

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

١٢



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الأدبي والشرعي

فريق التأليف:

أ. محمد الفرا

أ. رهام مصلح

أ. إيناس زهران (منسقاً)



أ. نسرين دويكات

أ. قيس شبانة

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين

تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٨ / ٢٠١٩ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية

إشراف فني أ. كمال فحماوي
تصميم فني صباح الفتياي، منال رمضان

تحكيم علمي د. عمر غنام
تحرير لغوي د. سهير قاسم
قراءة: رابعة حنايشة

متابعة للمحافظات الجنوبية د. سميرة النخالة

الطبعة الأولى

٢٠١٩ م / ١٤٤٠ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين

وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 هاتف | فاكس +970-2-2983280

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي التابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعدد من المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكرية المتوخاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تألفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطر لهذا التطوير، بما يعزز أخذ جزئية الكتب المقررة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلاق بين المطلوب معرفياً وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طبيعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إجزاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، واللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٨ م

يسرنا أن نقدم لزملائنا المعلمين والمعلمات، ولطلبتنا الأعزاء كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي الأدبي والشرعي، وفق الخطوط العريضة لوثيقة الرياضيات، والتي تم تطويرها بناءً على التغذية الراجعة والدراسات الهادفة إلى تطوير المناهج الفلسطينية، ومواكبتها لمهارات القرن الحادي والعشرين، مستندين في ذلك لمعايير وطنية ودولية.

لقد اشتمل محتوى الكتاب، على أنشطة وتطبيقات وسياقات حياتية، من أجل إفساح المجال للطلبة للتفكير والإبداع، وإبراز أهمية الرياضيات في الحياة، وقد تم مراعاة التسلسل المنطقي للمفاهيم والنظريات والتعميمات . وقد اشتمل الكتاب على أربعة وحدات، هي:

الوحدة الأولى (التفاضل والتكامل) حيث عرضت المفاهيم الآتية: متوسط التغير وقواعد الاشتقاق والقيمة القصوى للإقترانات كثيرة الحدود، ثم ربط التكامل بالتفاضل، والتكامل المحدود وبعض قوانينه.

أما في الوحدة الثانية (المصفوفات) فتم تعريف المصفوفة والعمليات عليها، المحددات والنظير الضربي وحل أنظمة من المعادلات باستخدام المصفوفات.

وفي الوحدة الثالثة (المعادلات والمتسلسلات) استعرضت الوحدة طرق حل المعادلات وكذلك حل بعض المعادلات الأسية واللوغارتمية، والتعرف على أنواع المتسلسلات ومجموعها.

أما الوحدة الرابعة (الاحصاء) فتم عرض العلامة المعيارية، واستخدام الجداول في معرفة المساحة تحت منحني التوزيع الطبيعي المعياري وتطبيقات حياتية عليها.

نتمنى أن نكون بهذا العمل قد حققنا مطالب عناصر العملية التعليمية كافة، بإخراج منهاج فلسطيني واقعي، يربط الطالب بظواهر رياضية حياتية، آمليين من زملائنا المعلمين والمعلمات والمديرين والمديرات في مدارس الوطن، تقديم التغذية الراجعة لمركز المناهج قبل تطبيق الكتاب المقرر، وأثناء تطبيقه في الميدان، وبعد التطبيق.

والله ولي التوفيق

فريق التأليف

المحتويات

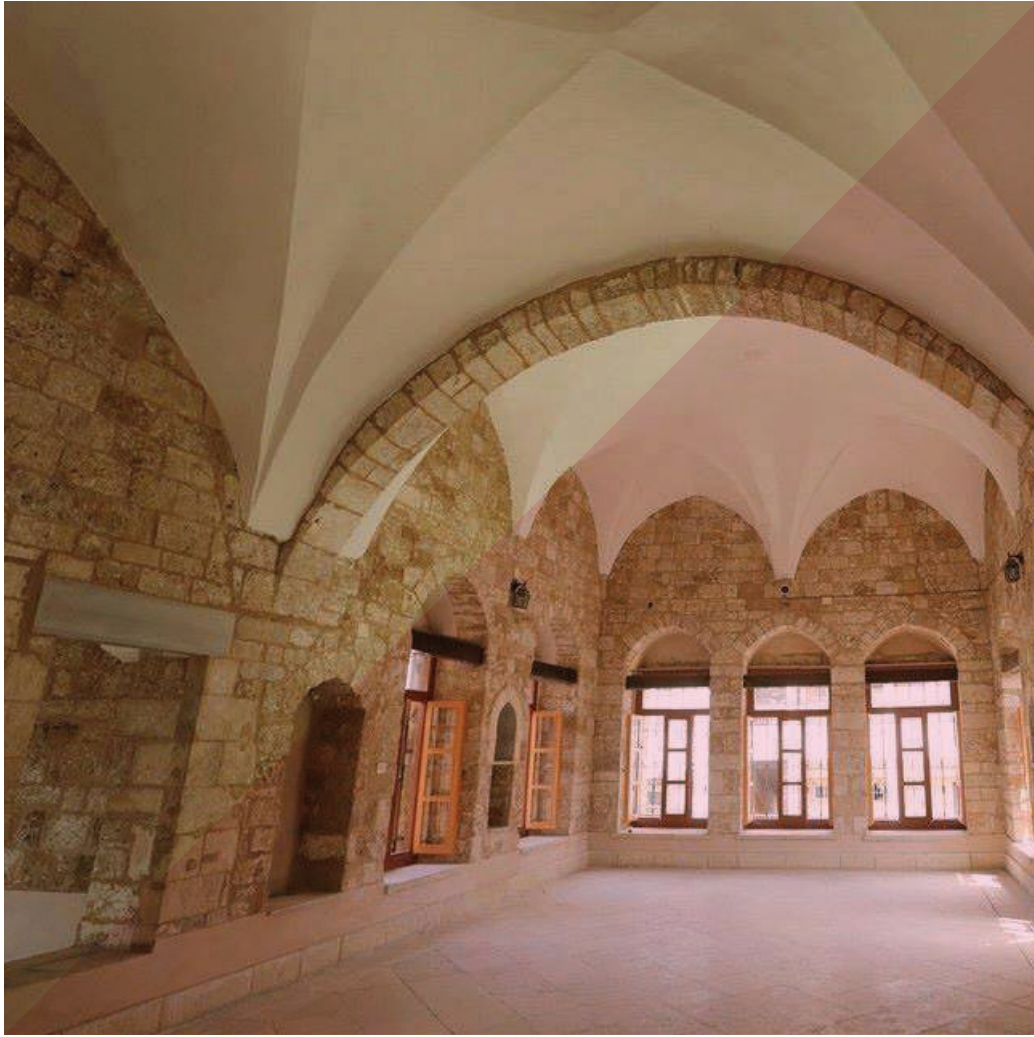
٤	Rate Of Change	(١ - ١) متوسط التغير	التفاضل والتكامل
١٠	First Derivative	(٢ - ١) المشتقة الأولى	
١٤	Derivative Rules	(٣ - ١) قواعد الاشتقاق	
٢٠	Extreme Values	(٤ - ١) القيم القصوى للإقتران	
٢٥	Indefinite Integral	(٥ - ١) التكامل غير المحدود	
٣١	Definite Integral	(٦ - ١) التكامل المحدود	
٣٨	Chapter Exercises	(٧ - ١) تمارين عامة	
٤٣	Matrix	(١ - ٢) المصفوفة	المصفوفات
٤٩	Matrix Operations	(٢ - ٢) العمليات على المصفوفات	
٥٨	Matrix Multiplication	(٣ - ٢) ضرب المصفوفات	
٦٣	Matrix Inverse	(٤ - ٢) النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية	
٧١	Cramer`s Rule	(٥ - ٢) حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر	
٧٥	Chapter Exercises	(٦ - ٢) تمارين عامة	
٧٩	Exponent Equations	(١ - ٣) المعادلات الأسية	المعادلات والمتسلسلات
٨٢	Logarithmic Equations	(٢ - ٣) المعادلات اللوغاريتمية	
٨٥	Series	(٣ - ٣) المتسلسلات	
٨٩	Arithmetic Series	(٤ - ٣) المتسلسلة الحسابية	
٩٥	Geometric Series	(٥ - ٣) المتسلسلة الهندسية	
٩٩	Chapter Exercises	(٦ - ٣) تمارين عامة	
١٠٣	Standard Score	(١ - ٤) العلامة المعيارية	الإحصاء
١٠٨	Standard Normal Distribution	(٢ - ٤) التوزيع الطبيعي المعياري	
١١٤	Chapter Exercises	(٣ - ٤) تمارين عامة	



الوحدة

التفاضل والتكامل

Differentiation and Integration



أفكر وأناقش:

كيف يمكن حساب مساحة الزجاج اللازم لصناعة باب للمدخل الرئيسي للمتحف؟



يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف مبادئ التفاضل والتكامل في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير للاقتران ق(س).
٢. إيجاد ميل القاطع لمنحني الاقتران ق(س) المارّ بنقطتين تقعان على ذلك المنحنى.
٣. التعرف على مفهوم المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٤. استخدام قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٥. تحديد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) في مجاله.
٦. تعيين القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) في مجاله وتحديد نوعها.
٧. التعرف على مفهوم التكامل.
٨. إيجاد التكامل غير المحدود.
٩. استخدام خصائص التكامل المحدود في إيجاد التكاملات المختلفة.



متوسط التغير



نشاط (١)

يعدّ الزيت الفلسطيني من أجود أنواع الزيوت على مستوى العالم، ويشكّل دعامة اقتصادية للعائلة الفلسطينية.

يرصد الجدول أدناه إنتاج فلسطين من الزيتون، والزيت المستخرج في عامي ٢٠١٣ م و٢٠١٤ م، كما وردت من جهاز الإحصاء المركزي.

كمية الزيتون وكمية الزيت المستخرج منه في العامين ٢٠١٣ م و٢٠١٤ م (الكميات بالطن)

التغير بين العامين	السنة		س	ص
	٢٠١٤ م	٢٠١٣ م		
٣٥٠٠٠	١٠١٠٠٠	٦٦٠٠٠	كمية الزيتون	
_____	٢٥٠٠٠	١٨٠٠٠	كمية الزيت المستخرج	

التغير في كمية الزيتون بين عامي (٢٠١٣ م) و (٢٠١٤ م) يساوي ٣٥٠٠٠ طن.

التغير في كمية الزيت المستخرج بين عامي (٢٠١٣ م) و (٢٠١٤ م) يساوي _____.

تعريف

إذا كان $ص = ق(س)$ اقتراناً، وتغيرت $س$ من $س_١$ إلى $س_٢$ فإن:

التغير في قيمة $س = س_٢ - س_١$ ، ويرمز له بالرمز $\Delta س$

التغير في قيمة $ص = ص_٢ - ص_١ = ق(س_٢) - ق(س_١)$ ويرمز له بالرمز $\Delta ص$

نشاط (٢)



أجدد التغيير في س عندما تتغير قيمة س من $s_1 = 1$ إلى $s_2 = 4$.
 $\Delta s = s_2 - s_1 = \dots$

مثال (١)



إذا كان $v = c(s)$ ، $s = 2$ ، وكانت $s_1 = 1$ ، $\Delta s = 2$ ، فما قيمة التغيير في قيمة v ؟

الحل:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$1 - s_2 = 2$$

$$s_2 = 3$$

$$\Delta v = c(s_2) - c(s_1) = c(3) - c(1)$$

$$= (2-5) - (1-5) = \dots$$

$$= 3 - 13 = \dots$$

$$= 16 = \dots$$

أناقش: ما التغيير في قيمة v عندما يكون قيمة التغيير في s يساوي ١؟ (في المثال ١)

تعريف



إذا كان $v = c(s)$ ، واقتراً، وتغيرت s من s_1 إلى s_2 فإن:

$$\text{متوسط التغيير للاقتران } c(s) = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{c(s_2) - c(s_1)}{s_2 - s_1}, \text{ حيث } s_1 \neq s_2$$

مثال (٢)



أحسب متوسط التغير في الاقتران $ق(س) = ٥ + ٢س$ ، عندما تتغير $س$ في $[٥, ٣]$.

الحل:

$$ق(٣) = ٥ + ٢(٣) = ١٤$$

$$ق(٥) = ٥ + ٢(٥) = ٣٠$$

$$\frac{ق(٣) - ق(٥)}{٣ - ٥} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \text{متوسط التغير للاقتران}$$

$$\frac{١٤ - ٣٠}{٢} =$$

$$٨ =$$

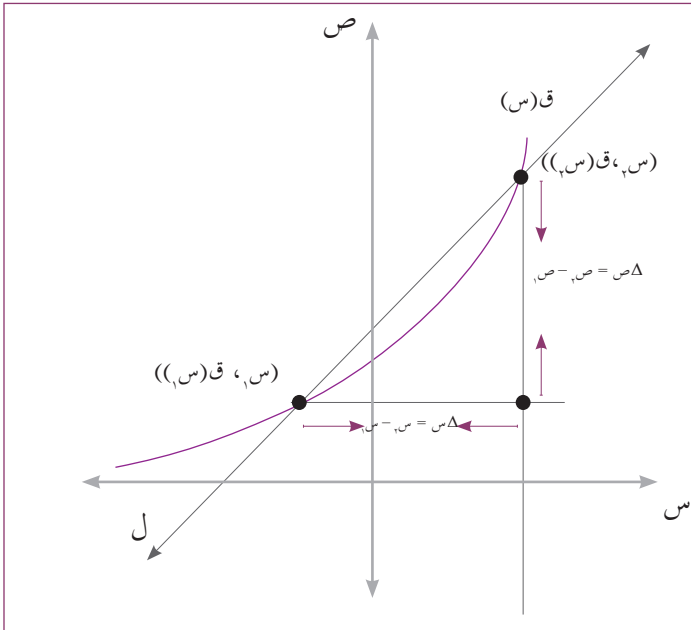
المفهوم الهندسي لمتوسط التغير:

إذا قطع المستقيم $ل$ منحنى $ق(س)$ في

النقطتين $(س_١, ق(س_١))$ ، $(س_٢, ق(س_٢))$

فإن ميل المستقيم القاطع $ل$ يساوي

$$\frac{ق(س_١) - ق(س_٢)}{س_١ - س_٢} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \text{متوسط التغير}$$



مثال (٣)



أجد ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) الممثل بالشكل المجاور.

الحل:

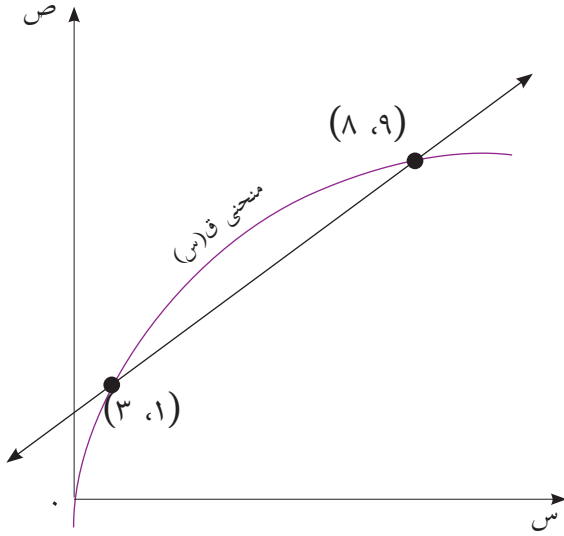
من الرسم:

$$ق(١) = ٣$$

$$ق(٩) = ٨$$

$$\text{ميل القاطع} = \frac{ق(١) - ق(٩)}{١ - ٩} = \frac{ق(١س) - ق(٩س)}{١س - ٩س} = \frac{٣ - ٨}{١ - ٩} = \frac{٥}{٨}$$

إذن ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) يساوي $\frac{٥}{٨}$



مثال (٤)



إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين أ(٤-، ٦) ، ب(٢، ٠)، فما متوسط التغير للاقتران ق(س)؟

الحل:

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١س) - ق(٢س)}{١س - ٢س}$$

$$= \frac{٠ - ٦}{٢ - ٤}$$

$$= \frac{٦}{٢}$$

$$= ٣$$



مثال (٥)



إذا كان هـ (س) = ٢ق (س) + ٤، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٣، ٧] يساوي ١٠، أجدُ متوسط التغير للاقتران هـ (س) على الفترة ذاتها.

الحل:

$$\frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(٧)}}{٣ - ٧} = \text{متوسط التغير للاقتران ق(س)}$$

$$١٠ =$$

$$\frac{\text{هـ(٣)} - \text{هـ(٧)}}{٣ - ٧} = \text{متوسط التغير للاقتران هـ(س)}$$

$$\frac{(\text{ق(٣)} + ٤) - (\text{ق(٧)} + ٤)}{٣ - ٧} =$$

$$\frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(٧)}}{٣ - ٧} =$$

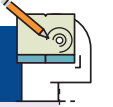
$$\left(\frac{\text{ق(٣)} - \text{ق(٧)}}{٣ - ٧} \right) ٢ =$$

$$١٠ \times ٢ =$$

$$٢٠ =$$



تمارين ومسائل (١ - ١)



١ أجد متوسط التغير في كل من الاقترانات الآتية عندما تتغير s من s_1 إلى s_2 .

أ) $q(s) = 2s - 6$ ، $s_1 = 0$ ، $s_2 = 3$

ب) $h(s) = s^2 + 2$ ، $s_1 = 2$ ، $s_2 = 5$

ج) $l(s) = \sqrt{2+s}$ ، $s_1 = 1$ ، $s_2 = 6$

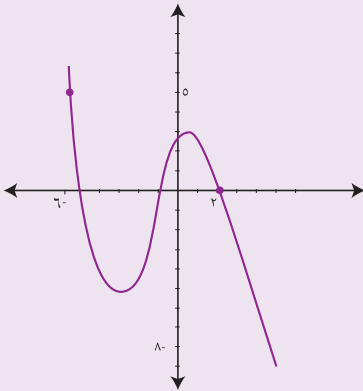
٢ يقطع المستقيم l منحنى الاقتران $q(s)$ في النقطتين $(1, -2)$ ، $(4, 4)$ ، فإذا كان ميله يساوي 3 ، أجد قيمة الثابت c .

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران $q(s)$ في $[2, 4]$ يساوي 5 ، أجد متوسط تغير الاقتران

$h(s) = 3q(s) - 2$ في تلك الفترة.

٤ إذا كان متوسط تغير الاقتران $q(s) = s^2 - 5s$ في $[1, 3]$ يساوي -9 ، أجد قيمة الثابت a ؟

٥ إذا كان $q(3) = 8$ ، وكان متوسط التغير في الاقتران $q(s)$ عندما تتغير s من $s_1 = 3$ إلى $s_2 = 5$ يساوي -2 ، أجد $q(5)$.



٦ يمثل الشكل المجاور منحنى $q(s)$ على الفترة $[-6, 2]$

احسب ميل القاطع الذي يمر بنقطتين $(-6, q(-6))$ و $(2, q(2))$

المشتقة الأولى

نشاط (١)

تعدّ الضرائب من مصادر التمويل الأساسية لأنشطة الدولة ونفقاتها. وقد تم إقرار ضريبة الدخل على الأفراد من خلال توزيعهم في شرائح ضريبية، حيث تكون ضريبة الدخل ٥٪ على الأفراد الذين ينحصر دخلهم السنوي بين (١-١٥) ألف دينار، في حين لم تقر في فلسطين ضريبة على الهدايا أو الميراث.

مقدار الضريبة على ميراث قدره ١٢٣٠ ديناراً يساوي صفرًا (لماذا)؟

$$\text{مقدار ضريبة الدخل على } ١٠٠٠ \text{ دينار} = \frac{٥}{١٠٠} \times ١٠٠٠ = ٥٠ \text{ ديناراً.}$$

$$\text{مقدار ضريبة الدخل على } ٢٤٠٠ \text{ دينار} = \frac{٥}{١٠٠} \times ٢٤٠٠ = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{مقدار ضريبة الدخل على } ١٢٠٠٠ \text{ دينار} = \underline{\hspace{2cm}}$$

وبالرموز: إذا كانت (ص) مقدار الضريبة المفروضة على الدخل الذي مقداره (س) حيث $١٠٠٠ \leq س \leq ١٥٠٠٠$ فإن:

$$ص = \left(\frac{٥}{١٠٠} \right) \times س، \text{ لاحظ أنه مهما اختلف المبلغ تبقى القيمة } \frac{٥}{١٠٠} \text{ ثابتة. (لماذا)؟}$$

تعريف*

إذا كان $ص = ق(س)$ معرفاً عند $س = م$ ، وكانت $هـ$ $ق(م) - ق(هـ)$ موجودة، فإن $ق(س)$ يكون

قابلاً للاشتقاق عند $س = م$ وتسمى المشتقة الأولى للاقتران $ق(س)$ عند $س = م$.

ويرمز لها بالرمز $ق'(م)$ أو $\frac{ص}{س} \Big|_{س=م}$ أو $ص' \Big|_{س=م}$.

قاعدة (١): إذا كانت $ص = ق(س) = م$ ، حيث $م$ عدد حقيقي، فإن $ق'(س) = \frac{ص}{س}$ = صفر.

قاعدة (٢): إذا كانت $ص = م + س$ ، حيث $م$ ، $ب$ عدداً حقيقيين، فإن $ق'(س) = \frac{ص}{س} = م$.

* تعريف المشتقة الأولى للعلم فقط.

مثال (١)



أجدُ مشتقة كل من الاقتران الآتية:

أ) ق(س) = ٩٨ ب) ص = ٥س ج) ٢ص = ٤-س

الحل:

أ) ق(س) = ٩٨ (اقتران ثابت)

إذن: ق : س = صفر.

ب) ص = ٥س (اقتران خطي)

إذن: $\frac{ص}{س} = ٥$

ج) ٢ص = ٤-س

ص = ٢-س ومنها $\frac{ص}{س} = ٢-$

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) = س^٠، فإن ق(س) = ن س^{٠-١}، حيث:
ن عدد حقيقي، ن ≠ ٠، س ≠ ٠.

مثال (٢)



أجدُ مشتقة الاقتران ق(س) = س^٥ عند النقطة (-٢، -٣٢).

الحل:

ق(س) = ٥س^٤

ق(-٢) = ٥(-٢)^٤

= ١٦ × ٥ =

٨٠ =

نشاط (٢)



إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{s^2}$ فلإيجاد ق(-٨):

$$\text{ق(س)} = \sqrt[3]{s^2}$$

$$\text{ق(س)} = s^{\frac{2}{3}} \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$\text{ومنها ق(س)} = s^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{s^{\frac{2}{3}}}$$

ومنها ق(-٨) = _____ .

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقترانا قابلاً للاشتقاق، وكان P عدداً حقيقياً، $P \neq 0$ ، فإن الاقتران ه(س) = $P \cdot \text{ق(س)}$ هو اقتران قابل للاشتقاق، وتكون ه(س) = $P \cdot \text{ق(س)}$

مثال (٣)



إذا كان ه(س) = ٥ ق(س)، وكان ق(٦) = ١٠، فما قيمة ه(٦)؟

الحل:

$$\text{ه(س)} = ٥ \text{ ق(س)}$$

$$\text{ه(س)} = ٥ \text{ ق(س)}$$

$$\text{ه(٦)} = ٥ \times \text{ق(٦)}$$

$$\text{ومنها ه(٦)} = ٥ \times ١٠ = ٥٠$$

تمارين ومسائل (٢ - ١)



أجد مشتقة كل من الاقتارات الآتية عند قيمة س المقابلة لكل منها:

- ١
- أ) ق(س) = $\sqrt[5]{2-s}$ عند س = ١٠٠
- ب) ص = s^3 عند س = ١٢
- ج) ك(س) = س عند س = ٧-
- د) ق(س) = $\sqrt[3]{s^2}$ عند س = ١
- هـ) ق(س) = s^3 عند س = ١-

أجد ق(س) لكل من الاقتارات الآتية:

- ٢
- أ) ق(س) = $\frac{64}{s^2}$ ، س \neq صفر
- ب) ق(س) = (٠,٠٠٣)^٥
- ج) ق(س) = ٥س^٥

٣

إذا كان ص = ٦ ق(س)، وكان ق(٥) = ٧، أجد قيمة $\frac{ص}{س}$ عند س = ٥

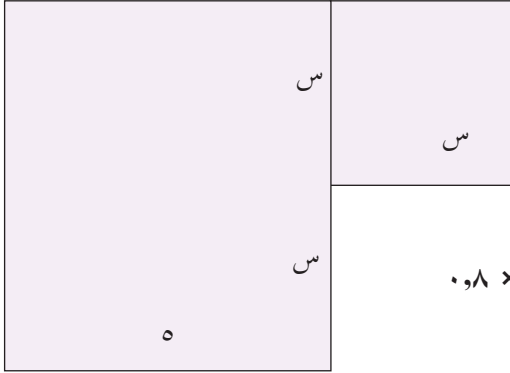
٤

إذا كان ق(س) = s^3 ، وكان ق(٢) = ٦٠، فما قيمة الثابت ؟

قواعد الاشتقاق

نشاط (١)

اعتاد الفلسطيني منذ القدم تجميع مياه الأمطار في فصل الشتاء عن أسطح المنازل في بئرٍ يُلحِقُهُ بيته. وتشكل هذه العملية جزءاً من الحصاد المائي الذي يقوم به الفلسطيني للتغلب على مشكلة نقص المياه في فصل الصيف. يمثل الشكل المجاور سطح أحد المنازل.



مساحة سطح المبنى = $(س^2) + (\text{_____})$

كمية المياه المتجمعة (م^٣) في العام ٢٠١٦ م تعطى بالعلاقة:

مساحة سطح المبنى (م^٢) × معدل سقوط الامطار العام (م) × ٠,٨

إذا كان معدل سقوط الامطار عام ٢٠١٦ م يساوي ٠,٤٠٤ م،

فإن كمية المياه المتجمعة عن سطح البيت = _____.

كيف يمكن اشتقاق هذه العلاقة؟

قاعدة (١): إذا كان ق(س) و ه(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ك(س) = ق(س) ± ه(س) فإن:

الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق، ويكون ك'(س) = ق'(س) ± ه'(س).

وبلغة أخرى: (ق + ه)'(س) = ق'(س) + ه'(س)

مثال (١)

إذا كان ق(س) = ٥س^٢، وكان ه(س) = ٤س^٣، أجد:

(أ) (ق + ه)'(س)

(ب) (ق - ه)'(١)

الحل:

ق'(س) = ١٠س. كما أن: ه'(س) = ١٢س^٢

أ) بحسب القاعدة: (ق + هـ) (س) = ق (س) + هـ (س)

ومنها: (ق + هـ) (س) = ١٠س + ١٢س^٢ (لماذا؟)

$$\text{ب) ق (١) = (١)١٠ = ١٠}$$

$$\text{هـ (١) = (١)١٢ = ١٢}$$

وبما أن (ق - هـ) (س) = ق (س) - هـ (س)

فإن: (ق - هـ) (١) = ق (١) - هـ (١) = (١٠) - (١٢)

$$٢- =$$

نشاط (٢)



إذا كان ق (س) = ٦س^٢ + ٥س - ٧، فإن:

$$\text{ق (س) = ٦} \times (٢س) + ٥ \text{ (لماذا؟)}$$

$$\text{ق (٣) = } \underline{\hspace{2cm}}$$

نشاط (٣)



إذا كان ق (س) = ك (س) - م (س) + ٧ حيث: ك (س) = ٣س^٢ + ٢، م (س) = ٣س + ٢، فإن:

$$\text{ك (س) = ٩س^٢}$$

$$\text{م (س) = ٣}$$

$$\text{ق (س) = ك (س) - م (س)}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \text{ق (٢-)} =$$

■ أفكر: أجد ق (س)، حيث ق (س) = (٢س + ١) × (س)

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) ، ه(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = ١ فإن:

$$ق(ه) \times ه(ق) = ه(ق) \times ق(ه) + ه(ه) \times ق(ق)$$

وبالكلمات:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول \times مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني \times مشتقة الاقتران الأول

مثال (٢)



ق(٢-)	ه(٢-)	ق(٢-)	ه(٢-)
٥	١-	٤-	٧

اعتمد المعطيات في الجدول المجاور لإيجاد (ق \times ه) (٢-)

الحل:

مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول \times مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني \times مشتقة الاقتران الأول

$$ق(ه) \times ه(ق) = ه(ق) \times ق(ه) + ه(ه) \times ق(ق)$$

$$٥ \times ١- + ٧ \times ٤- =$$

$$٣٩ =$$

نشاط (٤)



إذا كان ق(س) = (٣س^٢ - ٥س) (٧-٤س) فإن ق(س) تساوي:

ق(س) = الاقتران الأول \times مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني \times مشتقة الاقتران الأول

$$ق(س) = (٣س^٢ - ٥س) (٤-٧) + (٤-٧) (٥ - ٦س)$$

ومنها ق(٢) = _____

_____ =

قاعدة (٣): إذا كان ق (س)، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان هـ (س) ≠ ٠ عند س = ١ فإن:

$$\left(\frac{ق}{هـ}\right)' = \frac{(هـ)' ق - (ق)' هـ}{(هـ)^2} ، وبالكلمات:$$

$$\frac{(المقام \times مشتقة البسط) - (البسط \times مشتقة المقام)}{مربع المقام} = مشتقة ناتج قسمة اقترانين$$

مثال (٣)



إذا كان ك (س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، وكان:

$$ق(١٠) = ٢ ، ق'(١٠) = ٣- ، هـ(١٠) = ٢- ، هـ'(١٠) = ١٧ ، أجد ك'(١٠).$$

الحل:

$$ك'(س) = \left(\frac{ق(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{(هـ(س))' ق(س) - (ق(س))' هـ(س)}{(هـ(س))^2}$$

$$ك'(١٠) = \frac{(هـ(١٠))' ق(١٠) - (ق(١٠))' هـ(١٠)}{(هـ(١٠))^2}$$

$$= \frac{(١٧ \times ٢) - (٣- \times ٢-)}{٤}$$

$$= \frac{٢٨-}{٤}$$

$$= ٧-$$



مثال (٤)



$$\frac{9}{8} = \text{ق(١)} \text{ إذا كان ق(س) } = \frac{3 - 4س}{6 - 2س}, \text{ س} \neq 3, \text{ أتحقق أن ق(١)}$$

الحل:

$$\text{ق(س)} = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

$$\text{ق(س)} = \frac{(2)(س - 3) - (4-)(6 - 2س)}{(6 - 2س)^2}$$

$$\text{ق(١)} = \frac{(2)(1-) - (4-)(4-)}{(4-)^2}$$

$$\frac{9}{8} = \frac{18}{16} =$$



تمارين ومسائل (١ - ٣)



ق(٥)	ق(٥)	ق(٥)	ق(٥)
٩	٢	٣	١-

١ بالاعتماد على البيانات في الجدول

المجاور أحسب ما يأتي:

أ) (ق + ٢هـ) (٥)

ب) (٣ق - ٤هـ) (٥)

ج) $(\frac{ق}{هـ})$ (٥)

د) (ق × هـ) (٥)

٢ إذا كان ق(س) = س^٢ + ٧، هـ(س) = ٣ - ٢س، أجد:

أ) (ق + هـ) (١)

ب) $(\frac{ق}{هـ})$ (س)

ج) $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$

د) (ق × هـ) (٢)

هـ) ق(٢) × هـ(٢)

و) (س^٢ × ق(س)) (٢-)

٣ إذا كان (ق × هـ) (٧) = ١٢، ق(٧) = ٣، ق(٧) = ٦، هـ(٧) = ٣ أجد هـ (٧)

٤ إذا كان (ق ÷ هـ) (٩) = ٣، ق(٩) = ٥، ق(٩) = ١٢، هـ(٩) = ٣ -

أجد هـ (٩)، علماً بأن هـ(س) ≠ صفر

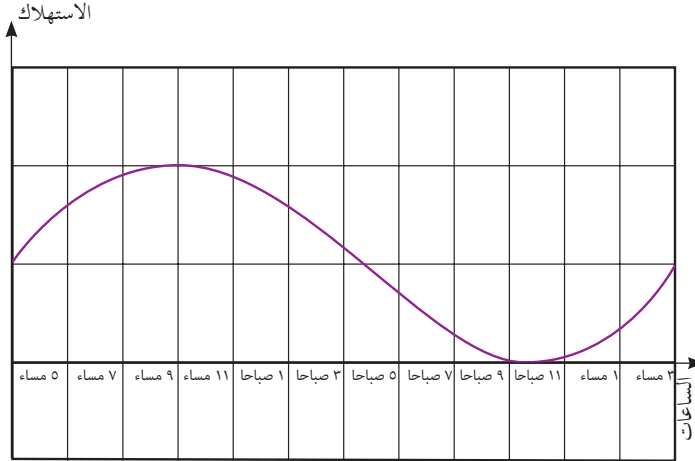
٥ إذا كان ق(س) = س^٢ + ٦س - ٥، وكان ق(٣) = ٠، فما قيمة الثابت P؟

٦ إذا كان ق(س) = س^٢ - ٢س + ٣، هـ(س) = س^٢ - ٢، وكان (ق × هـ) (١) = ٨، أجد قيمة الثابت أ.

٧ إذا كان ق(س) = $\frac{س - ٥}{٦ - ٤س}$ ، وكان ق(١) = $\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة الثابت P؟

القيم القصوى للإقتران

نشاط (١)



تعدّ الكهرباء مطلباً أساسياً في حياة المواطنين .
فدونها تتعطل الكثير من الفعاليات . ويتم رصد
استهلاك الكهرباء في فلسطين على مدار الساعة .
الشكل المجاور يوضح توزيع الأحمال اليومية
من الكهرباء في منطقة القدس وضواحيها في اليوم
الأول من عام ٢٠١٨ م .

- ألاحظ أن الأحمال تتزايد من الساعة الخامسة مساءً وحتى الساعة التاسعة مساءً، كذلك من الساعة العاشرة صباحاً حتى الثالثة مساءً .

- تتناقص أحمال الكهرباء خلال الفترة _____ .

تعريف

يكون الإقتران $ق(س)$ متزايداً على الفترة $[١, ب]$ ، إذا كان: لكل $س_٢ < س_١$ ، فإن:

$ق(س_٢) < ق(س_١)$ لأي عددين $س_١, س_٢ \in [١, ب]$.

ويكون $ق(س)$ متناقصاً على الفترة $[١, ب]$ ، إذا كان: لكل $س_٢ < س_١$ ، فإن $ق(س_٢) > ق(س_١)$

لأي عددين $س_١, س_٢ \in [١, ب]$.

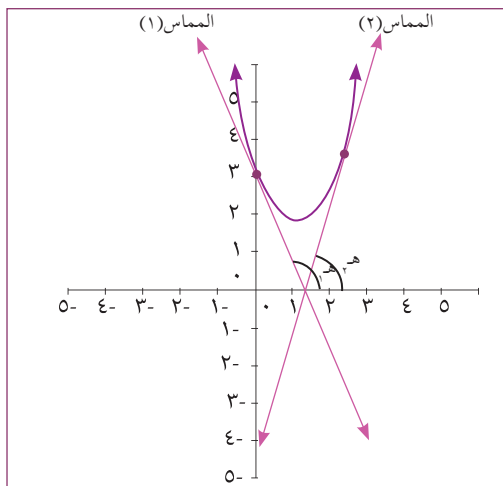
أذكّر:

تسمى الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند أي نقطة $(س, ص)$ زاوية ميل المماس (هـ) . فإذا كانت الزاوية (هـ) حادة يكون الميل موجباً . وإذا كانت الزاوية (هـ) منفرجة يكون الميل سالباً .

ملاحظة: ستقتصر الدراسة في هذا السياق على الإقترانات كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على الأكثر .



نشاط (٢)



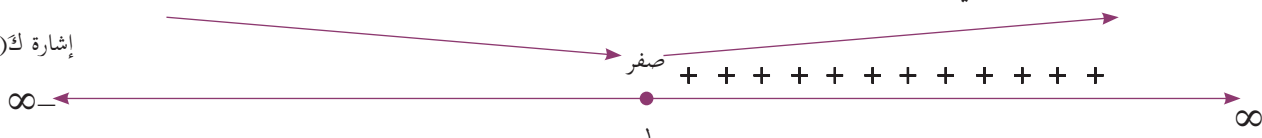
يوضِّح الشكل المجاور منحنى الاقتران ك(س) = $s^2 - 2s + 3$ المعروف على ح.

- المماس (١) يصنع زاوية منفرجة (هـ) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، لذا فإن إشارة ميله سالبة في الفترة $]-\infty, 1[$.
- ألاحظ أن ك(س) متناقص في الفترة $]-\infty, 1[$.

- المماس (٢) يصنع زاوية _____ (هـ) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، لذا فإن إشارة ميله _____ في الفترة $], 1, \infty[$.

ألاحظ أن ك(س) متزايد في الفترة $], 1, \infty[$. (لماذا)

إشارة ك(س)



قاعدة*: اذا كان ق(س) معرفاً على الفترة $]أ, ب[$ ، فإن ق(س) يكون:

- ١) متزايداً في الفترة $]أ, ب[$ ، إذا كانت ق(س) < صفر لكل س في الفترة $]أ, ب[$.
- ٢) متناقصاً في الفترة $]أ, ب[$ ، إذا كانت ق(س) > صفر لكل س في الفترة $]أ, ب[$.
- ٣) ثابتاً في الفترة $]أ, ب[$ ، إذا كانت ق(س) = صفر لكل س في الفترة $]أ, ب[$.

مثال (١)

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = $s^2 + 4s - 7$ ، $s \in \mathbb{R}$

الحل: نجد ق(س) فتكون:

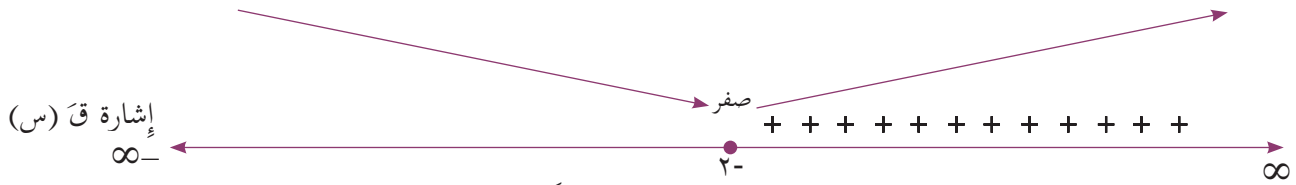
$$ق(س) = s^2 + 4s + 4$$

نضع ق(س) = صفر ومنها: $s^2 + 4s + 4 = 0$

$$إذن س = -٢$$

* لا يطلب من الطالب التحقق هندسياً من التزايد والتناقص.

أبحث في إشارة ق (س) في جوار س = ٢-



من إشارة ق (س) في الشكل المجاور، يكون الاقتران ق (س) متزايداً على الفترة $]-\infty, 2-$ ، ويكون متناقصاً في الفترة $]-2, \infty[$.

أتعلم

يكون للاقتران ق (س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند $s = p$ ، إذا كان:
١. ق (p) = صفرًا.
٢. يغير ق (س) من سلوكه حول $s = p$ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

مثال (٢)

أجد القيم القصوى المحلية للاقتران هـ (س) = $s^2 - 27s$ ، $s \in \mathbb{R}$ ، إن وجدت، وأحدد نوعها.

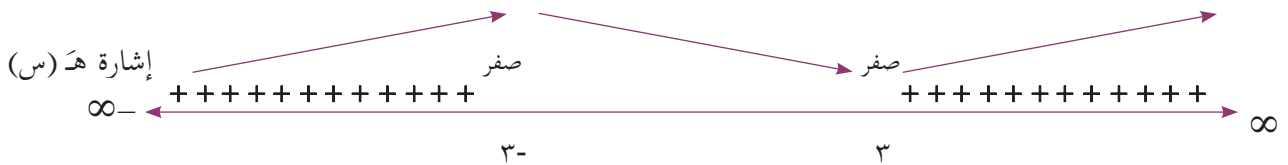
الحل:

$$\text{هـ (س) = } s^2 - 27s$$

$$\text{هـ (س) = } 0 \text{ (لماذا)؟}$$

$$s^2 - 27s = 0 \text{ ومنها (س - 3)(س + 9) = 0}$$

$$s = 3 \text{ أو } s = -3 \text{ (لماذا)؟}$$



من إشارة هـ (س) يتضح أن الاقتران هـ (س) قد غير من سلوكه، حول $s = -3$ من التزايد إلى التناقص.

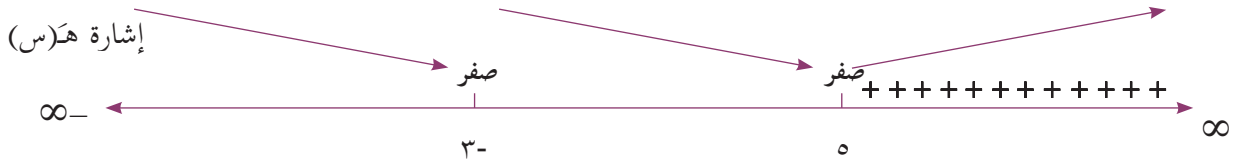
إذن للاقتران هـ (س) قيمة عظمى محلية عند $s = -3$ ، وقيمتها هـ $(-3) = 54$.

كما أن هـ(س) غير سلوكه من التناقص إلى التزايد حول $s = 3$.
 إذن للاقتران هـ (س) قيمة صغرى محلية عند $s = 3$ وقيمتها هـ $(3) = -0.4$.

نشاط (٣)



الشكل الآتي يمثل إشارة مشتقة الاقتران هـ(س) المعروف على ح.



أ) هـ(س) = صفر عند $s =$ _____ و عند $s =$ _____.

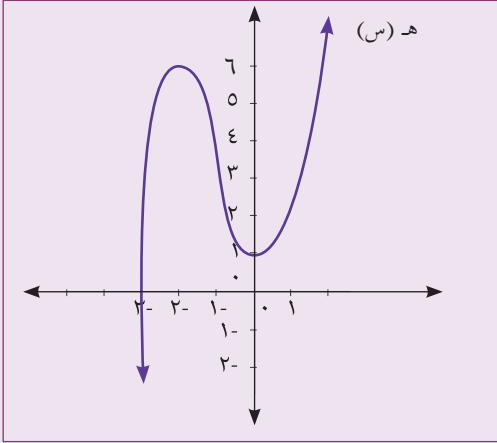
ب) هـ (س) متناقص في الفترة $[-3, 5]$.

ج) هـ (س) متزايد في الفترة _____.

د) هـ $(3-)$ لا تعتبر قيمة صغرى، لأن _____.

هـ) تعتبر هـ(٥) _____.

تمارين ومسائل (١ - ٤)



١ أجد القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران هـ(س) المرسوم في الشكل المجاور.

٢ إذا كان ق(س) = $3س^3 + 6س^2 - 1س - 1$ ، \exists ح، أجد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح.

ب) القيم القصوى للاقتران ق(س)، وأحدد نوع كل منها.

٣ ما قيمة الثابت جـ في الاقتران ق(س) = $5س - 5س^2 - 5س^3$ ، والتي تجعل ق(٢) قيمة عظمى محلية.

٤ ما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) = $(س + ٢) \times (٢ - س - ٤)$.

٥ أجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ك(س) = $\frac{1}{٣}س^3 + ٢س^2 - ٥س - ٥$ ، \exists ح، وما القيم القصوى (العظمى والصغرى) للاقتران ك(س)؟ وما نوع كل منها؟

٦ أبين أنه لا يوجد للاقتران ع(س) = $٢س^2 + ٢$ قيم قصوى في مجاله.

التكامل غير المحدود

نشاط (١)

تُولد الشعوب حرّةً بطبيعتها، ولأسبابٍ مختلفة تطمع جماعات خارجية بمقدّراتها، فتتحول من حالة الإستقلال إلى حالة الاحتلال. لكنها حالة لا تدوم، فالشعوب تقاوم وتحارب لتستقل من جديد. ويضرب الشعب الفلسطيني أقوى الأمثلة على ذلك.

الاحتلال عكس الاستقلال

كما الهدم عكس _____ .

وعملية الطرح عكس _____ .

وتعتبر عملية التكامل، في إحدى صورها، عملية عكسية للتفاضل، وهذا يعني أنه يمكن معرفة عائلة الاقترانات $ق(س)$ ، إذا عُرفت $ق(س)$.

نشاط (٢)

إذا كان $ق(س)$ اقتراناً، حيث أن مشتقته $ق'(س) = ٢س$ ، فإن قاعدة $ق(س)$ يمكن أن تكون:

$$ق_١(س) = ٢س$$

$$ق_٢(س) = ٢س + \text{_____}$$

$$ق_٣(س) = ٢س + \frac{١}{٣}$$

إذن الصورة العامة للاقتران هي $ق(س) = \text{_____}$

نشاط (٣)

إذا كان $ق(س) = ٧$ ، فإن قاعدة الاقتران $ق(س)$ ، من خلال خبرتك في التفاضل، قد تكون:

$$ق(س) = ٧س - ٢$$

أو $ق(س) = \text{_____}$. من هنا جاءت أهمية تعريف عملية التكامل كعملية عكسية للتفاضل.



تعريف

إذا كان $ق(س)$ اقتراناً مشتقته الأولى $ق'(س)$ ، فإن التكامل غير المحدود للاقتران $ق(س)$ بالنسبة لـ $س$ يساوي $ق(س) + ج$ ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز \int ، وبصورة عامة فإن:

$$\int ق'(س) دس = ق(س) + ج، \text{ حيث ج عدد حقيقي.}$$



نشاط (٤)

إذا كان $ق'(س) = ٦س$.

يكون $ق(س) = \int ق'(س) دس$

إذن الصورة العامة لقاعدة الاقتران $ق(س) = \int \text{_____} دس + ج$ ، حيث ج عدد حقيقي.

قواعد التكامل غير المحدود:

قاعدة (١): $\int ا دس = ا س + ج$ ، حيث $ا$ ، ج عددان حقيقيان.



مثال (١)

أجد: أ) $\int ٩ دس$

ب) $\int \frac{١}{٣} دس$

الحل:

أ) $\int ٩ دس = ٩ س + ج$

ب) $\int \frac{١}{٣} دس = \frac{١}{٣} س + ج$

قاعدة (٢): $\left[s^n \sqrt[n]{s} = s^{\frac{n+1}{n}} + ج, حيث ن, ج عدنان حقيقيان, ن \neq ١$

مثال (٢)

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

(أ) $\int s^2 ds$ (ب) $\int \sqrt{s} ds$

الحل:

(أ) $\int s^2 ds = \frac{s^{2+1}}{2+1} = \frac{s^3}{3} + ج$

(ب) $\int \sqrt{s} ds = \int s^{\frac{1}{2}} ds = \frac{s^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{s^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + ج$

$\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + ج =$

نشاط (٥)

أجد قاعدة الإقتران ق(س) الذي مشتقته ق(س) = $\sqrt[3]{s^4}$ ، علماً بأن ق(١) = ١

ق(س) = \int ق(س) ds

$\int \sqrt[3]{s^4} ds =$

لكن ق(١) = ١ ومنها ج = _____ .

اذن قاعدة الاقتران ق(س) = _____ .

قاعدة (٣): إذا كان ق (س) ، هـ (س) إقترايين قابلين للتكامل فإن:

$$\left[(ق \pm هـ) (س) \right] = س (س) \left[ق (س) \pm هـ (س) \right]$$

مثال (٣)

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$\text{أ) } \int (س^٣ + س) س \, دس \quad \text{ب) } \int (س^٤ - \sqrt{س}) س \, دس$$

الحل:

$$\text{أ) } \int (س^٣ + س) س \, دس = \int س^٤ + س^٢ س \, دس$$

$$= \frac{س^٥}{٥} + \frac{س^٣}{٣} + ج$$

$$\text{ب) } \int (س^٤ - \sqrt{س}) س \, دس = \int س^٥ - س^{\frac{٥}{٢}} س \, دس$$

$$= \frac{س^٦}{٦} - \frac{س^{\frac{٧}{٢}}}{\frac{٧}{٢}} + ج$$

نشاط (٦)

$$\text{أ) } \int (س^٣ + س^٥) س \, دس = \int س^٤ + س^٦ س \, دس = \frac{س^٥}{٥} + \frac{س^٧}{٧} + ج$$

$$\text{ب) } \int \left(٥ + \frac{١}{س} \right) س \, دس = \dots$$

نشاط (٧)



$$(1) \quad \left[{}^2s + {}^2s + {}^2s \right] {}^2s = \frac{{}^3s}{3} + \frac{{}^3s}{3} + \frac{{}^3s}{3} + ج$$

$$= {}^2s + ج \quad (\text{لماذا؟})$$

$$(2) \quad \left[{}^3s \right] {}^2s = \text{_____}$$

ألاحظ أن: _____

قاعدة (٤): إذا كان ق (س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان ع (س) = ك. ق (س)، حيث ك عدد حقيقي، $ك \neq ٠$ ،
فإن: $\left[ع (س) \right] {}^2s = \left[ك. ق (س) \right] {}^2s = ك. \left[ق (س) \right] {}^2s$

مثال (٤)



أحسب: $\left[{}^6s \right] {}^2s$

الحل:

$$\left[{}^6s \right] {}^2s = \left[{}^6s \right] {}^2s$$

$$= 6 \times \frac{{}^3s}{3} + ج$$

$$= 2 {}^3s + ج$$

تمارين ومسائل (٥ - ١)



١ أحسب كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int (3s^2 + 4s - 5) ds$ ب) $\int s^{\frac{2}{5}} ds$ ج) $\int \sqrt[7]{s} ds$

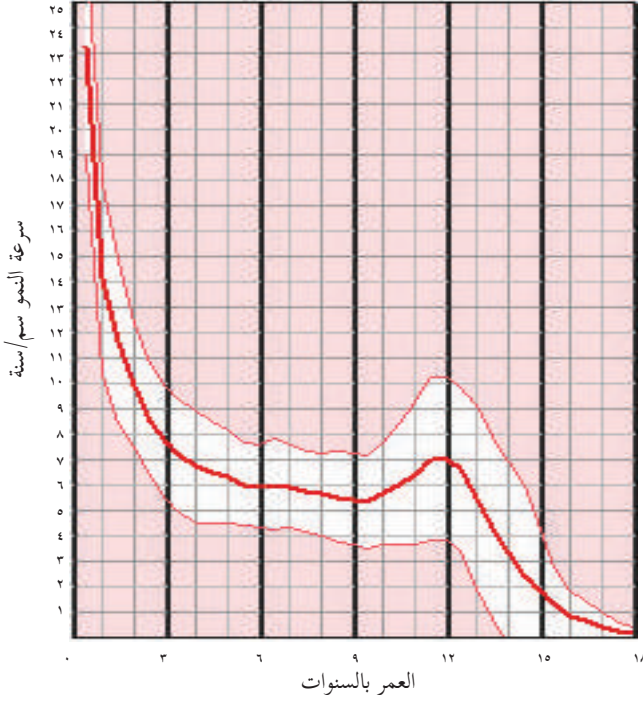
د) $\int (6s^4 + \frac{2}{5}s^2) ds$ هـ) $\int (5s^6 + 7s^2 + 3s^3) ds$ و) $\int (5)^{4002} ds$

٢ إذا كان ق(س) = $\int (s^3 - 4s^2 + 8) ds$ ، أجد ق(١).

٣ إذا كان $\int ق(س) ds = s^3 + 2s + ج$ ، أجد ق(س).

٤ إذا كان ص = $\int (s^2 + 3) ds$ ، أجد $\frac{ص}{س}$.

التكامل المحدود



أولاً: التكامل المحدود

نشاط (١)

عمّلت وزارة الصحة الفلسطينية على نشر مراكز الرعاية الصحية الأولية في مختلف القرى، والتجمعات السكانية. من أهداف هذه المراكز متابعة نمو الأطفال. وذلك من خلال متابعة التغير في طول الطفل. الشكل المجاور يوضح منحنى سرعة نمو الأطفال من سن صفر إلى ١٨ عاماً. ويمثل هذا المنحنى مشتقة منحنى النمو للأطفال. بالاستعانة بالرسم نجد أن:

سرعة نمو طفل في عمر سنتين يساوي _____ سم/سنة.

سرعة نمو طفل في عمر ٩ سنوات يساوي _____ سم/سنة.

أناقش

كيف يمكن معرفة مقدار التغير في نمو طفل بين سن ٢ - ٩ سنوات؟

نشاط (٢)

يُراد حساب التغير في الاقتران $Q(s)$ الذي تعطى مشتقته بالقاعدة $Q'(s) = 2s - 6$ ، عندما تتغير s من $s_1 = 2$ إلى $s_2 = 5$. لإيجاد التغير في الاقتران، نحتاج لقاعدة الاقتران $Q(s)$.

$$Q'(s) = 2s - 6$$

$$Q(s) = \int (2s - 6) ds = s^2 - 6s + C$$

$$\text{التغير في } Q(s) = Q(s_2) - Q(s_1)$$

$$ق(٥) = (٥)^٢ - ٦(٥) + ج.$$

$$ق(٢) = \underline{\hspace{2cm}}$$

إذن: مقدار التغير = ق(٥) - ق(٢)

$$\underline{\hspace{2cm}} = ق(٥) - ق(٢)$$

تعريف



التكامل المحدود: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن: $\int_{a}^{b} ق(س) دس = س ق(س) - \int_{a}^{b} س دق(س)$ ، حيث a : الحد الأدنى ، b : الحد الأعلى ، a ، b عدنان حقيقيان.

مثال (١)



أحسب قيمة كل من التكاملين الآتيين:

$$(١) \int_{١}^{٢} (٥ + ٢س) دس$$

$$(٢) \int_{١}^{١} (٦س - ٧) دس$$

الحل:

$$(١) \int_{١}^{٢} (٥ + ٢س) دس = س(٥ + ٢س) - \int_{١}^{٢} س د(٥ + ٢س)$$

$$= (٢٠ + ٤) - (٥ + ٢) = ١٤$$

$$(٢) \int_{١}^{١} (٦س - ٧) دس = س(٦س - ٧) - \int_{١}^{١} س د(٦س - ٧)$$

$$((1-)\gamma - {}^2(1-)\gamma) - ((1)\gamma - {}^2(1)\gamma) =$$

$$0 - 0 =$$

$$10 =$$

مثال (٢)

إذا كانت ق(س) مشتقة الاقتران ق(س)، وكان ق(١-) = ٥، ق(٢) = ٧، أجد $\int_{١-}^٢ ق(س) دس$.

الحل:

$$\int_{١-}^٢ ق(س) دس = \int_{١-}^٢ ق(س) دس \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\int_{١-}^٢ ق(س) دس =$$

$$((١-) ق - (٢) ق) ٢ =$$

$$٤ = (٥ - ٧) ٢ =$$

■ أفكر: إذا كان $\int_{٢}^٣ س^٢ دس$ ، أجد $\frac{دص}{دس}$.

أتعلم

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفرًا دائماً.

مثال (٣)

إذا كان $\int_{ب}^٦ (٣ + ٤س) دس = ٩٠$ فما قيمة الثابت ب؟

الحل:

$$\int_{ب}^٦ (٣ + ٤س) دس = \int_{ب}^٦ (٣س + ٢س٢) دس \quad (\text{لماذا؟})$$

$$= ق(٦) - ق(ب)$$

$$٩٠ = (ب٣ + ٢ب) - ((٦) ٣ + (٣٦)(٢)) =$$

$$٩٠ = (ب٣ + ٢ب) - ٩٠ =$$

$$\text{إذن: } ب = ٠ \text{ أو } ب = \frac{٣-}{٢} \text{ (لماذا؟)}$$

ملاحظة: تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود.

ثانياً: خصائص التكامل المحدود

نشاط (٣)

$$\int_٦^٦ (س٢ + ٨س) دس = \int_٦^٦ (٨س + س٢) دس$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

أستنتج أن: _____

أتعلم

$$\int_٦^٦ ق(س) دس = \text{صفر، حيث: } ب \text{ عدد حقيقي}$$

مثال (٤)

$$\text{ما قيمة } \int_٣^٣ (س - ٤) دس$$

$$\text{الحل: } \int_٣^٣ (س - ٤) دس = \text{صفر، لأن الحد الأعلى يساوي الحد الأدنى.}$$

نشاط (٤)



إذا كان $\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) = (س٦ - ٢س + ٤ج)$ ، أكمل الجدول الآتي:

التكامل الأول	قيمة التكامل الأول	التكامل الثاني	قيمة التكامل الثاني
الحالة الأولى	$\left[\begin{matrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{matrix} \right] (س) = ٤ -$	$\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) =$	قيمة التكامل الثاني
الحالة الثانية	$\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) =$	$\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) =$	١٦

أقارن بين قيمة التكاملين في كل حالة.

أستنتج أن:

أتعلم



$$\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) = \left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س)$$

مثال (٥)



إذا كان $\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) = ٩$ فما قيمة $\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (٧ + (س))$ ؟

الحل: $\left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (٧ + (س)) = \left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) + \left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] ٧$

$$= \left[\begin{matrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{matrix} \right] (س) + ٧س$$

$$= (٢٠)(٩) + (٧)(٢٨) \quad \text{لماذا؟}$$

$$= ١٨٠ + ١٩٦ = ٣٧٦$$

نشاط (٥)



إذا كان $Q(s) = (s+4)$ ، فما قيمة $Q(s)$ ؟

$$أ) \quad (s+4)Q(s) = (s+2)^2 \quad Q(2) - Q(0) = 10$$

$$ب) \quad (s+4)Q(s) = (s+2)^2 \quad Q(5) - Q(2) = \text{.....}$$

$$ج) \quad (s+4)Q(s) = (s+2)^2 \quad Q(0) - Q(5) = \text{.....}$$

أقارن بين إجابتي في الفرعين أ و ب وإجابتي في الفرع ج.

أستنتج أن : _____

أتعلم



إذا كان $Q(s)$ معرفاً على الفترة $[أ، ب]$ ، وكان $ج$ عدد حقيقي بحيث $ج > ب$ ، فإن :

$$\int_a^b Q(s) ds = \int_a^ج Q(s) ds + \int_ج^b Q(s) ds$$

وتسمى هذه الخاصية خاصية الإضافة.

مثال (٦)



إذا كان $Q(s) = s^2$ ، وكان $Q(s) = s^4$ ، فما قيمة $Q(s)$ ؟

$$\text{الحل:} \quad \int_{-3}^6 Q(s) ds = \int_{-3}^2 Q(s) ds + \int_2^6 Q(s) ds$$

$$6 = 4 + 2 =$$

$$\text{اذن:} \quad \int_{-3}^6 Q(s) ds = \int_{-3}^2 Q(s) ds + \int_2^6 Q(s) ds = 6 \times 5 = 30$$

تمارين ومسائل (١ - ٦)



١ أحسب كل من التكاملات التالية:

$$\text{أ) } \int_{-2}^1 (1 + 3s) ds \quad \text{ب) } \int_2^0 (s^2 - 7) ds \quad \text{ج) } \int_1^4 (s + \sqrt{s}) ds$$

٢ إذا كان $\int_{-2}^2 (s) ds = 3s^2 - 2s + ج$ ، فما قيمة $\int_{-2}^2 (s) ds$ ؟

٣ إذا كان $\int_1^0 (3هـ) ds = 12$ ، ما قيمة $\int_1^0 (هـ + 2س - 1) ds$ ؟

٤ إذا كان $\int_3^0 (س + ٢) ds = 12$ ، فما قيمة الثابت ب؟

٥ إذا كان $\int_{-1}^1 6س ds = \text{صفر}$ ، فما قيمة/قيم الثابت ج؟

٦ إذا كان $\int_{-1}^0 (س) ds = 13$ ، $\int_0^1 (س) ds = 7$ ، فما قيمة: $\int_{-1}^0 (2ق(س) - هـ(س)) ds$ ؟

٧ إذا كان $\int_2^7 (س) ds = 3$ ، وكان $\int_3^7 (س) ds = 9$ ، فما قيمة $\int_2^3 (س) ds$ ؟

تمارين عامة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان ق(س) = $\frac{2}{س}$ ، س $\neq 0$ ، فما قيمة ق(١)؟

- أ) ٨ (ب) ٨ (ج) ٢ (د) ٢-

٢. ما ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) = $٣س^٢ - ٢$ عند $س = ١$ ، $س = ٢$ ؟

- أ) ٣ (ب) ٦- (ج) ١٢ (د) ٩

٣. إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) يساوي $\frac{٣}{٢}$ ، وكان $\Delta س = ٦$ ، فما قيمة $\Delta ص$ ؟

- أ) ٩ (ب) ٣ (ج) ١٨ (د) ٦

٤. إذا كان ق(س) = $(١-س)(٢س)$ ؛ فما قيمة ق(١)؟

- أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) ١٨ (د) ٧-

٥. إذا كان ق(س) = $\frac{١ + ٢س^٣}{س - ٢}$ ، س $\neq ٢$ ، فما قيمة ق(٣)؟

- أ) ٣٧ (ب) ٣٧- (ج) ١٠ (د) ١

٦. إذا كان $Q(7) = 5$ ، $H(7) = 2$ ، $C(7) = 3$ ، $H(7) = 1$ فما قيمة $(2 \times 3 \times H(7))$ ؟

- أ) ٦٦ ب) ٦- ج) ٦ د) ١٨-

٧. إذا كان للاقتران $Q(س)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(10, 5)$ ، فما قيمة $Q(10)$ ؟

- أ) ٥ ب) ١٠- ج) صفر د) ٣

٨. إذا كان $\int_1^8 (س^٣ = ٣س^٢ - ٤س + ج)$ ، فما قيمة $Q(2)$ ؟

- أ) ١٢ ب) ٤ ج) ٢- د) ٨

٩. إذا كان $Q(س) = \int_1^9 (٥س^٣ + ٣س - ٢) \cdot س^\circ$ ، فما قيمة $Q(8)$ ؟

- أ) ٢٤ ب) ٤٤ ج) صفر د) ٢

١٠. إذا كان $\int_0^7 Q(س) \cdot س = ٦$ ، $\int_0^1 Q(س) \cdot س = ٤$ ، فما قيمة $\int_1^7 (٣ + (س) \cdot س) \cdot س$ ؟

- أ) ٣٢ ب) ٩ ج) ٣٣ د) ٣



السؤال الثاني: إذا كان $Q(s) = s^3 - 3s - 6$ ، وكانت $Q(2) = 0$ ، أجد قيمة الثابت a ؟

السؤال الثالث: ما متوسط التغير في الاقتران $Q(s) = \sqrt{s^2 - 2}$ ، عندما تتغير s من $s_1 = 11$ إلى $s_2 = 18$ ؟

السؤال الرابع: إذا كان $Q(s) = s^3 - 12s - 3$ ؛ أجد قيمة / قيم s بحيث $Q(s) = 0$ ؟

السؤال الخامس: إذا كان $Q(s) = \int_0^s (2s + 1) ds = 24$ ، أجد قيمة / قيم الثابت b ؟

السؤال السادس: إذا كان $Q(s) = s^4 - 8s + 1$:

(أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران $Q(s)$ ؟

(ب) ما القيم القصوى المحلية للاقتران $Q(s)$ ، وما نوعها؟

السؤال السابع: أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			احل مسائل على متوسط التغير
			اجد مشتقة الاقترانات موظفا القواعد
			احدد القيم القصوى المحلية للاقترانات
			احل مسائل على التكامل غير المحدود
			اوظف خواص التكامل المحدود في حل مسائل منتمية



الوحدة

المصفوفات Matrices



يعتبر النخيل من الثروات الزراعية الرئيسة في كثير من مناطق فلسطين، ويحرص المزارعون على زراعته في صفوفٍ وأعمدة... أناقش أهمية هذا النمط بالزراعة.



يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والعمليات عليها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التّعرف إلى المصفوفة وعناصرها.
٢. إيجاد ناتج جمع مصفوفتين وطرحهما.
٣. إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين.
٤. إيجاد النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
٥. حلّ معادلات مصفوفيّة باستخدام النظير الضربيّ.
٦. حلّ نظام من المعادلات الخطيّة باستخدام قاعدة كرامر.
٧. حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام طريقة النظير الضربي للمصفوفة.



المصفوفة

نشاط (١)

يقوم جهاز الإحصاء المركزي الفلسطيني بإجراء التعداد السكاني العام مرة واحدة كل ١٠ سنوات؛ بهدف توفير البيانات الحقيقية حول شتى مناحي حياة الفرد الفلسطيني، ويقوم الجهاز بتحديث سنوي للبيانات من خلال دراسة عينات من كل المحافظات.

كانت بيانات جهاز الإحصاء المركزي حول عدد السكان في بعض المحافظات الفلسطينية حتى نهاية العام ٢٠١٢م (لأقرب ألف) كالاتي: القدس ٣٩٧ ألف، أريحا ٤٨ ألف، غزة ٥٧٠ ألف، أما في عام ٢٠١٤م فتتم تحديث هذه البيانات كالاتي: القدس ٤١٢ ألفاً، أريحا ٥١ ألفاً وغزة ٦٦٧ ألفاً.

- عدد سكان القدس عام ٢٠١٢م يساوي _____ .
- عدد سكان أريحا عام ٢٠١٤م يساوي _____ .
- عدد سكان غزة عام ٢٠١٢م يساوي _____ .

أنظّم هذه البيانات في صفوف وأعمدة كالاتي:

عدد السكان عام ٢٠١٢م	عدد السكان عام ٢٠١٤م	
_____	_____	القدس
_____	_____	أريحا
_____	_____	غزة

كيف يمكن ترتيب هذه البيانات في منظومة أخرى؟

تعريف

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها (ن)، محصورة بين قوسين من النوع []، ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية، وتكون المصفوفة من الرتبة م × ن.

نشاط (٢)



$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٥ \end{bmatrix} = ج, \quad \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٧ & ٤- \\ ١٠ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} = ب, \quad \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٤ \\ ٦ & ٨- \end{bmatrix} = م$$

إذا كانت م

(أ) رتبة المصفوفة م تساوي ٢×٣. (لماذا؟)

(ب) رتبة المصفوفة ب تساوي _____.

(ج) رتبة المصفوفة ج تساوي _____.

(د) يقع العدد ٦ في تقاطع الصف الثالث والعمود الثاني في المصفوفة م، ولذلك يسمى المدخلة $m_{٣٦}$

■ **أفكر:** أسم المدخلة التي قيمتها ٨- في المصفوفة م.

أتعلم



يسمى كل عدد في المصفوفة م مدخلة، ويرمز له بالرمز $m_{٣٦}$ ، حيث:
(ي): الصف الذي تقع فيه المدخلة، (هـ): العمود الذي تقع فيه المدخلة.

مثال (١)



$$\begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣ & ٩ \\ ٨- & ٧ \end{bmatrix} = م$$

إذا كانت المصفوفة م، فأجيب على الأسئلة الآتية:

(أ) ما رتبة المصفوفة م؟

(ب) ما قيمة كل من المدخلات الآتية: $m_{١١}$ ، $m_{١٢}$ ، $m_{٢٣}$ ؟

(ج) أسم المدخلة التي قيمتها ٣ في المصفوفة م.

الحل:

أ) رتبة المصفوفة $P = 3 \times 2$.

المدخلة $P = 8 -$

المدخلة $P = 9$

ب) المدخلة $P = 6$

ج) المدخلة $P = 3$. (لماذا؟)

نشاط (٣)



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ ، فإن:

رتبة المصفوفة P تساوي _____.

$$3 = P$$

$$_____ = P$$

$$_____ = P - P$$

نشاط (٤)



اكتب جميع المصفوفات الممكنة، بحيث يكون عدد مدخلاتها أربعة، وقيمة كل منها صفر.

$$[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}] = P$$

ب = _____

ج = _____

أتعلم



من أنواع المصفوفات:

مصفوفة الصف:

هي المصفوفة التي تتكوّن من صف واحد فقط، و(ن) من الأعمدة، وتكون رتبته $1 \times n$.

مصفوفة العمود:

هي المصفوفة التي تتكوّن من عمود واحد فقط، و(م) من الصفوف، وتكون رتبته $m \times 1$.

المصفوفة المربعة:

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ويساوي (ن)، وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.

المصفوفة الصفرية: هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفراً، ويرمز لها بالرمز (و).

مثال (٢)



ما رتبة كل من المصفوفات الآتية؟ ومانوعها.

$$س = \begin{bmatrix} ٠,٥ & ٩- & ٢ \end{bmatrix} ، ص = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ٩ \end{bmatrix} ، ع = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٩ & ١- & ٦ \end{bmatrix} ، و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحل:

(٢) رتبة ص = 1×3 ، ص مصفوفة عمود.

(١) رتبة س = 3×1 ، وهي مصفوفة صف.

(٤) رتبة و = 3×3 ، وهي مصفوفة صفرية.

(٣) ع مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة.

تعريف



تتساوى المصفوفتان A ، B إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

مثال (٣)

أبين فيما إذا كانت المصفوفتان متساويتان في كل من الحالات الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٦ \\ ١ & ٧ & ٨ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٥ \\ ٣ & ١ & ٦ \\ ١ & ٧ & ٨ \end{bmatrix} = \text{م}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & & \\ & ٣ & \\ & & ٩ \end{bmatrix} = \text{س} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٩ & ٣ & ١ \end{bmatrix} = \text{ص} \quad ?$$

الحل:

- المصفوفتان م، ب متساويتان؛ لأن لهما الرتبة نفسها، ومدخلاتهما المتناظرة متساوية.
- المصفوفتان س، ص غير متساويتين، لأن رتبة س = ١×٣ أما رتبة ص = ٣×١

مثال (٤)

إذا كانت م = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢+س \\ ٩- & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٩- & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س التي تجعل م = ب؟

الحل:

$$\text{بما أن } \begin{bmatrix} ٩- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢+س \\ ٩- & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\text{إذن } ٩- = ٢+س$$

وبحل المعادلة ينتج أن س = -١١.

أناقش

إذا كان: $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & ٢+س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١+ص & ٢س \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أبين أن س = ٢ ، ص = ٢.

تمارين ومسائل (٢ - ١)



١ ينتج مصنع للأواني الزجاجية ثلاثة أشكال من الصحون: المربع، المستطيل، والدائري. فإذا كان لهذا المصنع فرعين أحدهما في الخليل، والآخر في رام الله، وكان عدد الصحون التي ينتجها كل فرع يومياً كما يأتي:
الخليل: ٥٠٠ صحنٍ مربع الشكل، ٤٧٠ صحنٍ مستطيل الشكل، ٢٣٠ صحناً دائري الشكل.
رام الله: ٤٠٠ صحنٍ مربع الشكل، ٢٥٠ صحنٍ مستطيل الشكل، ١٨٠ صحناً دائري الشكل. أكتب البيانات السابقة على شكل مصفوفة من الرتبة ٣×٢.

٢ إذا كانت $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{ب}$ ، $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} = \text{ج}$ ، $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{د}$:

أ) فما رتبة كل من المصفوفات السابقة؟

ب) ما نوع كل منها؟

ج) ما قيمة كل من المدخلات الآتية: ج_{١١} ، ج_{١٢} ، ب_{٣١} ؟

٣ أجد قيم الثابتين ب، ج فيما يأتي:

أ) $\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4-ب \\ ب & 7 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-ب \\ 7+ب \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

٤ أجد قيمة س، ص حيث:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2+ص \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات



أولاً: جمع المصفوفات:

نشاط (١)

تمتاز بعض المحافظات الفلسطينية

عن غيرها بالنشاط السياحي، ويعتبر عدد العاملين في الفنادق أحد مؤشرات القوة الاقتصادية لهذا القطاع.

المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 190 \\ 102 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 310 \\ 250 \end{bmatrix}$ تمثلان أعداد

العاملين في الفنادق خلال عام ٢٠١٢م، بحسب بيانات جهاز الإحصاء المركزي.

تمثل المصفوفة A عدد العاملين في الفنادق شمال فلسطين. فيما تمثل المصفوفة B عدد العاملين في الفنادق جنوب فلسطين.

الصف الأول في كلا المصفوفتين يمثل عدد الذكور، فيما يمثل الصف الثاني عدد الإناث من العاملين في الفنادق.

عدد العاملين الذكور في جميع فنادق فلسطين عام ٢٠١٢م $= 190 + 310 = 500$ عامل.

عدد العاملات في جميع فنادق فلسطين عام ٢٠١٢م $=$ _____.

تمثل المصفوفة C أعداد العاملين (ذكوراً وإناثاً) في جميع فنادق فلسطين.

$$C = \begin{bmatrix} 500 \\ \text{_____} \end{bmatrix}$$

تعريف

إذا كانت A ، B مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها $m \times n$ فإن مجموع المصفوفتين $A + B = C$ ، حيث C مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وتكون كل مدخلة في المصفوفة C مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين A ، B ، أي أن: $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

نشاط (٢)



$$\text{إذا كانت } P = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 4- & 3 \\ 9- & 5 \end{bmatrix} \text{ فإن:}$$

$$\text{رتبة } P = 2 \times 3$$

$$\text{رتبة } B = \underline{\hspace{2cm}}$$

أناقش



هل يمكن إجراء العملية $P+B$ ؟ أفسّر .

مثال (١)



$$\text{إذا كانت } P = \begin{bmatrix} 2- & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 8- \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1- \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3- & 10 \end{bmatrix}, \text{ أجد } A + B \text{ (إن أمكن).}$$

الحل:

بما أن رتبة المصفوفة P = رتبة المصفوفة B ، فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالتالي.

$$\begin{bmatrix} 9+2- & 1+5 & 1-+8 \\ 3+3 & 3+1 & 3+4 \\ 4+5 & 3-+4 & 10+8- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1- \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3- & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2- & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 8- \end{bmatrix} = B + P$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$



نشاط (٣)



$$\text{إذا كانت } P = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \text{ ب } = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 1- & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P + B = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$B + P = \underline{\hspace{10cm}}$$

ماذا تلاحظ؟

أتعلم



عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية.

نشاط (٤)



$$\text{إذا كانت } E = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 7- \end{bmatrix}, \text{ هـ } = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3- \end{bmatrix}, \text{ جـ } = \begin{bmatrix} 11 & 5- \\ 3 & 1- \end{bmatrix}$$

$$\text{أ) } \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 11 & 11- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5- \\ 3 & 1- \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 7- \end{bmatrix} \right) = \text{جـ} + (\text{هـ} + \text{ع})$$

$$\text{ب) } \underline{\hspace{10cm}} = (\text{جـ} + \text{هـ}) + \text{ع}$$

أقارن بين النتيجةين.

أتعلم



عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية.

نشاط (٥)



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ، و $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، فإن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = O + P$$

و $O + P =$ _____ ماذا تلاحظ؟

أتعلم



المصفوفة الصفرية (O) هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

ثانياً: ضرب المصفوفات بعدد ثابت:

نشاط (٦)



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، فإن:

$$\text{_____} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix} = P + P + P \text{ (أ)}$$

$$\text{_____} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 4 & 3 \times 6 \\ 3 \times 7 & 3 \times 3 & 3 \times 1 \end{bmatrix} = (P3) \text{ (ب)}$$

(٣) أقرن بين الإجابتين.

تعريف



إذا كانت P مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وكان k عدداً حقيقياً فإن kP مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة P مضروبة بالثابت k . أي أن: $(kP)_{ij} = k(P)_{ij}$

مثال (٢)



إذا كانت $S = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، $V = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ أجد كل مما يأتي:

(أ) $7S$ (ب) $\frac{3}{5}V$

الحل:

$$(أ) 7S = \begin{bmatrix} 21 & 28 & 35 & 42 \\ 7 & 49 & 28 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(ب) \frac{3}{5}V = \begin{bmatrix} \frac{18}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

أناقش



هل يمكن إجراء العملية الآتية : $S + (-V)$ ؟

ثالثاً: طرح المصفوفات:

تعريف



إذا كانت A ، B مصفوفتين من الرتبة نفسها $m \times n$ ، فإن ناتج طرح المصفوفتين:
 $A - B = C$ ، حيث C مصفوفة من الرتبة $m \times n$. وتكون كل مدخلة في C مساويةً لناتج طرح المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين A ، B ،
أي أن: $C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$

مثال (٣)



أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن) :

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٢- \\ ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٨ & ٤ \\ ٨ & ٧ & ٣- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix} \quad (٢)$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٠ \\ ٨ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & - & ٤ \\ ٢- & - & ٦ \\ ٩ & - & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢- \\ ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix} \quad (١)$$

(٢) لا يمكن إجراء عملية الطرح لأن رتبتي المصفوفتين غير متساويتين.

مثال (٤)



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$ ، أجد ما يأتي :

$$P + B \quad (٢)$$

$$B + P \quad (١)$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} = B + P \quad (١)$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} = P + B \quad (٢)$$

ماذا تلاحظ؟

أتعلم



إذا كانت P ، B مصفوفتين حيث: $P + B = B + P$ ، و، فإن B هي النظير الجمعي للمصفوفة P ،
وتكون $B^{-1} = P^{-1}$

نشاط (٧)



اعتادت شركة مطاحن القمح الفلسطيني رصد مبيعاتها (بالطن) من الطحين البلدي والطحين الأبيض والنخالة مرة كل ٤ شهور، في خطي الإنتاج التابعين لها.

تمثل المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 60 & 50 \\ 20 & 20 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$ ، مبيعات الشركة خلال شهري كانون ثاني وشباط من العام ٢٠١٨ م من خطي الإنتاج معاً.

وتمثل المصفوفة $J = \begin{bmatrix} 130 & 110 \\ 50 & 60 \\ 30 & 30 \end{bmatrix}$ ، مجمل مبيعات الشركة في الأشهر الأربعة الأولى من العام ٢٠١٨ م من خطي الإنتاج معاً.

- أعبّر عن المصفوفة S التي تمثل مبيعات شهري آذار ونيسان معاً بدلالة المصفوفتين P ، J .
- أجد المصفوفة S التي تمثل مبيعات الشركة خلال شهري آذار ونيسان = .



مثال (٥)



$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + س$$

أحلّ المعادلة المصفويّة الآتية: س + ٣

الحلّ:

باستخدام خاصية ضرب المصفوفات بعدد حقيقيّ فإن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + س$$

وبإضافة النظير الجمعيّ للمصفوفة $\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة ينتج:

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + س$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + س \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = س$$

إذن:

مثال (٦)



$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} - س٣$$

أحلّ المعادلة المصفويّة الآتية: س٣ -

الحلّ:

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = س٣ \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} = س٢$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = س١ \quad \text{ومنها س}$$

تمارين ومسائل (٢ - ٢)



١ إذا كان عدد طالبات الفروع: الأدبيّ والرياضيّ والزراعيّ في مدرسة فاطمة الزهراء للبنات ٣٢، ٢٥، ٢٢ على الترتيب، عدد طلاب المدرسة الهاشميّة للذكور في نفس الفروع ٣٠، ٢٠، ١٦ على الترتيب. أجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) أنظّم بيانات كل مدرسة في مصفوفة عمود.

(ب) ما مجموع طلبة الفرع الزراعيّ في كلا المدرستين؟

(ج) أكتب المصفوفة التي تمثل الزيادة في عدد الطالبات في جميع الفروع عن عدد الطلاب في كلا المدرستين؟

٢ إذا كانت المصفوفة ج = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ + ب، وكانت المدخلة $\begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ = ص، والمدخلة ب = $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المدخلة ج؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} = ع، \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} = ص، \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = س$$

أجد ما يأتي (إن أمكن):

(أ) س + ص (ب) ٣س - ٤ص (ج) ٥ص - س (د) س - ٢ع (هـ) ٣ص - ٤ص

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} = ٤$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = ب، \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = م$$

أجد المصفوفة س حيث: ٢س = م - ٣ب

٦ أحلّ كلاً من المعادلات المصفويّة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} - س = \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + س \right) \quad (ب) \quad \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + س \quad (أ)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = ٢س - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (ج)$$



ضرب المصفوفات



نشاط (١)



تعتبر تجارة السيارات من المشاريع الرائجة في فلسطين في السنوات الأخيرة. يعرض أحد المعارض ثلاثة أنواع من

السيارات. تمثل المصفوفة ب = أعداد

السيارات التي تم باعها المعرض في العامين ٢٠١٥م و ٢٠١٦م.

أما المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ فتمثل أسعار تلك السيارات (لأقرب ألف دينار) في ذلك المعرض من كل نوع.

مجمل مبيعات عام ٢٠١٥م = $(8 \times 7) + (6 \times 6) + (5 \times 5) = 117$ ألف دينار، (لماذا؟)

مجمل مبيعات العام ٢٠١٦م = _____ .

المصفوفة ج تمثل مجمل المبيعات في العامين ٢٠١٥م، و ٢٠١٦م، ج = $\begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{bmatrix}$

تعريف



إذا كانت P مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، B مصفوفة من الرتبة $n \times h$ ، فإن:

$$P \cdot B = \begin{matrix} m \times n & \cdot & n \times h & = & m \times h \\ P & & B & = & J \end{matrix} \quad \text{حيث: } J = \begin{matrix} P_1 \cdot B_1 + \dots + P_n \cdot B_n \\ P_2 \cdot B_1 + \dots + P_n \cdot B_n \\ \vdots \\ P_m \cdot B_1 + \dots + P_n \cdot B_n \end{matrix}$$

مثال (١)



أجد ناتج ضرب المصفوفتين P ، B في كل من الحالات الآتية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3- & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = B \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4- & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = P \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = B \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = P \quad (2)$$

الحل: ألاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة P = عدد صفوف المصفوفة B

$$\begin{bmatrix} (0 \times 0) + (3- \times 1) + (2 \times 3) & (6 \times 0) + (1 \times 1) + (5 \times 3) \\ (0 \times 3) + (3- \times 4-) + (2 \times 0) & (6 \times 3) + (1 \times 4-) + (5 \times 0) \\ (0 \times 5) + (3- \times 2) + (2 \times 1) & (6 \times 5) + (1 \times 2) + (5 \times 1) \end{bmatrix} = B \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 12 & 14 \\ 4- & 37 \end{bmatrix} =$$

(٢) لا يمكن إجراء عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة P \neq عدد صفوف المصفوفة B .

نشاط (٢)



إذا علمت أن P ، B مصفوفتان حيث: $P_{3 \times 4}$ ، $B_{4 \times 3}$ ، فإن رتبة المصفوفة B تساوي _____ .

نشاط (٣)



$$\text{إذا كانت } P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ، B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ فإن:}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 23 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0 \times 3) + (1 \times 4) & (5 \times 3) + (2 \times 4) \\ (0 \times 1) + (1 \times 2) & (5 \times 1) + (2 \times 2) \end{bmatrix} = B \cdot P$$

$B \cdot P =$ _____ . ماذا تلاحظ؟



عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية.

مثال (٢)



إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 1. & 0- \end{bmatrix}$ أجد $A \cdot B$.

الحل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1. \times 2) + (2- \times 1.) & (0- \times 2) + (1 \times 1.) \\ (1. \times 1) + (2- \times 0) & (0- \times 1) + (1 \times 0) \end{bmatrix} = B \cdot A$$

مثال (٣)



إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1- & 7 \\ 2- & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أجد ناتج كل من $A \cdot B$ و $B \cdot A$.

الحل:

$$\begin{bmatrix} 1- & 7 \\ 2- & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1- & 7 \\ 2- & 8 \end{bmatrix} = B \cdot A$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1- & 7 \\ 2- & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B \cdot A$$

ماذا تلاحظ؟



أتعلم



المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية، ويرمز لها بالرمز م، ويطلق عليها أيضاً اسم مصفوفة الوحدة.

نشاط (٤)



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $J = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ فإن:

$$P \cdot (B + J) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 11 & 29 \end{bmatrix}$$

$$P + B = J$$

ماذا ألاحظ؟

أتعلم



تتوزع عملية ضرب المصفوفات على عملية الجمع، بحيث تكون عمليتا الجمع والضرب معرفتان.

■ أفكر: إذا كانت: $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ أبين أن:

$$(P \cdot B) \cdot J = (B \cdot J) \cdot P$$

تمارين ومسائل (٢ - ٣)



١ أجد ناتج ضرب المصفوفات فيما يأتي (إن أمكن):

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ٥ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤- & ٥ \end{bmatrix} \text{ (ب) } \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ٢- & ٤ & ٥- \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٧ \end{bmatrix} \text{ (أ)}$$

٢ كانت مبيعات محل تجاريّ من أربعة أنواع من أجهزة الحاسوب P، ب، ج، د في أول شهرين من عام ٢٠١٨ م ممثلة في المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ١٢ & ١٥ & ١٧ & ١٠ \\ ١٦ & ٢٠ & ١٠ & ٢٠ \end{bmatrix}$ ، وكان ثمن الأجهزة ٤٥٠ دينار، ٣٠٠ دينار، ٥٠٠ دينار، ٤٠٠ دينار، على الترتيب. استخدم المصفوفات لإيجاد المصفوفة التي تمثل مبيعات المحل من الأجهزة في الشهرين.

$$\text{٣ إذا كانت } P = \begin{bmatrix} ٥ & ٧- \\ ٢ & ٤ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} ، \text{ ب } = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \end{bmatrix} ، \text{ أجد ما يلي:}$$

أ) (P) . ب) (P) . ج) (P) . د) (P) .

$$\text{٤ إذا كانت } \begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & أ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \text{ ما قيمة كل من الثابتين أ، ب؟}$$

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً: المحددات: (Determinants)

نشاط (١)

يصنّف الخبراء الاقتصاد الفلسطيني، بأنه في وضع المخاطرة. ويعود ذلك بشكل رئيسي إلى الإجراءات التي يقوم بها الاحتلال الإسرائيلي والتي تعيق نمو هذا الاقتصاد. لذا فإن المشاريع الصغيرة ذات رأس المال المحدود، والربح البسيط، تقلل من مخاطرة المستثمر.

يُتاجر أبو عارف بالأعلاف. اشترى خلال شهر أيلول ٢٠٠ كيساً من الأعلاف بسعر ١٠ دنانير للكيس الواحد، وباع منها ١٩٢ كيساً بسعر ١٣ ديناراً للكيس الواحد.

تنظم المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 13 & 192 \end{bmatrix}$ بيانات تجارة أبو عارف خلال شهر أيلول.

- مجمل سعر البيع المتوقع لو أن أبو عارف باع جميع الأكياس $= 13 \times 200 = 2600$ دينار.
- مجمل سعر التكلفة لما تم بيعه فعلاً من أكياس العلف = _____.
- الفرق بين سعر البيع المتوقع وسعر التكلفة لما تم بيعه = _____.

تعريف

إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، فإن محدد المصفوفة $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقي ويرمز له بالرمز $|P|$ حيث $|P| = (p_{11} \times p_{22}) - (p_{12} \times p_{21})$.

مثال (١)

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = B \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3- & 1 \end{bmatrix} = P \quad \text{أجد محدد كل من المصفوفات الآتية: (١)}$$

الحل:

$$(1) \quad |P| = (P_{11} \times P_{22}) - (P_{12} \times P_{21})$$

$$= (9 \times 1) - (3 \times 3) = |P|$$

$$= 9 - 9 = 0$$

$$(2) \quad |B| = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (B_{11} \times B_{22}) - (B_{12} \times B_{21})$$

$$= (2 \times 12) - (3 \times 8) =$$

$$= 24 - 24 =$$

$$= \text{صفر}$$

تعريف

تُسمى المصفوفة التي محدها يساوي صفر بالمصفوفة المنفردة.

مثال (٢)

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 1-s \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، أجد قيمة s التي تجعل P مصفوفة منفردة.

الحل:

بما أن P مصفوفة منفردة فإن محدد $|P| = 0$.

ومنها $(1-s) \times 2 - 3 \times 2 = \text{صفر}$ ومنها: $s-2 = 6-2 = \text{صفر}$

$s-2 = 8-2 = \text{صفر}$

إذن $s = 4$.

مثال (٣)



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، أجد كل مما يأتي:

$$(٣) \quad |P|^2$$

$$(٢) \quad |P^2|$$

$$(١) \quad |P|$$

الحل:

$$(١) \quad |P| = (1 \times 1) - (2 \times 3) = -5$$

$$= -5 - 2 = -7$$

$$(٢) \quad |P^2| = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 18 = 9$$

$$= 9 - 18 = -9$$

$$(٣) \quad |P|^2 = (-5)^2 = 25$$

ماذا تلاحظ؟

أتعلم



إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، K عدد حقيقي، فإن $|K P| = K^2 |P|$

نشاط (٢)



إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|P| = 5$ ، فإن:

$$|P| = 5 \quad |P^2| = \dots \quad |P^3| = \dots$$

ثانياً: النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

تعريف



إذا كانت P مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة B من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة P إذا كان $P \cdot B = B \cdot P = P$ ، حيث P المصفوفة المحايدة. ويرمز للنظير الضربي للمصفوفة P بالرمز P^{-1} ، أي أن $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = P$.

مثال (٤)

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 7^- & 8^- \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3,5^- & 1^- \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، أيبين أن المصفوفة B هي النظير الضربي للمصفوفة P .

الحل:

إذا كانت المصفوفة B هي النظير الضربي للمصفوفة P ، فإن $P \cdot B = B \cdot P$.

$$P \cdot B = \begin{bmatrix} 7^- & 8^- \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3,5^- & 1^- \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$B \cdot P = \begin{bmatrix} 3,5^- & 1^- \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7^- & 8^- \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{لماذا؟})$$

إذن B هي النظير الضربي للمصفوفة P .

■ **أفكر:** هل يوجد نظير ضربي للمصفوفة $S = \begin{bmatrix} 3^- & 2^- \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ، لماذا؟

أتعلم

المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

مثال (٥)

أحدد أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي وأيها لا؟

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$P = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

الحل:

$$(1) \quad \Delta = 7 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 7 - 12 = -5 \neq 0$$

إذن المصفوفة P ليست منفردة، ويوجد لها نظير ضربي.

$$(2) \quad \Delta = 4 \cdot 4 - 8 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$$

ومنها B مصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.

تعريف

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{bmatrix} \text{ ، حيث } |P| \neq 0 \text{ ، فإن: } P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{bmatrix} \text{ إذا كانت } P$$

مثال (٦)

أجد النظير الضربي للمصفوفة $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (إن أمكن).

الحل:

$$(p_{11} \times p_{22}) - (p_{12} \times p_{21}) = |P|$$

$|P| = (2 \times 1) - (4 \times 1) = 2 - 4 = -2$ ، إذا يوجد للمصفوفة P نظير ضربي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{-2} = P^{-1}$$

نشاط (٣)

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، فإن: $|P| = (1 \times 5) - (3 \times 2) = 5 - 6 = -1$

$$\text{ومنها: } P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

ماذا تلاحظ؟ $|P^{-1}| = \frac{1}{|P|}$ ، $(P^{-1})^{-1} = P$

أتعلم

$$P = (P^{-1})^{-1}$$

ثالثاً: حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربي

نشاط (٤)

في نظام المعادلات الخطية الآتية:

$$9س + 2ص = 7- ، 3س + 2ص = 12$$

- تمثل (أ) مصفوفة المعاملات في النظام، أي أن $P = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 3- \end{bmatrix}$
- تمثل (ب) مصفوفة الثوابت في النظام، أي أن $Q = \begin{bmatrix} 7- \\ 12 \end{bmatrix}$
- تمثل (ج) مصفوفة المتغيرات في النظام أي أن $X = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

يمكن كتابة نظام المعادلات الخطية على صورة المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} 7- \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 3- \end{bmatrix} \quad (\text{أتحقق من ذلك})$$

أناقش

كيف يمكن إيجاد قيم س ، ص؟

مثال (٧)

استخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات الآتي:

$$3س + 4ص = 6$$

$$س + 2ص = 0$$

الحل: أولاً: نرتب المعادلات على الصورة $أ \times ب = ج$ ، حيث:

أ: مصفوفة المعاملات.

ب: مصفوفة المتغيرات.

ج: مصفوفة الثوابت.

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ثانياً: نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات (A).

$$|A| = (2 \times 3) - (4 \times 1) = 2 \quad (|A| \neq \text{صفر})$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ثالثاً: نضرب طرفي المعادلة من اليمين بالمصفوفة A^{-1} فينتج:

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \text{ج.}$$

باستخدام خاصية التجميع في ضرب المصفوفات ينتج:

$$(A \cdot A^{-1}) = E \quad \text{ج.}$$

وباستخدام خاصيتي وجود النظير الضربي والمصفوفة المحايدة في ضرب المصفوفات ينتج: $A^{-1} = E \cdot A$ ج.

$$\text{إذن: } E = A^{-1} \cdot A \quad \text{ج. أي أن: } \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{إذن الحل: (س، ص) = (3، 4). أتحقق من صحة الحل.} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نشاط (٥)



إذا كانت $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = S \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، فلإيجاد المصفوفة س:

أفرض أن $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = P$ فتصبح المعادلة على الصورة: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = S \times P$

النظير الضربي للمصفوفة P يساوي $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (لماذا؟)

ومنها: $A^{-1} \cdot P = S$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = S$

$$\text{(لماذا؟)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنها: $S = \dots$

تمارين ومسائل (٢ - ٤)



١ أجد قيمة س التي تحقق $6 = \begin{vmatrix} 5 & 12- \\ 3- & 3س \end{vmatrix}$

٢ إذا كان $|٤ب| = ٣٢-$ ، أجد: قيمة $|ب| + |٣ب|$ ، حيث ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

٣ أجد النظير الضربي لكل من المصفوفات الآتية (إن أمكن):

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = ج، \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2- & 4 \end{bmatrix} = ب، \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3- & 2- \end{bmatrix} = د$$

٤ أكتب كلاً من الأنظمة الخطية الآتية على صورة معادلات مصفوفية:

$$\begin{aligned} \text{أ) } ٥س - ص &= ٢ & \text{ب) } ص + ٢ &= س - ص \\ ٣س + ٤ص &= ٥ & س &= ١٢ \end{aligned}$$

٥ أحلّ كلاً من المعادلات المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٧ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٥ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix} \cdot س \quad \text{ب) } \begin{bmatrix} ٢٦ & ١٣- \\ ١٣ & ٣٩ \end{bmatrix} = س \cdot \begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} \quad \text{أ)}$$

٦ أستخدم طريقة النظير الضربي لحل أنظمة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ) } ٧- &= س - ص \\ س + ٢ص &= ١- \\ \text{ب) } ١٣ &= س٢ - ص٣ \\ ص + ٦ &= س \end{aligned}$$

حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر

نشاط (١)

تعدّ المشاريع الصغيرة من الأفكار الاستثمارية قليلة المخاطرة، التي تساعد كل من المنتج والمستهلك، ومن الأمثلة عليها مشروع توزيع المواد التموينية الذي لا يحتاج المستثمر فيه لرأس مال كبير. يقوم مهندس بتوزيع المواد التموينية على المحلات التجارية، فإذا أعطى للبقالة الأولى ٨ صناديق من المعلبات، وصندوقين من العصير وكان ثمنها معاً ٤٠ ديناراً، بينما أعطى للبقالة الثانية ٥ صناديق معلبات، و٣ صناديق من العصير مقابل ٣٢ ديناراً، فهل يمكن معرفة ثمن الصندوق الواحد من المعلبات والعصير؟

قاعدة كرامر:

تستخدم قاعدة كرامر لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: $P \cdot E = J$ ، حيث:

$$P: \text{مصفوفة المعاملات، } E: \text{مصفوفة المتغيرات، } J: \text{مصفوفة الثوابت، } |P| \neq 0 \text{ صفر فيكون:}$$

$$S = \frac{|P_s|}{|P|} \quad \text{و} \quad V = \frac{|P_v|}{|P|} \quad \text{حيث:}$$

P_s : المصفوفة P بعد استبدال مدخلات عمود معاملات S فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

P_v : المصفوفة P بعد استبدال مدخلات عمود معاملات V فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

مثال (١)

استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات الآتي:

$$S - V = 4$$

$$5S + 2V = 6$$

الحل:

أكتبُ نظام المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفويّة:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \text{أفرض } P$$

$$\gamma = (١- \times ٥) - (٢ \times ١) = \begin{vmatrix} ١- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = |P|$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} = \text{المصفوفة } P_s$$

$$١٤ = (٦ \times ١-) - (٢ \times ٤) = \begin{vmatrix} ١- & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix} = |P_s| \text{ ومنها:}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix} = \text{المصفوفة } P_v$$

$$١٤- = (٥ \times ٤) - (٦ \times ١) = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix} = |P_v| \text{ ومنها:}$$

$$٢- = \frac{١٤-}{\gamma} = \frac{|P_s|}{|P|} = ص, \quad ٢ = \frac{١٤}{\gamma} = \frac{|P_v|}{|P|} = س.:$$

إذن الحل : (س،ص) = (٢، ٢-)

مثال (٢)

استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات الآتي: س - ٥ = ٢ص - ٤س

$$ص + س - ٤ = ٥ + ٣س$$

الحل: أولاً: أرتب المعادلات في النظام على صورة: أس + ب ص = جـ

$$٥ = ٢ص - س \text{ فيكون النظام:}$$

$$٩ = ٢-س + ص$$

ثانياً: أكتبُ نظام المعادلات على شكل معادلة مصفويّة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{bmatrix} = \text{أفرض } P$$

$$1 = (2- \times 2-) - (1 \times 5) = \begin{vmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 2- \end{vmatrix} = |P|$$

$$23 = (2- \times 9) - (1 \times 5) = \begin{vmatrix} 2- & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = |P| \text{س}$$

$$55 = (2- \times 5) - (9 \times 5) = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 2- \end{vmatrix} = |P| \text{ص}$$

$$\text{ومنها: س} = \frac{23}{1} = \frac{|P| \text{س}}{|P|} \text{، كما أن: ص} = \frac{55}{1} = \frac{|P| \text{ص}}{|P|}$$

إذن الحل: (س، ص) = (23، 55).

نشاط (٢)

استخدام قاعدة كرامير لحل المعادلة المصفوية الآتية:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1- & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$5- = 2- 3- = |P| \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1- & 1 \end{bmatrix} = \text{أفرض } P$$

$$\text{س} = \frac{|P| \text{س}}{|P|} = \frac{2}{1-} = \frac{4}{3} \text{ (لماذا؟) ومنها: ص} = \frac{|P| \text{ص}}{|P|} = \frac{3}{1}$$

$$\text{ص} = \frac{|P| \text{ص}}{|P|} = \frac{3}{1} = \frac{4}{3} \text{ (لماذا؟) ومنها: س} = \frac{|P| \text{س}}{|P|} = \frac{2}{1-}$$

إذن الحل: (س، ص) = (3، 2)

تمارين ومسائل (٢ - ٥)



$$\begin{array}{l} ١ \\ ٤ \\ ٩ \end{array} \left| \begin{array}{l} ١ \\ ٤ \\ ٩ \end{array} \right| = |P| \quad \begin{array}{l} ١ \\ ٤ \\ ٩ \end{array} \left| \begin{array}{l} ١ \\ ٤ \\ ٩ \end{array} \right| = |P| \quad \begin{array}{l} ١ \\ ٤ \\ ٩ \end{array} \left| \begin{array}{l} ١ \\ ٤ \\ ٩ \end{array} \right| = |P|$$

أجد قيمة كل من س، ص.

استخدم قاعدة كرامر في حل أنظمة المعادلات الآتية:

$$\text{أ) } ٣س - ٤ص = ٨$$

$$س + ص = ١٢$$

$$\text{ب) } ٣س - ٢ص - ١٩ = ٠$$

$$ص + ٣س = ١٣$$

تمارين عامة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

(١) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ فما قيمة $A - B$ ؟

- (أ) ٥ (ب) ٢ (ج) ١ (د) ١-
 (٢) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ فما قيمة $A + B$ ، ص على الترتيب؟
 (أ) (٢، ١) (ب) (١، ٢) (ج) (٢، ٥) (د) (١، ١-)

(٣) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأَي من المصفوفات الآتية تمثل $(A^{-1})^{-1}$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(٤) إذا كانت S مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، وكان $|S| = 8$ فما قيمة $|3S|$ ؟

- (أ) ١٨ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٢

(٥) أي من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربي؟

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(٦) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فما قيمة $A^{-1}B$ ؟

- (أ) ٢ (ب) ١ (ج) ١- (د) ٢-

(٧) عند حل نظام من معادلتين خطيتين، وُجِدَ أن $x = 2$ ، $|A| = 3$ ، $|A| = 6$ ما قيمة S ؟

- (أ) ٣ (ب) ١ (ج) ١- (د) ٣-

(٨) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ فما قيمة $A^{-1}B$ ؟

- (أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر



٩) إذا كانت P ، b ، c مصفوفات حيث $P \cdot b = c$ وكانت $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ فما رتبة المصفوفة b ؟

أ) 4×1 (ب) 3×1 (ج) 1×1 (د) 3×4

١٠) ما قيمة s السالبة التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 8 & s \\ s & 2 \end{bmatrix}$ منفردة ؟

أ) $2-$ (ب) $4-$ (ج) $8-$ (د) $16-$

السؤال الثاني: إذا كانت $P \cdot b = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ، $P \cdot c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، أجد ناتج $P \cdot (b+c)$.

السؤال الثالث: أستخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات الآتي:

$$2s + 1 = v, \quad s - 2v = 4$$

السؤال الرابع: أستخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات الآتي:

$$s - v = 1, \quad 3s + 3v = 6$$

السؤال الخامس: أجد قيمة/ قيم s التي تحقق المعادلة الآتية: $3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + s \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ s & 6 \end{vmatrix} = 2$

السؤال السادس: أجد المصفوفة s التي تحقق المعادلة المصفوفية الآتية:

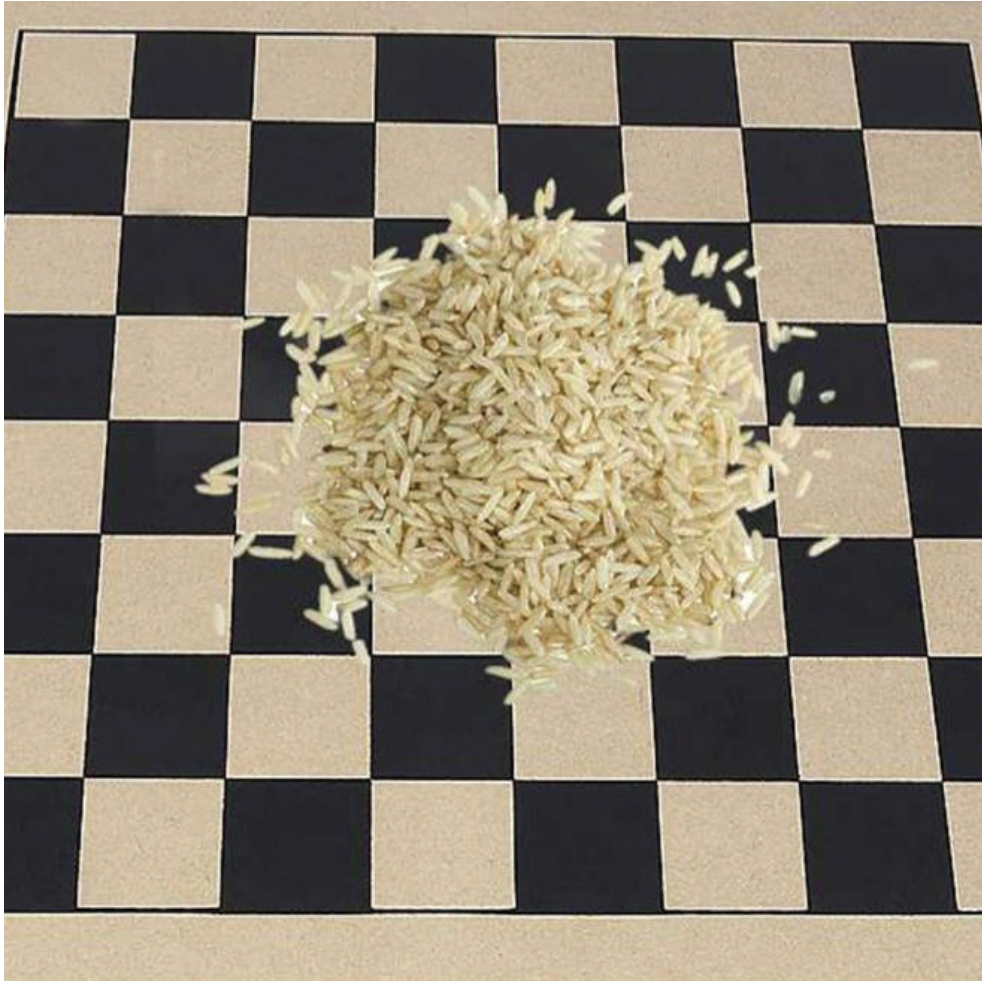
$$s \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad ?$$

السؤال السابع: أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			اميز انواع المصفوفات ومسمياتها الاساسية
			اجد محدد المصفوفة
			اوظف خواص المحددات في حل مشكلات حياتية
			احل معادلات مصفوفية بعدة طرق

المعادلات والمتسلسلات

Equations and Series



في لوحة الشطرنج أعلاه، إذا وُضِع في المربع الأول حبتا قمح، وفي الثاني ٤ حبات، وفي الثالث ٨ حبات... وهكذا، كيف يمكن معرفة رقم المربع الذي توضع فيه ١٠٢٤ من حبات القمح؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على
توظيف المعادلات والمتسلسلات في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. حلّ معادلات أسية.
٢. حلّ معادلات لوغاريتماتية.
٣. التّعرف إلى مفهوم المتسلسلة.
٤. التّعرف إلى المتسلسلة الحسابية وإيجاد مجموعها.
٥. التّعرف إلى المتسلسلة الهندسية وإيجاد مجموعها.

مثال (٢)



أحل المعادلة ${}^{1-s}{}^2(27) = {}^{s-1}(9)$

الحل:

$${}^2(3) = 9 \text{ كذلك } {}^3(3) = (27)$$

$$\text{ومنها: } {}^{3-s}{}^6(3) = {}^{s-2}{}^2(3) \text{ (لماذا؟)}$$

بما أن الأساسات متشابهة فتكون الأسس متساوية:

$$\text{أي أن: } 6 - s = 3 - 2 = 1$$

$$s = 5$$

$$\text{ومنها مجموعة الحل: } \left\{ \frac{5}{8} \right\}$$

نشاط (٢)



$$\text{لإيجاد مجموعة حل المعادلة } {}^{2-s}{}^1\left(\frac{1}{16}\right) = {}^{3-s}{}^2(8)$$

$$\text{أبدأ من الطرف الأيمن: } {}^3(2) = 8$$

$$\text{ومنها } {}^{3-s}{}^2(2) = {}^{2-s}{}^1\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$(1) \dots\dots\dots =$$

$$\text{في الطرف الأيسر: } {}^{1-s}{}^1(16) = \frac{1}{16} \text{ (لماذا؟)}$$

$${}^{1-s}{}^1(2) =$$

$$(2) \dots\dots\dots = {}^{2-s}{}^1\left(\frac{1}{16}\right) = {}^{2-s}{}^1\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$\text{المعادلة } {}^{2-s}{}^1\left(\frac{1}{16}\right) = {}^{2-s}{}^1\left(\frac{1}{16}\right) \text{ تكافئ } {}^{9-s}{}^6(2) = {}^{4-s}{}^8(2)$$

بما أن الأساسات متشابهة، إذن الأسس متساوية،

$$\text{أي أن: } 6 - s = 9 - 8 = 1$$

ومنها تكون مجموعة الحل: _____

تمارين ومسائل (٣ - ١)



أجد مجموعة حلّ كل من المعادلات الأسية الآتية:

$$\text{أ) } (٨)^{٣-٥س} = (٤)^{٣-٦س}$$

$$\text{ب) } (٧)^{٢-س} = (٤٩)^{٤-٥س}$$

$$\text{ج) } (٢٧)^{٢-س} = (٨١)^{٣-٢س}$$

ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الأسية الآتية؟

$$\text{أ) } (٢٧) = ٩^{\frac{١}{٩-٣س}}$$

$$\text{ب) } (١٢٥)^{٣-٢س} = (٥)^{٩-٢س}$$

$$\text{ج) } (٦)^{١-٢س} = ٢١٦$$

المعادلات اللوغاريتمية

نشاط (١)



بدأ العمل في فلسطين حديثاً على إقامة أبنية مقاومة للزلازل، ويستخدم مقياس ريختر لقياس شدة الزلازل، وكل زيادة بمقدار درجة واحدة على هذا المقياس تمثل ١٠ أضعاف سابقتها في سعة الزلزال. لذا فإن زلزالاً بقوة ٥,٣ قوياً، في حين يعتبر زلزال آخر بقوة ٦,٣ مدمراً.

وتعتمد تقنية هذا الجهاز بشكل أساسي على اللوغاريتمات، حيث تعني الدرجة الواحدة ١٠ أضعاف الدرجة السابقة لها.

- درجة واحدة على مقياس ريختر = 10^1 لو.

- درجتين على مقياس ريختر = 10^2 لو.

- ٣ درجات على مقياس ريختر = _____ لو.

نشاط (٢)



لو $3 = 8$ لأن $8 = 2^3$ كما أن:

لو $49 =$ لأن _____.

أحول $8^2 = 64$ إلى الصورة اللوغاريتمية _____.

لو $(8 \times 16) =$ لو $8 +$ لو 16

كما أن لو $\left(\frac{27}{9}\right) =$ _____

أَتَذَكَّرُ:

إذا كانت P ، S ، $V < 0$ ، فإن $P \neq 1$:

$$(1) \text{ لو } P = 1 \text{ صفر} \quad (2) \text{ لو } P = 1$$

$$(3) \text{ لو } S = 3 \text{ جـ تكافئ } P = 3 \text{ س} \quad (4) \text{ لو } (S \times V) = \text{لو } S + \text{لو } V$$

$$(5) \text{ لو } \left(\frac{S}{V}\right) = \text{لو } (S) - \text{لو } (V) \quad (6) \text{ لو } S^n = n \times \text{لو } S, S < 0.$$

مثال (١)

أحلّ المعادلة $\text{لو } S = 3$.

الحلّ:

لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أولاً للصورة الأسية.

$$\text{لو } S = 3 \text{ تكافئ } (2)^3 = S$$

ومن هنا: $S = 8$

مثال (٢)

أحلّ المعادلة اللوغاريتمية الآتية: $\text{لو } (S^2 - 2S + 5) = 3$

الحلّ:

لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أولاً للصورة الأسية.

$$\text{لو } (S^2 - 2S + 5) = 3 \text{ تكافئ: } S^2 - 2S + 5 = (2)^3$$

$$S^2 - 2S - 3 = 0 \text{ ومنها: } (S - 3)(S + 1) = 0$$

مجموعة الحلّ: $\{-1, 3\}$

مثال (٣)

أجدّ مجموعة حلّ المعادلة $\text{لو } 4 = 3 - 2S$

الحلّ: لحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحولها أولاً للصورة الأسية.

$$(4)^{2-3} = 3 - 2S \text{ وبما أن الأساسات متشابهة فإن الأسس متساوية،}$$

$$3 = 2S - 3$$

$$S = 0 \text{ (لماذا؟)}$$

مجموعة الحلّ: $\{0\}$

تمارين ومسائل (٣ - ٢)



١ أجدُ مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية:

$$(أ) \text{ لو } (٤ - ٥س) = ٤$$

$$(ب) \text{ لو } (٣٤٣) = ١ - ٢س$$

$$(ج) \text{ لو } (٦ - س) = ٣$$

$$(د) \text{ لو } (س^٢ + ٣س - ٣) = ٠$$

$$(هـ) \text{ لو } (١٠) = ٢س + ٤$$

٢ أجدُ مجموعة حلّ المعادلة لو (س^٢ - ٣) = ٠

٣ أحلّ المعادلة اللوغاريتمية الآتية: لو (س - ١) - لو (٢س - ٥) = ١

مثال (٣)



أجد مجموع أول ٣ حدود في المتسلسلة $\sum_{r=1}^{\infty} (7 - 2r)$

$$\text{الحل: } ح_1 = 7 - (1)2 = 5-$$

$$ح_2 = 7 - (2)2 = 3-$$

$$ح_3 = 7 - (3)2 = 1-$$

$$\text{إذن } ح_3 = 5- + 3- + 1- = 9-$$

مثال (٤)



أجد مجموع أول ٣ حدود من المتسلسلة: $\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r}{1+2r}\right)$

الحل:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \left(\frac{r}{1+2r}\right) \sum_{r=1}^3 = ح_3$$

$$\frac{45}{105} + \frac{42}{105} + \frac{35}{105} =$$

$$\frac{122}{105} = ح_3$$

تمارين ومسائل (٣ - ٣)



١ أكتب الحدود الأربعة الأولى من مفكوك كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

$$(أ) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{2+n} \right)$$

$$(ب) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

٢ أيّ المتسلسلات الآتية منتهية وأيها غير منتهية:

$$(أ) 2 + 8 + 18 + 32 + \dots$$

$$(ب) 1 + 8 + 27 + 64 + 125$$

$$(ج) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2+n} \right)$$

٣ أجد مجموع (ج) كل من المتسلسلات الآتية:

$$(أ) \sum_{n=0}^7 (2n^2 - 3n - 4)$$

$$(ب) \sum_{n=0}^8 (8)$$

$$(ج) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2+n}$$

٤ إذا كان مجموع الحدود الأربعة الأولى من المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2+n}$ يساوي $\frac{97}{5}$ ، فما قيمة الثابت p ؟

المتسلسلة الحسابية ومجموعها



نشاط (١)



تعتبر زراعة الفراولة من الاستثمارات المجدية من الناحية المادية للمزارع الفلسطيني. ويراعى عند نقلها، توزيعها، في عبوات تتسع لكميات قليلة نسبياً، حفاظاً على جودتها.

إذا وُزِعَ إنتاج مزرعة فراولة في غزة في يوم ما على عبوات تتسع كل منها لـ ٣ كغم، فإن كتلة الفراولة في العبوتين الأولى والثانية معاً = ٣ + ٣ كغم

كتلة الفراولة في أول ٣ عبوات = _____ كغم.

كتلة الفراولة في أول ٤ عبوات = _____ كغم.

متسلسلة كتلة الفراولة المنتجة في المزرعة والموزعة في (ن) عبوة هي: $٣ + ٣ + \dots + ٣$ كغم.

أَتَذَكَّرُ:

المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.

وحدها العام $ح = ١ + (ن - ١) د$ ، حيث ١ : الحد الأول، $د$: الأساس، $ن$: رتبة الحد النوني.

أَتَعَلَّمُ



تعرف المتسلسلة الحسابية بأنها مجموع حدود المتتالية الحسابية المرتبطة بها.

مثال (١)



أُميِّر المتسلسلة الحسابية من غيرها فيما يأتي:

$$(١) ٧ + ١٠ + ١٣ + ١٦ + ١٩$$

$$(٢) ٢ + ٣ + ٥ + ٦ + ٨$$

الحل:

(١) المتسلسلة حسابية ، لأن:

$$٣ = ١٠ - ١٣ = ٧ - ١٠$$

$$٣ = ١٠ - ١٣ = ١٣ - ١٦$$

$$٣ = ١٣ - ١٦ = ١٦ - ١٩$$

(٢) المتسلسلة ليست حسابية ، لأن $٦ - ٨ = ٢ -$ ، بينما $٥ - ٦ = ١ -$

$$٦ - ٨ \neq ٥ - ٦$$

نشاط (٢)



بدأ فني كهربائيات عام ٢٠١٨ م العمل في إحدى المصانع الفلسطينية براتب سنوي قدره ٦٠٠٠ دينار، حيث يتقاضى علاوة سنوية ثابتة قدرها ١٠٠ دينار.

المتسلسلة الحسابية التي تمثل ما سيتقاضاه الفني سنوياً من بداية عام ٢٠١٨ م حتى نهاية عام ٢٠٢٠ م هي: —

مجموع هذه الرواتب يساوي _____ .

وأساسها: $د = ١٠٠$

الحد الأول في متسلسلة الرواتب: $٦٠٠٠ = ١$

إذن مجموعها = \sum _____ .

أتعلم



مجموع أول n حداً من حدود متسلسلة حسابية حدها الأول p وأساسها d ، يعطي بالقانون:

$$ج_n = \frac{n}{2} (2p + (n-1)d)$$

مثال (٢)



أجد مجموع أول ٤٠ حداً من المتسلسلة الحسابية $١٢+١٠+٨+٦+٤+٢+٠+٢+٤+٦+٨+١٠+١٢+١٤+١٦+١٨+٢٠+٢٢+٢٤+٢٦+٢٨+٣٠+٣٢+٣٤+٣٦+٣٨+٤٠$

الحل:

$$\begin{aligned} p &= 12, \quad d = 2, \quad n = 40 \\ ج_n &= \frac{n}{2} (2p + (n-1)d) \\ ج_{40} &= \frac{40}{2} (2 \times 12 + (40-1) \times 2) \\ &= 20 (24 + 78) \\ &= 20 \times 102 = 2040 \end{aligned}$$

مثال (٣)



أجد مجموع المتسلسلة $٤+٨+١٢+١٦+٢٠+٢٤$

الحل:

$$\begin{aligned} p &= 4, \quad d = 4, \quad n = 6 \\ المتسلسلة حسابية (لماذا؟ وفيها: $p = 4$) \\ ج_n &= \frac{n}{2} (2p + (n-1)d) \\ ج_6 &= \frac{6}{2} (2 \times 4 + (6-1) \times 4) \\ &= 3 (8 + 20) = 84 \end{aligned}$$

ألاحظ أن:

$$\text{ج}_6 = \frac{6}{2} = \frac{4 \times 2 + 4 \times (1-6)}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = \frac{4 + 4 + 4 \times (1-6)}{2}$$

لكن: $\text{ج}_6 = 4 \times (1-6) + 4$ وهو الحد الأخير.

$$\text{إذن ج}_6 = \frac{6}{2} = \frac{4 + \text{ج}_6}{2}$$

$$3 = (4 + 24)$$

هل يمكن إيجاد الناتج بطريقة أخرى؟ $84 =$

نتيجة: يمكن إيجاد مجموع أول n حدود من متسلسلة حسابية حدها الأول P ، و حدها الأخير L بالقاعدة:

$$\text{ج}_n = \frac{n}{2} (P + L)$$

نشاط (٣)

$$\text{أجد } \sum_{n=1}^{60} (n - 12)$$

الحل: ألاحظ أن المتسلسلة حسابية (لماذا؟)

$$\text{ح}_1 = 1 - 12 = -11 = P$$

$$\text{ح}_{60} = 60 - 12 = 48 = L$$

إذن المتسلسلة حسابية، فيها $P = -11$ ، $L = 48$ ، $n = 60$.

$$\text{ج}_n = \frac{n}{2} (P + L)$$

$$\text{ج}_{60} = \frac{60}{2} (-11 + 48) =$$

مثال (٤)



أجدُ الحد الخامس عشر في المتسلسلة الحسابية التي يعطى مجموعها بالعلاقة: $J_n = 2n - 2$

الحل:

ألاحظ أن الحد الأول $J_1 = 2$.

$$J_2 = 2(2) - 2 = 2$$

$$J_3 = 4$$

مجموع أول حدين $J_2 + J_1 = 2 + 2 = 4$

$$J_4 = 2(4) - 2 = 6$$

$$J_3 - J_2 = 4 - 2 = 2$$

$$J_4 - J_3 = 6 - 4 = 2$$

كما أن أساس المتسلسلة $J_4 - J_3 = 2$ (لماذا؟)

$$J_5 - J_4 = 8 - 6 = 2$$

$$J_6 - J_5 = 10 - 8 = 2$$

$$J_n = 2n - 2$$

$$J_{10} = 2(10) - 2 = 18$$

$$J_{15} = 20$$

(هل هناك حلول أخرى؟).

تمارين ومسابئلة (٤ - ٣)



١ أكتب الحدود الأربعة الأولى من مفكوك كل من المتسلسلات الآتية:

$$(أ) \sum_{n=0}^7 (1 + 3n)$$

$$(ب) \sum_{n=0}^{17} (2n)$$

٢ متسلسلة حسابية حدها الأول ١٤، وأساسها يساوي ٥ أجد مجموع أول ٢٠ حداً منها.

٣ أجد الحد الأول في المتسلسلة الحسابية التي أساسها ٢ ومجموع أول ٦٠ حداً فيها يساوي ١٢٠

٤ كم حداً يجب أخذه من متسلسلة حسابية حدها الأول ٣ وأساسها ٦ ليكون مجموع تلك الحدود = ٢٢٧؟

٥ متتالية حسابية حدها الأول ٣ وحدها الستون = ٨٧، أجد جـ .

المتسلسلة الهندسية ومجموعها

نشاط (١)



تمتاز محافظة أريحا عن غيرها من المحافظات الفلسطينية بالنشاط السياحي، وذلك لكثرة المواقع الأثرية فيها، أما المناطق غير الأثرية فُتستثمر في إنشاء منتجعات سياحية تجذب السياح الذين يزورون المحافظة. يريد مستثمر إقامة منتجع سياحي متكامل على قطعة أرض مربعة الشكل في محافظة أريحا تشمل، منطقة ملاهي وألعاب، مسبح ومرافق، مطعم، وموقف للمركبات، بحيث تقع جميعها في مستوى أفقي واحد، وتشغل القطعة كاملةً.

مساحة كل منطقة على الترتيب: $٣٢٠٠ \text{ م}^٢$ ، $١٦٠٠ \text{ م}^٢$ ، $٨٠٠ \text{ م}^٢$ ، $٤٠٠ \text{ م}^٢$

(أ) المتسلسلة الدالة على مجموع المساحات: _____

(ب) المساحة الكلية لقطعة الأرض تساوي: _____

أُتذَكَّر:

المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي تكون النسبة بين أي حدين متتاليين فيها يساوي مقداراً ثابتاً دائماً.

وحدها العام $ح = \text{م} \cdot \text{ر}^{(ن-١)}$ ، حيث م : الحد الأول، ر : الأساس، ن : رتبة الحد النوني

أُتعلَّم



تعرف المتسلسلة الهندسية بأنها مجموع المتتالية الهندسية المرتبطة بها.

مثال (١)



أُميِّز المتسلسلات الهندسية مما يأتي:

(ب) $٦ + ٩ + ١٢ + ١٥ + ١٨$.

(أ) $١ + ٣ + ٩ + ٢٧ + ٨١$

الحل: (أ) متسلسلة هندسية ، لأن $\frac{1}{3} = \frac{9}{27} = \frac{27}{81}$

$\frac{1}{3} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9}$

$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(ب) ليست هندسية، لأن $\frac{12}{9} \neq \frac{9}{6} =$

أتعلم

مجموع أول n حد من حدود متسلسلة هندسية حدها الأول a وأساسها r ،

يعطي بالقانون ج_٥ = $\left(\frac{r-1}{r-1}\right)^n a$ ، $r \neq 1$

مثال (٢)

أجد مجموع المتسلسلة $3 + 9 + 27 + 81 + 243$.

الحل:

المتسلسلة هندسية (لماذا؟) ومنها $a = 3$ ، $r = 3$ ، $n = 5$

ج_٥ = $\left(\frac{r-1}{r-1}\right)^n a$

ج_٥ = $\frac{(243 - 1) 3}{3 - 1} = 363$ (لماذا؟)

مثال (٣)

أجد مجموع أول ٥ حدود من المتسلسلة الهندسية $1 + 4 + 16 + 64 + \dots$

الحل: $a = 1$ ، $r = 4$ ، $n = 5$

ج_٥ = $\left(\frac{r-1}{r-1}\right)^n a$



تمارين ومسائل (٥ - ٣)

١ أجد مجموع المتسلسلات الهندسية الآتية:

$$أ) \sum_{i=0}^4 (٢ \times ٣^i)$$

$$ب) ١ + ٥ + ٢٥ + ١٢٥ + ٦٢٥$$

$$ج) ٤ - ١ + \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٦}$$

٢ متسلسلة هندسية حدها الأول ٧ وأساسها ١- ، أجد مجموع أول عشر حدود منها.

٣ أجد الحد الأول في المتسلسلة الهندسية التي أساسها ٢ ومجموع أول أربعة حدود يساوي ٦٠.

٤ كم حداً يلزم أخذه من متسلسلة هندسية حدها الأول ٤ وأساسها ٣ ليكون مجموعها ١٦٠؟

تمارين عامة

السؤال الأول: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

(١) متسلسلة حسابية حدها الأول ٣ وحدها العاشر ٢١، ما مجموع أول عشرة حدود منها؟

- (أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (ج) ٥٠ (د) ١٢٠

(٢) متسلسلة هندسية حدها الأول ١-، أساسها $\frac{1}{3}$ ، ما مجموع أول ثلاثة حدود منها؟

- (أ) $\frac{13}{9}$ (ب) $\frac{9}{13}$ (ج) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{52}{81}$

(٣) ما قيمة $\sum_{r=1}^{\infty} (1-r)^r$ ؟

- (أ) ٥- (ب) ١- (ج) ١ (د) ٥

(٤) ما عدد الحدود اللازم أخذها ليصبح مجموع المتسلسلة $٥+١٠+٢٠+..$ يساوي ٦٣٥؟

- (أ) ٧ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٤

(٥) متسلسلة حسابية مجموع أول ستة عشر حداً فيها ٣٢، وأساسها ٢-، ما حدها الأول؟

- (أ) ٣٤ (ب) ١٧ (ج) ١٦ (د) ١٣-

(٦) ما قيمة: $\log_{٣}(٢٤٣ \times ٨١)$ ؟

- (أ) ٥ (ب) ٢٠ (ج) ٩ (د) ٤

(٧) ما قيمة s التي تحقق المعادلة $٦٤ = \left(\frac{1}{٣٢}\right)^{s-١}$ ؟

- (أ) ٥- (ب) $\frac{1-}{٥}$ (ج) ٥ (د) $\frac{١١}{٥}$

(٨) ما مجموعة حلّ المعادلة: $٥ = ١-٣(٣)_{٣٧}$ ؟

- (أ) ٧ (ب) ٣ (ج) $\frac{١٦}{٣}$ (د) ٧-

السؤال الثاني: أكتب أول ٥ حدود لمتسلسلة حسابية مجموع حديها الثاني والتاسع = ٢٥، ومجموع حديها الثالث والسابع = ٢٠.

السؤال الثالث: كم حداً يلزم أخذه من المتسلسلة الهندسية $1 + 3 + 9 + \dots$ ليكون المجموع مساوياً ٣٦٤.

السؤال الرابع: إذا كان مجموع أول n حداً من متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة $ج = n(n+1)$ أجد الحد الأول والأساس لتلك المتسلسلة.

السؤال الخامس: تعاقد مهندس مع إحدى الشركات براتب سنوي قدره ١١٥٠٠ دينار وبتقاضي سنوية قدرها ٥٠ ديناراً.

(أ) ما الراتب السنوي الذي تقاضاه هذا الموظف في نهاية السنة السادسة؟

(ب) ما مجموع ما تقاضاه خلال عشر سنوات؟

السؤال السادس: ما مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين؟

$$(أ) 2(169)^{x^2} = 26 \quad (ب) 27^{x^4} = 9^{x^2}$$

السؤال السابع: ما مجموعة حل كل من المعادلتين اللوغاريتميتين الآتيتين؟

$$(أ) \log_{25}(25) = \log_{64}(64) \quad (ب) \frac{\log_{10}(0.0001)}{\log_{10}(100000)} = 1$$

السؤال الثامن: ما مجموعة حل المعادلة: $\frac{1}{4} \log_{10}(64) + \log_{10}(243) + \log_{10}(125) = 0$

السؤال الثامن: أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			احل معادلات اسية
			احل معادلات لوغاريتمية
			اجد مجموع متسلسلة حسابية
			اجد مجموع متسلسلة هندسية



الوحدة

الإحصاء
Statistics



لاحظ التماثل في جبل طابور... ماذا يعني لك هذا التماثل؟



يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على
توظيف التوزيع الطبيعي المعياري في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التعرف إلى العلامة المعيارية.
٢. التعرف إلى التوزيع الطبيعي المعياري وخواصه.
٣. استخدام الجداول في ايجاد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.
٤. توظيف خواص التوزيع الطبيعي المعياري في حل مشكلات حياتية.



العلامة المعيارية

نشاط (١)

كثيراً ما نضطر لإطلاق أحكام على أمور ظاهرية دون الأخذ بعين الاعتبار سياقها العام. ويتصف هذا النوع من الأحكام بعدم الموضوعية في أغلب الأحيان. الجدول الآتي يبين علامات خمس طالبات من الصف العاشر خلال شهرين في مبحث اللغة العربية.

الطالبة	سناء	يسرى	دعاء	هديل	سلمى
اختبار شهر أيلول	٩٢	٨٩	٨٧	٨٨	٩٠
اختبار شهر تشرين أول	٧٧	٨٠	٧٩	٧٦	٧٤

- ترتيب أسماء الطالبات تنازلياً حسب علامتهن خلال شهر أيلول:

سناء، سلمى، يسرى، هديل، دعاء.

- ترتيب أسماء الطالبات تنازلياً حسب علامتهن خلال شهر تشرين أول:

_____، _____، _____، _____.

- في أي الشهرين كان أداء دعاء أفضل؟ لماذا؟

تستخدم العلامة المعيارية في إطلاق أحكام على قيم عددية للظواهر مع الأخذ بعين الاعتبار الوسط الحسابي تلك القيم، وانحرافها المعياري.

تعريف

العلامة المعيارية: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات يساوي (μ) وانحرافها المعياري (σ) ، فإن العلامة المعيارية $(ع)$ المقابلة للقيمة $(س)$ تمثل عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها القيمة $س$ عن الوسط الحسابي للبيانات. وبالرموز فإن: $ع = \frac{\mu - س}{\sigma}$

مثال (١)



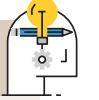
إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (٣٠) طالبا في الصف الثاني عشر الأدبي في اختبار الجغرافيا يساوي (١٣) وانحرافها المعياري (٢). فإذا حصل ثلاثة طلاب على العلامات: ١١، ١٣، ٢٣، فما هي القيم المعيارية المناظرة لكل منهم؟

الحل:

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = ع$$

$$\begin{aligned} ١٠ = ع &\leftarrow \frac{١٣ - ١١}{٢} = ع \text{ هي } (١١ = س) \text{ المقابلة للعلامة } (ع) \text{ المعيارية (ع)} \\ ٠ = ع &\leftarrow \frac{١٣ - ١٣}{٢} = ع \text{ هي } (١٣ = س) \text{ المقابلة للعلامة } (ع) \text{ المعيارية (ع)} \\ ٥ = ع &\leftarrow \frac{١٣ - ٢٣}{٢} = ع \text{ هي } (٢٣ = س) \text{ المقابلة للعلامة } (ع) \text{ المعيارية (ع)} \end{aligned}$$

أناقش



ماذا يعني أن تكون العلامة المعيارية لإحدى القيم تساوي صفر؟

نشاط (٢)



الشعبة	μ	σ
أ	٧٩	٦
ب	٧٦	٢

حصل ناصر في الشعبة (أ) على علامة ٨٥ في اختبار الرياضيات، فيما حصل محمد في شعبة (ب) على علامة ٨٠ في الاختبار نفسه. الجدول المجاور يبين الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكلا الشعبتين، أي الطالبين كان تحصيله أفضل؟

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = ع \quad \text{الحل:}$$

$$ع \text{ ناصر} = \frac{٧٩ - ٨٥}{٦} = ١ \text{ (لماذا؟)}$$

$$ع \text{ محمد} = \frac{٧٦ - ٨٥}{٢} = ٤.٥$$

إذن تحصيل _____ أفضل من تحصيل _____.

مثال (٢)



إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الآباء يساوي (٤٣) سنة وانحرافها المعياري (٥) سنة وكانت العلامة المعيارية المقابلة للعمر (س) تساوي (٤) ما العمر س؟

الحل:

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = ع$$

$$\frac{٤٣ - س}{٥} = ٤$$

$$٤٣ - س = ٢٠$$

$$س = ٦٣$$

نشاط (٣)



كانت أعمار مجموعة من الأشخاص كالتالي: ١٢، ١٦، ١٨، ٢٠، ٢٤.

(١) الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص تساوي ١٨، وانحرافها المعياري = ٤

(٢) - العلامة المعيارية (ع) المناظرة للعمر ١٢ تساوي - ١,٥

- العلامة المعيارية (ع) المناظرة للعمر ١٦ تساوي _____ .

- العلامة المعيارية (ع) المناظرة للعمر ١٨ تساوي _____ .

- العلامة المعيارية (ع) المناظرة للعمر ٢٠ تساوي _____ .

- العلامة المعيارية (ع) المناظرة للعمر ٢٤ تساوي _____ .

(٣) الوسط الحسابي لمجموعة العلامات المعيارية = $\frac{١ع + ٢ع + ٣ع + ٤ع + ٥ع}{٥}$ = _____ .

أتعلم*



الوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر،
وانحرافها المعياري يساوي واحد.

مثال (٣)



أخذت أطوال ٥ أشخاص، وكانت العلامات المعيارية المناظرة لتلك الأطوال كالاتي:

٠,٥، ك، ١,٥، ٠، -٠,٥ فما قيمة ك

الحل:

$$\text{الوسط الحسابي للعلامات المعيارية} = \frac{٠,٥ + ك + ١,٥ + ٠ + -٠,٥}{٥} = \text{صفر}$$

أي أن:

$$ك + ١,٥ = \text{صفر (لماذا)?}$$

$$ك = -١,٥$$

* مجموع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر.

تمارين ومسائل (٤ - ١)



١ إذا كان $\mu = ٢٠$ ، $\sigma = ٤$ ، ما العلامة المعيارية (ع) التي تقابل العلامة س = ٢٨ .

٢ إذا كان مجموع علامات ٥٠ طالباً في امتحان التاريخ يساوي ١٠٠٠ ، وانحرافها المعياري $\frac{٥}{٢}$ ، ما العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ١٥ ؟

٣ إذا كان الوسط الحسابي لأطوال ٢٠ طالباً يساوي ١٥٠ سم وانحرافها المعياري ٢ سم ، ما الطول الذي علامته المعيارية = ٣ ؟

٤ إذا كان الوسط الحسابي لكتلة مجموعة من الأشخاص يساوي ٥٠ كغم ، وانحرافها المعياري σ كغم ، وكانت العلامتان المعياريتان المقابلتان للكتلتين : س ، ٦٠ هما -٢ و ٤ على الترتيب :

أ) فما قيمة كل من س و σ ؟

ب) ما العلامة المعيارية المقابلة للكتلة ٥٨ كغم ؟

التوزيع الطبيعي المعياري



نشاط (١)



الهيموجلوبين هو بروتين موجود داخل كريات الدم الحمراء، وهو الذي يكسب خلايا الدم اللون الأحمر، وتتلخّص وظيفته في نقل الأوكسجين من الرئة إلى مختلف أعضاء الجسم حتى تقوم بوظائفها

على أكمل وجه. وتتراوح نسبة الهيموجلوبين في الدم عند الرجال البالغين في العالم بين ١٣ و١٧ غرام/ديسيلتر. تتوزع نسبة الهيموجلوبين في الدم بشكل طبيعي بين الرجال البالغين. فقليلٌ منهم تنخفض لديهم هذه النسبة في الدم عن ١٣، كذلك نسبة قليلة جداً تزيد نسبة الهيموجلوبين عندهم عن ١٧.

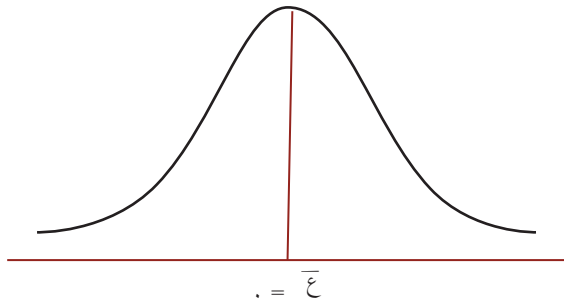
- إذا كانت نسبة الهيموجلوبين في الدم لدى عُمر ١٠,٤، فمستوى الهيموجلوبين لديه منخفض.
- إذا كانت نسبة الهيموجلوبين في الدم لدى خالد ١٥,٣، فمستوى الهيموجلوبين لديه _____.
- إذا كانت نسبة الهيموجلوبين في الدم لدى علي ١٨,٢، فمستوى الهيموجلوبين لديه _____.

ظاهرة توزيع الهيموجلوبين في الدم ليست الوحيدة التي تتوزع طبيعياً، فالطول والوزن، وكمية الأمطار التي تهطل في منطقة ما جميعها لها ذات الميزة.

تعريف



منحنى التوزيع الطبيعي المعياري هو منحنى تكراري لتوزيع العلامات المعيارية مقابل تكراراتها، بوسط حسابي يساوي صفر، وانحراف معياري يساوي واحد.



وهذا الشكل يشبه شكل الجرس.

وأهم خصائصه:

١. متمائل حول $\bar{ع}$.

٢. يُقسّم المحور الأفقي فيه بمقدار انحراف معياري واحد بكل وحدة.

٣. المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي وحدة مربعة واحدة.

ومن الجدير بالإشارة أن المساحة المحصورة بين قيمتين معياريتين يمكن حسابها من خلال جداول منظمة ودقيقة أعدت لهذا الغرض. لاحظ الملحق (١).

نشاط (٢)



أستخدم الجداول في حساب المساحة المحصورة بمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري والواقعة تحت $(ع = ١,١٦)$

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠										
٠,١										
٠,٢										
٠,٣										
٠,٤										
٠,٥										
٠,٦										
٠,٧										
٠,٨										
٠,٩										
١,٠										
١,١										
١,٢										

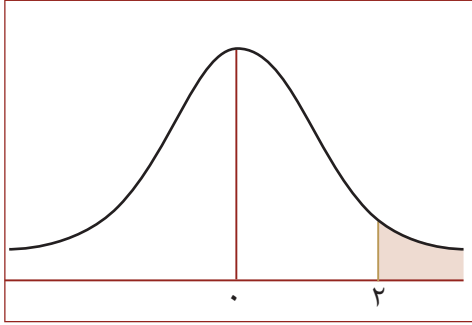
أجد من الجدول أن : المساحة تحت $(ع = ١,١٦) = ٠,٨٧٧٠$

مثال (١)



أستخدم الجداول في حساب المساحة المحصورة بمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري والواقعة:

١. تحت (ع = ١) ٢. تحت (ع = ١,٤٢) ٣. فوق (ع = ٢)



الحل: ١. المساحة تحت (ع = ١) تساوي ٠,٨٤١٣

٢. المساحة تحت ع = (١,٤٢) تساوي ٠,٩٢٢٢

٣. المساحة فوق (ع = ٢) = ١ - المساحة تحت (ع = ٢)

$$= ٠,٩٧٧٢ - ١ =$$

$$= ٠,٠٢٢٨$$

نشاط (٣)



أحسب نسبة المساحة المحصورة بين (ع = ٠,٨-) و (ع = ١,٤)

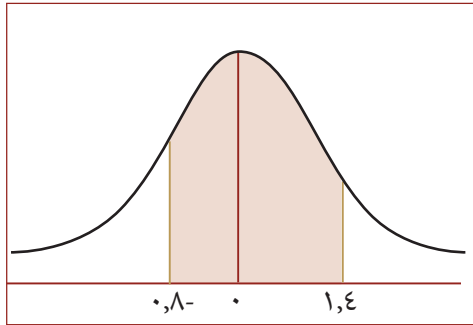
الحل:

المساحة تحت (ع = ٠,٨-) = ٠,٢١١٩

المساحة تحت (ع = ١,٤) = ٠,٩١٩٢

إذن نسبة المساحة المحصورة بين (ع = ٠,٨-) و (ع = ١,٤) إلى

المساحة الكلية تساوي _____



أتعلم



نسبة المساحة المحصورة تحت منحنى التوزيع الطبيعي عندما (ع > ع) إلى المساحة الكلية تحت المنحنى

تساوي المساحة تحت (ع = ع)

مثال (٢)



استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد نسبة المساحة في كل مما يأتي :

$$(١) \text{ عندما } (ع \geq ٠,٧٤) \quad (٢) \text{ عندما } (ع \geq -٢,٦٤)$$

$$(٣) \text{ عندما } (ع \geq ٢) \quad (٤) \text{ عندما } (ع \leq -٢,٥٢)$$

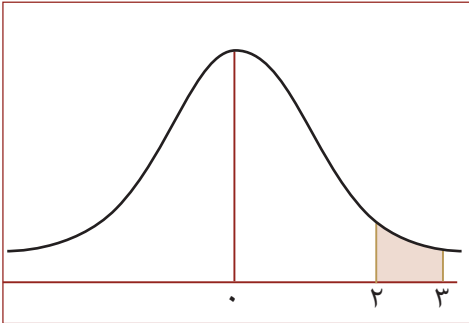
الحل:

$$(١) \text{ عندما } (ع \geq ٠,٧٤) \text{ فإن نسبة المساحة تحت } (ع = ٠,٧٤) = ٠,٧٧٠٤$$

الاحظ أن المساحة المحصورة تحت $(ع = ٠,٧٤)$ تشكل ما نسبته $٧٧,٠٤\%$ من المساحة الكلية تحت المنحنى.

(لماذا؟)

$$(٢) \text{ عندما } (ع \geq -٢,٦٤) \text{ فإن نسبة المساحة تحت } (ع = -٢,٦٤) =$$

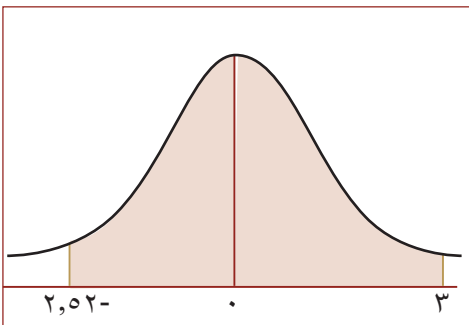


$$(٣) \text{ عندما } (ع \geq ٢) \text{ فإن نسبة المساحة بين } (ع = ٢, ع = ٣) =$$

$$= \text{ المساحة تحت } (ع = ٣) - \text{ المساحة تحت } (ع = ٢)$$

$$= ٠,٩٩٨٧ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢١٥$$

الاحظ أن المساحة المحصورة بين $ع = ٢$ و $ع = ٣$ تمثل ما نسبته $٢,١٥\%$ من المساحة الكلية تحت المنحنى.



$$(٤) \text{ عندما } (ع \leq -٢,٥٢) = \text{ نسبة المساحة فوق } (ع = -٢,٥٢)$$

$$= ١ - \text{ نسبة المساحة تحت } ع = -٢,٥٢$$

$$= ١ - ٠,٠٥٩ = ٠,٩٤١$$

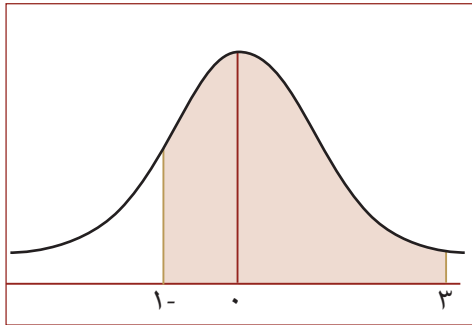
$$\text{عندما } (ع \leq -٢,٥٢) \text{ تساوي } \underline{\hspace{2cm}}$$

تطبيقات على التوزيع الطبيعي المعياري:

تقدّم ١٠٠٠ طالب لامتحان ما في جامعة النجاح الوطنية. فإذا كانت علامات الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٦٠ وانحرافه المعياري ١٠. أجد:

(أ) النسبة المئوية للطلبة الذين تنحصر علاماتهم بين ٥٠، و٩٠.

(ب) عدد الطلبة الذين علاماتهم تزيد عن ٨٠.



الحل:

(أ) أفرض أن s تمثل علامات الطلبة، حيث $\mu = 60$ ، $\sigma = 10$

$$\text{عندما } s = 50 \text{ فإن: } 10 = \frac{60 - 50}{\sigma} = z$$

$$\text{عندما } s = 90 \text{ فإن: } 3 = \frac{60 - 90}{\sigma} = z$$

إذن النسبة التي تمثل $(50 \leq s \leq 90)$ = نسبة المساحة عندما $(-1 \leq z \leq 3)$

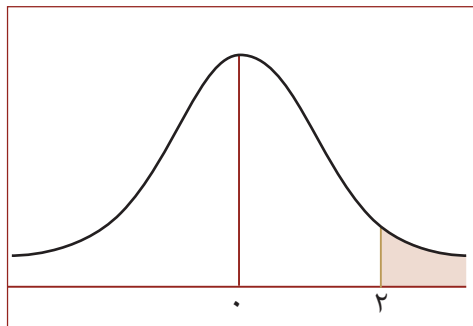
$$= (\text{المساحة تحت } z = 3) - (\text{المساحة تحت } z = -1)$$

$$= 0,9987 - 0,1054 = 0,8933$$

إذن النسبة المئوية = $0,8933 \times 100 = 89,33\%$

$$\text{(ب) عندما } s = 80 \text{ فإن: } 2 = \frac{60 - 80}{\sigma} = z$$

إذن النسبة التي تمثل $(s \leq 80)$ = نسبة المساحة فوق $(z = 2)$



$$= 1 - (\text{المساحة تحت } z = 2)$$

$$= 1 - 0,9772 = 0,0228$$

النسبة المئوية = $0,0228 \times 100 = 2,28\%$

إذن عدد الطلبة = $1000 \times 0,0228 \approx 23$ طالباً.

تمارين ومسائل (٤ - ٢)



١ استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد نسبة المساحة لكل من الآتية:

أ) عندما $(ع \geq ٠,٣٤)$ ب) عندما $(ع \leq ١,٦٤)$ ج) عندما $(٢- \geq ع \geq ١,٦٧)$

٢ إذا كان عمر التشغيل لبطارية سيارة من إنتاج مصنع فلسطيني يتبع التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي ٢٠٠٠ ساعة، وانحراف المعياري ١٢٠ ساعة، ما النسبة المئوية للبطاريات التي يكون عمر التشغيل لها أكثر من ١٨٢٠ ساعة؟

٣ خط إنتاج في مصنع ينتج ٤٠٠ كيس من السكر تتبع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي ١,٠١ كغم وانحراف معياري يساوي ٠,٠٢ كغم. أجد:

أ) النسبة المئوية للأكياس التي كتلتها أقل من ١,٠٣ كغم من إنتاج هذا الخط.

ب) عدد الأكياس التي كتلتها أكثر من ١,٠٢ كغم.

ج) النسبة المئوية للأكياس التي تتراوح كتلتها بين ١ كغم و ١,٠٥ كغم.

٤ تقدم ١٠٠٠ طالب في إحدى الجامعات الفلسطينية لامتحان عام في المهارات التقنية. وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ٦٨ وانحراف معياري σ ، فإذا كان عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة ٦٠ على الأقل هو ٧١٩ طالب.

أ) ما قيمة σ ؟

ب) ما النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا على علامة ٤٠ على الأقل؟

ج) ما عدد الطلبة الذين حصلوا على علامة ٧٠ على الأكثر؟

تمارين عامة

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة لكل من الأسئلة الآتية:

(١) إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من العلامات يساوي ٥٦ والانحراف المعياري يساوي ٤ فما العلامة التي تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط؟

(أ) ٥٧ (ب) ٤٨ (ج) ١٢ (د) ١٢-

(٢) إذا كان الفرق بين طولي شخصين يساوي ١٥سم، والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لطوليهما يساوي ١,٥ ، فما الانحراف المعياري σ ؟

(أ) ١٥ (ب) ١,٥ (ج) ١٠ (د) ٠,٧٥

(٣) إذا كانت كتلتا شخصين ٨٥ كغم ، ٨٠ كغم، وكانت العلامتان المعياريتان المناظرتان لهما ١، ٢- على الترتيب فما الانحراف المعياري؟

(أ) ١ (ب) $\frac{3}{5}$ (ج) $\frac{5}{3}$ (د) ١٠

(٤) إذا كانت ع تتبع التوزيع الطبيعي وكانت المساحة عندما $(ع < ٢,٢٣) = ك$ ما نسبة المساحة عندما $(ع < -٢,٢٣)$ ؟

(أ) ك (ب) ١ - ك (ج) ك - ١ (د) ١ + ك

(٥) إذا كانت س تتبع التوزيع الطبيعي بوسط الحسابي μ وانحراف معياري σ ، ما قيمة المساحة الممكنة عندما $(س < \mu)$ ؟

(أ) ٠,٠٥ (ب) ٠,٥٠ (ج) ١ (د) صفر

السؤال الثاني: إذا كان ع يتبع التوزيع الطبيعي، أجد نسبة المساحة في كل مما يأتي:

(أ) عندما $(ع \leq ١,١٣)$ (ب) عندما $(ع \geq ١,٤٢)$

(ج) عندما $(١,٣٥ \leq ع \leq ٢,٠١)$ (د) عندما $(١,٤١ \leq ع \leq ٢,٤٥)$

السؤال الثالث: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات يساوي ٥٠ والانحراف المعياري لها ١٠ أجد:

أ) العلامة المعيارية المناظرة للمفردة ٦٠

ب) المفردة المناظرة للعلامة المعيارية -١,٥

السؤال الرابع: إذا كانت س تمثل علامات طلبة صف ما بحيث س تتبع التوزيع الطبيعي حيث أن الوسط

الحسابي يساوي ٢٠ والانحراف المعياري يساوي ٤

أجد كلاً مما يأتي:

أ) نسبة المساحة عندما $(س \leq ١٦)$

ب) نسبة المساحة عندما $(س \geq ٩)$

السؤال الخامس: إذا كانت العلامتان المعياريتان المناظرتان للعلامتين ١٧ ، ٣٥ هما -١،٣ على الترتيب،

فما الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات الخام؟

السؤال السادس: صفّ مكون من ٤٠ طالباً، إذا كانت علامات الطلاب رامي، محمد ، رائد هي ٨٠ ، ٩٠ ، س

على الترتيب، وعلاماتهم المعيارية المناظرة هي: ٢ ، ٣ ، -١ على الترتيب، فما قيمة س؟

السؤال السابع: أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مستوى الانجاز			مؤشر الاداء
منخفض	متوسط	مرتفع	
			اجد العلامة المعيارية
			اجد المساحة تحت المنحني الطبيعي
			احل مسائل منتمية لايجاد كل من الوسط والانحراف المعياري
			اوظف المنحني الطبيعي في حل مشكلات حياتية

إجابات التمارين والمسائل

الوحدة الأولى

تمارين (١-١) صفحـ(٩)ة

- ١ (أ) ٢- ١ (ب) ٧ (ج) $\frac{1}{7}$
- ٢ (أ) ٣ ٣ (ب) ١٥ ٤ (ج) ١- ٥ (د) ٤ ٦ (هـ) $\frac{5}{9}$

تمارين (٢-١) صفحـ(١٣)ة

- ١ (أ) ٠ (ب) ٣ (ج) ١ (د) $\frac{5}{3}$ (هـ) ٣
- ٢ (أ) $\frac{64-}{س^6}$ (ب) ٠ (ج) ٢٠س^٢ (د) ٤٢ ٣ (هـ) ٥ ٤

تمارين (٣-١) صفحـ(١٩)ة

- ١ (أ) صفر (ب) ١٠ (ج) $\frac{5}{3}$ (د) ٣-
- ٢ (أ) ١- (ب) $\frac{٤س - ٣س^٢ + ٢١}{(٣س - ٢)^٢}$ (ج) $\frac{٢-س}{٣}$ (د) ٤٩-
- ٣ (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١٦- (ج) ٦٠- (د) ١
- ٤ (أ) ١- (ب) ٦- (ج) ١- (د) ٣
- ٥ (أ) ١- (ب) ٦- (ج) ١- (د) ٣
- ٧ (أ) ٣ (ب) ٦- (ج) ١- (د) ٣

- ١ ق(٢-) = ٦ عظمى محلية ، ق(٠) = ١ صغرى محلية
- ٢ أ) ق(س) متزايد على $[-١, \infty)$ ، ومتناقص على الفترة $[-\infty, ١-)$
 ب) للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية عند $s = ١$ وقيمتها -٤
- ٣ ٤- ٤ الاقتران ه(س) متزايد على الفترة $[-\infty, ٢-)$ ومتناقص على الفترة $[-٢, \infty)$.
- ٥ أ) الاقتران ك(س) متزايد على $[-\infty, ٥-)$ \cup $[١, \infty)$ ومتناقص على $[-١, ٥-)$.
 ب) للاقتران ك(س) قيمة عظمى محلية عند $s = ٥$ وقيمتها $\frac{٨٥}{٣}$ ، وله قيمة صغرى محلية عند $s = ١$ وقيمتها $-\frac{٢٣}{٣}$
- ٦ ع/س) موجبة على ح

- ١ أ) $s^٣ + ٢s^٢ - ٥s + ٥$ ج (ب) $\frac{s^٥}{٧} + ٥$ ج (ج) $\frac{٧s^٨}{٨} + ٥$ ج
- ٢ ٥ (د) $\frac{٢-}{s^٣} - \frac{٢}{s^٥} + ٥$ ج (هـ) $١٤s^٤ + \frac{٣s^٣}{٢} + \frac{٧s^٢}{٣} + ٥$ ج (و) $(٥^{٢٠٢})s + ٥$ ج
- ٣ ٥ ٢ + ٦س ج ٤ ٣ + ٢س ج
- ٥ أ) ق(س) = $s^٢ + ٨s + ١$ (ب) ص = $٢٠s + ١٧$

- ١ أ) $\frac{٣}{٢} -$ (ب) صفر (ج) $\frac{٤١}{٣}$
- ٢ ١٦- ٣ ٢٤- ٤ ٢- ٦ ٣٣ ٥ ١± ٧ ٢٤



١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم الفقرة
ب	ج	د	ج	أ	ج	ج	أ	أ	د	إجابة الفقرة

١

٣ ، ٢- ٥

٢ ، ٢- ٤

$\frac{1}{7}$ ٣

١٢ ٢

٦ (أ) متزايد على الفترة [١، ٥٥] ومتناقص على [٥٥، ١].

(ب) للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند $s = 1$ وقيمتها -٣.

الوحدة الثانية

تمارين (١-٢) صفحـة (٥٧)ـة

$$\begin{bmatrix} 230 & 470 & 500 \\ 180 & 250 & 400 \end{bmatrix}$$

١

٢ (أ) رتبة المصفوفة أ هي 2×3 . رتبة المصفوفة ب هي 3×3 . رتبة المصفوفة ج هي 3×1 .

(ب) المصفوفة P صفرية ، المصفوفة ب مربعة ، المصفوفة ج مصفوفة صف.

(ج) $3 = P_{11}$ ، $0 = P_{12}$ ، $8 = P_{13}$

٣ (أ) جـ = -٤ ، ب = -٣ ، (ب) $\cdot 0$ جـ = ٩ ، ب = -٢ ، (ج) جـ = $3 \pm$ ، ب = ٠ ، ب = ١

٤ س = ٣ ، ص = ١

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

(ب) ٣٨

$$\begin{bmatrix} ٣٠ \\ ٢٠ \\ ١٦ \end{bmatrix} = \text{ب} , \begin{bmatrix} ٣٢ \\ ٢٥ \\ ٢٢ \end{bmatrix} = \text{أ} \quad \text{١}$$

١٠ ٢

$$\begin{bmatrix} ١٤ & ٦- & ١١- & ٤- \\ ٢٣- & ٢١- & ١- & ١٠ \end{bmatrix} = \text{ب} \text{ (ب) } ٣س + ٤ص , \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٨ & ١٥ \\ ١١ & ٧ & ٩ & ٨ \end{bmatrix} = \text{أ} \text{ (أ) } س + ص \quad \text{٣}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٦ & ١٠ & ١٤ \\ ١٦ & ١٢ & ٨ & ٤ \end{bmatrix} \text{ (هـ) } , \begin{bmatrix} ١- & ١٣ & ٢٢ & ٢٧ \\ ٣٧ & ٢٩ & ١٥ & ٤ \end{bmatrix} = \text{س} - \text{ص} \quad \text{ج} \text{ (ج) } ٥ص - ٢س \text{ (د) } \text{ س-٢ع لا يمكن لاختلاف الرتب ، (هـ)}$$

$$\begin{bmatrix} ٧- & ٥- \\ ٢- & ١٠- \\ ١١- & ٢ \end{bmatrix} \quad \text{٥}$$

$$\begin{bmatrix} ٣- & ٢- & ١١ \\ ١٥ & ٦ & ١٥ \end{bmatrix} \quad \text{٤}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٢- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٦- \\ ١٤- & ٢- \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} ٧- & ٦ \\ ٢- & ١٦- \end{bmatrix} \text{ (أ) } \quad \text{٦}$$

$$\begin{bmatrix} ٢١٩٠٠ \\ ٢٨٤٠٠ \end{bmatrix} \quad \text{٢}$$

$$\begin{bmatrix} ١١ & ٣٩ \\ ٣٣ & ٤ \end{bmatrix} \text{ (ب) } , \begin{bmatrix} ٥- & ٥٢ & ١٠- \end{bmatrix} \text{ (أ) } \quad \text{١}$$

$$\text{أ} = ١ , \text{ب} = ٩ \quad \text{٤}$$

$$\begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٠٠ \\ ٠ \end{bmatrix} \text{ (ب) } , \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٠٠ \\ ٠ \end{bmatrix} \text{ (أ) } \quad \text{٣}$$



٢ - ٢٠

١ س = ٢

(ج) لا يوجد لها نظير ضربي

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1- & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \text{ب}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 7 \\ 3- & 2- \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \text{أ}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1- & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ (أ)}$$

$$\begin{pmatrix} 29- & 17 \\ 4 & 4 \\ 3- & 2 \end{pmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7- & 14 \end{bmatrix} = \text{س} \text{ (أ)}$$

(ب) س = ٥ ، ص = ١-

(أ) س = ٣- ، ص = ١

(ب) س = ٥ ، ص = ٢-

(أ) س = ٨ ، ص = ٤

(أ) س = ١ ، ص = ٢

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم الفقرة
ب	أ	ج	ب	ب	د	أ	ب	ب	د	إجابة الفقرة

(٣) س = ٢- ، ص = ٣-

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \text{أ} (\text{ب} + \text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} ١- & ٥- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \textcircled{٦}$$

$$\textcircled{٥} \text{ س } = ١ ، \text{ س } = ٣$$

$$\textcircled{٤} \text{ س } = \frac{١}{٢} ، \text{ ص } = \frac{٣}{٢}$$

الوحدة الثالثة

تمارين (١-٣) صفحـة(٩٠)ة

$$\textcircled{١} \text{ أ) } \{١\} \quad \text{ب) } \left\{ \frac{٤}{٣} \right\} \quad \text{ج) } \{٢\}$$

$$\textcircled{٢} \text{ أ) } \left\{ \frac{٧}{٦} \right\} \quad \text{ب) } \{٣\} \quad \text{ج) } \{٢\}$$

تمارين (٢-٣) صفحـة(٩٣)ة

$$\textcircled{١} \text{ أ) } \{٤\} \quad \text{ب) } \{٢\} \quad \text{ج) } \{٢١-\} \quad \text{د) } \{٤-٤١\} \quad \text{هـ) } \{١\}$$

$$\textcircled{٢} \quad ٢ \pm \quad \textcircled{٣} \quad \frac{١٤}{٥}$$

تمارين (٣-٣) صفحـة(٩٧)ة

$$\text{ب) } ١٦ ، ٩ ، ٤ ، ١$$

$$\textcircled{١} \text{ أ) } \frac{٨}{٣} + \frac{٩}{٥} + ١ + \frac{١}{٣}$$

ج) غير منتهية

ب) منتهية

أ) غير منتهية

$$\frac{2823}{420} \text{ (ج)}$$

ب) ٣٢

أ) ٩٥ ٣

١٦ ٤

تمارين (٤-٣) صفحـ(١٠٣)ة

أ) ١ $13 + 10 + 7 + 4$

ب) $16 + 8 + 4 + 2$

١٢٣٠ ٢

٥٧- ٣

٣ ٤

٢٧٠٠ ٥

تمارين (٥-٣) صفحـ(١٠٧)ة

$$\frac{51}{16} \text{ (ج)}$$

ب) ٧٨١

أ) ٢٤٠ ١

٠ ٢

٤ ٣

٤ ٤

١٢٣

٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم الفقرة
ج	د	ج	ب	أ	ب	أ	د	إجابة الفقرة

١

٤ = ٥ ، ٣ = ١

٦ ٣

١٠ + ٥ + ٠ + ٥ - + ١٠ -

٢

٣ (ب) ٣ (أ) ٧

٤ (ب) ١٣ (أ) - ٤

١١٧٢٥٠ (ب) ١١٧٥٠ (أ) ٥

٥

٣ - ، ٢ - ٨

٨



تمارين (١-٤) صفحـ(١١٦)ة

١ ع = ٢

٢ ع = ٢٠

٣ س = ١٥٦

٤ (أ) $\frac{٥}{٢} = \sigma$ ، س = ٤٥

(ب) $\frac{١٦}{٥}$

تمارين (٢-٤) صفحـ(١٢٢)ة

(ج) ٠,٩٢٩٧

(ب) ٠,٩٤٩٥

(١) (أ) ٠,٦٣٣١

(٣) $١٠ = \sigma$

(٢) %٩٣,٣٢

(ج) %٦٦,٨٧

(ب) ١٢٣

(٤) (أ) %٨٤,١٣

(ج) ٥٦٠ طالب تقريباً

(ب) %٩٧,٨٨

(٥) (أ) $١٣,٨ = \sigma$

٥	٤	٣	٢	١
ب	ب	ج	ج	ب

١

٠,٩١٣٦ (د)

٠,٨٨٩٣ (ج)

٠,٩٢٢٢ (ب)

٠,١٢٩٢ (أ) ٢

٠,٠٠٣ (ب)

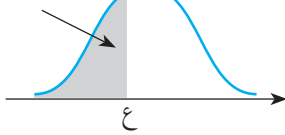
٠,٨٤١٣ (أ) ٤

٣٥ (ب)

١ (أ) ٣

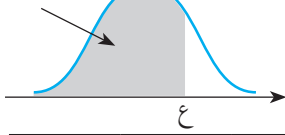
٥٠ ٦

٤,٥ = σ ، ٢١,٥ = μ ٥



ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	ع	ع	ع	ع	ع	ع	ع	ع	ع	ع
٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ع
٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٣,٧-
٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٦-
٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٥-
٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٣,٤-
٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٣,٣-
٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٣,٢-
٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠١٠	٣,١-
٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٣,٠-
٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٩	٢,٩-
٠,٠٠١٩	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٦	٢,٨-
٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٥	٢,٧-
٠,٠٠٣٦	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٧	٢,٦-
٠,٠٠٤٨	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٦٢	٢,٥-
٠,٠٠٦٤	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٨٢	٢,٤-
٠,٠٠٨٤	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٩	٠,٠١٠٢	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٧	٢,٣-
٠,٠١١٠	٠,٠١١٣	٠,٠١١٦	٠,٠١١٩	٠,٠١٢٢	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٩	٠,٠١٣٢	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٩	٢,٢-
٠,٠١٤٣	٠,٠١٤٦	٠,٠١٥٠	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٨	٠,٠١٦٢	٠,٠١٦٦	٠,٠١٧٠	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٩	٢,١-
٠,٠١٨٣	٠,٠١٨٨	٠,٠١٩٢	٠,٠١٩٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢٢٨	٢,٠-
٠,٠٢٣٣	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٨٧	١,٩-
٠,٠٢٩٤	٠,٠٣٠١	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٥٩	١,٨-
٠,٠٣٦٧	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٩٢	٠,٠٤٠١	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٤٦	١,٧-
٠,٠٤٥٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٥٠٥	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٤٨	١,٦-
٠,٠٥٥٩	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٩٤	٠,٠٦٠٦	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٦٨	١,٥-
٠,٠٦٨١	٠,٠٦٩٤	٠,٠٧٠٨	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٠٨	١,٤-
٠,٠٨٢٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٨٥	٠,٠٩٠١	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٦٨	١,٣-
٠,٠٩٨٥	٠,١٠٠٣	٠,١٠٢٠	٠,١٠٣٨	٠,١٠٥٦	٠,١٠٧٥	٠,١٠٩٣	٠,١١١٢	٠,١١٣١	٠,١١٥١	١,٢-
٠,١١٧٠	٠,١١٩٠	٠,١٢١٠	٠,١٢٣٠	٠,١٢٥١	٠,١٢٧١	٠,١٢٩٢	٠,١٣١٤	٠,١٣٣٥	٠,١٣٥٧	١,١-
٠,١٣٧٩	٠,١٤٠١	٠,١٤٢٣	٠,١٤٤٦	٠,١٤٦٩	٠,١٤٩٢	٠,١٥١٥	٠,١٥٣٩	٠,١٥٦٢	٠,١٥٨٧	١,٠-
٠,١٦١١	٠,١٦٣٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٨٥	٠,١٧١١	٠,١٧٣٦	٠,١٧٦٢	٠,١٧٨٨	٠,١٨١٤	٠,١٨٤١	٠,٩-
٠,١٨٦٧	٠,١٨٩٤	٠,١٩٢٢	٠,١٩٤٩	٠,١٩٧٧	٠,٢٠٠٥	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٩٠	٠,٢١١٩	٠,٨-
٠,٢١٤٨	٠,٢١٧٧	٠,٢٢٠٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٩٦	٠,٢٣٢٧	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٠	٠,٧-
٠,٢٤٥١	٠,٢٤٨٣	٠,٢٥١٤	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥٧٨	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦٧٦	٠,٢٧٠٩	٠,٢٧٤٣	٠,٦-
٠,٢٧٧٦	٠,٢٨١٠	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨٧٧	٠,٢٩١٢	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩٨١	٠,٣٠١٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠٨٥	٠,٥-
٠,٣١٢١	٠,٣١٥٦	٠,٣١٩٢	٠,٣٢٢٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٣٠٠	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٧٢	٠,٣٤٠٩	٠,٣٤٤٦	٠,٤-
٠,٣٤٨٣	٠,٣٥٢٠	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٩٤	٠,٣٦٣٢	٠,٣٦٦٩	٠,٣٧٠٧	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٨٣	٠,٣٨٢١	٠,٣-
٠,٣٨٥٩	٠,٣٨٩٧	٠,٣٩٣٦	٠,٣٩٧٤	٠,٤٠١٣	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠٩٠	٠,٤١٢٩	٠,٤١٦٨	٠,٤٢٠٧	٠,٢-
٠,٤٢٤٧	٠,٤٢٨٦	٠,٤٣٢٥	٠,٤٣٦٤	٠,٤٤٠٤	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٨٣	٠,٤٥٢٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٦٠٢	٠,١-
٠,٤٦٤١	٠,٤٦٨١	٠,٤٧٢١	٠,٤٧٦١	٠,٤٨٠١	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٦٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠



تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ع
٠,٥٣٥٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥١٩٩	٠,٥١٦٠	٠,٥١٢٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠
٠,٥٧٥٣	٠,٥٧١٤	٠,٥٦٧٥	٠,٥٦٣٦	٠,٥٥٩٦	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥١٧	٠,٥٤٧٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٣٩٨	٠,١
٠,٦١٤١	٠,٦١٠٣	٠,٦٠٦٤	٠,٦٠٢٦	٠,٥٩٨٧	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩١٠	٠,٥٨٧١	٠,٥٨٣٢	٠,٥٧٩٣	٠,٢
٠,٦٥١٧	٠,٦٤٨٠	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٠٦	٠,٦٣٦٨	٠,٦٣٣١	٠,٦٢٩٣	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢١٧	٠,٦١٧٩	٠,٣
٠,٦٨٧٩	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٠٨	٠,٦٧٧٢	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٠٠	٠,٦٦٦٤	٠,٦٦٢٨	٠,٦٥٩١	٠,٦٥٥٤	٠,٤
٠,٧٢٢٤	٠,٧١٩٠	٠,٧١٥٧	٠,٧١٢٣	٠,٧٠٨٨	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠١٩	٠,٦٩٨٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩١٥	٠,٥
٠,٧٥٤٩	٠,٧٥١٧	٠,٧٤٨٦	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٢٢	٠,٧٣٨٩	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٢٤	٠,٧٢٩١	٠,٧٢٥٧	٠,٦
٠,٧٨٥٢	٠,٧٨٢٣	٠,٧٧٩٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٠٤	٠,٧٦٧٣	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦١١	٠,٧٥٨٠	٠,٧
٠,٨١٣٣	٠,٨١٠٦	٠,٨٠٧٨	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٢٣	٠,٧٩٩٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩١٠	٠,٧٨٨١	٠,٨
٠,٨٣٨٩	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣١٥	٠,٨٢٨٩	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢١٢	٠,٨١٨٦	٠,٨١٥٩	٠,٩
٠,٨٦٢١	٠,٨٥٩٩	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٠٨	٠,٨٤٨٥	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤١٣	١,٠
٠,٨٨٣٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٠٨	٠,٨٦٨٦	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٤٣	١,١
٠,٩٠١٥	٠,٨٩٩٧	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٠٧	٠,٨٨٨٨	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٤٩	١,٢
٠,٩١٧٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٤٧	٠,٩١٣١	٠,٩١١٥	٠,٩٠٩٩	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٣٢	١,٣
٠,٩٣١٩	٠,٩٣٠٦	٠,٩٢٩٢	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩١٩٢	١,٤
٠,٩٤٤١	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٠٦	٠,٩٣٩٤	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٣٢	١,٥
٠,٩٥٤٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٤٩٥	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٥٢	١,٦
٠,٩٦٣٣	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٠٨	٠,٩٥٩٩	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٥٤	١,٧
٠,٩٧٠٦	٠,٩٦٩٩	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٤١	١,٨
٠,٩٧٦٧	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧١٩	٠,٩٧١٣	١,٩
٠,٩٨١٧	٠,٩٨١٢	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٧٢	٢,٠
٠,٩٨٥٧	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٢١	٢,١
٠,٩٨٩٠	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦١	٢,٢
٠,٩٩١٦	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١١	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠١	٠,٩٨٩٨	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٣	٢,٣
٠,٩٩٣٦	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩١٨	٢,٤
٠,٩٩٥٢	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٣٨	٢,٥
٠,٩٩٦٤	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٣	٢,٦
٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٥	٢,٧
٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٤	٢,٨
٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨١	٢,٩
٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٣,٠
٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٠	٣,١
٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٣,٢
٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٣,٣
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٣,٤
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٣,٥
٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٣,٦
٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٣,٧

- * تصميم دليل ارشادي لمدينة القدس للتعريف باهميتها، مع ابراز اهم معالمها التاريخية والسياحية.
- * تصميم اداة لقياس اثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلبة .
- * تعاني المحافظات الجنوبية (قطاع غزة) من مشكلات الماء والكهرباء ، اصمم مقترحا لعرضه على الحكومة للتخفيف من حدة هذه الازمات .
- * إعداد رحلات معرفية (Web quest) عن وحدة التفاضل.

المراجع

- . الخطيب، روجي إبراهيم (٢٠١٢): التفاضل والتكامل ج١، دار المسيرة، عمان
- . الخطيب، روجي إبراهيم (٢٠١٢): التفاضل والتكامل ج٢، دار المسيرة، عمان
- . بسيوني، جابر أحمد(٢٠١٤): الإحصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الإسكندرية
- . عدنان عوض، أحمد علاونة، مفيد عزام، (١٩٩٠) -دار الفكر - عمان -الأردن
- . حنيف، عاصم (١٩٩٩): حساب التفاضل والتكامل ، دار المعارف القاهرة
- . خليفة عبد السميع (١٩٩٤)، تدريس الرياضيات في المدرسة الثانوية: الطبعة الثالثة، كلية التربية، جامعة القاهرة
- . فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع
- . فريدريك بل (١٩٨٦): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية للنشر والتوزيع
- . ابو أسعد، صلاح عبد اللطيف (٢٠١٠): أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع
- . الزغلول، عماد (٢٠٠٥): الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.
- . حسين فرج، عبد اللطيف (٢٠٠٥): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة/ عمان
- Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume1
- Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y
- Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y
- Bostock&Perkins(1989): Advanced Mathematics, volume2

شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع. ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

مميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويشير دافعيتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومتراصة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانيات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطَّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.
٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، (شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلاقاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقييم المشروع: يتضمن تقييم المشروع الآتي:

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيد بالوقت المحدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانيات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعية، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

د. بصري صالح	د. صبري صيدم
أ. عزام ابو بكر	أ. ثروت زيد
د. سمية النخالة	د. شهناز الفار
م. فواز مجاهد	
أ. عبد الحكيم أبو جاموس	
م. جهاد دريدي	

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د. سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. أرواح كرم
أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر	أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة	أ. أحمد سباعرة	أ. قيس شبانة	أ. مبارك
أ. عبد الكريم صالح	أ. أحلام صلاح	أ. نسرين دويكات	أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم			

المشاركون في ورشات عمل من كتاب الرياضيات للصف ثاني عشر الأدبي والشرعي

ابتسام اسليم	سميرة حنيف	مرام شماسنة
أرواح كرم	سناء الأشهب	مرشد شاهين
آسيا العلامي	سهى عودة	منال الصباغ
بيان بشارات	سهيل شبير	نادية زيد
حنان أبو حامد	صلاح الترك	نايف الطيبي
حنين قشوع	عبيدة الأجر	نجلاء بكيرات
خلود طنوس	عدنان عنبوسي	نداء حسن
خليل محيسن	علي زايد	هاشم عبيد
رائد عبد العال	فوزية عودة	هديل حمودة
رائد ملاك	كريم العارضة	وائل عبيات
رفيق الصيفي	كمال الجمل	وسام موسى
سامر أبو الرب	ليديا جعينية	وفاء موسى
سامي بدر	محمد الغرباوي	ياسر الساحلي
حاتم الصغير	محمد فايز	

تمت مناقشة الكتاب من قبل معلمين على مستوى مديريات الوطن عبر العديد من الورشات

تَمَّ بِحَمْدِ اللَّهِ