ١٠٠π سم^{٣} ، جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه .

الجواب: ٣٠٠π سم^{٢}

(٣)جد إحداثى النقطة أ$(س، ص)$ الواقعة علي منحنى العلاقة $ص = س^{٢}$ التى بعدها عن النقطة ب$(٠، ١٨)$ أقل ما يمكن .

الجواب: أكبر بعد ممكن عندما $س = ٢$ ويساوى $\sqrt{٢٧٢}$ وحدة طول

(٤)جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٤، ٣)$ ويصنع مع المحورين الاحداثيين الموجبين مثلثاً مساحته أقل ما يمكن .

الجواب: $٤س + ٣ص = ٢٤$

(٥)جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤سم بحيث تنطبق قاعدته علي قطر الدائرة ورأساه الآخران علي الدائرة .

الجواب : ١٦ سم^{٢}

(٦)جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدي قاعدتيه علي محور السينات ورأساه الآخران علي منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٤$.

الجواب: أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف عندما $س = \frac{٢}{٣}$ والمساحة $= \frac{٢٥٦}{٢٧}$ وحدة مربعة

(٧)برهن أن أكبر حجم لاسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل مخروط دائرى قائم يساوى $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط .

(٨)رسم مستقيم يمر بالنقطة الثابتة (أ،ب) حيث أ ، ب > ٠ فقطع محور السينات الموجب فى النقطة م ، ومحور الصادات الموجب فى النقطة ن ، أثبت أن أقل مجموع لطولى الجزأين المقطوعين وم+ون يساوى $\left(\sqrt{أ} + \sqrt{ب}\right)^{٢}$ حيث و نقطة الأصل .

(٩)أوجد باستخدام التفاضل أكبر حجم للشكل الناتج من دوران مستطيل محيطه = ٦٠ سم ، دورة كاملة حول أحد أضلاعه .

الجواب : ح $= ٤٠٠٠\pi$ سم^{٣}

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

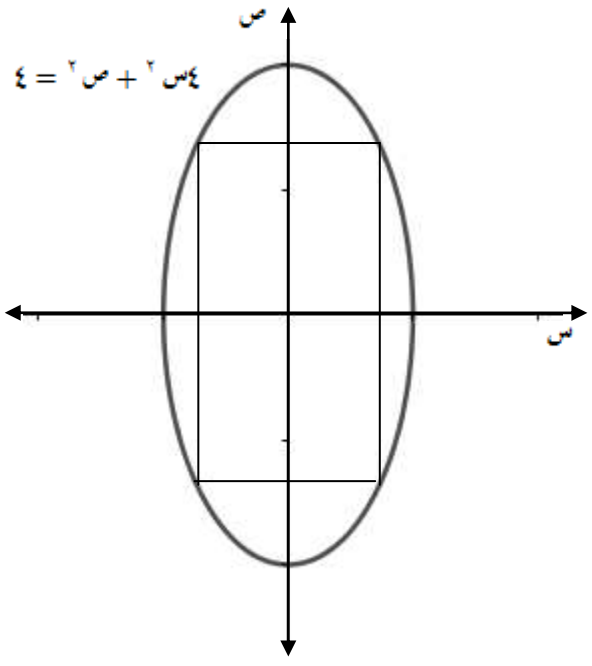
أثبت أن أكبر مساحة لهذا المثلث تساوى $\frac{1}{2}$ ر^{2}

(١١) رسم مستطيل داخل قطع ناقص معادلته $٤س^{٢} + ص^{٢} = ٤$

بحيث تقع رؤوسه علي منحنى القطع الناقص ، وبحيث تكون أضلاع المستطيل

موازية لكل من المحورين الاحداثيين ، جد أبعاد المستطيل التى تجعل

مساحته أكبر ما يمكن .



(الجواب : ٢ ، ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

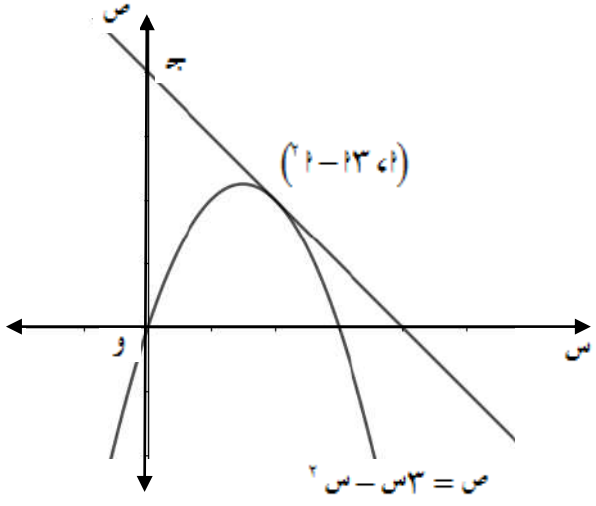
(١٢) فى الشكل المقابل : المثلث و ب جـ قائم الزاوية بحيث

ينطبق ضلعى القائمة علي محورى السينات الموجب والصادات

الموجب ، ووتر المثلث يمس منحنى الاقتران $ص = ٣س - س^{٢}$

عند النقطة $(أ ، ٣أ - أ^{٢})$

، ما أصغر مساحة ممكنة لهذا المثلث ؟



(الجواب : المساحة = ٨ وحدة مربعة عندما أ = ٢)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الوحدة الثالثة

المصفوفات والمحددات

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تعريف :

المصفوفة هى تنظيم مستطيل الشكل لمجموعة من الأعداد علي هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين [ ] ويرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، .....وتسمي الأعداد داخل المصفوفات مدخلات .

رتبة المصفوفة تكتب علي الصورة م × ن حيث م عدد الصفوف ، ن عدد الأعمدة

عدد مدخلات المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

مثال ١:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & -١ \\ ٤ & ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

(١) جد رتبة كلاً من أ ، ب

(٢) جد قيمة $أ_{١٢} + ب_{٢٣} - أ_{٣١}$

الحل :

(١) رتبة أ = ٢ × ٣ رتبة ب = ٣ × ٢

(٢) $أ_{١٢} + ب_{٢٣} - أ_{٣١} = ٤ + ٦ - (-١) = ١١$

أنواع خاصة من المصفوفات :

(١) المصفوفة المربعة : يكون فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة = ن ، وتسمي مصفوفة مربعة من الرتبة ن .

(٢) مصفوفة الوحدة : ويرمز لها بالرمز م وهى مصفوفة مربعة , وتكون مدخلاتها علي النحو الآتى :

$$م_{يه} = \begin{cases} ١ & ، \quad ي = ه \\ ٠ & ، \quad ي \neq ه \end{cases}$$

(٣) المصفوفة الصفرية (و) : هى المصفوفة التى جميع مدخلاتها أصفار ، مثل $و_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

(٤) مصفوفة الصف : هى المصفوفة المكونة من صف واحد

(٥) مصفوفة العمود : هى مصفوفة مكونة من عمود واحد .

(٦) المصفوفة القطرية : هى المصفوفة المربعة س بحيث $س_{يه} = ٠ ، \forall ي \neq ه$

(٧) المصفوفة المثلثية العلوية : هى المصفوفة المربعة التى تكون مدخلاتها التى تحت القطر الرئيسى أصفاراً

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٢

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ١- \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، د $= [٢ \quad ٣ \quad ٤]$

(١) حدد نوع كلاً من المصفوفات أ، ب، جـ، د .

(٢) ما حاصل ضرب مدخلات الصف الثانى من المصفوفة ب ؟

الحـل :

(١) أ مصفوفة صفرية ، ب مصفوفة وحدة ، جـ مصفوفة عمود ، د مصفوفة صف .

(٢) حاصل الضرب = ١ × ٠ = ٠

نشاط ٢ صفحة ١٠٣ من الكتاب الوزارى :

$$ك_{ي هـ} = \begin{cases} ي + هـ & ، \quad ي > هـ \\ ي - هـ & ، \quad ي < هـ \\ \dfrac{ي}{ي + هـ} & ، \quad ي = هـ \end{cases}$$

قيمة المدخلة $ك_{١٢} = ١ - ٢ = ١$ ، قيمة المدخلة $ك_{٢١} = ١ + ٢ = ٣$

$$\sum_{ي=١}^{٣} ك_{ي ٣} = ك_{٣١} + ك_{٣٢} + ك_{٣٣} = ٤ + ٥ + \frac{٣}{٦} = \frac{١٩}{٢}$$

مدخلات القطر الرئيسى هى $ك_{١١}$ ، $ك_{٢٢}$ ، $ك_{٣٣}$

$ك_{١١} = \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$ ، $ك_{٢٢} = \frac{٢}{٢+٢} = \frac{١}{٢}$ ، $ك_{٣٣} = \frac{٣}{٣+٣} = \frac{١}{٢}$

تساوى مصفوفتين :

تعريف :

تتساوي المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية

مثال ٣:

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ع & ١- \\ س & ص & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥س & ١- \\ ٤ & ٢ص & ٣ \end{bmatrix}$ فما قيمة كلاً من س ، ص ، ع

الحـل :

ع = ٥س ..... (١) س = ٢ص ..... (٢) $\boxed{ص = ٤}$

∴ س = ٢ × ٤ = ٨ ع = ٥ × ٨ = ٤٠

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٢ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ل & ٣ \\ س - ص & ع^{٢} \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ١٦ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة / قيم كلاً من س ، ص ، ع ، ل

الحـل :

$|أ| = ١ \Leftarrow ل = ١$

$س + ص = ٥$ ..... (١)

$س - ص = ٣$ ..... (٢)

$ع^{٢} = ١٦$ ومنها $ع = \pm ٤$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن $س = ٤$ ، $ص = ١$

تمارين ٣-١

(١) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١٣ & ٢ & ٣ & ١٦ \\ ٨ & ١٢ & ١٠ & ٥ \\ ١٢ & ٨ & س^{٢} & ٩ \\ ١ & ٩ & ١٥ & ٤ \end{bmatrix}$

(أ) ما رتبة المصفوفة أ

(ب) جد قيمة $أ_{١١} + أ_{٣٢} - أ_{٢٤}$ (الجواب: ١٤)

(جـ) ما قيمة س الموجبة حيث $أ_{٣٣} = ٣٦$ (الجواب: $س = \pm ٦$)

(٢) اكتب المصفوفة أ من الرتبة ٣×٤ حيث $أ_{يه} = \begin{cases} ١ & ، \quad ي < ه \\ ٠ & ، \quad ي = ه \\ ٢ & ، \quad ي > ه \end{cases}$

(الجواب: أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٢ & ٢ \\ ١ & ١ & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$)

(٣)كون مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية تعطي مدخلاتها حسب العلاقة $أ_{يه} = ٣^{ي-ه}$

أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

(٤) إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} - ٣ & ١ \\ ٦ - & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ س^{٢} - ٥س & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة س (الجواب: $س = ٣$)

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(الجواب: ب = $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{bmatrix}$)

٣-٢ العمليات على المصفوفات :

أولاً/ جمع المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان من الرتبة م×ن فإن جـ = أ + ب هى مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة فى كل من أ ، ب أى أن $جـ_{يه} = أ_{يه} + ب_{يه}$

مثال ١: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٥ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، أوجد إن أمكن :

(١) أ + ب (٢) ب + أ (٣) ب + جـ

الحـــل :

(١) أ + ب = $\begin{bmatrix} ٢+(-١) & ١+٤ & -١+٣ \\ ٥+٢ & ٣+٣ & ٠+٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٧ & ٦ & ٦ \end{bmatrix}$

(٢) ب + أ = $\begin{bmatrix} -١+٢ & ١+٤ & ٣-١ \\ ٢+٥ & ٣+٣ & ٦+٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢ \\ ٧ & ٦ & ٦ \end{bmatrix}$

(٣) ب + جـ غير ممكنة لأن رتبة المصفوفة ب ≠ رتبة المصفوفة جـ

ثانياً : ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

تعريف :

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، وكان ك عدداً حقيقياً ، فإن ك أ = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ن ، وتكون مدخلاتها علي النحو : $جـ_{يه} = ك أ_{يه}$ لجميع قيم ي، ه

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٢: إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة $٢أ + ٦ب$

الحـل :

$$٢أ + ٦ب = ٢\begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} + ٦\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٤- \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢ & ٢٤ \\ ٦ & ٣٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٢ & ٢٠ \\ ١٢ & ٣٢ \end{bmatrix}$$

ثالثاً : طرح المصفوفات

تعريف :

إذا كانت $أ$ ، $ب$ مصفوفتان من نفس الرتبة $م \times ن$ فإن $أ - ب = أ + (-ب)$

مثال ٣: إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة كلاً من :

(١) $أ - ب$ (٢) $ب - أ$

الحـل :

(١) $$أ - ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣-(١-) & ٢-٤ \\ ١-٢- & ٥-٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$$

(٢) $$ب - أ = \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١-٣ & ٤-٢ \\ ٢+١ & ٣-٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤- & ٢ \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $أ - ب = -(ب - أ)$

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقى :

(١) $أ + ب = ب + أ$ ..... (خاصية التبديل)

(٢) $(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)$ ..... (خاصية التجميع)

(٣) $أ + و = و + أ = أ$ ..... (المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية جمع المصفوفات)

(٤) $أ + (-أ) = (-أ) + أ = و$ ..... (النظير الجمعى)

(٥) $ك(أ + ب) = كأ + كب$ ..... (توزيع الضرب بعدد حقيقى علي جمع المصفوفات)

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} + س$$

الحـل:

نفرض $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ثم نضيف النظير الجمعى للمصفوفة $أ$ إلى طرفى المعادلة من اليسار

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٥- & ٣- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٥- & ٣- \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} + س \right)$$

$$س + و = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥- & ١- \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad س = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥- & ١- \end{bmatrix}$$

رابعاً: ضرب المصفوفات

تعريف :

إذا كانت $أ$ مصفوفة من الرتبة $م \times ن$ ، $ب$ مصفوفة من الرتبة $ن \times ل$ ، فإن حاصل الضرب $أ \cdot ب = جـ$ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة $م \times ل$ ، وتكون مدخلات المصفوفة جـ علي النحو

$$جـ_{يه} = أ_{ي١} \times ب_{١ه} + أ_{ي٢} \times ب_{٢ه} + \cdots\cdots + أ_{ين} \times ب_{نه}$$

مثال ٥:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أوجد إن أمكن :

(١) $أ \cdot ب$ (٢) $ب \cdot أ$

الحـل :

رتبة $أ$ هى ٢×٢ ، رتبة $ب$ هى ٣×٢

∴ يمكن إيجاد ناتج ضرب $أ \times ب$ حيث

(١) $أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١×٢+٣×٣ & ٠×٢+٣×٣ & ٤×٢+٥×٣ \\ ١×٥+٣×١- & ٠×٥+٣×١- & ٤×٥+٥×١- \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٩ & ٢٣ \\ ١١ & ٣- & ١٥ \end{bmatrix}$$

(٢) $ب \cdot أ$ غير ممكنة لأن عدد الأعمدة فى $ب \neq$ عدد الصفوف فى $أ$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد كلاً من $أ.ب$ ، $ب.أ$ ، ماذا تلاحظ ؟

الحـــل :

$$أ.ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥+٠ & ٦+٠ \\ ١٢+٨ & ٤+٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ٦ \\ ٢٠ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$ب.أ = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥+٠ & ١٠+٢ \\ ١٢+٠ & ٨+٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ١٢ \\ ١٢ & ١٠ \end{bmatrix}$$

نستنتج أن $أ.ب \neq ب.أ$

مثال ٧:

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، $جـ = [٣]$ ، أوجد إن أمكن :

(١) $أ.ب$ (٢) $ب.أ$ (٣) $٢ب.جـ$

الحـــل :

(١) $$أ.ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = [٢+٣-٢٠] = [١٥-]$$

(٢) $$ب.أ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٥- \\ ٦ & ٣ & ١٥- \\ ٨ & ٤ & ٢٠- \end{bmatrix}$$

(٣) $$٢ب.جـ = ٢[٣]\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{bmatrix} = [٣]\begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ١٨ \\ ٢٤ \end{bmatrix}$$

لاحظ أن $٢ب.جـ = ب.٢جـ$

مثال ٨:

إذا كانت رتبة $أ = ٣ \times ن$ ، رتبة $ب = ٢ \times ل$. فما قيمة كلاً من ن ، ل التي تجعل عمليتي ضرب المصفوفتين $أ.ب$ ، $ب.أ$ ممكنتين ؟

الحـــل :

$ن = ٢$ لكي تكون $أ.ب$ ممكنة

$ل = ٣$ لكي تكون $ب.أ$ ممكنة

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال ٩: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $أ^{٢} + ب^{٢}$

الحـــل :

$$أ^{٢} = أ \cdot أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١+١ & ١+١ \\ ٠+١ & ٠+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$ب^{٢} = ب \cdot ب = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١+٠ & ١+٠ \\ ١+١ & ١+٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} + ب^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$$

مثال ١٠: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $أ \cdot ب$ ، ماذا تلاحظ؟

الحـــل :

$$أ \cdot ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢-١٢ & ١٨+١٨- \\ ٨-٨ & ١٢+١٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = و_{٢}$$

نلاحظ أن حاصل الضرب $أ \cdot ب$ = المصفوفة الصفرية $و_{٢}$ مع أن أياً من المصفوفتين ليست صفرية

خصائص عملة الضرب علي المصفوفات :

إذا كانت $أ، ب، جـ$ مصفوفات حيث أن عمليتي الضرب والجمع معرفتان ، $م$ المصفوفة المحايدة ، $ك \in ع$ فإن :

(١) $(أ \cdot ب) \cdot جـ = أ \cdot (ب \cdot جـ)$ ..... (خاصية التجميع)

(٢) $أ \cdot (ب + جـ) = (أ \cdot ب) + (أ \cdot جـ)$ ..... (توزيع الضرب علي الجمع من اليمين) .

(٣) $(أ + ب) \cdot جـ = (أ \cdot جـ) + (ب \cdot جـ)$ ..... (توزيع الضرب علي الجمع من اليسار) .

(٤) $أ \cdot م = م \cdot أ = أ$ ..... (العنصر المحايد لعلية ضرب المصفوفات)

(٥) $ك(أ \cdot ب) = (ك أ) \cdot ب = أ \cdot (ك ب)$

مثال ١١: جد $أ^{١٠٠}$ حيث $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

الحـــل :

$$أ^{٢} = أ \cdot أ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = أ$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$\text{لأن } ا^{٢} = ا \quad \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ا \cdot ا = ا^{٢} \cdot ا = ا^{٣}$$

$$\therefore ا^{٤} = ا^{٣} \cdot ا = ا \cdot ا = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\text{وهكذا} \quad \therefore ا^{١٠٠} = ا \cdot ا = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

تدريب: جد $ا^{١٠٠}$ حيث $ا = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

تمارين ٣ - ٢

(١) إذا كانت $ا = \begin{bmatrix} ٢ & ٥- & ٦ \\ ٤ & ٣- & ١- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢- & ٨ & ٦ \\ ٣ & ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ، وكانت $جـ = ا + ٢ب$ ، فأوجد

$جـ_{٢١}$ ، $جـ_{٢٢}$

الجواب : ٧، ١١

(٢) إذا كانت $ا = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ، أوجد :

١) $٢ا + ب - جـ$
٢) $(ا + ب) - (ا + جـ)$
٣) $٦ ا^{٢} + ٦ ا ب - ١٤ (ا + ب)$

(الأجوبة: ١) $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٣- & ١٢ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٧- & ٠ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ١٠ & ١٠ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$)

(٣) حل المعادلات المصفوفية الاتية :

أ) $س + \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = ٢س + ٣ \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

(الجواب: $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٦- & ١ \end{bmatrix}$)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

ب) $-٣\left(\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}\right) = ٢س + م^{٢}$

(الجواب: $\begin{bmatrix} \frac{-٦}{٥} & -٢ \\ \frac{-١٣}{٥} & \frac{٣}{٥} \end{bmatrix}$)

(٤) إذا كانت $ج = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة أ بحيث $أ٣ + ٢ج = و$

(الجواب: $\begin{bmatrix} \frac{٤}{٣} & -٢ \\ ٠ & \frac{-٢}{٣} \end{bmatrix}$)

(٥) إذا كانت $س + ٢ص = \begin{bmatrix} -١ & ٨ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $٢س - ص = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$. جد قيمتى المصفوفتين س،ص

(الجواب: $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ \frac{١٣}{٥} & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ \frac{٦}{٥} & -١ \end{bmatrix}$)

(٦) إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} + س & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ + س \\ ٣ & س^{٢} - ٢س \end{bmatrix}$ ، جد قيمة / قيم س . (-٢)

(٧) لتكن $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة $أ^{٢} - أ$

(الجواب : $\begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ ٨ & ٠ \end{bmatrix}$)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تعريف :

إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة فإننا نرمز لمحددها بالرمز $|أ|$

(١) إذا كانت $أ = [أ_{١١}]$ فإن $|أ| = أ_{١١}$

(٢) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ فإن $|أ| = أ_{١١} \times أ_{٢٢} - أ_{٢١} \times أ_{١٢}$

(٣) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$ فإن

$$|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

مثال ١:

ليكن $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد كلاً مما يلي :

(١) $|أ|$ (٢) $|ب|$ (٣) $|أ + ب|$

الحـــل :

(١) $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٣ \times ٢ - ١ \times ٥ = ٦ - ٥ = ١$

(٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٠ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ \times ٣ - (-٤) \times (-٢) = ٠ - ٨ = -٨$

(٣) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$

$$|أ + ب| = \begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ -٣ & ٥ \end{vmatrix} = ١٥ - (-٩) = ٢٤$$

لاحظ أن $|أ + ب| \neq |أ| + |ب|$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ، فإنه يمكن إيجاد $|أ|$ بدلالة أى صف ، أو أى عمود وذلك بضربها بالمحدد الناتج من تصور شطب الصف ى والعمود هـ ، إعطاء إشارة لحاصل الضرب وفق القاعدة $(-١)^{ى+هـ}$

مثال ٢:

جد قيمة $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٦ \end{vmatrix}$

الحـــل :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٣\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} - ٤\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ -٢ & ٦ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(٠-١٥) - ٤(-٣٠-٤) + ٢(٠-٦)$$

$$= -٣\times١٥ - ٤\times٣٤ + ٢\times٦$$

$$= -٤٥ + ١٣٦ + ١٢ = ١٠٣$$

مثال ٣:

جد قيمة المحدد باستخدام مدخلات العمود الأول : $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٦ \end{vmatrix}$

الحـــل :

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٥ & ٠ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٦ \end{vmatrix} = +١\begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} - ٥\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} + (-٢)\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ١(٠-٦) - ٥(-٦-٩) - ٢(-٢-٠)$$

$$= ١\times-٦ - ٥\times-١٥ - ٢\times-٢$$

$$= -٦ + ٧٥ + ٤ = ٧٣$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

جد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} ١ & -٣ & ٢ \\ س & ٥ & ٠ \\ ١ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٣٠$

الحـــل :

$$٣(١٠-٠)-٢(٢س-٠)-١(-٣س-٥)=٣٠$$

$$٣٠-٤س+٣س+٥=٣٠ \Leftarrow -س+٣٥=٣٠ \Leftarrow س=٣٥-٣٠=٥$$

بعض خصائص المحددات :

(١) عند تبديل صف مكان صف أو عمود مكان عمود آخر فإن قيمة المحدد تضرب فى (-١) .

(٢) يمكن إخراج عامل مشترك من أى صف ، أو أى عمود .

(٣) إذا أضيفت لمدخلات أى صف ، أو أى عمود مضاعفات نظائرها فى صف آخر ، فإن قيمة المحدد لا تتغير.

(٤) إذا تساوت المدخلات المتناظرة فى صفين ، أو فى عمودين فى مصفوفة فإن محددها يساوى صفراً .

(٥) إذا كانت المصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوى حاصل ضرب المدخلات علي القطر الرئيسى .

مثال ٥:

إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{vmatrix} = ٤$ ، فما قيمة $\begin{vmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{vmatrix}$

الحـــل :

$$\begin{vmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{vmatrix} = -٤$$

مثال ٦:

جد قيمة ما يلى دون فك المحدد :

(١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ & ٣٠ \\ ٨ & -٤ & ١٣ \\ ٢ & -١ & ١٥ \end{vmatrix}$ (٣) $\begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ١٥ \\ ٠ & -٤ & ٤٣ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$

الحـــل :

(١) لاحظ أن مدخلات الصف الأول = مدخلات الصف الثالث

إذن قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ & ٨ \\ ٢ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٦ & ٨ \end{vmatrix}$ = صفراً (خاصية ٤)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$= -٢ \begin{vmatrix} ٣٠ & -٢ & ٤ \\ ١٣ & -٤ & ٨ \\ ١٥ & -١ & ٢ \end{vmatrix} = -٢ \begin{vmatrix} ٣٠ & -٢ & -٢ \\ ١٣ & -٤ & -٤ \\ ١٥ & -١ & -١ \end{vmatrix} = -٢ \times ٠ = ٠$$

(٣) ∵ المحدد تمثله مصفوفة مثلثية علوية

$$\therefore \begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ١٥ \\ ٠ & -٤ & ٤٣ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ \times -٤ \times ٣ = -٢٤$$ (خاصية ٥)

قاعدة (١)

إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة ن فإن $|ك أ| = ك^{ن} |أ|$ ، حيث $ك \in ع$.

مثال٧: إذا كان $|أ| = ٥$ ، حيث $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣ ، فأوجد $|٢أ|$ ، $|-٣أ|$

الحـــل :

$$|٢أ| = ٢^{٣} |أ| = ٨ \times ٥ = ٤٠$$

$$|-٣أ| = (-٣)^{٣} |أ| = -٢٧ \times ٥ = -١٣٥$$

مثال٨: إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة بحيث $|أ| = ٣$ ، $|٢أ| = ٤٨$ ما رتبة المصفوفة $أ$ ؟

الحـــل :

$$|٢أ| = ٢^{ن} |أ| \quad \therefore \quad ٤٨ = ٣ \times ٢^{ن} \quad \Leftarrow \quad ١٦ = ٢^{ن} \quad \Leftarrow \quad ن = ٤$$

أى أن $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة الرابعة .

قاعدة (٢) :

إذا كانت $أ، ب$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة ن فإن $|أ ب| = |أ| \cdot |ب|$

مثال٩: ليكن $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة $|أ ب|$

الحـــل :

$$|أ ب| = |أ| \cdot |ب|$$

$$= (٠+١)(٥+٢) = ١ \times ٧ = ٧$$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

حل نشاط (٣) صفحة ١١٨ من الكتاب الوزارى :

$$س \cdot ص = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \end{bmatrix} = [٢٣] \qquad |س \cdot ص| = ٢٣$$

(١) $ص \cdot س = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ١٥ & ١٢ \end{bmatrix}$

(٢) $|ص \cdot س| = ١٠ \times ١٢ - ١٥ \times ٨ = ١٢٠ - ١٢٠ = ٠$

لاحظ أن $|س \cdot ص| \neq |ص \cdot س|$

مثال ١٠: باستخدام خصائص المحددات أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} أ & ب + أ & ٢ب + أ \\ ٢ب + أ & أ & ب + أ \\ ب + أ & ٢ب + أ & أ \end{vmatrix} = ٩ب^{٢} (أ + ب)$$

الحـــل :

$ع_{١} - ع_{٢}$ ←

$$\begin{vmatrix} -ب & ب + أ & ٢ب + أ \\ ٢ب & أ & ب + أ \\ -ب & ٢ب + أ & أ \end{vmatrix}$$

بإخراج $-ب$ كعامل مشترك من العمود الأول ←

$$-ب \begin{vmatrix} ١ & ب + أ & ٢ب + أ \\ -٢ & أ & ب + أ \\ ١ & ٢ب + أ & أ \end{vmatrix}$$

$ع_{٢} - ع_{٣}$ ←

$$-ب \begin{vmatrix} ١ & -ب & ٢ب + أ \\ -٢ & -ب & ب + أ \\ أ & ٢ب & أ \end{vmatrix}$$

بإخراج $-ب$ كعامل مشترك من العمود الثانى ←

$$ب^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ب + أ \\ -٢ & ١ & ب + أ \\ أ & -٢ & أ \end{vmatrix}$$

$ص_{١} - ص_{٣}$ ←

$$ب^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ب + أ \\ -٢ & ١ & ب + أ \\ ٠ & ٣ & ٢ب \end{vmatrix}$$

$٢ص_{١} + ص_{٢}$ ←

$$ب^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ب + أ \\ ٠ & ٣ & ٥ب + ٣أ \\ ٠ & ٣ & ٢ب \end{vmatrix}$$

$ص_{٢} - ص_{٣}$ ←

$$ب^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ب + أ \\ ٠ & ٣ & ٥ب + ٣أ \\ ٠ & ٠ & ٣ب + ٣أ \end{vmatrix}$$

بإخراج ٣ كعامل مشترك من $ص_{٣}$ ←

$$٣ب^{٢} \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ب + أ \\ ٠ & ٣ & ٥ب + ٣أ \\ ٠ & ٠ & ب + أ \end{vmatrix}$$

بهذا نكون حصلنا علي الصورة المثلثية العلوية

∴ قيمة المحدد $= ٣ب^{٢} \times ١ \times ٣(أ + ب) = ٩ب^{٢} (أ + ب)$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) أوجد قيمة المحددات الآتية : (أ) باستخدام مدخلات الصف الأول (ب) باستخدام مدخلات العمود الثانى

$$\begin{vmatrix} ٨ & ٠ & ١- \\ ٤ & ٣ & ٧ \\ ٥ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٢- & ٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ١- \end{vmatrix}$$

(٥٧) ، (٥٨-)

(٢) حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ س & ٤ & ٥ \\ ٦ & ١ & ٢- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١٥ & ٣ \\ س & ٣ \end{vmatrix}$ (الجواب : س $= -٢$)

(٣) بدون فك المحدد أثبت أن $\begin{vmatrix} ١٥ & ٢- & ٣ \\ ٢٠ & ١- & ٤ \\ ٥٥ & ٦ & ١١ \end{vmatrix}$ = صفراً

(٤) جد قيمة س فى كل مما يلى :

(أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٥ & س & ٥ \\ ٢- & ١ & ١- \end{vmatrix}$ = صفر (الجواب : س $= \frac{-٥}{٢}$)

(ب) $\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & ٤- & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢}س \end{vmatrix} = -٥٠$ (الجواب : س $= \pm ٥$)

(٥) إذا كانت $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ص \\ ٤ع & ٤ل \end{vmatrix} = -٨$ ، أوجد $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٢}س & \frac{٣}{٢}ص \\ ٢ع & ٢ل \end{vmatrix}$ (الجواب: -٣)

(٦) إذا كان أ ، ب مصفوفتين مربعتين غير منفردتين بحيث $|أ ب| = ١٨$ ، $|أ| + |ب| = ١١$ ، وكان $|أ| \leq |ب|$ ، ما قيمة $|أ|$؟

(الجواب: $|أ| = ٩$)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(٨) إذا كانت $\begin{vmatrix} س & ص \\ ع & ب \end{vmatrix} = ٥$ ، $\begin{vmatrix} س & م + ص \\ ع & ل + ب \end{vmatrix} = ٧$ ، ما قيمة $\begin{vmatrix} س & م \\ ع & ل \end{vmatrix}$ ؟ (الجواب:٢)

(٩) بدون فك المحدد أثبت صحة كلاً مما يلى :

أ. $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ س & ص & ع \\ صع & سع & سص \end{vmatrix} = (س - ص)(ص - ع)(ع - س)$

ب. $\begin{vmatrix} ص & س & س + ص \\ س + ص & ص & س \\ س & س + ص & ص \end{vmatrix} = ٢(س^{٣} + ص^{٣})$

ج. $\begin{vmatrix} أ & أ & أ \\ أ & ب & جـ \\ ب + جـ - أ & جـ + أ - ب & أ + ب - جـ \end{vmatrix} =$ صفر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

تعريف :

تسمي المصفوفة المربعة أ مصفوفة غير منفردة إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة بحيث أ.ب = ب.أ = م ، وتسمي المصفوفة ب نظيراً ضربياً للمصفوفة أ ، ونرمز لها بالرمز $أ^{-١}$ ونكتب $ب = أ^{-١}$ ويكون $أ^{-١}.أ = أ.أ^{-١} = م$

مثال ١: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix}$ ، بين فيما إذا كانت $ب = أ^{-١}$

الحـل :

$$أ.ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦-٧ & ٢١+٢١- \\ ٢-٢ & ٧+٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$ب.أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦-٧ & ٣-٣ \\ ١٤+١٤- & ٧+٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\because أ.ب = ب.أ = م_{٢}$ $\therefore ب = أ^{-١}$

مثال ٢: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢- & ٨ & ١٩- \\ ١ & ٤- & ١٠ \\ ١ & ٣- & ٧ \end{bmatrix}$ ، بين هل $ب = أ^{-١}$ أم لا ؟

الحـل :

$$أ.ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢- & ٨ & ١٩- \\ ١ & ٤- & ١٠ \\ ١ & ٣- & ٧ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٤+١+٤- & ١٦-٤-١٢ & ٣٨+١٠+٢٨- \\ ٦+٥+١- & ٢٤-٢٠-٣ & ٥٧+٥٠+٧- \\ ٢-٢+٠ & ٨-٨-٠ & ١٩-٢٠+٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٤- & ١ \\ ١٠ & ٣- & ١ \\ ٧ & ٣- & ١ \end{bmatrix} = ب \cdot ا$$

$$\because ا \cdot ب = ب \cdot ا = م_{٣} \qquad \therefore ب^{-١} = ا$$

تعريف :

المصفوفة المنفردة هى المصفوفة المربعة التى لا يوجد لها نظير ضربى

نظرية :

المصفوفة ا منفردة إذا وفقط إذا $|ا| = ٠$

مثال٣: بين فيما إذا كانت المصفوفات منفردة أم لا ؟

$$(١)\ ا = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \qquad (٢)\ ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \qquad (٣)\ جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٠ & ٤ & ٣ \\ ٢- & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

الحـل :

(١) $|ا| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٠ - ٢ = ٢$ $\therefore$ ا ليست مصفوفة منفردة

(٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$ $\therefore$ ب ليست مصفوفة منفردة

(٣) $|جـ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١- & ١ \\ ٠ & ٤ & ٣ \\ ٢- & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١(٠-٨-) + (٠+٦-) + ٢(٠-٤) =$

$= ٨- - ٦ - ٨ = ٢٢-$

أى أن $|جـ| \neq ٠$ $\therefore$ جـ ليست مصفوفة منفردة

مثال٤: جد قيمة / قيم س التى تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة :

$$(١)\ \begin{bmatrix} ٢ & س \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix} \qquad (٢)\ \begin{bmatrix} ٨ & س \\ س & ٢ \end{bmatrix} \qquad (٣)\ \begin{bmatrix} ١ & ٢س \\ ٤ & س-١ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الحـــل :

(١) بما أن المصفوفة منفردة $\therefore \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$ ومنها $٣س - ١٢ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

(٢) $\begin{vmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow س^{٢} - ١٦ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٤$

(٣) $\begin{vmatrix} ٢س & ١ \\ ٤ & س - ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ٢س(س - ١) - ٤ = ٠$

$\Leftarrow ٢س^{٢} - ٢س - ٤ = ٠$

$\Leftarrow س^{٢} - س - ٢ = ٠$

$\Leftarrow (س - ٢)(س + ١) = ٠ \Leftarrow س = ٢$ أو $س = -١$

خصائص النظير الضربى :

إذا كانت $أ$ ، $ب$ مصفوفتين مربعتين ، وغير منفردتين ، ومن نفس الرتبة ، وكان $ك$ عدداً حقيقياً $\neq ٠$ ، فإن :

(١) $(أ^{-١})^{-١} = أ$ (٢) $(ك أ)^{-١} = \frac{١}{ك}(أ^{-١})$ (٣) $(أ ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

إيجاد النظير الضربى للمصفوفة :

تعميم :

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ مصفوفة غير منفردة فإن منفردة فإن $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{bmatrix}$

أى أن : $أ^{-١}$ تنتج من ضرب المصفوفة $أ$ بمقلوب محددها بعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسى وتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة $أ$.

مثال٥:

جد $س^{-١}$ (إن أمكن) حيث $س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

الحـــل :

$|س| = -١٢ + ٢ = -١٤$ $\therefore$ المصفوفة لها نظير ضربى

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$\text{س}^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

مثال٦: جد ص^{-1} (إن أمكن) حيث $\text{ص} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

الحـــل : بما أن $|\text{ص}| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0$ ∴ المصفوفة ليس لها نظير ضربي

نتيجة(١) :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية حيث أ^{-1} هو نظير المصفوفة أ ، وكان $|\text{أ}| = \text{ك}$ ، فإن

$|\text{أ}^{-1}| = \frac{1}{\text{ك}}$ ، $\text{ك} \neq 0$

الإثبات: نفرض $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix}$

$$\Leftarrow \quad \text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|}\begin{bmatrix} \text{ل} & -\text{ص} \\ -\text{ع} & \text{س} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{ك}}\begin{bmatrix} \text{ل} & -\text{ص} \\ -\text{ع} & \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\text{ل}}{\text{ك}} & \frac{-\text{ص}}{\text{ك}} \\ \frac{-\text{ع}}{\text{ك}} & \frac{\text{س}}{\text{ك}} \end{bmatrix}$$

$$|\text{أ}^{-1}| = \frac{\text{ل س}}{\text{ك}^2} - \frac{\text{ص ع}}{\text{ك}^2} = \frac{1}{\text{ك}^2}(\text{ل س} - \text{ص ع}) = \frac{1}{\text{ك}^2}|\text{أ}| = \frac{1}{\text{ك}^2} \times \text{ك} = \frac{1}{\text{ك}}$$

نتيجة(٢) :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية حيث أ^{-1} هو نظير المصفوفة أ، وكان $|\text{أ}| = \text{ك}$ ، فإن $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$

الإثبات: نفرض $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ع} & \text{ل} \end{bmatrix}$ ∴ $|\text{أ}^{-1}| = \frac{1}{\text{ك}}$ (من النتيجة السابقة)

وحيث أن $\text{أ}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\text{ل}}{\text{ك}} & \frac{-\text{ص}}{\text{ك}} \\ \frac{-\text{ع}}{\text{ك}} & \frac{\text{س}}{\text{ك}} \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$(\text{أ}^{-1})^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}^{-1}|}\begin{bmatrix} \frac{\text{ع}}{\text{ك}} & \frac{\text{ل}}{\text{ك}} \\ \frac{\text{ص}}{\text{ك}} & \frac{\text{س}}{\text{ك}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{\text{ك}}}\begin{bmatrix} \frac{\text{ع}}{\text{ك}} & \frac{\text{ل}}{\text{ك}} \\ \frac{\text{ص}}{\text{ك}} & \frac{\text{س}}{\text{ك}} \end{bmatrix} = \frac{\text{ك}}{1}\begin{bmatrix} \text{ع} & \text{ل} \\ \text{ص} & \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ع} & \text{ل} \\ \text{ص} & \text{س} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

مثال٧: إذا كان $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $\text{أ}\cdot\text{جـ} = \text{ب}$ ، جد جـ^{-1}

الحـل :

$\because \text{أ}\cdot\text{جـ} = \text{ب}$ بضرب الطرفين فى أ^{-1} من اليمين

$\text{أ}^{-1}\cdot\text{أ}\cdot\text{جـ} = \text{أ}^{-1}\cdot\text{ب}$ ومنها $\text{جـ} = \text{أ}^{-1}\cdot\text{ب}$

$\text{جـ}^{-1} = (\text{أ}^{-1}\cdot\text{ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\cdot(\text{أ}^{-1})^{-1}$ (من خصائص النظير الضربى)

$= \text{ب}^{-1}\cdot\text{أ}$ ..... (١)

$$\text{ب}^{-1} = \frac{1}{|\text{ب}|}\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix} = \frac{1}{-٣}\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{جـ}^{-1} = \frac{1}{-٣}\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \frac{-١}{٣}\begin{bmatrix} -١٣ & -١٠ \\ ١٥ & ١٢ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(١) بين أن المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ هى النظير الضربى للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

(٢) أى المصفوفات الآتية منفردة :

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \quad ، \quad جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & ١- & ٥ \end{bmatrix}$$

(٣) جد قيمة / قيم $ك$ التى تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ك & ١ \\ ١- ك & ٠ \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة

(الجواب: ك = ٠ أو ١)

(٤) لتكن $أ = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \end{bmatrix}$ ، أثبت أن $أ^{-١} = أ$

(٥) إذا كانت $أ$ ، $ب$ مصفوفتين غير منفردتين ومربعتين من الرتبة الثانية ، أثبت أن $(أب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

(٦) إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وغير منفرد ة ، $ك$ عدد حقيقى لا يساوى صفراً ، فأثبت أن : $(\frac{١}{ك} أ)^{-١} = ك أ^{-١}$

(٧) إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، $ك$ عدد حقيقى ، فأثبت أن : $|ك أ| = ك^{٢} |أ|$

(٨) حل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

(الجواب: $س = \begin{bmatrix} ٦- & ٨- \\ \frac{١١}{٢} & \frac{١١}{٢} \end{bmatrix}$)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(٩) إذا كانت $\text{س}\begin{bmatrix}٢\\١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٢\\١\end{bmatrix}$ فما قيمة س ؟ (الجواب: $\text{س}=\text{م}_{٢}$)

(١٠) إذا كانت س ، ص مصفوفتين غير منفردتين من الرتبة ٣×٣ ، $\text{ص}=٢\text{س}^{-١}$ ، أوجد $|٣\text{س}\times\text{ص}|$

(الجواب: ٢١٦)

(١١) إذا كان $\text{م}^{-١}=\begin{bmatrix}١&٢\\٣&-١\end{bmatrix}$ ، $\text{ب}^{-١}=\begin{bmatrix}١&٤\\٢&٣\end{bmatrix}$ ، جد $(\text{ا ب})^{-١}$

(الجواب: $\begin{bmatrix}٧&٧\\٩&٤\end{bmatrix}$)

(١٢) إذا كان $\text{م}^{-١}=\begin{bmatrix}١&٢\\٣&-١\end{bmatrix}$ ، $\text{ا ب}^{-١}=\begin{bmatrix}١&١\\٢&٠\end{bmatrix}$ جد ب

(الجواب: $\text{ب}=\begin{bmatrix}\frac{-٢}{٧}&\frac{٥}{١٤}\\\frac{١}{٧}&\frac{١}{١٤}\end{bmatrix}$)

(١٣) ما قيمة / قيم س التى تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix}١&-١&٠\\٠&\text{س}&\text{س}-٢\\٥&٤&٣\end{bmatrix}$ منفردة ؟

(الجواب : $\text{س}=٣$)

(١٤) إذا كان $(\text{ا}+\text{ب})^{-١}=\begin{bmatrix}٣&٢\\٥&٣\end{bmatrix}$ وكانت $\text{م}=\begin{bmatrix}-٣&٠\\٤&١\end{bmatrix}$ ، جد $(٢\text{ب})^{-١}$

(الجواب: $\begin{bmatrix}١&\frac{١}{٢}\\٠&\frac{١}{٤}\end{bmatrix}$)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

أولاً/طريقة النظير الضربى :

مثال١: حل النظام الآتى باستخدام طريقة النظير الضربى :

$$٢س + ٣ص = ١٣ \quad ، \quad ٣س + ٥ص = ٢١$$

الحـل : نضع النظام علي صورة معادلة مصفوفية كالتالى:

$$\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٢١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \quad \text{.....} \quad (*)$$

وهى علي الصورة العامة $أ ع = جـ$ حيث $أ$ مصفوفة المعاملات ، $ع$ مصفوفة المتغيرات ، $جـ$ مصفوفة الثوابت

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ١٠ = ١$$

$\therefore أ^{-١}$ موجود

$$أ^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$$

بضرب طرفى المعادلة (*) من اليمين بالنظير الضربى $أ^{-١}$

$$\begin{bmatrix} ١٣ \\ ٢١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} ٦٣-٦٥ \\ ٤٢+٣٩- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ٣

وبوجه عام إذا كانت المعادلة المصفوفية $أ ع = جـ$ تمثل نظاماً من المعادلات فإن :

$ع = أ^{-١} جـ$ ومنها $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = أ^{-١} جـ$

مثال٢: حل النظام الآتى باستخدام طريقة النظير الضربى :

$$س + ٢ص = -٢ \quad ، \quad ١١ص + ٣س - ٩ = ٠$$

الحـل : نكتب المعادلتين مرتبتين كما يلى : $س + ٢ص = -٢$ ..... (١)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى $\begin{bmatrix} ٢- \\ ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ٣ \end{bmatrix}$ وهى علي الصورة أ ع = جـ

∴ $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $|أ| = ٦ - ١١ = ٥$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ٢- & ١١ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix}$

∵ ع = $أ^{-١}$ جـ ∴ $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ٢- & ١١ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢- \\ ٩ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ٢٢- \\ ٦+٩ \end{bmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ١٨- \\ ١٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٤٠-}{٥} \\ \frac{١٥}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨- \\ ٣ \end{bmatrix}$$

∴ س = ٨- ، ص = ٣

مثال٣: حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = ٢س \times \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{bmatrix}$

الحـــل : نفرض أ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{bmatrix}$ ∴ $|أ| = ١٨ - ١٦ = ٢-$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢-} \begin{bmatrix} ٦- & ٨ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$$

بضرب طرفى المعادلة فى $أ^{-١}$ من اليمين

$$٢س = \frac{١}{٢-} \begin{bmatrix} ٦- & ٨ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \times أ \times أ^{-١}$$

$$٢س = \frac{١-}{٢} \begin{bmatrix} ٨- + ٣٠ & ٣٢ - ١٢ \\ ١٢- + ٤ & ٣+ ١٠ \end{bmatrix} = \frac{١-}{٢} \begin{bmatrix} ٣٨- & ٢٠ \\ ٨- & ١٣ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$$\begin{bmatrix} \frac{-٥}{٢} & \frac{-٣٨}{٤} \\ ٢ & \frac{-١٣}{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٠ & -٣٨ \\ -٨ & ١٣ \end{bmatrix} \frac{-١}{٤} = \text{س}$$

ثانياً / طريقة كريمر :

مثال٤: باستخدام طريقة كريمر حل النظام الآتى من المعادلات :

$$\text{٣س} - \text{٢ص} = ١١ \quad ، \quad -\text{٣ص} - ٤ + \text{٢س} = ٠$$

الحـــل : نرتب نظام المعادلات كما يلى : : $\text{٣س} - \text{٢ص} = ١١$ ..... (١)

$$\text{٢س} - \text{٣ص} = ٤ \quad \text{.....} \quad (٢)$$

نكون المصفوفات $أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} -٢ & ١١ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ١١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix} = -٩ - ٤ = -٥$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٢ & ١١ \\ -٣ & ٤ \end{vmatrix} = -٣٣ - ٨ = -٢٥$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٢٢ - ١٢ = -١٠$$

$$\text{س} = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٢٥}{-٥} = ٥ \qquad \text{ص} = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١٠}{-٥} = ٢$$

حل نشاط (٣) صفحة ١٢٩ من الكتاب الوزارى :

مصفوفة المعاملات $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$

$$\therefore |أ_{س}| = -٥ - ٢ = -٧ \qquad أ_{ص} = ١ - ١٥ = -١٤$$

$$\text{س} = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٧}{-٧} = ١ \qquad \text{ص} = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

مثال٥: استخدم طريقة جاوس لحل النظام : $٣س - ص = ٩$ ، $٥س + ٤ص = -٢$

الحـــل :

المصفوفة الممثلة للنظام هى : $أ = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ٩ \\ ٥ & ٤ & -٢ \end{array}\right]$

فكرة الحل هى تحويل المصفوفة إلى مثلثية علوية باستخدام خصائص المحددات :

$$أ = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ٩ \\ ٥ & ٤ & -٢ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٢ + ٣ص_١} أ = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ٩ \\ ٠ & ١٧ & -٥١ \end{array}\right]$$

ومنها تكون $١٧ص = -٥١ \Leftarrow ص = -٣$

وبالتعويض العكسى $٣س - (-٣) = ٩ \Leftarrow ٣س = ٦$ ومنها $س = ٢$

مثال٦: استخدم طريقة جاوس لحل النظام :

$٦س - ص + ٣ع = ١٣$ ، $٣ص - ٤ع = -٦$ ، $س + ٧ص = ١٥$

الحـــل :

نكون المصفوفة الممتدة $أ = \left[\begin{array}{ccc|c} ٦ & -١ & ٣ & ١٣ \\ ٠ & ٣ & -٤ & -٦ \\ ١ & ٧ & ٠ & ١٥ \end{array}\right]$ ونجرى العمليات الآتية :

$$أ = \left[\begin{array}{ccc|c} ٦ & -١ & ٣ & ١٣ \\ ٠ & ٣ & -٤ & -٦ \\ ١ & ٧ & ٠ & ١٥ \end{array}\right] \xrightarrow{ص_١ - ٦ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ٦ & -١ & ٣ & ١٣ \\ ٠ & ٣ & -٤ & -٦ \\ ٠ & -٤٣ & ٣ & -٧٧ \end{array}\right] \xrightarrow{٤٣ص_٢ + ٣ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ٦ & -١ & ٣ & ١٣ \\ ٠ & ٣ & -٤ & -٦ \\ ٠ & ٠ & -١٦٣ & -٤٨٩ \end{array}\right]$$

وبهذا نكون قد حصلنا علي مصفوفة مثلثية ، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسى

فتكون $-١٦٣ع = -٤٨٩$ ومنها $ع = \frac{-٤٨٩}{-١٦٣} = ٣$

كذلك $٣ص - ٤ع = -٦$ ومنها $٣ص - ١٢ = -٦$ أى أن $ص = ٢$

كما أن $٦س - ص + ٣ع = ١٣$ ومنها $٦س - ٢ + ٩ = ١٣$ أى أن $س = ١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

$س - ص + ع = ١٠$ ، $س + ٢ص + ع = ١٦$ ، $٢س + ص - ع = ٥$

الحـل :

نكون المصفوفة الممتدة $أ = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ١٠ \\ ١ & ٢ & ١ & ١٦ \\ ٢ & ١ & -١ & ٥ \end{array}\right]$ ونجرى العمليات الآتية :

$$أ = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ١٠ \\ ١ & ٢ & ١ & ١٦ \\ ٢ & ١ & -١ & ٥ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_١ - ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ١٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ & -٦ \\ ٢ & ١ & -١ & ٥ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ١٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ & -٦ \\ ٣ & ٣ & ٠ & ١٥ \end{array}\right] \xleftarrow{٢ص_١ - ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ١٠ \\ ٠ & -٣ & ٠ & -٦ \\ ٠ & ٠ & -٣ & -٢١ \end{array}\right] \xleftarrow{ص_٢ - ص_٣}$$

وبهذا نكون قد حصلنا علي مصفوفة مثلثية ، فنجد قيم المجاهيل بالتعويض العكسى

فتكون $-٣ع = -٢١$ ومنها $ع = ٧$ وكذلك $-٣ص = -٦$ ومنها $ص = ٢$

كما أن $س - ص + ع = ١٠$ ومنها $س = ٥$

تمارين ٣-٥

(١) حل أنظمة كلاً من المصفوفات باستخدام طريقة النظير الضربى :

(أ) $س + ص = ٢$ ، $س + ٣ص = ٥$

(الجواب: $س = \frac{١}{٢}$، $ص = \frac{٣}{٢}$)

(ب) $٣س + ٥ص = ١١$ ، $٢س - ٣ص = -١٨$

(الجواب: $س = -٣$، $ص = ٤$)

(٢) حل أنظمة كلاً من المصفوفات بطريقة كريمر :

(أ) $س = ص + ١$ ، $٢س + ص = ٢$

(الجواب: $س = ١$، $ص = ٠$)

(ب) $٢س + ٣ص = ١٩$ ، $٥س + ٢ص = ٢٠$

(الجواب: $س = ٢$، $ص = ٥$)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

(٣) عند حل نظام من معادلتين خطيتين في متغيرين وجد أن $|\text{أ س}| = ٢|٢| = \frac{|\text{أ ص}|}{٢}$ ، ما قيمة كلا من س، ص ؟

(الجواب: س = ٢ ، ص = −٤)

(٤) حل أنظمة المعادلات الآتية بطريقة جاوس :

(أ) ٣س + ٧ص = ١٠ ، س + ص = ٢

(الجواب: س = ١، ص = ١)

(ب) س + ص + ع = ١ ، س − ص + ع = ٤ ، س − ص − ع = −١

(الجواب : س = ٠ ، ص = $\frac{-٣}{٢}$ ، ع = $\frac{٥}{٢}$)

(ج) س − ص + ٤ع = ٩ ، ٣ص + س − ع = −٤ ، ٢س + ٣ص + ٢ع = ٢

(الجواب : س = ٣ ، ص = −٢ ، ع = ١)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

إصدارات سلسلة الممتاز في الرياضيات

- ✓ **الممتاز – شرح وتحليل لمحتوى المنهاج وتمارين إثرائية**
- ✓ **الممتاز – حلول جميع تمارين الكتاب المدرسي**
- ✓ **الممتاز – نماذج اختبارات مع حلولها**
- ✓ **الممتاز – تمارين مميزة**

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b

الصف
12
علمي
الجزاء الاول

الممتاز
في الرياضيات

إعداد
أ.رامي عاشور

0599638419
abufadel1974@gmeil.com
Ramy Ashour

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #100933 | TRACK 3010fd5a6f39003b