اجابات الفصل الأول

الفرع العلمي والصناعي

مكتبة الملتقى التربوي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

حلول الوحدة الاولى / حساب التفاضل

تمارين (١-١) صفحة ٨

السؤال الأول: أ) مقدار التغير في ق(س) = ق(٥) – ق(٣) = $\frac{٧٨}{٥}$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ الى ١ يساوي = $\frac{ق(٤)-ق(١)}{٤-١} = \frac{٥١}{١٢} = \frac{١٧}{٤}$

السؤال الثاني: متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[\pi ، \frac{\pi}{٢}]$ = $\frac{ق(\pi)-ق(\frac{\pi}{٢})}{\pi - \frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$

السؤال الثالث :متوسط التغير = $\frac{ق(ا)-ق(١)}{ا-١} = \frac{(ا-٦)-٢ا+٢ا}{ا-١} = \frac{٥-٢ا٢}{ا-١} = ٩$

ومنها $٢ا٢ - ٥ = ٩ا٩ - ٩$ وبالتالي $٢ا٢ - ٩ا٩ + ٤ = ٠ = (ا٢-١)(ا-٤)$

$ا = \frac{١}{٢}$ (مرفوض لأن أ >٢) ، $ا = ٤$ ومنها $ا = ٤$

السؤال الرابع : متوسط التغير للاقتران ك (س) في الفترة $[١،٣]$

$= \frac{ك(٣)-ك(١)}{٢} = \frac{(٣ق٣+١)-(١ق٣+١)}{٢} = \frac{٨+٣ق(٣)-ق(١)}{٢} = ٣ + ٤ = \frac{ق(٣)-ق(١)}{٢}$ =

$= ٤ + ٣ \times ٤ = ١٦$

السؤال الخامس: ميل المستقيم ل = ظا٥ ١٣٥ = $\frac{ق(٣)-ق(١)}{٢} = -١$

متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(٣)-هـ(١)}{٢}$

$= \frac{(٣ق٣+١)-(١ق٣+١-)-٩-١}{٢} = \frac{٨}{٢} + ٣ = \frac{ق(٣)-ق(١)}{٢}$ $= ٤ + ٣ \times -١ = ١$

السؤال السادس: السرعة المتوسطة في الفتر ة $[١،٣]$

$= \frac{ف(٣)-ف(١)}{٣-١} = \frac{٩+٣ب-(ب+١)}{٣-١} = ٦$

ومنها ٢ب + ٨=١٢ وبالتالي ب=٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السابع: متوسط التغير للاقتران ق (س)

$$= \frac{ن(٢)-ن(ن)}{٢-ن} = \frac{(٤أ+٢ب+جـ)-(أن^{٢}+بن+جـ)}{٢-ن}$$

$$= \frac{(٤-ن^{٢})أ+(٢-ن)ب}{٢-ن} = (ب+(٢+ن)أ) \times \frac{٢-ن}{٢-ن} = (ب+(٢+ن)أ)$$

السؤال الثامن :أ) متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

$$= \frac{ق(١)-ق(٠)}{١-٠} = ق(١)-ن(٠)$$

$$= ١+هـ^{١+١}-(٠+هـ^{١+٠}) = ١+هـ-هـ^{٢}$$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى هـ

$$= \frac{ن(هـ)-ن(١)}{هـ-١} = \frac{(هـ^{ن}+لـو_{١}هـ^{ن})-(١+لـو_{١}^{ن})}{هـ-١} = \frac{٣-هـ}{١-هـ} = \frac{هـ+ن-١}{هـ-١}$$

ومنها ن - ١ = -٣ وبالتالي ن =-٢

تمارين (١-٢) صفحة ١٦

السؤال الأول: $ن'(-١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(-١+هـ)-ن(-١)}{هـ} =$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ-هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢-هـ}{١} = ٢$$

السؤال الثاني :أ) $ن'(٤) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٤+هـ)-ن(٤)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٤+هـ)+(٤+هـ)^{٢}-٢٠}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٤+هـ+١٦+٨هـ+هـ^{٢}-٢٠}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٩هـ+هـ^{٢}}{هـ} = ٩$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) $\left.\frac{ص\Delta}{س\Delta}\right|_{س=٣} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ص\Delta}{س\Delta} = \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣ - س}{٣س}}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{٣س} = \frac{-١}{٩}$

ج) عندما س= ٠ نلاحظ أن: ق(س) يغير من قاعدته

$$ن'(٠) = \lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠}$$

$$ن'(٠^+) = \lim_{س \to ٠} \frac{٠ - ٠}{س} = ٠ \quad ن'(٠^-) = \lim_{س \to ٠} \frac{-س^٢}{س} = ٠ \qquad \text{ومنها } ن'(٠) = ٠$$

عندما س = $\frac{١}{٢}$ فإن $ن'(\frac{١}{٢}) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{[س]س^٢ - ٠}{س - \frac{١}{٢}} = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٠}{س - \frac{١}{٢}} = ٠$

أي ان $ن'(\frac{١}{٢}) = ٠$

السؤال الثالث : في الفترة $]-١، ١[$

$$ن'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع) - ن(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢\sqrt{ع + ٣} - ٢\sqrt{س + ٣}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢\sqrt{ع + ٣} - ٢\sqrt{س + ٣}}{ع - س} \times \frac{٢\sqrt{ع + ٣} + ٢\sqrt{س + ٣}}{٢\sqrt{ع + ٣} + ٢\sqrt{س + ٣}}$$

$$\lim_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{(ع - س)(٢\sqrt{ع + ٣} + ٢\sqrt{س + ٣})} = \frac{١}{\sqrt{س + ٣}}$$

في الفترة $]١، ٤[$:

$$ن'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع) - ن(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٤}{ع} - \frac{٤}{س}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٤(س - ع)}{ع س}}{ع - س} = \frac{-٤}{س^٢}$$

عندما س= -١ ، ٤ المشتقة غير موجودة (أطراف فترة)

مكتبة الملتقى التربوي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

عندما س = ١ ، المشتقة غير موجودة لأن ن´(١) $^{+}$ ≠ ن´(١) $^{-}$ وذلك بإيجادهما باستخدام تعريف

المشتقة فتكون ن´(س) = $\begin{cases} \frac{١}{\sqrt{٣+س}} & ، س \in]-١، ١[\\ \frac{-٤}{س^{٢}} & ، س \in]١، ٤[\end{cases}$

السؤال الرابع : أفرض العرض س فيكون الطول ٣س

ومنها المساحة م = ٣س ^{٢}

معدل التغير في مساحة الصفيحة (عندما س = ٦)

م´(س) = $\lim_{س \to ٦}$ $\frac{م(س)-م(٦)}{س-٦}$ = $\lim_{س \to ٦}$ $\frac{٣س^{٢}-١٠٨}{س-٦}$ = ٣٦ سم ^{٢} / س

السؤال الخامس :أ) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ن(٣+٥هـ)-ن(٣)}{١٠هـ}$ = $\frac{٥}{١٠}$ ن´(٣) = $\frac{١}{٢}$ × ٤ = ٢ (بفرض و= ٥ هـ)

ب) $\lim_{س \to ١}$ $\frac{ن(س)-ن(١)}{س-١}$ = $\lim_{س \to ١}$ $\frac{\frac{ن(س)-ن(١)}{س-١}}{\frac{س^{٢}-١}{س-١}}$ بقسمة البسط والمقام على (س-١)

= $\lim_{س \to ١}$ $\frac{ن(س)-ن(١)}{س-١}$ = ن´(١) = $\frac{-٢}{-٢}$ = ١

ج) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ن(١+٩هـ)-ن(١)}{\sqrt{١+هـ}-١}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{\frac{ن(١+٩هـ)-ن(١)}{٩هـ}}{\frac{\sqrt{١+هـ}-١}{هـ}}$

= ٩ن´(١) × $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ}{\sqrt{١+هـ}-١}$ × $\frac{\sqrt{١+هـ}+١}{\sqrt{١+هـ}+١}$

(بالضرب بالمرافق والتبسيط) = ٩ × -٢ × ٢ = -٣٦

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

د) $\lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١+٣هـ)-ب(١-٣هـ)}{١٠هـ} = \lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١+٣هـ)-ب(١)-ب(١)-ب(١-٣هـ)+ب(١)}{١٠هـ}$

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{(ب(١+٣هـ)-ب(١))-(ب(١)-ب(١-٣هـ))}{١٠هـ}$

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١+٣هـ)-ب(١)}{١٠هـ} - \lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١)-ب(١-٣هـ)}{١٠هـ}$

$= \frac{٣}{١٠} \times ب'(١) - \frac{-٣}{١٠} ب'(١) = \frac{-٦}{٥}$ بالفرض لكل حالة

هـ) $\lim_{س\to ٣} \frac{س ب(٣)-٣ب(س)}{س-٣} = \lim_{س\to ٣} \frac{س ب(٣)-٣ب(٣)+٣ب(٣)-٣ب(س)}{س-٣}$

$= \lim_{س\to ٣} \frac{ب(٣)(س-٣)+٣(ب(٣)-ب(س))}{س-٣} = ب(٣)-٣ب'(٣) = -١٤$

تمارين (١-٣) صفحة ٢٥

السؤال الأول : أ) $ن'(س) = ٥س^{٤} - ٢س$ ومنها $ن'(-١) = ٥+٢ = ٧$

ب) $ن'(س) = (س^{٣}-١)\times ١ + ٣س^{٢}(١٢س+١)$

ومنها $ن'(٣) = ٢٦+٢٧(١٢+٣) = ١٣٤$

ج) $ن'(س) = \frac{-٢س\times(٥-س^{٢})-س^{٢}\times ٢س}{(٥-س^{٢})^{٢}}$ ومنها $ن'(-٢) = -٢٠$

السؤال الثاني : أ) $(ن+هـ^{٢})'(س) = ن'(س)+هـ(س)هـ'(س)+هـ'(س)\times هـ(س)$

$= ن'(س)+٢هـ'(س)\times هـ(س)$ $= ن'(١)+٢هـ'(١)\times هـ(١)$

$= ٣+٢\times ٣-\times ١- = ٩$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) $\left(\frac{\text{س}^{٢}\,\text{ن}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}\right)'(١) = \left(\text{س}^{٢}\,\text{ن}'(\text{س}) + ٢\text{س}\,\text{ن}(\text{س}) + \frac{٣\,\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}^{٢}(\text{س})}\right)(١)$

$= \left(\text{ن}'(١) + ٢\,\text{ن}(١) + \frac{٣\,\text{هـ}'(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}\right) = ٣ + ٤ + ٩ = ٢-$

ج) $\left(\frac{\text{ن}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{\text{ن}'(١)\text{هـ}(١) - \text{هـ}'(١)\times\text{ن}(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}$

نجد ن'(١) من اشتقاق ن(س) حيث ن'(١) = ٠ ، ق(١)=$\frac{١}{٢}$

ميل المماس = ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$= \text{ظا}\,٠١٥ = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ومنها هـ'(١) = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، هـ(١) = ١

بالتعويض ينتج أن: $\left(\frac{\text{ن}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

السؤال الرابع: أ) ص' = $\frac{\text{س}+١-\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ، ص'' = $\frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}}$

الطرف الأيمن = ٢ × $\frac{\text{س}}{(\text{س}+١)}\times\frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}} + \text{س}\times\frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}} = ٠$ = الطرف الأيسر

ب) ص = ١ س^{٥} + ٥س$^{-٤}$ ، ص' = ٥١ س^{٤} − ٠٢س$^{-٥}$

ص'' = ٠٢١ س^{٣} + ٠٠١س$^{-٦}$ = ٠٢(١ س^{٣} + ٥س$^{-٦}$) = $\frac{٠٠١}{\text{س}^{٦}}$ + ٠٢١ س^{٣}

ومنها ص'' = $\frac{٠٢}{\text{س}^{٢}}$ (١ س^{٥} + $\frac{٥}{\text{س}^{٤}}$) = $\frac{٠٢\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$

السؤال الخامس :بعد التبسيط ن(س) = (١ − س^{١٦}) ومنها ن'(س) = −٦١س^{١٥}

ن'(١) = −١٦

السؤال السادس : أولا: ن(س) = س^{٢} ومنها ن'(س) = ٢س

أ) ن'(٠) = ٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) هـ ′(٠) غير موجودة لأن هـ(س) غير متصل عندها

جـ) $(ن \times هـ)(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad س \in \left[٠، \frac{١}{٢}\right) \\ -س^{٢} & ، \quad س \in \left(٠، -\frac{١}{٢}\right) \end{cases}$

لاحظ ان الاقتران الجديد متصل عندما س = ٠

د) لاحظ أنه لا يمكن تحديد وجود $(ن \times هـ)'(٠)$ باستخدام مشتقة حاصل الضرب

$(ن \times هـ)'(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad س \in \left(٠، \frac{١}{٢}\right) \\ -٢س & ، \quad س \in \left(٠، -\frac{١}{٢}\right) \end{cases}$ ومنها $(ن \times هـ)'(٠) = ٠$

ثانيا : نستنتج أنه لا يمكن الحكم على وجود أو عدم وجود المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق لذلك نعود إلى إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي ثم نحدد وهذا لا يتناقض مع القاعدة المذكورة .

السؤال السابع : $ن(س) = س^{٤} + ا س^{٣} - ٣$ ، $ن'(س) = ٤س^{٣} + ١٣ ا س^{٢}$

$ن''(س) = ١٢ ا س^{٢} + ١٦ ا س$ ، $ن^{(٣)}(س) = ٢٤ ا س + ١٦ ا$ ،

$ن^{(٣)}(٢) = ٢٤ \times ٢ + ١٦ ا = ١٨$ ومنها $ا = -٥$

السؤال الثامن : $ن(س) = س^{ن}$ ، $ن'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ن''(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$ن^{(٣)}(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣} = ا س$ ومنها $ن - ٣ = ١$ ، $ن = ٤$ ،

لكن $ن(ن-١)(ن-٢) = ا$ ومنها $ا = ٢٤$

السؤال التاسع : نفرض ٢س = ع ومنها $س = \frac{ع}{٢}$ عندما س ← ١ فإن ع ← ٢

النهاية = $\lim_{ع \to ٢} \frac{ن'(ع) - ن'(٢)}{\frac{ع}{٢} - ١} = ٢ \lim_{ع \to ٢} \frac{ن'(ع) - ن'(٢)}{ع - ٢} = ٢ ن''(٢) = ٢ \times ٥ \times ٢ = ١٠$

مكتبة الملتقى التربوي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين (١-٤) صفحة ٢٩

السؤال الأول :

أ) $\frac{ص}{س} = -٢جاس - ٢قا^{٢}س$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{(١+قاس)(-قاس ظاس)-(١-قاس)(قاس ظاس)}{(١+قاس)^{٢}} = \frac{-٢قاس ظاس}{(١+قاس)^{٢}}$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{قتاس+ظتاس+س قتاس ظتاس+س قتا^{٢}س}{(قتاس+ظتاس)^{٢}} = \frac{١+س قتاس}{قتاس+ظتاس}$

د) $\frac{ص}{س} = ٢س قاس + س^{٢} قاس ظاس = س قاس(٢+س ظاس)$

السؤال الثاني : $\frac{ص}{س} = قا^{٢}س = ١+ظا^{٢}س$ **(يتم التعامل مع مشتقة $ظا^{٢}س$ على أنها حاصل ضرب)**

$\frac{ص^{٢}}{س} = ٢قا^{٢}س ظاس = ٢ظاس(١+ظا^{٢}س) = ٢ص(١+ص^{٢})$

السؤال الثالث : $\frac{ص}{س} = \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}}$

$\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} = \frac{-س^{٢}جاس - ٢س جتاس + ٢جاس}{س^{٣}}$

الآن الطرف الأيمن= $\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٢}{س}\frac{ص}{س} + ص$

$= \frac{-س^{٢}جاس - ٢س جتاس + ٢جاس}{س^{٣}} \times \frac{٢}{س} + \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}} + \frac{جاس}{س} = ٠$ **(مع التبسيط والاختصار)**

السؤال الرابع : $ن'(س) = س+جاس$ ، $ن''(س) = ١+جتاس = ٠$

ومنها جتاس $= -١$ ، س $= \pi$ ، س $= -\pi$

السؤال الخامس : $نهـا_{هـ \leftarrow ٠} \frac{قا(س^{٢}+هـ) - قا(س^{٢})}{هـ} = نهـا_{هـ \leftarrow ٠} \frac{قا(ص+هـ) - قا(ص)}{هـ}$

$= (قاص)' = قاص ظاص = قاس^{٢}ظاس^{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين (١-٥) صفحة ٣٦

السؤال الأول :

ا) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية = $\lim_{س \to ١} \frac{هـ^{س-١} - ١}{\frac{١}{س}} = \frac{هـ^{٠} - ١}{١} = ٠$

ب) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية= $\lim_{س \to ٠} \frac{٤}{قا^{٢} س} = ٤$

ج) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية = $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{٣س^{٢}}$ وناتج التعويض = ÷

نطبق قاعدة لوبيتال مرة اخرى فتصبح $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{٦س}$ وناتج التعويض ÷ تطبق قاعدة

لوبيتال مرة أخرى فتصبح $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس}{٦} = \frac{١}{٦} \Leftarrow \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^{٣}} = \frac{١}{٦}$

السؤال الثاني :

أ) $\frac{ص}{س} = -جاس \times هـ^{س} + هـ^{س} جتاس$

ب) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٢س}$

ج) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س^{-٥} = \frac{-٥}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ص}{س} = \frac{-٥}{٢س}$

د) $ص = (هـ^{س} - ٢)(هـ^{س} + ٢)$

$\frac{ص}{س} = (هـ^{س})(هـ^{س} + ٢) + (هـ^{س} - ٢)(هـ^{س})$ ، ومنها $\frac{ص}{س} = ٢هـ^{٢س}$

السؤال الثالث : متوسط تغير الاقتران ص $= \frac{ن(٢) - ن(٠)}{٢} = \frac{١٢ هـ^{-١} - ٠}{٢}$

$= \frac{أ}{هـ} = \frac{٢}{هـ}$، ومنها $أ = ٢$

السؤال الرابع : $ص = ٢س + هـ^{س} = ص = س^{٢} + هـ^{س} + ١$ ومنها $س^{٢} - ٢س + ١ = ٠$

وبحل المعادلة ينتج أن: س = ١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس :بما أن ناتج التعويض = ÷ نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ا}\frac{س^{ن}-ا^{ن}}{س^{ك}-ا^{ك}}=\text{نهـــا}_{س\leftarrow ا}\frac{ن س^{ن-١}}{ك س^{ك-١}}=\frac{ن}{ك}ا^{ن-ك}$$

السؤال السادس : لاحظ أن ناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$

$$\text{قيمة النهاية} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ١}\frac{ق(١)-ق(س)}{١}=-ق'(١)=-٦=-٣$$

تمارين (١-٦) صفحة ٤٣

السؤال الأول: ميل المستقيم = $\frac{-١}{٢}$ ، ميل المماس = ٢ لأنه عمودي عليه .

ميل المنحنى = ميل المماس ومنها $٢س-٢=٢$ ، س=٢

نقطة التماس =(٢،١)

السؤال الثاني : $ق'(س)=-٢ظاس\ قا^{٢}س$

ميل المماس= $ق'(\frac{\pi}{٤})=-٢ظا\frac{\pi}{٤}\ قا^{٢}\frac{\pi}{٤}=-٤$

$ق(\frac{\pi}{٤})=-٣=ظا^{٢}\frac{\pi}{٤}-١=٢$ ومنها نقطة التماس $(\frac{\pi}{٤}،٢)$

معادلة المماس $ص-٢=-٤(س-\frac{\pi}{٤})$ ومنها $ص=-٤س+\pi+٢$

السؤال الثالث : $ق'(س)=\frac{١}{س}$ ميل المماس=$ق'(٢)=\frac{١}{٢}$ ، $ق(٢)=٠$

معادلة المماس هي $ص-٠=\frac{١}{٢}(س-٢)$ ومنها $ص=\frac{١}{٢}س-١$

المماس يقطع محور السينات في النقطة ب (٠،٢) والصادات في النقطة جـ (-١،٠)

مساحة المثلث ب جـ $=\frac{١}{٢}\times٢\times١=١$ وحدة مساحة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الرابع : ميل المماس $= \frac{1}{6}$ ، $ن'(س) = \frac{-6}{(س-2)^2}$

ميل المماس $= ن'(س) = \frac{-6}{(س-2)^2} = \frac{-1}{6}$

وبحل المعادلة ينتج أن: س =٨ أو س= −٤

عندما س=٨ ، ص = ٤ ، ا = ٣٢ ، وعندما س=−٤ ، ص =٢ ، ا = ٨

السؤال الخامس : أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر أي أن: ٤٠ − ١٠ ن = ٠، ومنها ن=٤

ف(٤) = ٨٠ م

المسافة الكلية المقطوعة = ٢ × ٨٠ − ف(ن) = ١٠٠

ف(ن) = ٦٠ ، أي يكون الجسم على ارتفاع ٦٠ م وهو نازل

٤٠ن − ٥ن^2 = ٦٠ ،ومنها ن = ٦،٢ ، ن = ٢ تهمل

سرعة الجسم في اللحظة المطلوبة = ٤٠ − ١٠ × ٦ = −٢٠ م / ث

السؤال السادس : ف(ن) = ٣٠ن − ٥ن^2

أ) أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر

ع(ن) = ٣٠ − ١٠ ن = ٠، ومنها ن = ٣ ث

أقصى ارتفاع = ف(٣) = ٤٥ م

ب) عندما يكون الجسم على مستوى سطح العمارة تكون الإزاحة =٤٠ م

٣٠ن − ٥ن^2 = ٤٠ ومنها ن=٢،ن = ٤ ث ، ن=٢ تهمل

السرعة في تلك اللحظة(ن=٤) = −١٠ م / ث

تمارين (١-٧)صفحة ٤٨

السؤال الأول :

أ) $\frac{ص}{س} = -٣(س^2 + س + ١)^{-٤} \times (٢س + ١)$

عندما س= ١ : $\frac{ص}{س} = -٣(٣)^{-٤} \times (١+٢) = \frac{-١}{٩}$

ب) $ص = س^2 \, قا\frac{\pi}{س}$ **ومنها** $\frac{ص}{س} = س^2 \, قا\frac{\pi}{س} \, ظا\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^2} + ٢س \, قا\frac{\pi}{س}$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = -٢$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

جـ) $ص = ٥ع^{٢} - ٧$ ، $\frac{ص}{ع} = ١٠ع$

$ع = \frac{١}{س^{٢}+١}$ ، $\frac{ع}{س} = \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = ١٠ع \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = ١٠ \times \frac{١}{س^{٢}+١} \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = \frac{-٥}{٢}$

د) $\frac{ص}{س} = قا^{٢}\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}} - ٢جتا\pi س \times جا\pi س \times \pi$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = -\pi$

هـ) $\frac{ص}{س} = ٣(لـو_{هـ} س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

عندما س=١ : $\frac{ص}{س} = ٠$

السؤال الثاني : $ن'(س) = \frac{\frac{٢س م'(س)}{م(س)} - ٢لـو_{هـ} م(س)}{٤س^{٢}}$

$$ن'(١) = \frac{\frac{٢م'(١)}{م(١)} - ٢لـو_{هـ} م(١)}{٤} = \frac{-١}{هـ}$$

السؤال الثالث : أ) $ن'(س) = (٢س+١)هـ^{س^{٢}+س}$

ب) $ع'(س) = \frac{٣س^{٢}-٦س}{س^{٣}-٣س^{٢}}$

السؤال الرابع : $ن'(س) = ٢س^{٣}م'(س^{٢}+١) + ٢س م(س^{٢}+١)$

$ن''(س) = ٤س^{٤}م''(س^{٢}+١) + ٤س^{٢}م'(س^{٢}+١) + ٦س^{٢}م'(س^{٢}+١) + ٢م(س^{٢}+١)$

$ن''(١) = ٤$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس : $\frac{ص}{س} = ٣ن(س)^{٢} ن'(س) - ٣س^{٢} ن'(س^{٣})$

عندما س= ٢ : $\frac{ص}{س} = -٣٠$

السؤال السادس : $ن'(س) = قتا^{٢} س$ ومنها $ن'(\frac{\pi}{٤}) = قتا^{٢} \frac{\pi}{٤} = ٢$

$ن(\frac{\pi}{٤}) = -٤ظا\frac{\pi}{٤} = ٣$ نقطة التماس $(\frac{\pi}{٤}، ٣)$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٢}$ ، معادلة العمودي هي $ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{\pi}{٨} + ٣$

السؤال السابع: $\frac{ص}{س} = ٢ن + ٥$

عندما ن=١ : $\frac{ن}{س} = ٢$ أيضًا $\frac{ص}{ن} = ٢ \times ١ + ٥ = ٧$

عندما ن=١ : $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ن} \times \frac{ن}{س} = ٧ \times ٢ = ١٤$

السؤال الثامن : $ص = ا جتاس^{٢} + ب جاس^{٢}$

$ص' = -٢ا س جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}$

$ص'' = -٤ا س^{٢} جتاس^{٢} - ٢ا جاس^{٢} - ٤ب س^{٢} جاس^{٢} + ٢ب جتاس^{٢}$

$س ص'' = س(-٤ا س^{٢} جتاس^{٢} - ٢ا جاس^{٢} - ٤ب س^{٢} جاس^{٢} + ٢ب جتاس^{٢})$

$س ص'' = -٤ا س^{٣} جتاس^{٢} - ٤ب س^{٣} جاس^{٢} - ٢ا س جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}$

$س ص'' = -٤س^{٣}(ا جتاس^{٢} + ب جاس^{٢}) - ٢ا س جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}$

$س ص'' = -٤س^{٣} ص + ص'$

السؤال التاسع: $ن'(س) = -١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $هـ'(س) = -جاس$

$(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= (ن \circ هـ)'(س) = ن'(جتاس) \times -جاس$

$= (ن \circ هـ)'(س) = (-١ - \frac{١}{جتا^{٢} س}) \times -جاس$

$= \frac{-١ - جتا^{٢} س}{جتا^{٢} س} \times -جاس = جا^{٣} س قا^{٢} س$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال العاشر : نفرض م = ٢ س فيكون

$$\text{نهـا}_{هـ\to 0}\frac{\text{ظا}(٢س+هـ)-\text{ظا}(٢س)}{هـ}=\text{نهـا}_{هـ\to 0}\frac{\text{ظا}(م+هـ)-\text{ظا}(م)}{هـ}$$

$$=(\text{ظا}م)'=\text{قا}^{٢}م=\text{قا}^{٢}٢س$$

السؤال الحادي عشر : $\frac{د ص}{د س}=م'ن^{م-١}هـ^{م}+ن^{م}م'هـ^{م-١}هـ'=م'ن^{م-١}هـ^{م-١}(ن'هـ+هـ'ن)$

بالضرب والقسمة على $ن\times هـ$ **ينتج أن:**

$$ص'=م'ن^{م}هـ^{م}\times\frac{ن'هـ+هـ'ن}{ن هـ}=ص م\left(\frac{ن'}{ن}+\frac{هـ'}{هـ}\right)$$

ومنها $\frac{ص'}{ص}=م\left(\frac{ن'}{ن}+\frac{هـ'}{هـ}\right)$.

تمارين (١-٨) صفحة ٥٣

السؤال الأول :

أ) $٣س^{٢}+ص+س ص'+٤ص ص'=٠$ **ومنها** $ص'=\frac{-٣س^{٢}-ص}{س+٤ص}$

ب) $\frac{د ص}{د س}=\frac{١}{٥}((١-س^{٢})^{-\frac{٤}{٥}}\times-٢س=س(١-س^{٢})^{-\frac{٤}{٥}}$

ج) $ص'=\text{جتا}(س+ص)(١+ص')$ **بالتبسيط ينتج أن:**

$$ص'=\text{جتا}(س+ص)\times\frac{١}{١-\text{جتا}(س+ص)}$$

د) $-\frac{ص'}{ص^{٢}}-\frac{١}{س^{٢}}=٠$ **ومنها** $ص'=\frac{-ص^{٢}}{س^{٢}}$

السؤال الثاني : نجد نقط التقاطع $ص-٥+ص^{٢}=٢٥$ ومنها $ص=-٦$، $ص=٥$

عندما ص= -٦ لا يوجد س ، عندما ص=٥ فان س= ٠ ، ٣

$\frac{د ص}{د س}=٢س-٣$ ، **ميل المماس عندما س=٣ يساوي ٣**

ميل العمودي $-\frac{١}{٣}$ **ومنها معادلة العمودي هي** $ص-٥=-\frac{١}{٣}(س-٣)$

أي $ص=-\frac{١}{٣}س+٦$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ميل المماس عند ما س= ٠ يساوي -٣

ميل العمودي $\frac{١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص - ٥ = \frac{١}{٣}(س)$

$ص = \frac{١}{٣}س + ٥$

السؤال الثالث : بالاشتقاق الضمني ينتج أن:

$٢ف \frac{ف ك}{ف ن} = ٢ ا ن$ ومنها $ع(ن) = \frac{ف ك}{ف ن} = \frac{ا ن}{ف} = \frac{ا ن}{\sqrt{٢٤ + ٢ ا ن}}$

$ع(٢) = \frac{ا ٢}{\sqrt{٢٤ + ٢ \times ا ٢}} = ١$ ومنها $ا = ٣$

السؤال الرابع : $ف = ا جا(٢ن + م)$ ، $ع = ٢ ا جتا(٢ن + م)$ ،

$ت = -٤ ا جا(٢ن + م) = -٤ف$

السؤال الخامس : نفرض نقطة التماس (س، ص) ، لاحظ ان النقطة المعطاة خارجة عن منحنى العلاقة

$٨س + ٢ص ص' = ٠$، ومنها $ص' = \frac{-٨س}{٢ص} = \frac{ص}{س + ٢}$

ومنها $ص^{٢} = -٤س^{٢} - ٨س = ٤ - ٤س^{٢}$

$س = -\frac{١}{٢}$، $ص = \pm \sqrt{٣}$ ، نقط التماس هي $(-\frac{١}{٢}، \sqrt{٣})$،$(-\frac{١}{٢}، -\sqrt{٣})$

السؤال السادس: $هـ^{س} + هـ^{ص} ص' = -هـ^{-س} - هـ^{-ص} ص'$

عند النقطة $(-١، ١)$ يكون $هـ ص' = -هـ - هـ^{-١} ص' + \frac{١}{هـ}$

بالتبسيط ينتج أن : $ص' = -١$

السؤال السابع : $س^{٢} = لـو_{هـ} س + لـو_{هـ} ص$ بالاشتقاق ينتج أن:

$٢س = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص}$ ومنها $٢ = \frac{١}{١} + \frac{ص'}{هـ}$، $ص' = هـ$

مكتبة الملتقى التربوي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين عامة (الوحدة الاولى) صفحة ٥٤

السؤال الأول :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
د	أ	ب	أ	ج	د	ج	د	د	ج	ا	ب	ب	د

الأسئلة المقالية:

السؤال الثاني : متوسط التغير للاقتران ص = $\frac{ن(١)-ن(٠)}{١-٠} = ٢هـ^{٠} - هـ^{٠} = ١$

السؤال الثالث : $\lim_{س\to١} \frac{ن(س^{٢}+٢س-١)-ن(٢)}{س^{٢}-١}$

$$= \lim_{س\to١} \frac{(٢س+٢)ن'(س^{٢}+٢س-١)}{٢س} = \lim_{س\to١} \frac{(س+١)ن'(س^{٢}+٢س-١)}{س} = ٢ن'(٢) = -٢$$

يمكن الحل باستخدام الفرض والقسمة .

السؤال الرابع: أ) $\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{٤س}-١}{ظاس}$ ، بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$$\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{٤س}-١}{ظاس} = \lim_{س\to٠} \frac{٤هـ^{٤س}}{قا^{٢}س} = ٤$$

ب) $\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢س}$ بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$$\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢س} = \lim_{س\to٠} \frac{٢سهـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢} = \frac{٠-١}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

ج) $\lim_{س\to٠} \frac{جا٢س-جاس}{٢س}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$$\lim_{س\to٠} \frac{جا٢س-جاس}{٢س} = \lim_{س\to٠} \frac{٢جتا٢س-جتاس}{٢} = \frac{٢-١}{٢} = \fr{١}{٢}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

د) $\lim_{س\to 0} \frac{١-جتاس}{س\ جاس}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي:

$\lim_{س\to 0} \frac{١-جتاس}{س\ جاس} = \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{جاس + س\ جتاس}$ وبالتعويض المباشر ينتج أيضا $\frac{٠}{٠}$ ونكمل تطبيق لوبيتال

$$\lim_{س\to 0} \frac{١-جتاس}{س\ جاس} = \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{جاس + س\ جتاس} = \lim_{س\to 0} \frac{جتاس}{جتاس + جتاس - س\ جاس} = \frac{١}{٢}$$

السؤال الخامس :

أ) $ن'(١) = \lim_{س\to ١} \frac{(س+١)\sqrt{س} - ٢}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{(س+١)\sqrt{س}\ ٢ - \sqrt{س}\ ٢ + ٢\sqrt{س} - ٢}{س-١}$

بالاضافة والطرح

$$ن'(١) = \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)\sqrt{س}\ ٢ + ٢(\sqrt{س}-١)}{س-١}$$

$= \lim_{س\to ١} \sqrt{س} + ٢ \lim_{س\to ١} \frac{\sqrt{س}-١}{س-١} = ١ + ٢ \times \frac{١}{٢} = ٢$ يمكن استخدام لوبيتال في ايجاد النهاية

ب) $ن'(١) = \lim_{س\to ١} \frac{\sqrt[٣]{٢س-١} - ١}{س-١}$ بفرض $ص = \sqrt[٣]{٢س-١}$

$$ن'(١) = \lim_{ص\to ١} \frac{ص-١}{\frac{ص^٣+١}{٢} - ١} = ٢\lim_{ص\to ١} \frac{ص-١}{ص^٣+١-٢} = ٢\lim_{ص\to ١} \frac{١}{ص^٢+ص+١} = \frac{٢}{٣}$$

السؤال السادس: متوسط التغير في الاقتران هـ(س)

$$= \frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣} = \frac{ن(٢) - ن(٠) + ٩}{٣} = \frac{٦+٩}{٣} = ٥$$

السؤال السابع : $\lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-٢}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-ن(١)}{س-١} = ن'(١) = ٣$ ، $ن(١) = ٢$ لأن

ق(س) متصلاً عند س = ١

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^٣ ن(س) - ن(١)}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{س^٣ ن'(س) + ٣س^٢ ن(س)}{١}$$

$$= ن'(١) + ٣ن(١) = ٣ + ٣ \times ٢ = ٩$$

السؤال الثامن : نفرض أن زمن وصول كرة نزار $ن$ وزمن وصول كرة أحمد $ن+١$

$ف_١(ن+١) = ف_٢(ن)$ ومنها $٥(ن+١)^٢ = ٥ن^٢ + ١٥ن$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ن = ١ زمن وصول كرة نزار

سرعة ارتطام كرة نزار = ف ´(١) = ١٥ + ١٠ × ١ = ٢٥ م/ ث

السؤال التاسع : ن ´(س) = ٤ جتاس ، هـ ´(س) = $\frac{٣ - ٣س^{٢}}{(١ + س^{٢})^{٢}}$

(هـ ○ ن) ´($\frac{\pi}{٦}$) = هـ ´(ن($\frac{\pi}{٦}$)) × ن ´($\frac{\pi}{٦}$) = هـ ´($\frac{١}{٢}$) × ($\frac{٣}{٢}$) = ٠

ومنها

هـ ´($\frac{١}{٢}$) = ٠ ومنها هـ ´($\frac{١}{٢}$) = ٣ − ٣($\frac{١}{٢}$)^{٢} = ٠ ومنها ٤ = ± ٢

السؤال العاشر : لاحظ أن: ق(س) منفصل عدما س= ١ ، س=٢

ن ´(س) = { ٢س ، س ∈]١، ٢[؛ ٢س ، س ∈]٠، ١[؛ $\frac{-٢}{(س+١)^{٢}}$ ، س ∈]٢، ∞[} عند س = ٠ ، ١ ، ٢ غير موجودة .

السؤال الحادي عشر : ف = ٢(هـ$^{ن^{٢}}$ − هـ$^{-ن^{٢}}$)

ع = ٢(٢هـ$^{ن^{٢}}$ + ٢هـ$^{-ن^{٢}}$) ، ت = ٤(٢هـ$^{ن^{٢}}$ − ٢هـ$^{-ن^{٢}}$) = ٤ف

السؤال الثاني عشر : ن ´(س) = ٣جا^{٢}س جتاس + ٣جتا^{٢}س جاس

ن ´´(س) = −٣جا^{٣}س + ٦جاس جتا^{٢}س + ٣جتا^{٣}س − ٦جتا س جا^{٢}س

ن ´´($\frac{\pi}{٤}$) = −٣جا^{٣}$\frac{\pi}{٤}$ + ٦جا$\frac{\pi}{٤}$ جتا^{٢}$\frac{\pi}{٤}$ + ٣جتا^{٣}$\frac{\pi}{٤}$ − ٦جتا$\frac{\pi}{٤}$ جا^{٢}$\frac{\pi}{٤}$

ن ´´($\frac{\pi}{٤}$) = −٣ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ + ٦ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ + ٣ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ − ٦ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ = ٠

السؤال الثالث عشر : أ) ن ´(س) = ٣(س − ٢)^{٢}(٣ + ٢س)^{٤} + ٨(س − ٢)^{٣}(٣ + ٢س)^{٣}

ن ´(س) = (س − ٢)^{٢}(٣ + ٢س)^{٣}(٨(س − ٢) + ٣(٣ + ٢س)) = ٠

ن ´(س) = (س − ٢)^{٢}(٣ + ٢س)^{٣}(١٤س − ٧) = ٠

س = ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، س = $\frac{-٣}{٢}$ تهمل

ب) ن ´(س) = جتاس(١ + جتاس) − جا^{٢}س = ٢جتا^{٢}س + جتاس − ١ = ٠

وبحل المعادلة ينتج أن القيمة المطلوبة هي س = $\frac{\pi}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الرابع عشر : أ) $\frac{ص}{س} = \frac{(هـ^{س^٦} + ٦س هـ^{س^٦}) جا س - س هـ^{س^٦} جتا س}{جا^٢ س}$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{(١ + لـو_{هـ} س) جتا س + س جا س لـو_{هـ} س}{جتا^٢ س}$

السؤال الخامس عشر : $ف(ن) = ١(جتا٢ن + جا٢ن) = ٣$

$ع = ف'(ن) = ١(٢جتا٢ن - ٢جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = ١(-٤جتا٢ن - ٤جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = -٤١(جتا٢ن + جا٢ن) = -٤ \times ٣ = -١٢$ م/ث٢

السؤال السادس عشر : $ن'(س) = \frac{٢ - \frac{٥}{٢}}{١ - ٢} = \frac{١}{٢}$

$= ١ - \frac{١}{س^٢}$ ، $س = \pm \sqrt{٢}$

النقاط هي $(\sqrt{٢}، ن(\sqrt{٢}))$ ، $(-\sqrt{٢}، ن(-\sqrt{٢}))$.

حلول الوحدة الثانية/ تطبيقات التفاضل

تمارين (٢-١) صفحة ٦٥

السؤال الأول :

أ) $ن(س) = \sqrt{٤س - س^٢}$ على الفترة $[٠، ٤]$

نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[٠، ٤]$

ق(س) متصل على $[٠، ٤]$

$ن'(س) = \frac{١}{٢}(٤س - س^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times (٤ - ٢س)$ ، $س \in]٠، ٤[$

$\leftarrow ن'(س) = \frac{٢ - س}{\sqrt{٤س - س^٢}}$ ، ق قابل للاشتقاق في $]٠، ٤[$

ق(٠)= صفر ، ق(٤) = صفر $\Leftarrow$ ق(٠) = ق(٤)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ ∈]٠،٤[: ن′(جـ) = ٠

$$\text{جـ} = \frac{٢}{\sqrt{٤\text{جـ} - \text{جـ}^{٢}}} \Leftarrow ٠ = \text{جـ} - ٢ \quad \text{جـ} \in]٠،٤[$$

ب) ن(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ على الفترة $[-١،٣]$

الحل: ن(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ ، س ∈ $[-١،٣]$

ق(س) متصل على $[-١،٣]$ وقابل للاشتقاق على $]-١،٣[$ لأنه كثير حدود

ق(−١) = ق(٣) = صفر

إذن تحققت شروط نظرية رول على ق(س) في $[-١،٣]$ ومنها يوجد جـ ∈ $]-١،٣[$: ن′(جـ) = ٠

ن′(س) = ٢س − ٢

$$\text{جـ} = ١ \in]-١،٣[\Leftarrow ٠ = ٢\text{جـ} + ٢$$

ج) ن(س) = لـو$_{هـ}$ $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)$ ، س ∈ $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

ق(س) متصل في $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$ لانه اقتران لوغريتمي والفترة ضمن مجاله

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} + \frac{١}{\text{س}}} \times \left(١ + \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\right) \quad ، \text{ س} \in \left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$$

ق(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$

$$\text{ن}\left(\frac{١}{٢}\right) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{١}{٢} + ٢\right) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٥}{٢}\right)$$

$$\text{ن}(٢) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(٢ + \frac{١}{٢}\right) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\frac{٥}{٢}\right)$$

إذن $\text{ن}\left(\frac{١}{٢}\right) = \text{ن}(٢)$

تحققت شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

إذن E جـ ∈ $\left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$: ن′(جـ) = ٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\frac{١}{\frac{١}{جـ}+١}\times\left(\frac{١^{-}}{جـ^{٢}}+١\right)=٠$$

$\left[\frac{١}{٢}،٢\right[$ ∋ ١= صفر ومنها جـ $\left(\frac{جـ^{٢}-١}{(جـ)^{٢}}\right)=٠$ إذن $جـ^{٢}-١$ وعندما $\left(\frac{جـ^{٢}-١}{جـ^{٢}}\right)=٠$

لاحظ ان جـ = −١ ∉ $\left[\frac{١}{٢}،٢\right[$ (تهمل)

د) ث(س) =جا٢س + ٢جاس ، س ∋ $[٠،\frac{\pi}{٢}]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[٠،\frac{\pi}{٢}]$ ، ق(س) متصل على $[٠،\frac{\pi}{٢}]$

ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة $]٠،\frac{\pi}{٢}[$ بحيث ث′(س) = ٢جتا٢س + ٢جتاس

ق(٠) = صفر ، ث$(\frac{\pi}{٢})$=٢ ⇐ ق(٠) ≠ ث$(\frac{\pi}{٢})$

إذن لم تتحقق شروط نظرية رول ⇐ قد يوجد ج

ث′(جـ)= صفر ⇐٢جتا٢جـ + ٢جتاجـ = ٠

جتا٢جـ+جتاجـ = ٠ ⇐ ٢جتا^{٢}جـ+جتاجـ − ١ = ٠

∋ $(٢جتاجـ-١)(جتاجـ+١)=٠\Leftarrow جتاجـ=\frac{١}{٢}\Leftarrow جـ=\frac{\pi}{٣}$ ∋ $]٠،\frac{\pi}{٢}[$

او $(جتا\ جـ+١)=٠\Leftarrow جتاجـ=-١\Leftarrow جـ=\pi$ (تهمل)

السؤال الثاني:

أ) ث(س) = س ^{٣} −س − ١ ، س ∋ $[١^{-}،٢]$

ث(س) متصل على $[١^{-}،٢]$ ، كثير حدود

ث′(س) = ٣س ^{٢} − ١ ، س ∋ $]١^{-}،٢[$ ، ث(س) قابل للاشتقاق على الفترة

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في الفترة $[١^{-}،٢]$

$$\Leftarrow E\ جـ\ ∋\ ]١^{-}،٢[\ :ث′(جـ)=\frac{ث(٢)-ث(١^{-})}{٢-(١^{-})}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$٣جـ^{٢}-١=\frac{(-١)-٥}{٣}=\frac{٦}{٣}=٢$$

$$٣جـ^{٢}=٣\leftarrow جـ^{٢}=١\leftarrow جـ=١\ \in\ ]-١،٢[\ ،\ جـ=-١\ \text{(تهمل)}$$

ب) $ن(س)=\frac{٤}{س+٢}$ ، $س\in\ ]-١،٢[$

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $]-١،٢[$

ق(س) متصل على $]-١،٢[$

$ن'(س)=\frac{٤\times-١}{(س+٢)^{٢}}$ ، $س\in\ ]-١،٢[$

ق قابل للاشتقاق في $]-١،٢[$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة $\Leftarrow \exists جـ\in\ ]-١،٢[$ بحيث

$$ن'(جـ)=\frac{ن(٢)-ن(-١)}{٢-(-١)}=\frac{-٤}{(جـ+٢)^{٢}}=\frac{٤-١}{٣}$$

$$\frac{-٤}{(جـ+٢)^{٢}}=\frac{-٣}{٣}\Leftarrow -١=\frac{-٤}{(جـ+٢)^{٢}}\quad \text{ومنها}\quad ٤=(جـ+٢)^{٢}$$

$جـ+٢=\pm٢\Leftarrow$ جـ=صفر أو جـ= -٤ ترفض ومنها قيمة ج المطلوبة هي الصفر

ج) $ن(س)=\sqrt{س}+٢س$ ، $س\in[٤،٩]$

الحل : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[٤،٩]$

ق(س) متصل في $[٤،٩]$ ، وقابل للاشتقاق في $]٤،٩[$ حيث

$$ن'(س)=٢+\frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[٤،٩]$

$$\Leftarrow \exists جـ\in\ ]٤،٩[: ن'(جـ)=\frac{ن(٩)-ن(٤)}{٩-٤}$$

$$٢+\frac{١}{٢\sqrt{جـ}}=\frac{٢١-١٠}{٥}$$

$$٢+\frac{١}{٢\sqrt{جـ}}=\frac{١١}{٥}\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ}}=\frac{١}{٥}$$

$$\Leftarrow ٢\sqrt{جـ}=٥\Leftarrow جـ=\frac{٢٥}{٤}\ \in\ ]٤،٩[$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثالث:

$$ن(س) = \begin{cases} ا س^{٢} + ٢س & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٣} - ب س + ١٢ & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

إذن ق(س) متصل على [٠،٣] وقابل للاشتقاق على]٠،٣[

ق متصل على[٠،٣] $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} ن(س)$

$\Leftarrow ٤ا + ٤ = ٨ - ٢ب + ١٢ \Leftarrow ٤ا + ٢ب + ١٢ = ١٦$

$٢ا + ب = ٨$ -------

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢ا س + ٢ & ، \ ٠ < س \leq ٢ \\ ٣س^{٢} - ب & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

$ن'(٢^{+}) = ن'(٢^{-}) \Leftarrow ٤ا + ٢ = ١٢ - ب$ (١)

$٤ا + ب = ١٠$ -------- (٢) وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

$٤ا + ب = ١٠$

$٢ا + ب = ٨$

$ا = ٢ \Leftarrow ا = ١ \Leftarrow ٢ \times ١ + ب = ٨ \Leftarrow ب = ٦$

لإيجاد قيمة جـ : $ن'(جـ) = \frac{ن(٣) - ن(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٢١ - ٠}{٣} = ٧$

عندما $٠ < جـ \leq ٢$ ، $٢جـ + ٢ = ٧ \Leftarrow ٢جـ = ٥ \Leftarrow جـ = \frac{٥}{٢}$ ترفض

عندما $٢ < جـ < ٣$ ، $٣جـ^{٢} - ٦ = ٧ \Leftarrow ٣جـ^{٢} = ١٣ \Leftarrow جـ = \sqrt{\frac{١٣}{٣}}$ ∈]٠،٣[

السؤال الرابع:

$ن(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \in [ا،ب]$ ، $س > ٠$ أثبت باستخدام نظرية القيم المتوسطة ان $جـ^{٢} = ا ب$

البرهان : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [ا،ب]

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ق(س) متصل لأن س > ٠ ، ∀ س ∈ [أ،ب]

ن′(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$ ← ن قابل للاشتقاق على]أ،ب[لأن س > ٠

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة ومنها ∃ جـ ∈]أ،ب[بحيث ن′(جـ) = $\frac{ن(ب)-ن(أ)}{ب-أ}$

$$\frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{\frac{١}{ب}-\frac{١}{أ}}{ب-أ} \Leftarrow \frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{أ-ب}{أب(ب-أ)}$$

$$\frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{-١}{أب} \Leftarrow جـ^{٢} = أب$$ وهو المطلوب

السؤال الخامس :

البرهان : نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في [٠، π]

ق(س) متصل على [٠، π] وقابل للاشتقاق على]٠، π[بحيث ن′(س) = ٨جتا٢س ، س ∈]٠، π[

ق(٠) = صفر ، ن(π) = صفر ⇐ ن(٠) = ن(π)

إذن تحققت شروط نظرية رول ⇐ ∃ جـ ∈]٠، π[بحيث ن′(جـ) = صفر وهذا يعني ان للاقتران ق(س) مماساً أفقياً واحداً على الاقل في [٠، π] عند س = جـ

لإيجاد نقط التماس:

ن′(جـ) = ٠ ⇐ ٨جتا٢جـ = ٠ ⇐ جتا٢جـ = ٠

٢جـ = $\frac{\pi}{٢}$ ← جـ = $\frac{\pi}{٤}$ او ٢جـ = ٣$\frac{\pi}{٢}$ ← جـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

لأن القيم الأخرى جـ = ٠ ، جـ = π ترفض

إذن نقط التماس هي $\left(\frac{\pi}{٤}، ٤\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٤}، -٤\right)$

السؤال السادس:

ع(س) = ن ∘ هـ(س) ، س ∈ [أ،ب]، ن، هـ متصلين على الفترة [أ،ب] وقابلين للاشتقاق على الفترة]أ،ب[

هـ(أ) = ب، هـ(ب) = أ أثبت أنه ∃ جـ ∈]أ،ب[: ع(أ) − ع(ب) = ن′(جـ)(ب − أ)

البرهان:

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [أ،ب]

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ق(س) متصل على [أ،ب] وقابل للاشتقاق على]أ،ب[من المعطيات

تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow \text{E جـ} \ni]أ،ب[: ن´(جـ) = \frac{ن(أ) - ن(ب)}{أ - ب}$$

لكن ب = هـ(أ) ، أ = هـ(ب) إذن $ن'(جـ) = \frac{ن(هـ(أ)) - ن(هـ(ب))}{أ - ب}$

$$ن'(جـ) = \frac{ع(أ) - ع(ب)}{أ - ب}$$

$ن'(جـ)(ب - أ) = ع(أ) - ع(ب)$ وهو المطلوب

السؤال السابع:

البرهان : $ن(س) = س جتاس$ ، $س \ni \left[0، \frac{\pi}{2}\right]$

ن(س)متصل على $\left[0، \frac{\pi}{2}\right]$ وقابل للاشتقاق على $\left]0، \frac{\pi}{2}\right[$

ق(٠) =صفر ، $ن(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \times 0 = 0 \Leftarrow ن(0) = ن(\frac{\pi}{2})$

إذن تحققت شروط نظرية رول ومنها $\Leftarrow \text{E جـ} \ni \left]0، \frac{\pi}{2}\right[: ن'(جـ) = 0$

$ن'(س) = س \times -جاس + جتاس \times 1$

$ن'(س) = جتاس - س جاس$ ومنه $ن'(جـ) = جتاجـ - جـ جاجـ$

وبالتالي ظتا جـ = جـ القيمة التي تعينها النظرية هي عندما ظتا س = س

تمارين (٢-٢) صفحة ٧٠

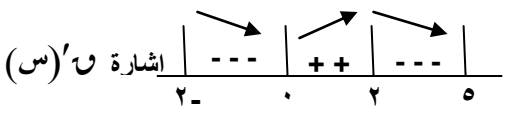
السؤال الاول:

أ) ق(س)= ٣س^{٢} - س^{٣} ، س ∈ [-٢، ٥]

الحل : ق(س) متصل على [-٢، ٥]

$ن'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$

صفر=٣س (٢- س)



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

س= صفر أو س =٢

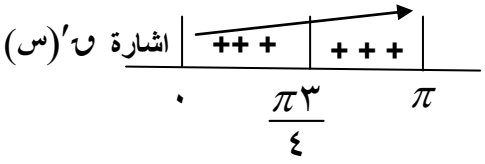
من اشارة ن َ (س) فإن ق(س) متناقص في [-٢، ٠] ، [٢، ٥] ومتزايد في [٠، ٢]

ب) ن َ (س) = س+جا٢س ، س ∈ [٠، π]

الحل: ن(س) متصل في [٠، π]

ن َ (س) = ١ + ٢جاس جتاس = ١+جا٢س ، س ∈]٠، π[

جا٢س = -١ ⇐ س = $\frac{٣\pi}{٤}$



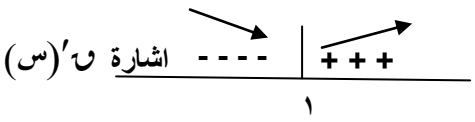
من اشارة ن َ (س)فإن

ن(س) متزايد في [٠، π]

ج) ن(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$

الحل: ن(س) = $\sqrt{(س-١)^{٢}}$ = |س-١| ، س ∈ ع

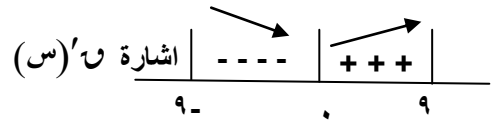
ن(س) = { س-١ ، س ≥ ١ ; -س+١ ، س < ١ } متصل على ح



ن َ (س) = { ١ ، س > ١ ; -١ ، س < ١ }

من اشارة ن َ (س) فإن ن(س) متناقص في]-∞، ١] ومتزايد في [١، ∞[

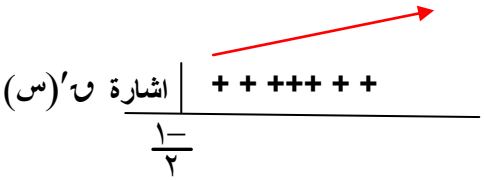
د) ن َ (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٩}$ ، س ∈]-٩، ٩[



الحل: ن َ (س) = ٠ ⇐ س = ٠

ن(س) متناقص في]-٩، ٠] ومتزايد في [٠، ٩[

السؤال الثاني:



الحل: ن َ (س) = $\frac{١}{س+١}$ - ٢

ن َ (س) = $\frac{١}{س+١}$ - ٢ = ٠

ومنها س = $\frac{-١}{٢}$

ومنها ق متزايد على الفترة [$\frac{-١}{٢}$، ∞[وبالتالي متزايد على ح$^{+}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

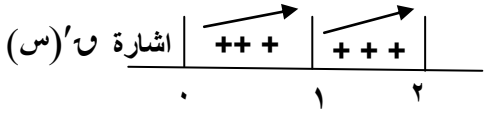
السؤال الثالث:

$$ن(س)=\begin{cases} س^{٣} & ،\ ٠\leq س<١ \\ س^{٢}-٢ & ،\ ١\leq س\leq ٢ \end{cases}$$

لاحظ ان ق غير متصل عند س=١ لان

$$نهـــا_{س\to ١^{-}} ن(س)=١\ ،\ نهـــا_{س\to ١^{+}} ن(س)=١-٢=-١$$ ، **النهاية غير موجودة**

وبالتالي $ن'(١)$ **غير موجودة**



$$ن'(س)=\begin{cases} ٣س^{٢} & ،\ ٠<س<١ \\ ٢س & ،\ ١<س<٢ \end{cases}$$

لجميع قيم س في المجال ، $ن'(س)\neq ٠$ **،** $ن'(س)$ **موجبة دائما**

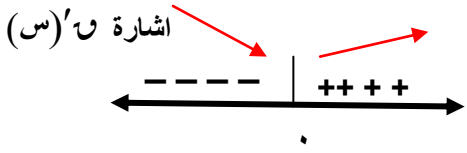
ن(س) متزايد في $[٠،١]$ **، و متزايد في** $[١،٢]$

السؤال الرابع :

$$ن'(س)=هـ(س)\ ،\ هـ'(س)=-ن(س)\ ،\ ك(س)=ن^{٢}(س)+هـ^{٢}(س)+س^{٢}$$

الحل : $ك'(س)=٢ن(س)ن'(س)+٢هـ(س)هـ'(س)+٢س$

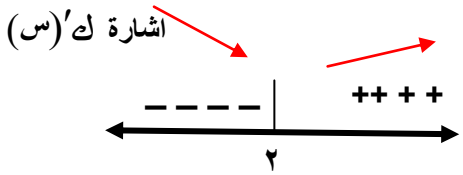
$=٢ن(س)\times هـ(س)-٢هـ(س)\times ن(س)+٢س=٠+٢س$



$ك'(س)=٢س$

ك(س) متزايد في $[٠،\infty[$ **ك(س) متناقص في** $]-\infty،٠]$

السؤال الخامس : $ك(س)=هـ(س^{٢}-٤س)$



ك متصل على ح لانه كثير حدود

$ك'(س)=هـ'(س^{٢}-٤س)\times(٢س-٤)$

$ك'(س)=٠\Leftarrow(٢س-٤)=٠\Leftarrow س=٢$ **لان** $ن'(س)\neq ٠$ **كون ق متزايد**

ك(س) متزايد $[٢،\infty[$ **، ك(س) متناقص عندما** $]-\infty،٢]$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السادس :

الحل : $ن(س)، هـ(س)$ كثيرا حدود في $[٤،٠]$ ← متصلين في $[٤،٠]$ وقابلين للاشتقاق في $]٤،٠[$

$ن(س)$ متناقص في مجاله اذن $ن'(س) < ٠،٠ \forall س \in]٤،٠[$

يقع منحنى $ن(س)$ في الربع الرابع اذن $ن(س) > ٠،٠ \forall س \in [٤،٠]$

$هـ(س)$ متزايد في مجاله اذن $هـ'(س) > ٠،٠ \forall س \in]٤،٠[$

يقع منحنى $هـ(س)$ في الربع الاول اذن $هـ(س) > ٠،٠ \forall س \in [٤،٠]$

لكن $(ن(س) \times هـ(س))' = ن(س) \times هـ'(س) + ن'(س) \times هـ(س)$

اشارة $(ن(س) \times هـ(س))' =$ **سالب × موجب + موجب × سالب = سالب**

اذن $ن(س) \times هـ(س)$ **متناقص في** $[٤،٠]$

السؤال السابع :

$ن(س) = جاس + جتاس \ ، \ س \in \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$

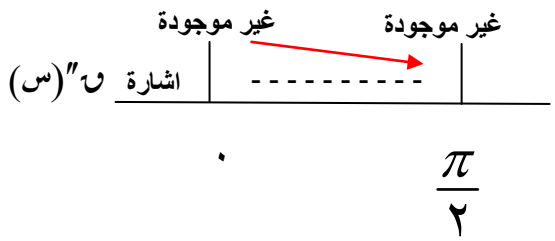
$ن'(س) = جتاس - جاس \ ، \ س \in \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right[$

ولمعرفة مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ن'(س)$ **نبحث في اشارة** $ن''(س)$

$ن''(س) = -جاس - جتاس = ٠$ أي أن

$ظاس = -١ \leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤} \notin \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right[$

$ن'(س)$ **متناقص في** $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right[$



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين (٢-٣) القيم القصوى صفحة ٨٠

السؤال الاول :

أ) $ن(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + \frac{١}{٣}$ ، س $\in [-٢، ٣]$

الحل: $ن'(س) = س^{٢} - ٢س$ ، س $\in [-٢، ٣]$

صفر $= س(س-٢) \leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

النقاط الحرجة هي

$(-٢، ن(-٢))$ ، $(٣، ن(٣))$ ، $(٠، ن(٠))$ ، $(٢، ن(٢))$

$(-٢، \frac{-١٩}{٣})$ ، $(٣، \frac{١}{٣})$ ، $(٠، \frac{١}{٣})$ ، $(-٢، ١)$

ب) $ن(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، س $\in [-٨، ٨]$

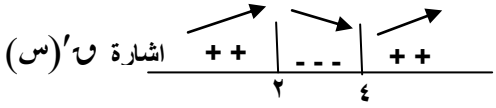
$ن'(س) = \frac{٢}{٣}س^{\frac{-١}{٣}}$ ، س $\neq ٠ \leftarrow$ س $\in [-٨، ٨] - \{٠\}$

$ن'(س) = \frac{٢}{٣ \times \sqrt[٣]{س}}$ ، س $\neq ٠$

النقط الحرجة هي (٠،٠) ، (-٨ ،٤) ، (٨، ٤)

السؤال الثاني :

أ) $ن(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$ ، س $\in$ ح



الحل: $ن'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$

صفر $= ٣(س^{٢} - ٦س + ٨) = ٣(س-٤)(س-٢)$

أي أن : س=٤ أو س=٢

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

ق(٢)= ٨-٩×٤+٢٤×٢=٨-٣٦+٤٨=٢٠ قيمة عظمى محلية

ق(٤)=٦٤-٩×١٦+٢٤×٤=٦٤-١٤٤+٩٦=١٦ قيمة صغرى محلية

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

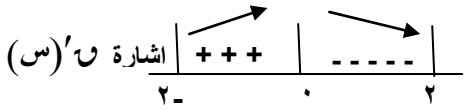
ب) $ن(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ المجال $٤ - س^{٢} \geq ٠ \leftarrow س \in [-٢، ٢]$

$ن'(س) = \frac{١}{٢}(٤ - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times -٢س = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$، $س \in [-٢، ٢]$

$ن'(س) =$صفر $\leftarrow$ س= صفر

$ن(-٢) = ن(٢) =$ صفر قيمة صغرى محلية

$ن(٠) = ٢$ قيمة عظمى محلية



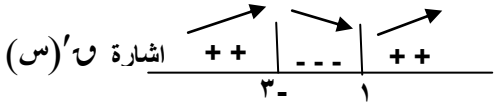
ج) $ن(س) = (س^{٢} - ٣)هـ^{س}$، $س \in ع$

الحل: $ن'(س) = (س^{٢} - ٣)هـ^{س} + ٢س هـ^{س}$، $س \in ع$

$(س^{٢} + ٢س - ٣)هـ^{س} = ٠ \leftarrow$ هـ$^{س} = ٠ \leftarrow$ لا يوجد

$\leftarrow$ هـ$^{س}(س + ٣)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = -٣$ ، $س = ١$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي



$ن(-٣) = ٦هـ^{-٣}$ قيمة عظمى محلية

$ن(١) = ٢هـ^{-}$ قيمة صغرى محلية

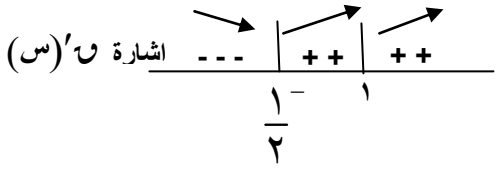
د) $ن(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$، $س \neq ١$

الحل: $ن(س) = س^{٢} + س + ١$، $س \neq ١$

$ن'(س) = ٢س + ١$

صفر= $ن'(س) \leftarrow س = -\frac{١}{٢}$

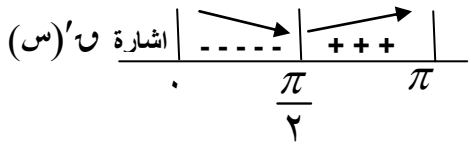
القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي



$ن(-\frac{١}{٢}) = \frac{-١}{٤} + \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٤}$ قيمة صغرى محلية

هـ) $ن(س) =$جتا$^{٢}س -$جا$^{٢}س$، $س \in [٠، \pi]$

الحل: $ن(س) =$جتا$٢س$، $س \in [٠، \pi]$



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$ن'(س) = -جا٢س \times ٢ = -٢جا٢س$ ، $س \in]٠، \pi[$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow -٢جا٢س = ٠ \Leftarrow ٢س = ٠ \leftarrow س = ٠ \notin]٠، \pi[$

$٢س = \pi \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ أو $٢س = ٢\pi \leftarrow س = \pi \notin]٠، \pi[$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

ق(٠) = ١ قيمة عظمى محلية

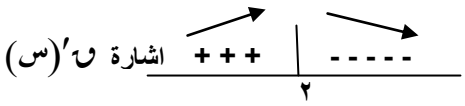
$ن(\pi) = ١$ قيمة عظمى محلية

$ن(\frac{\pi}{٢}) = -١$ قيمة صغرى محلية

و) $ن(س) = هـ^{-(س-٢)^٢}$ ، $س \in ع$

الحل: $ن'(س) = هـ^{-(س-٢)^٢} \times -٢(س-٢) \times ١ = -٢(س-٢)هـ^{-(س-٢)^٢}$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$



ق(٢) = ١ قيمة عظمى محلية

السؤال الثالث:

أ) $ن(س) = \begin{cases} س^٣ & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^٢ + ٤ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، $س \in [٠، ٣]$

الحل: $\lim_{س \to ٢^-} ن(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٢^+} ن(س) = ن(٢) = ٨$

إذن ق متصل في [٠، ٣]

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$ن'(س)$ غير موجودة عند س= ٠ ، ٢ ، ٣

$ن'(س)$ = ٠

عندما $٠ < س < ٢ \Leftarrow ٣س^٢ = ٠ \leftarrow س = ٠$ ترفض

عندما $٢ < س < ٣ \leftarrow ٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$ ترفض

القيم القصوى المحلية ق(٠) = صفر ، ق(٢) = ٨ ، ق(٣) = ١٣

ق(٠) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة) ، ق(٣)=١٣ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) ن(س) = هـ^س − هـ س ، س ∈ [٠، ٣]

الحل: ق متصل (حاصل طرح متصلين)

ن′(س) = هـ^س − هـ ، س ∈]٠، ٣[← ٠ = هـ^س − هـ ← س = ١

القيم القصوى المحلية ق(٠) = ١ ، ق(١) = ٠ ، ق(٣) = هـ^٣ − ٣هـ

ق(١) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة)

ق(٣)= هـ^٣ − ٣هـ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة) حسب نظرية القيم القصوى

ج) ف(س) = جتاس − ⅓ جتا^٣ س ، س ∈ [π/٢ ، ٣π/٢] ، ق متصل (حاصل طرح متصلين)

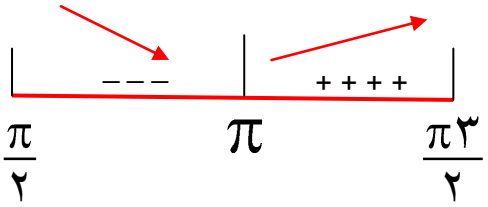
ف′(س) = − جاس + جتا^٢ س جاس = − جا^٣ س

ف′(س) = ٠ ⇐ جاس = ٠ ⇐ س = π

ف(π/٢) = جتا(π/٢) − ⅓ جتا^٣(π/٢) = ٠ عظمى مطلقة

ف(٣π/٢) = جتا(٣π/٢) − ⅓ جتا^٣(٣π/٢) = ٠ عظمى مطلقة

ف(π) = جتا(π) − ⅓ جتا^٣(π) = −⅔ صغرى مطلقة



السؤال الرابع :

ن(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + ٩س + ١ ، ق(١) عظمى محلية ، ق(٣) صغرى محلية

الحل: للاقتران نقط حرجة عند س=١ ، س=٣ ⇐ ن′(١) = ن′(٣) = ٠

ن′(س) = ٣أ س^٢ + ٢ب س + ٩

ن′(١) = ٣أ + ٢ب + ٩ ⇐ ٣أ + ٢ب + ٩ = صفر ---------- (١)

ن′(٣) = ٣ × ٣أ + ٢ب × ٣ + ٩

٢٧أ + ٦ب + ٩ = ٠

(٢)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$٠ = ١٩ + ٢ب + ٣$ ---------- وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على:

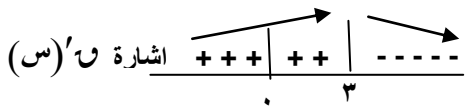
$-١٦ + ٦ = ٠ \leftarrow ١ = ا \Leftarrow ب = -٦$

السؤال الخامس:

الحل: $ن(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} - ٢٩$ متصل على ح لانه كثير حدود

$ن'(س) = ٢ ١ س^{٢} - ٤س^{٣}$

صفر $= ٤س^{٢}(٣ - س) \leftarrow س = ٠ ، س = ٣$



ق(٣) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لانها وحيدة

ق(٣) $= ٤ \times ٢٧ - ٨١ - ٢٩ = ١٠٨ - ١١٠ = -٢$

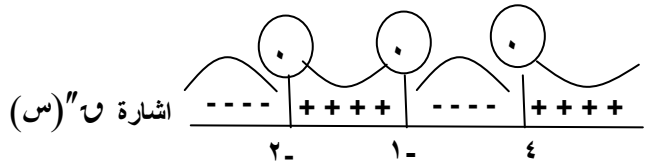
إذن $ن(س) \geq -٢ ، \forall س \in ح \Leftarrow ن(س)$سالب دائماً

تمارين (٢-٤) التقعر ونقط الانعطاف صفحة ٨٧

السؤال الأول :

أ) $ن''(س) = (س^{٢} - ٣س - ٤)(س + ٢)$

$٠ = (س + ١)(س - ٤)(س + ٢) \leftarrow س = -٢ ، -١ ، ٤$



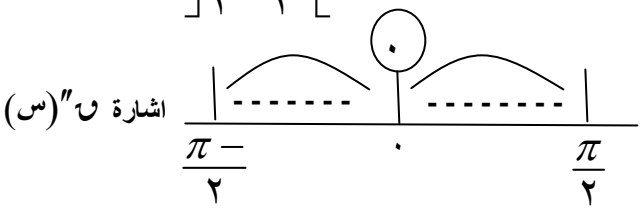
مجالات التقعر للاقتران ن(س) **هي :**

ن(س) مقعرا الى اعلى في $[-٢ ، -١]$ كذلك في $[٤ ، \infty[$ ،

ومقعرا الى اسفل في $]-\infty ، -٢[$ كذلك في $[-١ ، ٤]$

ب) $ن'(س) = جاس - س ، س \in \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$ ، $ن''(س) = جتاس - ١ ، س \in \left]-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

$٠ = جتاس - ١ \leftarrow جتاس = ١ \leftarrow س = ٠$

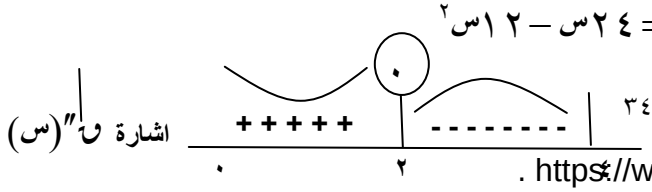


ن(س) مقعر الى اسفل في $\left]-\frac{\pi}{٢} ، ٠\right[$ كذلك في $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

ج) $ن(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} + س ، س \in [٠ ، ٤]$

$ن'(س) = ٢ ١ س^{٢} - ٤س^{٣} + ١ ، س \in]٠ ، ٤[$

$ن''(س) = ٤ ٢ س - ٢ ١ س^{٢} ، س \in]٠ ، ٤[\leftarrow ٤ ٢ س - ٢ ١ س^{٢} = ٠$

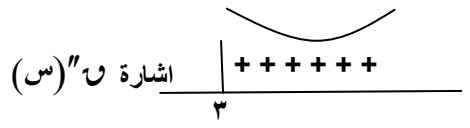


الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$\leftarrow$ س = ٢ ، س = ٠ $\notin$]٠،٤[

ن(س) مقعر الى اسفل في]٢،٤[و مقعر الى اعلى في]٠،٢[

د) ن(س) = (س − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، مجال ن(س) هو س $\geq$ ٣



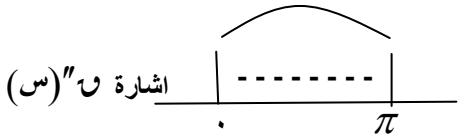
ن′(س) = $\frac{٣}{٢}$(س − ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ ، س $\in$]٣،∞[

ن″(س) = $\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢}$(س − ٣) $^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٤}$(س − ٣)$^{\frac{-١}{٢}}$ ، س $\in$]٣،∞[، ن″(س) موجبة دائما

و ن″(س)≠٠ ،∀س∈]٣،∞[ومنها ن(س) مقعر الى اعلى في]٣،∞[

هـ) ن(س)=جا$\frac{س}{٢}$ ، س $\in$ [٠،π] $\leftarrow$ ن′(س) = $\frac{١}{٢}$جتا$\frac{س}{٢}$ ، س $\in$]٠،π[

ن″(س) = $\frac{-١}{٤}$جا$\frac{س}{٢}$ ، س $\in$]٠،π[



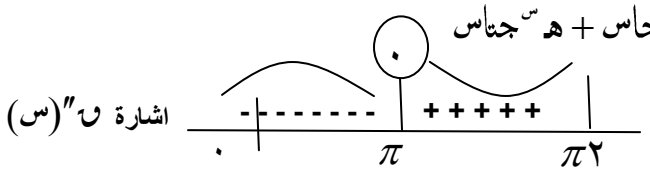
ن″(س) = ٠ $\leftarrow$ ٠ = $\frac{-١}{٤}$ جا$\frac{س}{٢}$

$\leftarrow$ $\frac{س}{٢}$= ٠ $\leftarrow$ س = ٠ او $\leftarrow$ π=$\frac{س}{٢}$ $\leftarrow$ س = ٢π ترفض فيكون ن(س) مقعر الى اسفل في]٠،π[

و) ن(س) = هـ^{س}جتاس ، س $\in$ [٠،٢π] $\leftarrow$ ن′(س) = −هـ^{س}جاس + هـ^{س}جتاس ، س $\in$]٠،٢π[

ن″(س) = −هـ^{س}جتاس + − هـ^{س}جاس + − هـ^{س}جاس + هـ^{س}جتاس

= −٢هـ^{س}جاس ، س $\in$]٠،٢π[



ن″(س) = ٠ $\leftarrow$ ٠ = −٢هـ^{س}جاس $\leftarrow$ س = π

ن(س) مقعر الى اسفل في]٠،π[و ن(س) مقعر الى اعلى في]π،٢π[

ز) ن(س) = $\left\{ \begin{matrix} \left[\frac{١}{٣}س - ١\right] & ، & ١ < س \leq ٣ \\ س^{٣} & ، & ٣ < س \leq ٥ \end{matrix} \right\}$ = $\left\{ \begin{matrix} -١ & ، & ١ < س < ٣ \\ ٠ & ، & س = ٣ \\ س^{٣} & ، & ٣ < س \leq ٥ \end{matrix} \right\}$

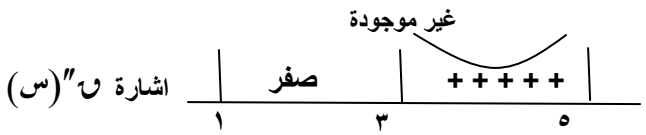
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$\lim_{س\to-٣} ن(س) = -١$ ، $\lim_{س\to+٣} ن(س) = ٢٧$ ، $ن(٣) = ٠ \leftarrow$ $ن(س)$ غير متصل عند س=٣

ومنها فان $ن'(٣)$ غير موجودة

$$ن'(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < س < ٣ \\ ٣س^{٢} & ، ٣ < س < ٥ \end{cases}$$

$$ن''(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < س < ٣ \\ ٦س & ، ٣ < س < ٥ \end{cases}$$



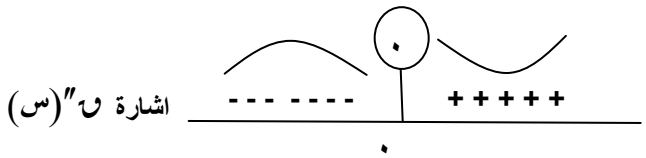
$ن''(س) = ٦س = ٠ \leftarrow س = ٠ \notin]٣،٥[$

$ن(س)$ اقتران ثابت في $[١،٣]$ ، و مقعر الى اعلى في $]٣،٥[$

السؤال الثاني : أ) $ن(س) = س^{٣} + س$ متصل على ع لانه كثير حدود

$ن'(س) = ٣س^{٢} + ١ \leftarrow ن''(س) = ٦س$

$ن''(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$

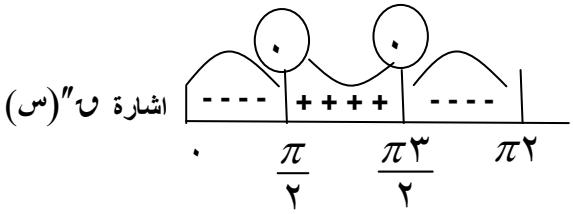


$(٠،٠) = (ن(٠)،٠)$ نقطة انعطاف لان الاقتران متصل عندها ويغير من مجال تقعره

ب) $ن(س) = جتاس$ متصل في $[٠،٢\pi]$

$ن'(س) = -جاس \leftarrow ن''(س) = -جتاس$ ، $س \in]٠،٢\pi[$

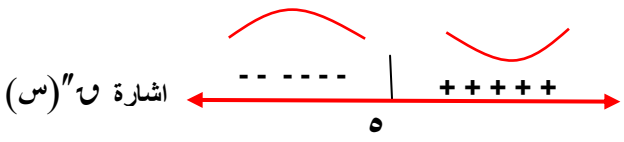
$ن''(س) = ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ ، $س = \frac{\pi ٣}{٢}$



نقاط الانعطاف هي : $\left(\frac{\pi}{٢}، ن(\frac{\pi}{٢})\right) = \left(٠، \frac{\pi}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{\pi ٣}{٢}، ن(\frac{\pi ٣}{٢})\right) = \left(٠، \frac{\pi ٣}{٢}\right)$

لأن الاقتران متصل عندها ويغير من اتجاه تقعره .

ج) $ن(س) = \sqrt[٣]{٥ - س}$ ، $\leftarrow$ ، $ن'(س) = \frac{١}{٣}(٥ - س)^{\frac{-٢}{٣}}$



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$ن''(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{-٢}{٣} (س-٥)^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{(س-٥)^{٥}}}$$

$$ن''(س) \neq ٠ \quad \forall س \in ع$$

اذن يوجد نقطة انعطاف عندما س = ٥ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره وهي (٥، ٠)

السؤال الثالث :

أ) $ن(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} \leftarrow ن'(س) = ٣س^{٢} + ١٢س \leftarrow ن''(س) = ٦س + ١٢$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow ٠ = ٣س(س+٤) \leftarrow س = ٠ ، س = -٤$

$ن''(٠) = ١٢ > ٠ \leftarrow ن(٠) = ٠$ **قيمة صغرى محلية**

$ن''(-٤) = -١٢ < ٠ \leftarrow ن(-٤) = ٣٢$ **قيمة عظمى محلية**

ب) $ن(س) = |س+٦| = \begin{cases} س+٦ & ، س \geq -٦ \\ -س-٦ & ، س < -٦ \end{cases}$ **متصل على ع**

$ن'(س) = \begin{cases} ١ & ، س > -٦ \\ -١ & ، س < -٦ \end{cases}$

اشارة ن'(س) : - - - - - | + + + + +

-٦

$ن'(-٦)$ **غير موجودة اذن** $ن''(-٦)$ **غير موجودة**

فشل اختبار المشتقة الثانية ومنها فإن $ن(-٦) = ٠$ **قيمة صغرى محلية وهي صغرى مطلقة**

السؤال الرابع:

$ن(س) = ا س^{٢} + س^{٣}$ **له عند س= -١ نقطة انعطاف** $\leftarrow ن''(-١) = ٠$

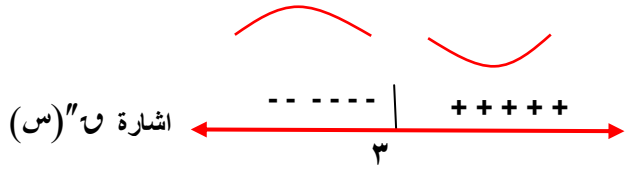
$ن'(س) = ٢ا س + ٣س^{٢}$

$ن''(س) = ٢ا + ٦س \Leftarrow ن''(-١) = -٢ا + ٦$

$٠ = -٢ا + ٦ \leftarrow ا = ٣$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس:



ن′(٠) = ن′(٦) = ٠

أ) من اشارة ن″(س)

ن(س) مقعر إلى أسفل في]-∞،٣[ومقعر إلى اعلى في]٣،∞[

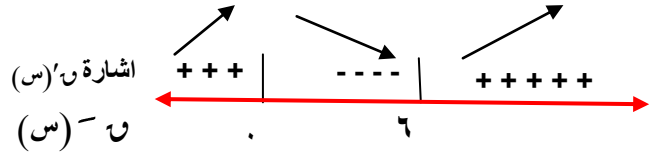
يوجد نقطة انعطاف عندما س=٣ لان ق متصل (المشتقة موجودة)

ويغير من مجال تقعره هي (٣،ن(٣)) .

ب) ن′(٠) = ٠ ، ن″(٠) > ٠ ⇐ ن(٠) قيمة عظمى محلية

ن′(٦) = ٠ ، ن″(٦) < ٠ ⇐ ن(٦) قيمة صغرى محلية

ج) ن(س) متزايد في]-∞،٠[



وأيضا في]٦،∞[ومتناقص في[٠،٦]

السؤال السادس:

المعطيات: ن(س) = أس ٣ + ب س ٢ + جس + ء : أ،ب،جـ،ء ∈ ح

منحنى ق يمر بالنقطة (١، ٥) ← ق(١)=٥

(٢، ١) نقطة انعطاف ← ق(٢)=١ ، ن″(٢) = ٠

معادلة المماس عند (٢، ١) هي ٣س+ص=٧ ← ن′(٢) = -٣

الحل: ن(١) = أ + ب + جـ + ء ⇐ ء + جـ + ب + أ = ٥ ---------- ١

ن(٢) = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + ء ⇐ ء + ٢جـ + ٤ب + ٨أ = ١ ---------- ٢

ن′(س) = ٣أس ٢ + ٢ب س + جـ

ن′(٢) = ١٢أ + ٤ب + جـ ⇐ -٣ = ١٢أ + ٤ب + جـ ---------- ٣

ن″(س) = ٦أس + ٢ب

ن″(٢) = ١٢أ + ٢ب ⇐ ٠ = ٦أ + ب ---------- ٤

بحل نظام المعادلات نحصل على

أ = -١ ، ب = ٦ ، جـ = -١٥ ، ء = ١٥

إذن ن(س) = -س ٣ + ٦س ٢ - ١٥س + ١٥

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السابع :

المعطيات: $ن(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} + ك(س)$

(١ ، ٢) نقطة انعطاف افقي للاقتران ق(س) $\Leftarrow ن(١) = ٢ ، ن'(١) = ٠ ، ن''(١) = ٠$

$ع(س) = ك^{٢}(س)$ **احسب** $ع''(١)$

الحل: $ن(١) = ١^{٤} - ٤ \times ١^{٣} + ك(س) \Leftarrow ٢ = ١ - ٤ + ك(١) \Leftarrow ك(١) = ٥$

$ن'(س) = ٤س^{٣} - ١٢س + ك'(س)$

$ن'(١) = ٤ - ١٢ + ك'(١) \Leftarrow ٠ = -٨ + ك'(١) \Leftarrow ك'(١) = ٨$

$ن''(س) = ١٢س^{٢} - ٢٤س + ك''(س)$

$ن''(١) = ١٢ - ٢٤ + ك''(س) \Leftarrow ٠ = -١٢ + ك''(١) \leftarrow ك''(١) = ١٢$

$ع(س) = ك^{٢}(س)$

$ع'(س) = ٢ك(س) \times ك'(س)$

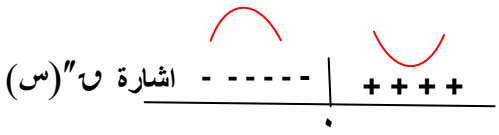
$ع''(س) = ٢ك(س) \times ك''(س) + ٢\left(ك'(س)\right)^{٢}$

$ع''(١) = ٢ك(١) \times ك''(١) + ٢\left(ك'(١)\right)^{٢}$

$= ٢ \times ٥ \times ١٢ + ٢(٨)^{٢} = ١٢٠ + ١٢٨ = ٢٤٨$

السؤال الثامن: المعطيات: ق(٠)=٠ ، $ن'(١) = ٠ ، ن'(-٢) = ٠$

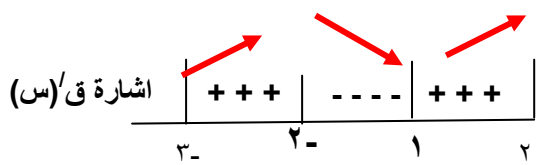
أ) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيمة قصوى هي س=١ ،س=-٢ بحيث ق(١) قيمة صغرى محلية و ق(-٢) قيمة عظمى محلية (ظهر ذلك من خلال اختبار المشتقة الثانية) اما ق(-٣) قيمة صغرى محلية ، ق(٢) قيمة عظمى محلية (يظهر ذلك من خلال إشارة المشتقة الاولي لان اختبار المشتقة الثانية يفشل).



ب) للاقتران نقطة انعطاف عند س=٠ هي (٠،٠) ، ق متصل عندها ويغير من مجال تقعره

ج) ق(س) متزايد $[-٣، -٢]$

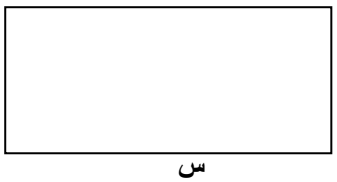
كذلك في $[١، ٢]$ **ومتناقص في** $[-٢، ١]$



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين (٢-٥) تطبيقات القيم القصوى صفحة ٩٣

السؤال الأول :



الحل : محيط المستطيل = الطولين + العرضين

٨٠=٢س+٢ص

٤٠=س+ص ومنها ص= ٤٠- س

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م= س× ص

م= س(٤٠ – س) **٠<س<٤٠**

م= ٤٠س- س^{٢}

$\frac{ء م}{ء س} = ٤٠ - ٢س$

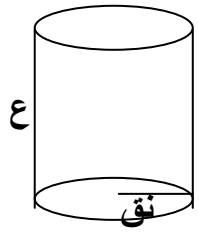
صفر = ٤٠- ٢س ومنها س= ٢٠

$\frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}} = -٢ \Leftarrow \left| \frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}} \right|_{س=٢٠} = -٢ < ٠$

إذن المساحة أكبر ما يمكن عندما س= ٢٠ م ومنها ص= ٢٠ م

ومنها مساحة اكبر حديقة ٤٠٠ متر مربع

السؤال الثاني :



الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$١٩٢\pi = نق^{٢} \times \pi \times ع \Leftarrow ع = \frac{١٩٢}{نق^{٢}}$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة (لأنها مفتوحة من أعلى)

$م = ٢ نق \pi \times ع + نق^{٢} \pi$

التكلفة ت = ٢ نق π ع +نق^{٢} π ×٣ل ، بفرض أن اسم^{٢} من الجوانب يكلّف ل إذن اسم^{٢} من القاعدة يكلف ٣ ل

$ت = ٢\pi \times نق \times ع + ٣\pi ل نق^{٢}$

$ت = ٢\pi \times نق \times \frac{١٩٢}{نق^{٢}} + ٣\pi ل نق^{٢}$

$ت = ٣٨٤\pi \times \frac{١}{نق} + ٣\pi ل \times نق^{٢}$ ، $نق > ٠$

$\frac{ء ت}{ء نق} = ٣٨٤\pi \times \frac{-١}{نق^{٢}} + ٣\pi ل \times ٢ نق = \frac{-٣٨٤\pi ل}{نق^{٢}} + ٦\pi ل نق$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\frac{-٣٨٤\ ل\ \pi}{نو_{هـ}^{٢}} + ٦\pi\ ل نو_{هـ} = ٠ \quad \text{ومنها ينتج أن} \quad \pi ٦ ل نو_{هـ} = \frac{٣٨٤\ ل\ \pi}{نو_{هـ}^{٢}}$$

$$٦٤ = نو_{هـ}^{٣} \Leftarrow نو_{هـ} = ٤ \text{سم}$$

$$\frac{د^{٢}ت}{د نو_{هـ}^{٢}} = -٣٨٤\pi \times \frac{-٢نو_{هـ}}{٤نو_{هـ}} + ٦\pi ل = \frac{٧٦٨\pi ل}{نو_{هـ}^{٣}} + ٦\pi ل$$

$$\left|\frac{د^{٢}ت}{د نو_{هـ}^{٢}}\right|_{نو_{هـ}=٢} = ١٩٢\pi < ٠ \Leftarrow \text{التكلفة أقل ما يمكن عندما نق= ٤سم}$$

$$ع = \frac{١٩٢}{نو_{هـ}^{٢}} = \frac{١٩٢}{١٦} = ١٢ \text{سم}$$

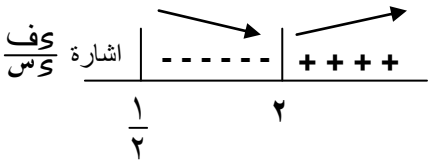
إذن ابعاد الاسطوانة الاقل تكلفة هي نصف قطر القاعدة=٤سم وارتفاعها ١٢سم

السؤال الثالث : $ص = ن(س) = \sqrt{٢س - ١}$

$$ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + (ص - ٠)^{٢} = (س - ٣)^{٢} + ص^{٢}$$

$$ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + ٢س - ١ \ ، \ س \leq \frac{١}{٢}$$

$$٢ف \frac{دف}{دس} = ٢(س - ٣) + ٢ \ ، \ س < \frac{١}{٢}$$



$$\frac{دف}{دس} = \frac{س - ٢}{ف}$$

$$\frac{دف}{دس} = ٠ \leftarrow ٠ = \frac{س - ٢}{ف} \leftarrow ٠ = س - ٢ \leftarrow س = ٢$$

المسافة اقل ما يمكن عندما $س = ٢ \leftarrow ص = \sqrt{٣} \leftarrow و = (٢، \sqrt{٣})$

السؤال الرابع :

$$ف = ا جتا \frac{\pi}{٤} ن + ب جا \frac{\pi}{٤} ن$$

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\frac{\left(أ جتا\frac{\pi}{٢}+ب جا\frac{\pi}{٢}\right)-\left(أ جتا(٠)+ب جا(٠)\right)}{٢}=١٠$$

$$٢٠=ب-أ$$ ---------- (١)

$$ع=\frac{ف}{ن}=أ\times -جا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}+ب\times جتا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}$$

$$ع=\frac{-أ\pi}{٤}\times -جا\frac{\pi}{٤}ن+\frac{ب\pi}{٤}جتا\frac{\pi}{٤}ن$$

سرعة الجسم اقل ما يمكن عند $ن=١\leftarrow ع'(١)=٠$

$$ع'(ن)=\frac{-أ\pi}{٤}\times جتا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}+\frac{ب\pi}{٤}\times -جا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}$$

$$ع'(ن)=-أ\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times جتا\frac{\pi}{٤}ن+-ب\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}جا\frac{\pi}{٤}ن$$

$$ع'(١)=-أ\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times جتا\frac{\pi}{٤}+-ب\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}جا\frac{\pi}{٤}$$

$$٠=-أ\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times\frac{١}{\sqrt{٢}}-ب\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

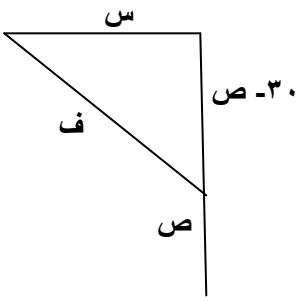
$$٠=-أ-ب\leftarrow أ=-ب$$ ---------- (٢)

نعوض قيمة أ من ٢ في ١

$$٢٠=ب-(-ب)\leftarrow ٢٠=٢ب\leftarrow ب=١٠$$

$$٢٠=ب-أ\leftarrow ٢٠=١٠-أ\leftarrow أ=-١٠$$

السؤال الخامس:



$$ف^{٢}=(٣٠-ص)^{٢}+س^{٢}$$

$$\frac{س}{ن}=١٠\leftarrow س=١٠ن\ ،\ \frac{ص}{ن}=٢٠\leftarrow ص=٢٠ن$$

$$ف^{٢}=(٣٠-٢٠ن)^{٢}+(١٠ن)^{٢}$$

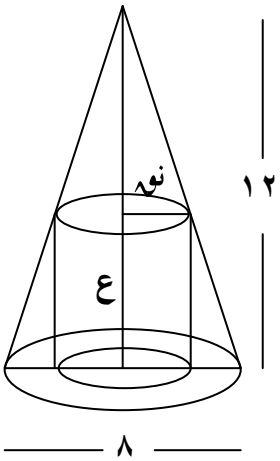
$$٢ف\frac{ف}{ن}=٢(٣٠-٢٠ن)\times -٢٠+٢(١٠ن)\times ١٠$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\frac{\text{ف}}{\text{ن}} = \frac{\text{ف}}{\text{ن}} \Leftarrow \text{ن} = 0 = \frac{600}{500} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ ساعة} = \text{ساعة و } 12 \text{ دقيقة}$$

المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة

السؤال السادس:



حجم الاسطوانة = $\pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}$

من تشابه المثلثات

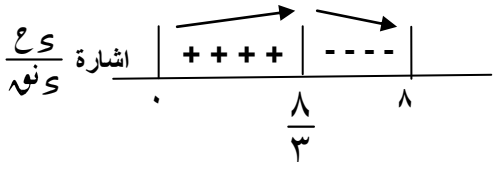
$$\frac{\text{نق}}{4} = \frac{\text{ع} - 12}{12} \quad \text{ومنها} \quad \text{نق} = \frac{\text{ع} - 12}{3}$$

$$\text{ع} = 12 - 3\text{نق}$$

$$\text{ح} = \pi \text{نق}^2 (12 - 3\text{نق}) \quad ، \quad 0 < \text{نق} < 4$$

$$\text{ح} = 12\pi \text{نق}^2 - 3\pi \text{نق}^3$$

$$\frac{\text{د ح}}{\text{د نق}} = 24\pi \text{نق} - 9\pi \text{نق}^2$$

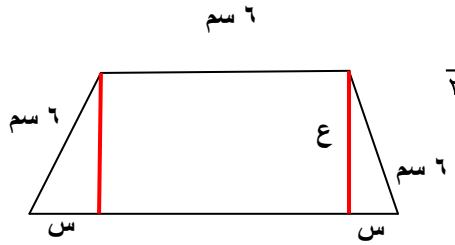


$$0 = 3\pi \text{نق}(8 - 3\text{نق}) \quad \text{ومنها} \quad \text{نق} = 0 \text{ ترفض أو } \text{نق} = \frac{8}{3}$$

إذن الحجم أكبر ما يمكن عندما $\text{نق} = \frac{8}{3}$ **فيكون أكبر حجم=** $\left(\frac{8}{3} \times 3 - 12\right)\left(\frac{64}{9}\right)\pi$

$$= (4)\left(\frac{64}{9}\right)\pi = \frac{256\pi}{9} \text{ سم}^3$$

السؤال السابع :



مساحة شبه المنحرف $= \frac{1}{2}(2\text{س} + 6 + 6)\text{ع}$ ، $\text{ع} = \sqrt{36 - \text{س}^2}$

$$\text{م} = (\text{س} + 6)\sqrt{36 - \text{س}^2}$$

$$\text{م}' = \sqrt{36 - \text{س}^2} + (\text{س} + 6) \times \frac{-2\text{س}}{2\sqrt{36 - \text{س}^2}}$$

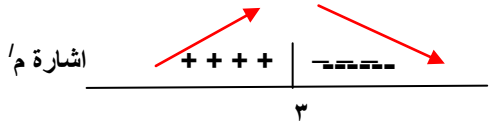
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

م ´ = $\frac{-٢س^{٢}-٦س+٣٦}{\sqrt{٣٦-س^{٢}}}$ = ٠

$-٢س^{٢}-٦س+٣٦$ = ٠

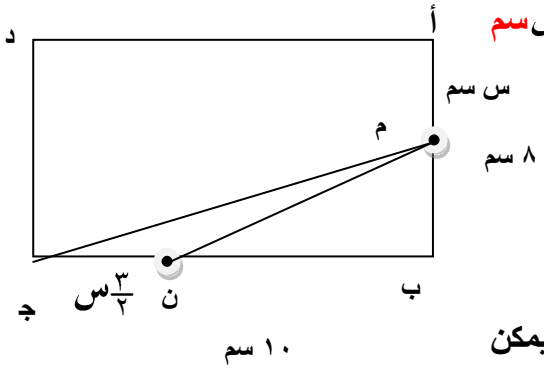
(س+٦)(س−٣) = ٠

س = −٦ ، ٣



عندما س= ٣ يوجد قيمة عظمى وتكون اكبر مساحة ممكنة = ٢٧ $\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

السؤال الثامن : نفرض أ م = س سم ، فيكون ب م = ٨−س سم



م = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٣}{٢}$س(٨−س))

م = $\frac{١}{٢}$ (١٢س−$\frac{٣}{٢}$$س^{٢}$)

م ´ = $\frac{١}{٢}$ (١٢−٣س) = ٠ ومنها س=٤

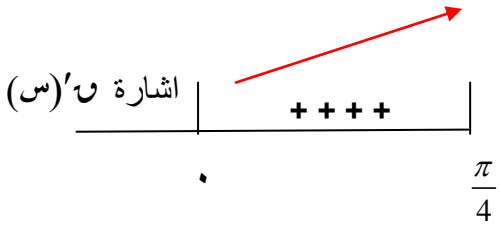
يوجد عندما س=٤ قيمة عظمى تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

تمارين عامة (الوحدة الثانية) صفحة ٩٤

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
رمز الإجابة	جـ	ب	ب	ب	د	جـ	ا	د	أ	جـ	د	جـ	جـ	أ

لسؤال الثاني :



ن´(س) = جتاس−جاس = ٠ ← س = $\frac{\pi}{٤}$

نلاحظ ان ن´(س) > ٠ ∀س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

ومنها ق(س) متزايد على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$

مكتبة الملتقى التربوي

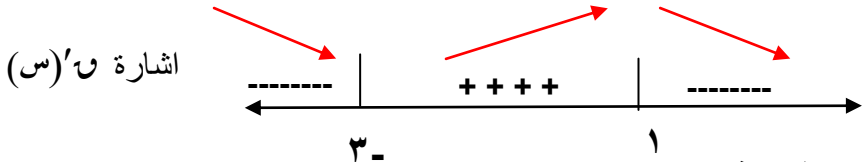
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثالث:

$$ن(س)=\frac{س+١}{س^{٢}+٣} \leftarrow ن'(س)=\frac{٢س\times(١+س)-٣+س^{٢}}{(٣+س^{٢})^{٢}}$$

$$ن'(س)=\frac{٢س\times(١+س)-٣+س^{٢}}{(٣+س^{٢})^{٢}}=\frac{-٢س^{٢}-٣س}{(٣+س^{٢})^{٢}}$$

$$ن'(س)=٠ \leftarrow (س-١)(٣-س^{-})=٠ \leftarrow س=١،س=-٣$$



ق متزايد في الفترة $[-٣،١]$ ومتناقص في $]-\infty،-٣[$ و $]١،\infty[$

$ن(-٣)=\frac{-١}{٦}$ قيمة صغرى محلية ، $ن(١)=\frac{١}{٢}$ قيمة عظمى محلية

السؤال الرابع :

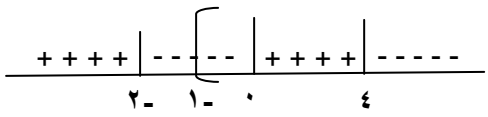
$ن(س)=س^{٢}-٣س-أ$ يحقق رول $[-١،أ]$ أوجد أ

ق يحقق رول ومنها ق متصل وقابل للاشتقاق على $[-١،أ]$ و $ن(-١)=ن(أ)$

$$ن(-١)=١+٣-أ=٤-أ$$

$$ن(أ)=أ^{٢}-٣أ-أ=أ^{٢}-٤أ$$

$$ن(-١)=ن(أ) \Leftarrow (٤-أ)=(أ^{٢}-٤أ)$$



$أ^{٢}-٣أ-٤=٠$ ومن أ=٤، أ=-١ (تهمل)

السؤال الخامس :

أ) $ن(س)=س^{٣}-٣س^{٢}-٩س+٥$ ، $[-٢،٦]$

$$ن'(س)=٣س^{٢}-٦س-٩$$

$$٠=س^{٢}-٢س-٣=(س-٣)(س+١)$$

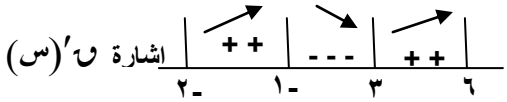
النقط الحرجة عند س= -٢ ، -١ ، ٣، ٦

ق(-٢)= -٨ -٣×٤-٩×-٢+٥= -٨ -١٢+١٨+٥ = ٣

ق(-١) = -١-٣+٩+٥=١٠

ق(٣)= ٢٧-٣×٩-٩×٣+٥=٢٧-٢٧+٥=-٢٢ قيمة صغرى مطلقة

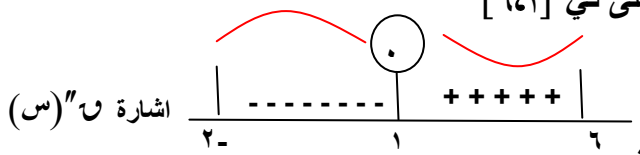
ق(٦)= ٦×٣٦-٣×٣٦-٩×٦+٥=١٠٨-٥٤+٥ =١١٣-٥٤=٥٩ قيمة عظمى مطلقة



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) $ن''(س) = ٦س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ١$

ق مقعر الى اسفل في $[-\infty، ١]$ **ومقعر الى اعلى في** $[١، ٦]$



ج) $(١، -٦)$ **نقطة انعطاف ،متصل ويغير من تقعره**

ظل زاوية الانعطاف = $ن'(١) = -٢$

السؤال السادس:

أ) اشارة $ن''(س)$

منحنى ق(س) مقعر الى اعلى في $[-\infty، -٢]$ **كذلك في** $[١، \infty[$ **ومقعر الى اسفل في** $[-٢، ١]$

ب) للاقتران نقاط انعطاف عند س= -٢ ، س=١ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره

السؤال السابع:

ق كثير حدود معرف على $[-٢، ٦]$ **يقع منحناه في الربع الاول ومنها ق> ٠ في** $[-٢، ٦]$

ق متناقص على مجاله ومنها $ن' < ٠$ **في** $]-٢، ٦[$

هـ(س) =١- س ومنها هـ < صفر في $[-٢، ٦]$

هـ' $= -١ < ٠$ **في** $]-٢، ٦[$ **بين أن ك = ق×هـ متناقص في** $]-٢، ٦[$

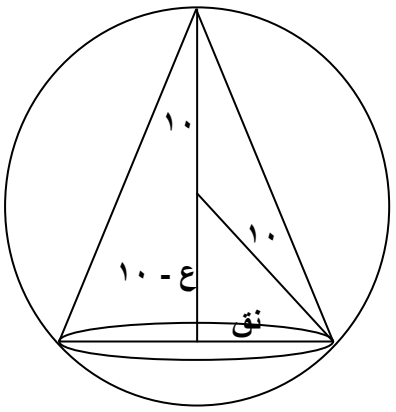
$(ن \times هـ)'(س) = ن(س).هـ'(س) - هـ(س).ن'(س)$

اشارة $(ن \times هـ)'(س) =$ **موجب×سالب – سالب ×سالب= سالب**

إذن ق×هـ متناقص في $[-٢، ٦]$

السؤال الثامن:

نق^{٢}+(ع-١٠)^{٢}=١٠٠ ومنها نق^{٢}=١٠٠- (ع^{٢}-٢٠ع+١٠٠) اذن نق^{٢}=٢٠ع – ع^{٢}



$ح = \frac{\pi}{٣}$نق^{٢}ع $= \frac{\pi}{٣}(٢٠ع - ع^{٢}) \times ع$

$\leftarrow ح = \frac{\pi}{٣}(٢٠ع^{٢} - ع^{٣})$

$\frac{ح}{ع} = \frac{\pi}{٣}(٤٠ع - ٣ع^{٢}) \leftarrow \frac{\pi}{٣}ع(٤٠ - ٣ع) = ٠$

ع = ٠ ترفض أو $ع = \frac{٤٠}{٣}$ **سم**

$\frac{ح^{٢}}{ع^{٢}} = \frac{\pi}{٣}(٤٠ - ٤٦)$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\left|\frac{د ع^{٢}}{د ع^{٢}}\right|_{ع=\frac{٤٠}{٣}} = \left(\frac{٤٠}{٣}\times ٦ - ٤٠\right)\frac{\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣}\times ٤٠^{-} < ٠$$

إذن الحجم اكبر ما يمكن عندما $ع = \frac{٤٠}{٣}$ **سم** $\text{نوه} = \frac{٢٠}{٣}$

السؤال التاسع:

$$ن(س) = \text{جتاس} - هـ(س) + ٣س \quad ،س \in \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$$

اثبت أن (ق+هـ)(س) متزايد في $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$(ن + هـ)(س) = \text{جتاس} + ٣س$$

$$(ن + هـ)'(س) = -\text{جاس} + ٣ > ٠ \quad \forall س \in \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right[$$

لأن $+\text{جاس} < ١ \Leftarrow -\text{جاس} + ٣ < ١^{-} + ٣ = ٢$

إذن ق+هـ متزايد في $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$

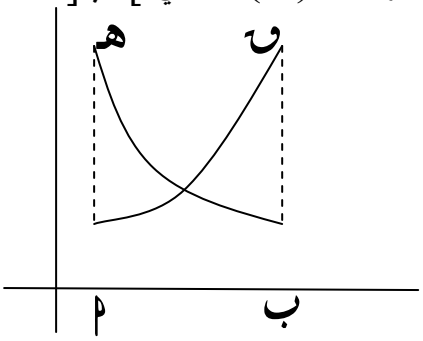
السؤال العاشر:

بين أن $\frac{ن'(س)}{هـ(س)}$ **اقتران متزايد على** [ا،ب]

ق> ٠ ، هـ > ٠ يقعان في الربع الاول

ق متزايد في [ا،ب] ن'(س)> ٠ في]ا،ب[، ق مقعر الى أعلى ومنها ن "(س)> ٠ في]ا،ب[

هـ متناقص في [ا،ب] **ومنها** هـ '(س)> ٠ في]ا،ب[



$$\left(\frac{ن'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{هـ(س) ن"(س) - ن'(س) هـ'(س)}{هـ^{٢}(س)}$$

$$\text{اشارة}\left(\frac{ن'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{(-\times+)-(+\times+)}{+} = \text{موجب}$$

إذن $\frac{ن'(س)}{هـ(س)}$ **متزايد** [ا،ب]

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الحادي عشر :

$ن(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء$

$ن(٠) = ٣ \Leftarrow ء = ٣$

$ن'(س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ$

$ن'(٢) = ٠ \Leftarrow ١٢ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ٣ = ٠ \Leftarrow جـ = -٣ - ١٢ أ$

$ن''(س) = ٦ أ س + ٢ ب$

$ن''(٠) = ٢ ب = ٠ \Leftarrow ب = ٠$

$ن(٠) = ٣ \Leftarrow ء = ٣$

$ن(٢) = -١ \Leftarrow ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء = -١$

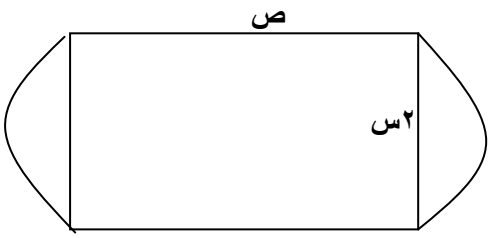
$٨ أ + ٢ جـ = -٤$

$ن'(٢) = ٠ \Leftarrow ١٢ أ + ٤ جـ + ٣ = ٠$

وبحل المعادلتين ينتج ان $أ = \frac{١}{٤}$ ، $جـ = -٣$

$ن(س) = \frac{١}{٤} س^{٣} - ٣ س + ٣$

السؤال الثاني عشر :



محيط الدائرة = $٢ نق = \pi$

$= \pi س٢$

محيط الشكل = $\pi س٢ + ص٢$

$\pi س٢ + ص٢ = ٤٠٠$

$\pi س + ص = ٢٠٠ \Leftarrow ص = ٢٠٠ - \pi س$

مساحة المستطيل = $ص + ٢س$

$م = ص + ٢س = ٢س (٢٠٠ - \pi س)$

$م = ٤٠٠ س - ٢ \pi س^{٢}$

$\frac{ء م}{ء س} = ٤٠٠ - ٤ \pi س \leftarrow \frac{ء م}{ء س} = ٠ \leftarrow س = \frac{١٠٠}{\pi} م$

$\left. \frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}} \right|_{س = \frac{١٠٠}{\pi}} = -٤ \pi < ٠ \leftarrow$ **المساحة اكبر ما يمكن عندما** $س = \frac{١٠٠}{\pi}$

الابعاد التي تجعل مساحة المستطيل اكبر ما يمكن هي

طول المستطيل = $٢٠٠ - \pi \times \frac{١٠٠}{\pi} = ١٠٠ م$ **و عرض المستطيل =** $\frac{٢٠٠}{\pi} م$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثالث عشر:

محيط المثلث الأول = س ومنه طول الضلع = $\frac{س}{٣}$ ، مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}س^{٢}$

محيط المثلث الثاني =١٨ – س ومنه طول الضلع = $\frac{١٨-س}{٣}$ ،

مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{٣}}{٣٦}(١٨-س)^{٢}$

م= مجموع مساحتيهما $= \frac{\sqrt{٣}}{٣٦}س^{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٣٦}(١٨-س)^{٢}$

$$م' = \frac{\sqrt{٣}}{١٨}س - \frac{\sqrt{٣}}{١٨}(١٨-س)$$
$$م' = ٠ \Leftarrow س=٩$$

$م'' = \frac{\sqrt{٣}}{٩} > ٠$ س=٩ قيمة صغرى محلية

محيط المثلث الأول =٩سم ومحيط المثلث الثاني=٩ سم وبالتالي طول ضلع كل من المثلثين =٣ سم

حلول الوحدة الثالثة / المصفوفات

تمارين (٣ – ١) صفحة ١٠٤

السؤال الأول:

أ) لتكن مصفوفة الانتاج هي $أ = \begin{bmatrix} ٨٠٠ & ٦٠٠ & ٧٥٠ \\ ٩٠٠ & ٤٥٠ & ٦٥٠ \end{bmatrix}$ وهي من الرتبة ٢×٣

ب) مجموع مدخلات العمود الثاني يمثل انتاج فرع طولكرم

السؤال الثاني:

١) المصفوفة أ من الرتبة ٤×٣

٢) $أ_{٣١} + أ_{١٢} = -٤ + ٦ = ٢$

٣) بما أن $(أ_{٢٣})^{٣} = ٢٧$ ، فإن $(-س)^{٣} = ٢٧$ ومنه $س = -٣$

السؤال الثالث:

بما أن $\begin{bmatrix} ٢ & س^{٢}+١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ س-١ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن :

$س^{٢} + ١ = ١٠$ ومنها $س = \pm ٣$ ، وكذلك $س - ١ = ٢$ ، ومنه $س = ٣$ ، أي $س = ٣$ فقط

.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الرابع

نفرض المصفوفة ب مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ فتكون مدخلاتها على

النحو $أ_{يهـ} = ٢^{ي-هـ}$ أي أن $ب = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

السؤال الخامس:

$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢^{-} \\ ٥ & ٣^{-} & ٦ \end{bmatrix}$ ، فتكون المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢ومدخلاتها على

النحو $أ_{يهـ} = ب_{هـي}$ لجميع قيم ي ، هـ

$$ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣- & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

تدريبات صفحة ١٠٨:

التدريب الأول: أ)

$$ب + ٢أ = \begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١٦ \\ ٤ & ١٧ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$٣أ - ٢ب = ٣\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ١١- & ٣ \\ ١- & ٨ & ١٠- \end{bmatrix}$$

ب) $جـ + ء = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٢- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix} = ٩ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} ٩ = ٩م_{٢}$

التدريب الثاني:

$$٢\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - ٣س = س + م_{٢}$$

ومنها $٢\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - م_{٢} = ٤س$ أي أن $٤س = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠- \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$س = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ١ & ١٠- \\ ١٠ & ٣ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

التدريب الثالث:

نفرض ان $أ = \begin{bmatrix} هـ & و \\ ع & ل \end{bmatrix}$ فيكون $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢هـ & ٢و \\ ٢ع & ٢ل \end{bmatrix}$

ومنها $هـ = -١، و = \frac{٥}{٢}$، $ع = \frac{-١}{٢}$، $ل = \frac{-٣}{٢}$ أي أن $أ = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & -١ \\ \frac{-٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$

التدريب الرابع: $س \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} + ص \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$ أي أن $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ص \\ ٥ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣س \end{bmatrix}$

ومنها $ص = ٣ ، س = -٦$

التدريب الخامس:

$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$ $\quad ٣س - ص = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix}$

$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$

$٦س - ٢ص = \begin{bmatrix} ٦ & -١٠ \\ ١٦ & -١٠ \end{bmatrix}$ وبحل المعادلتين ينتج $٧س = \begin{bmatrix} ٧ & -٧ \\ ١٤ & -٢١ \end{bmatrix}$ أي أن

$س = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$، $ص = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$

تمارين (٣ – ٢) صفحة ١١٣

السؤال الأول:

أ) $ب_{٤×٥}$ $\quad$ ب) $ب_{٥×٣}$

السؤال الثاني: أ) $أ . ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٠ & ٢٤ & ٢٧ \\ -٦ & -١٢ & ١١ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) جـ . ب =
$$\begin{bmatrix} ٣٠^- & ٦ & ١١^- \\ ٢٩ & ١٨ & ٣٥ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢^- & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤^- & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

ج) $أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٦ \\ ٩^- & ١٠^- \end{bmatrix}$

السؤال الثالث:

$$\begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ ٣٤^- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ + ٤س + ٢٥ & ١٨ + س ص + ٤٠ \\ ٦^- + ٤ص + ١٦^- & ٥ \end{bmatrix}$$

من تساوي مصفوفتين ينتج أن:

$٣ + ٤س + ٢٥ = ٢٠$ ، $٦^- + ٤ص + ١٦^- = ٣٤^-$

$٤س + ٢٨ = ٢٠$ ، $٤ص + ٢٢^- = ٣٤^-$

$٤س = ٨^-$ ، $٤ص = ١٢^-$

$س = ٢^-$ ، $ص = ٣^-$

السؤال الرابع: $س = [٢ \quad ٣ \quad ١-] \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$

$$س = [١١ \quad ١٣] = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} [٤٠ \quad ٣٥] = ٥[٨ \quad ٧] = ٥ص$$

السؤال الخامس: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$، فبيّن أن: $أ^{٢} - ب^{٢} \neq (أ-ب)(أ+ب)$

الحل:

$$أ^{٢} - ب^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} - ب^{٢} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ١٨ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١^- & ١ \\ ٩^- & ٣^- \end{bmatrix} \text{------(١)}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$(أ-ب)(أ+ب) = \left(\begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١^- & ٣ \\ ١^- & ١^- \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١٠^- & ٢^- \end{bmatrix} \text{-----(٢)}$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$أ^٢ - ب^٢ \neq (أ-ب)(أ+ب)$$

السؤال السادس:

$$\text{اذا كانت } أ^٢ = ب \Leftarrow \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س^٢ & ٠ \\ س+١ & ١ \end{bmatrix}$$

فإن $س^٢ = ١$ وبالتالي $س = \pm ١$

أو $س + ١ = ٥$ ومنها $س = ٤$

بالتعويض لا توجد أي قيمة لـ س تحقق أن: $أ^٢ = ب$

مجموعة الحل= $\varnothing$

السؤال السابع: $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣^- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١^- & ٣\frac{١}{٢} \end{bmatrix}$

أ) نفرض $ع = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

$$أ + ع = ب \cdot ع \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

ومنها

$$\begin{bmatrix} ٢ + س \\ ٣^- + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س \end{bmatrix}$$

ومن تساوي مصفوفتين:

$٢ + س = ٣س + ٢ص$ ، $س = ٣^- + ص$

$س + ص = ١$ ، $٣ = س + ص -$

وبحل المعادلتين بالجمع ينتج أن:

$٢ص = ٤ \Leftarrow ص = ٢$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

وبالتعويض س= −١ ومنها $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} = ء$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{-٣}{٧} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{-٣}{٧} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{-٣}{٧} \end{bmatrix} = ^{٣}جـ$$

ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{-٣}{٧} \end{bmatrix} = م$ جـ $= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & \frac{-٣}{٧} \end{bmatrix}$

تمارين (٣ – ٣) صفحة ١١٩

السؤال الأول :جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ): $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ ٢ & ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -٤\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix}$

$= -٢٨ - ٤٨ + ٧٦ = ٠$

ب) $\begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} = ١٦ + ١٦ = ٣٢$

حـ) $|٥م_{٣}| = ٥^{٣}|م_{٣}| = ١٢٥(١) = ١٢٥$

السؤال الثاني : بما أن $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & س & ٤ \\ ٣ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$

$$٢\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} - ١\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = س^{٢} + ١$$

$$س^{٢} + ١ = ٣س - ٧٢ + ٧ + ٦٠ - ٦س \Leftarrow$$

$$س^{٢} - ٣س - ١٨ = ٠$$

$$(س + ٣)(س - ٦) = ٠$$

$$س = ٦، -٣$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثالث

$$|أ^{٣}| = |أ|^{٣} \Leftarrow ٥٤ = |أ|٩ = |أ^{٣}|$$

$$|أ.ب| = |أ|.|ب| = ١٢^{-}$$

$$٦|ب| = ١٢^{-} \Leftarrow |ب| = ٢^{-}$$

$$|٢أ| + |٥ب| = ٤|أ| + ٢٥|ب| = ٢٤ + ٥٠^{-} = ٢٦^{-}$$

السؤال الرابع : إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ **، وكان** $|أ^{٣}| = ١٢٥$ **، فما قيمة/ قيم س؟**

الحل: $|أ^{٣}| = ١٢٥ \Leftarrow |أ|^{٣} = ١٢٥ \Leftarrow |أ| = ٥$

$|أ| = \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٢ & س \end{vmatrix} = س^{٢} - ٤ = ٥$ **أي أن** $س^{٢} = ٩$ **ومنها س =** ± ٣

السؤال الخامس : لمعرفة معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢،٣)، (٥، ٧).

نقوم بايجاد المحدد عن طريق مدخلات العمود الثالث:

$$\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + ١^{-}\begin{vmatrix} س & ص \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} س & ص \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$١١ - ٧س + ٥ص + ٢س - ٣ص = ٠$$

$$-٥س + ٢ص + ١١ = ٠ \Leftarrow$$

أو

$$\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow س\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} + ص^{-}\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ٠$$

$$-٥س + ٢ص + ١١ = ٠ \Leftarrow$$

السؤال السادس :

أ) أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ٤^{-} \\ ١ & ١٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤^{-} \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ **ضرب الصف الأول في (−٢) وإضافته للصف الثاني أي −٢ ص١+ص٢**

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفرا.

ج) $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$ (تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب بـ (−١))

السؤال السابع :

أ) $\begin{vmatrix} ب+جـ & ا & ١ \\ ا+ب & جـ & ١ \\ ا+جـ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$

بجمع العمودين الأول والثاني

$\xleftarrow{ع_٢ + ع_١}$ $\begin{vmatrix} ب+جـ+ا & ا & ١ \\ ا+ب+جـ & جـ & ١ \\ ا+جـ+ب & ب & ١ \end{vmatrix}$ وبأخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من ع١ ينتج أن:

$= ٠$ لأن به ع١ = ع٣ $\begin{vmatrix} ١ & ا & ١ \\ ١ & جـ & ١ \\ ١ & ب & ١ \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠$

بما أن المصفوفة هي مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي = ٥ × −٤ × ١٠ = −٢٠٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين(٣ – ٤) صفحة ١٢٥

السؤال الأول $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٨^- \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$: $|أ| = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨ \neq ٠$ لها نظير ضربي.

$ب = \begin{bmatrix} جاس & ٣ \\ ١^- & ١ \end{bmatrix}$ $|ب| = جاس + ٣ \neq ٠$ لها نظير ضربي.

$جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ $|جـ| = ٩ - ٩ = ٠$ ليس لها نظير ضربي.

$$د = \begin{bmatrix} ٢ & ١^- & ٣ \\ ٦ & ٣^- & ٩ \\ ٢ & ٧ & ١^- \end{bmatrix}$$

$$|د| = ٢(٣ - ٦٣) + ١(١٨ - ٦^-) + ٣(٤٢ + ٦) = ١٢٠^- = ٢٤ - ١٢٠ + ٢٤ = ٠$$

ليس لها نظير ضربي.

السؤال الثاني: $أ = \begin{bmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{bmatrix}$

بما أن أ مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا.

$$|أ| = \begin{vmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{vmatrix} = ٢ك^٢ - ٤ك = ٠$$

$$ك(٢ك - ٤) = ٠ \Leftarrow ك = ٠ ، ٢$$

وبما أن ب مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا.

$$|ب| = \begin{vmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$$

$$ك^٢ - ٤ = ٠ \Leftarrow ك = \pm ٢$$

السؤال الثالث: $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ،

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ \times ٤ - ٢ \times ٥ = ٢$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\begin{bmatrix} \frac{٥}{٢}- & \frac{٣}{٢} \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٣ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} \frac{١}{٢} = ^{-١}أ$$

$$\left| ^{-١}أ \right| = \begin{vmatrix} \frac{٥}{٢}- & \frac{٣}{٢} \\ ٢ & ١- \end{vmatrix} = ٣ - \frac{٥}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$(^{-١}أ)^{-١} = ٢ \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & ٢ \\ \frac{٣}{٢} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = أ$$

السؤال الرابع : $أ = \begin{bmatrix} س & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\left| ^{-١}أ \right| = \frac{١}{٥}$

$$|أ| = \frac{١}{\left| ^{-١}أ \right|} \Leftarrow |أ| = ٥$$

٣ س – ١٠ = ٥ ⇐ ٣ س = ١٥ ⇐ س = ٥

السؤال الخامس: $أ = \begin{bmatrix} س & ٣- \\ ١ & ص \end{bmatrix}$ ، $\left| ^{-١}أ \right| = \left| أ \right|$

بما أن: $|أ| = \frac{١}{\left| ^{-١}أ \right|} \Leftarrow |أ| \times \left| ^{-١}أ \right| = ١$

لكن $|أ| = \left| ^{-١}أ \right| \Leftarrow |أ| . |أ| = ١ \Leftarrow |أ|^{٢} = ١$

بما أن: $|أ| = س ص + ٣$ **إذن** $(س ص + ٣)^{٢} = ١$

إما $س ص + ٣ = ١ \Leftarrow س ص = ^{-}٢$

أو $س ص + ٣ = ^{-}١ \Leftarrow س ص = ^{-}٤$

السؤال السادس : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ جـ = ب$.

$$|أ| = ١ \times ٢ - ٤ \times ٣ = ^{-}١٠ \neq ٠$$

الحل:

$$^{-١}أ = \frac{١}{^{-}١٠} \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$$

أ جـ = ب ⇐ أ غير منفردة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$أ^{-1}.أ.ب = أ^{-1}.أ.جـ$$

$$ب.أ^{-1}.أ = جـ.أ^{-1}.أ$$

$$ب.أ^{-1}.أ = جـ$$

$$ب.أ^{-1} = جـ$$

$$ب.أ^{-1}.أ^{-1} = جـ.أ^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٤- \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٨ \\ ٥ & ٥- \end{bmatrix} = أ.ب^{-1} = جـ^{-1}$$

السؤال السابع : لإثبات أن $(ك أ)^{-1} = \frac{١}{ك}(أ^{-1})$.

نفرض أن: $أ = \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$ **ومنها** $ك أ = \begin{bmatrix} ك س & ك ص \\ ك ع & ك ل \end{bmatrix}$

$$\Leftarrow |ك أ| = ك^{٢}(س ل - ص ع) = ك^{٢}|أ|$$

$$(ك أ)^{-1} = \frac{١}{ك^{٢}|أ|}\begin{bmatrix} ك ل & -ك ص \\ -ك ع & ك س \end{bmatrix} = \frac{١}{ك|أ|}\begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{ك}(\frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix}) = \frac{١}{ك}(أ^{-1})$$

السؤال الثامن :بما أن $أ.ب = أ.جـ$ **، بما أن** $أ$ **غير منفردة ، فإن** $أ^{-1}$ **موجودة**

$$أ.ب = أ.جـ \Leftarrow أ^{-1}.أ.ب = أ^{-1}.أ.جـ$$

$$ب.أ = جـ.أ \Leftarrow ب = جـ$$

تمارين (٣ – ٥) صفحة ١٣١

السؤال الأول

أ) $س - ص = ٣$

$٢س + ص = ٦$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$|أ| = ١ \times ١ - ٢ \times ^{-}١ = ٣ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ^{-}٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ^{-}٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ٩ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

ومنها س= ٣، ص = ٠

ب) $س + ص = ٢$ ، $١٠س + ص = ١١$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{vmatrix} = -٩$$ **فتكون** $$أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{-١٠}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{-١٠}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{-١٠}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$$ **ومنه** $س = ١$ ، $ص = ١$

السؤال الثاني :

أ) $س - ص = ٥$

$س + ٢ص = ٢$

$$أ = \begin{bmatrix} ^{-}١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ١ + ٢ = ٣ \text{ ، } |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ^{-}١ & ٥ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ + ٢ = ١٢$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٥ - ٢ = ^{-}٣$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{١٢}{٣} = ٤ \text{ ، } ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{^{-}٣}{٣} = -١$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) س + ص = −٣ ،
٢ص + س = −٢

$$\begin{bmatrix} -٣ \\ -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ \quad ، \quad |أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \quad ، \quad |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ١$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٤}{١} = -٤ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١}{١} = ١$$

السؤال الثالث : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$ ،

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = -١ \quad ، \quad |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \quad ، \quad |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix} = -١$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٤}{-١} = ٤ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١}{-١} = ١$$

السؤال الرابع :

أ) ٣س − ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

المصفوفة الممتدة للنظام هي $\bar{أ} = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات على النحو الآتي:**

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٣}ص_{١}} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xleftarrow{-ص_{١}+ص_{٢}} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & \frac{٧}{٣} & \frac{١٤}{٣} \end{array}\right]$$

$$\xleftarrow{\frac{٣}{٧}ص_{٢}} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ١ & ٠ & ٢ \end{array}\right]$$

ومنها تكون ص = ٢ ، **وبالتعويض العكسي** $س - \frac{١}{٣}(٢) = \frac{١}{٣}$ ⇐ س = ١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) س − ص + ع = ٦ ، س + ٢ص + ع = ٣ ، ٢س + ص − ع = ٠

نكون المصفوفة الممتدة أ = $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right]$ ونجري العمليات الآتية:

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right]$ ← ص٢ + ص١ − ، ص٣ + ص١٢ − $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -١٢ \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٠ & -٩ \end{array}\right]$ ← ص٢ ١/٣ $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -١٢ \end{array}\right]$ ← ص٢ + ص٣ − ٣ $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٩ \end{array}\right]$

ومنها −٣ ع=−٩ ومنها ع= ٣

وبالتعويض العكسي: ص=−١

س+ ١+٣ =٦ ومنها س =٢

تمارين عامة(الوحدة الثالثة) صفحة ١٣٢

السؤال الأول (الموضوعي)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	جـ	جـ	جـ	ء	أ	ب	ء	ب	ء	أ

السؤال الثاني:

بما أن $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix}$ ، ٧ = فإن

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\begin{vmatrix} ١ & س \\ ٢ & ص \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٧ = ص - ٢س$$

$$\begin{vmatrix} ص & ١- \\ س & ٤- \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٧ = س- + ٤ص$$

وبحل المعادلتين معاً ينتج أن:

س=٥، ص=٣

السؤال الثالث : $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} = أ$

$$|أ| = ١٠ + ١٢- = ٢- \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢-}\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$$

أ) $$|أ|.أ^{-١} = ٢-.\frac{١}{٢-}\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$$

ب) $$|٣أ| = ٩|أ| = ٩ \times ٢- = ١٨-$$

جـ) $$(-٢أ)^{-١} = أ^{-١}\frac{١}{٢-} = \frac{١}{٢-}.\frac{١}{٢-}\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥-}{٤} & ١ \\ \frac{٣-}{٤} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع : **لإيجاد قيم س التي تجعل** $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = ٩-$.

فإن :

$$\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = ٩- \Leftarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & س \\ س & ٥ \end{vmatrix} + س-\begin{vmatrix} س & س \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} س & س \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٩-$$

$$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س(س) + ٢(س^{٢} - ١٢) = ٩-$$

$$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س^{٢} + ٢س^{٢} - ٢٤ = ٩-$$

إذن س = ٩-

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

وهذا يعني أن: س هي أي عدد حقيقي.

السؤال الخامس :

أ) لحل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

فإن :

$$|أ| = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & -١ \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٢} & -١ \\ \frac{١}{٢} & -١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

ومنها س= −٥، ص = ٤

ب) لحل المعادلة المصفوفية

$$[س \quad ص] \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -١ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ -١ & ٣ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٤ & -٣ & ١١ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

فإن:

$$[س \quad ص] \cdot \begin{bmatrix} ٣ & -٣ & ٩ \\ -٤ & ٠ & -٨ \end{bmatrix} = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$[٣س - ٤ص \quad -٣س \quad ٩س - ٨ص] = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$-٣س = -٣ \Leftarrow س = ١$$

$$٣س - ٤ص = ٤ \Leftarrow ٣ - ٤ص = ٤ \Leftarrow ص = \frac{-١}{٤}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السادس : $\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} = أ$ ، $\begin{bmatrix} ص & ٤ \\ ٤ & ٥^- \end{bmatrix} = أ^{-١}$

بما أن: $أ \cdot أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ص & ٤ \\ ٤ & ٥^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤س - ١٥ & ٠ \\ س ص + ١٢ & ٥ص + ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها ٤س – ١٥ = ١ ⇐ س = ٤

٥ ص + ١٦ = ١ ⇐ ص = – ٣

السؤال السابع : $أ \times ب = و$ ،

نفرض أن : كلا من المصفوفتين لها نظير ضربي وليكن $أ^{-١}$ ، $ب^{-١}$

بما أن : $أ \times ب = و \Leftarrow أ^{-١}(أ ب) = أ^{-١} و$

$و = و$

أي أن $(أ^{-١} أ) ب = ب = و$

كما أن $(أ ب) ب^{-١} = و ب^{-١} = و$ **ونستنتج أن** $أ = و$

وهذا يناقض الفرض بأن إحدى المصفوفتين على الأقل منفردة .

السؤال الثامن :

أ) $أ = \begin{bmatrix} ن & ٥ \\ ك & ٣^- \end{bmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٥ & ن \\ ٣ & ك \end{vmatrix} = |أ_ص|$ ، $\begin{vmatrix} ٥ & ٥ \\ ٣ & ١^- \end{vmatrix} = |أ_س| \Leftarrow$

ومنها $ن = ٦$ ، $ك = ٢ \Leftarrow |أ| = \begin{vmatrix} ٦ & ٦ \\ ٢ & ١^- \end{vmatrix} = ٦ + ٢ = ٨$

ب) $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{٨}{٨} = ١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال التاسع :

$$\left|أ^{-١}\right| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٣ = -١ \Leftarrow \quad أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ & ١١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$\left|أ^{٢}\right| = ٣٢ - ٣٣ = -١ \Leftarrow \quad (أ^{٢})^{-١} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١١ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$(أ^{-١})^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١١ & ٤ \end{bmatrix} \quad \text{ألاحظ أن: } (أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$$

السؤال العاشر : لحل المعادلتين بطريقة كريمر : ٣س+ ٢ ص= -٤ ، ٥ ص + س = ٣(نرتب أولا)

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ٢ - ١٥ = -١٣$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = -٢٠ - ٦ = -٢٦ \qquad س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٢٦}{١٣} = -٢$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ + ٤ = ١٣ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٣}{١٣} = ١$$

السؤال الحادي عشر : لحل النظام الآتي بطريقة جاوس :

$$س - ص + ٤ع = ٩ \quad ، \quad ٢س + ٣ص + ٢ع = ٢ \quad ، \quad ٣ص + س - ع = -٤$$

نكون المصفوفة ال ممتدة $\tilde{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٤ & ٩ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ & -٤ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات الآتية:**

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\begin{bmatrix} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ -١٦ & -٦ & ٥ & ٠ \\ -١٣ & -٥ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} -٢ص_١ + ص_٢ \\ -ص_١ + ص_٣ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٣ & ٢ \\ -٤ & -١ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ \frac{-١٦}{٥} & \frac{-٦}{٥} & ١ & ٠ \\ -١٣ & -٥ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} \leftarrow \frac{١}{٥} ص_٢$$

$$\begin{bmatrix} \frac{٢٩}{٥} & \frac{١٤}{٥} & ٠ & ١ \\ \frac{-١٦}{٥} & \frac{-٦}{٥} & ١ & ٠ \\ \frac{-١}{٥} & \frac{-١}{٥} & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} ص_٢ + ص_١ \\ -٤ص_٢ + ص_٣ \end{matrix}$$

ومنها $\frac{-١}{٥} ع = \frac{-١}{٥}$ ومنها ع = ١

وبالتعويض العكسي: ص + $\frac{-٦}{٥}$ ع = $\frac{-١٦}{٥}$ ⇐ ص = −٢

س + $\frac{١٤}{٥}$ ع = $\frac{٢٩}{٥}$ ⇐ س = ٣

السؤال الثاني عشر :

$$\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢} س \end{vmatrix} = -٥٠$$

حسب خصائص المحددات فإن محدد المصفوفة القطرية العلوية يساوي حاصل ضرب مدخلات القطر الرئيسي أي أن $س \times -٤ \times \frac{١}{٢} س = -٥٠$ **ومنها** $س^{٢} = ٢٥$ **أي أن** $س = \pm ٥$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

اجابات الفصل الثاني

الفرع العلمي والصناعي

مكتبة الملتقى التربوي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

حلول الوحدة الرابعة

تمارين ومسائل (٤-١) صفحة ١٤٢

السؤال الاول

ا) $م(س) = \frac{١}{٣}(٢ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ ، $ن(س) = س\sqrt{٢ + س^{٢}}$

$م'(س) = \frac{١}{٢}(٢ + س^{٢})^{\frac{١}{٢}}(٢س) = س\sqrt{٢ + س^{٢}} = ن(س)$

أي أن $م(س)$ اقتران أصلي للاقتران $ن(س)$

ب) $م(س) = قا^{٣}س$ ، $ن(س) = ٣قا^{٢}س ظاس$

$م'(س) = ٣قا^{٢}س قاس ظاس = ٣قا^{٣}س ظاس \neq ن(س)$

أي أن $م(س)$ ليس اقترانا أصليا للاقتران $ن(س)$

ج) $م(س) = لـو_{هـ}(س^{٣} + هـ^{٣س})$ ، $ن(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}}$

$م'(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}} = ن(س)$

أي أن $م(س)$ اقتران أصلي للاقتران $ن(س)$

السؤال الثاني:

بما أن $م(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين أصليين فإن $م(٣) - هـ(٣) = جـ$

ومنها $م(٣) - هـ(٣) = ٣ - ٤ = -١ = جـ$

$هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ٦ - ١ = س^{٢} - ٤س + ٧$

$هـ(١) = ١ - ٤ + ٧ = ٤$

السؤال الثالث:

$(٣م - هـ)'(٤) = ٣م'(٤) - هـ'(٤) = ٣ \times ٧ - ٧ = ١٤$

لأن $م'(٤) = هـ'(٤) = ن(٤) = ٧$ حيث $ن(س)$ متصل عند س = ٤

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الرابع:

بما أن $م(س)$ **هو احد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل** $ن(س)$ **فإن** $م'(س) = ن(س)$

$م'(س) = ٢(قا^{٢}س - قاس ظاس)$

$= ٢(قا^{٢}س - قاس ظاس) = ٢(\frac{١}{جتا^{٢}س} - \frac{جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{جتا^{٢}س})$

$= ٢(\frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{١-جا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{(١+جاس)(١-جاس)}) = \frac{٢}{(١+جاس)}$ **ومنها** $ن(س)$ **يكون** $ا = ٢$

السؤال الخامس:

$\int هـ(س)\,دس = \int ا س^{٣} + جس$ **وباشتقاق الطرفين ينتج** $هـ(س) = ٣ا س^{٢} + ج$

بما أن $هـ(-١) = ٤$ **فإن** $٣ا + ج = ٤$ **.....(١)**

كذلك $هـ'(س) = ٦ا س$ ، **وبما أن** $هـ'(٢) = ٢٤$ **فإن** $١٢ ا = ٢٤$ **.....(٢)**

وبحل المعادلتين ينتج أن $ا = ٢$ ، $ج = -٢$

تمارين ومسائل (٤-٢) صفحة ١٤٦

السؤال الأول

أ) $\int ٨\,دس = ٨س + ج$

ب) $\int (٧س^{٢} - ٤س + ٣س^{-٤})\,دس = \int (٧س^{٢} - ٤س + \frac{٣}{س^{٤}})\,دس$

$= \frac{٧}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} + \frac{-١}{٣س^{٣}} + ج$

ج) $\int (٣ + س)\sqrt{س}\,دس = \int (٣س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{٣}{٢}})\,دس = ٢س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

د) $\int (٥س + قاس ظاس)\,دس = \frac{٥}{٢}س^{٢} + قاس + ج$

هـ) $\int \frac{س - ١}{\sqrt{٣س} - ١}\,دس = \int \frac{(\sqrt{٣س} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١)}{\sqrt{٣س} - ١}\,دس$

$= \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + س + ج$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

و) $\int \frac{٢س^{٣}+٥س^{٢}-١}{س^{٢}}$ ءس $= \int (٢س+٥-س^{-٢})$ ءس $= س^{٢}+٥س+\frac{١}{س}+$جـ

ز) $\int \frac{١}{جتا^{٢}س}$ ءس $= \int قا^{٢}س$ ءس $=$ظاس$+$جـ

حـ) $\int (٥هـ^{س}+\frac{٢}{س})$ ءس $= \int (٥هـ^{س}+٢$لـو$_{هـ}|س|)$ ءس $=٥هـ^{س}+٢$لـو$_{هـ}|س|+$جـ

السؤال الثاني:

بتكامل الطرفين $\int$ ن´(س) $+ هـ^{س})$ ءس $= \int$ جتاس ءس

ومنها ن(س) $+ هـ^{س} =$ جاس $+$جـ **أي أن** ن(س) $=$ جاس $- هـ^{س}+$جـ

وبما أن ن(٠) $=-١$ **فإن** جـ $=٠$ **ومنها** ن(س) $=$ جاس $- هـ^{س}$

السؤال الثالث:

$\int$ ن(س) ءس $=$جاس $-$جتاس $+٢$ **وباشتقاق الطرفين ينتج أن:**

ن(س) $=$جتاس $+$جاس **ومنها** ن´(س) $=-$جاس $+$جتاس

ن($\frac{\pi}{٢}$) $-$ ن´($\frac{\pi}{٢}$) $=$ (جتا$\frac{\pi}{٢}+$جا$\frac{\pi}{٢}$) $-(-$جا$\frac{\pi}{٢}+$جتا$\frac{\pi}{٢}) = ٢$ **وهو المطلوب.**

السؤال الرابع:

بما أن $\int$ ن´(س) $+س^{٢})$ ءس $=٢س^{٣}+$جـس$^{٢}+٢$ **فإن**

ن(س) $+\frac{١}{٣}س^{٣}+$جـ$_{١}=٢س^{٣}+$جـس$^{٢}+٢$

ن(س) $=\frac{٥}{٣}س^{٣}+$جـس$^{٢}+٢-$جـ$_{١}$

ن´(س) $=٥س^{٢}+٢$جـس

ن´(١) $=٥+٢$جـ $=٤$ **ومنها** جـ $=\frac{-١}{٢}$

ن(س) $=\frac{٥}{٣}س^{٣}-\frac{١}{٢}س^{٢}+٢-$جـ$_{١}$

لكن ن(٢) $=\frac{٤٠}{٣}-٢+٢-$جـ$_{١}=٦$ **ومنها** جـ$_{١}=\frac{٢٢}{٣}$

فيكون ن(س) $=\frac{٥}{٣}س^{٣}-\frac{١}{٢}س^{٢}-\frac{١٦}{٣}$ ، ن(١-) $=\frac{-٥}{٣}-\frac{١}{٢}-\frac{١٦}{٣}=\frac{-١٥}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين ومسائل (٤-٣) صفحة ١٥١

السؤال الأول:

ميل المماس = $ن'(س) = س(٣س - ٢) = ٣س^{٢} - ٢س$

$\int ن'(س) ؤس = \int (٣س^{٢} - ٢س) ؤس$ **ومنها**

$ن(س) = س^{٣} - س^{٢} + جـ$ ، **لكن** $ن(٢) = ٥$ **فيكون** $٥ = ٨ - ٤ + جـ$ **ومنها** $جـ = ١$

فيصبح $ن(س) = س^{٣} - س^{٢} + ١$

السؤال الثاني:

بما أن $س + ص = ٤$ **هو مماس لمنحنى** $ن(س)$ **عندما** $س = ١$ **فإن** $ن'(١) = -١$ **(ميل المماس)**

أي أن $ا - ٣ = -١$ **ومنها** $ا = ٢$ **فيصبح** $هـ'(س) = ٢س - ٣س^{٢}$

$\int هـ'(س) = \int (٢س - ٣س^{٢}) ؤس$ **ومنها** $هـ(س) = س^{٢} - س^{٣} + جـ$

لكن نقطة التماس هي $(١، ٣)$ **ومنها** $هـ(س) = س^{٢} - س^{٣} + ٣$

السؤال الثالث:

ميل المماس $= ن'(س) = ٢\sqrt{ا}$ س

$\int ن'(س) ؤس = \int ٢\sqrt{ا} س ؤس$ **ومنها** $ن(س) = \sqrt{ا} س^{٢} + جـ$

وبما أن $ن(٠) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$ ، **كما أن** $ن(١) = ٢$ **فإن** $٢ = \sqrt{ا}$ **أي أن** $ا = ٤$

فيصبح $ن(س) = ٢س^{٢}$

السؤال الرابع:

$ن'(س) = \int ن''(س) ؤس = \int جتاس ؤس = جاس + جـ$

وبما أن $ن'(\pi) = ٢$ **فإن** $جـ = ٢$ **وتصبح** $ن'(س) = جاس + ٢$

كما أن $ن(س) = \int ن'(س) ؤس = \int (جاس + ٢) ؤس = -جتاس + ٢س + ء$

لكن $ن(\pi) = ١$ **فيكون** $ن(\pi) = ١ + ٢\pi + ء = ١$ **ومنها** $ء = -٢\pi$ **فيكون**

$ن(س) = -جتاس + ٢س - ٢\pi$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس:

$ت = \frac{ع}{ن ع} = ن$ ومنها $\int ع = \int ن ع ن$

أي أن $ع = \frac{1}{2} ن^{2} + جـ$ وبما أن سرعته الابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإن $جـ = ٣$

فيكون $ع = \frac{1}{2} ن^{2} + ٣$، ويكون $ع(٥) = \frac{٢٥}{٢} + ٣ = \frac{٣١}{٢}$ م/ث

كما أن $ع = \frac{ف}{ن ع} = \frac{1}{2} ن^{2} + ٣$ ومنها $ف = \int (\frac{1}{2} ن^{2} + ٣) ع ن$ وبتكامل الطرفين ينتج:

$ف = \frac{1}{6} ن^{3} + ٣ ن + ع$ وبما أن $ف(٠) = ٠$ فيكون $ف = \frac{1}{6} ن^{3} + ٣ ن$

$ف(٥) = \frac{١٢٥}{٦} + ١٥ = \frac{٢١٥}{٦}$ مترا

السؤال السادس:

نفرض حجم الوعاء $ع$ فيكون $\frac{ع}{ن ع} = ٢ ن + ٥٠$ ومنها $\int ع = \int (٢ ن + ٥٠) ع ن$ وينتج أن $ع = ن^{2} + ٥٠ ن + جـ$

وبما أنه فارغ فإن $ع(٠) = ٠$ فيكون $ع = ن^{2} + ٥٠ ن$ ولمعرفة الزمن اللازم لملء الوعاء يكون $١٤٠٠ = ن^{2} + ٥٠ ن$ وبحل المعادلة ينتج أن $ن = ٢٠$ ثانية .

أي أن الوعاء يمتلئ بعد ٢٠ ثانية .

السؤال السابع:

ميل المماس $= ص'(س) = \left(\frac{1}{\sqrt{س}} + \sqrt{س} \right)$ ومنها

$\int ص'(س) ع س = \int \left(س^{-\frac{1}{2}} + س^{\frac{1}{2}} \right) ع س$

وينتج أن $ص(س) = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ٢ س^{\frac{1}{2}} + جـ$ وبما أنه يمر بالنقطة $(١ ، \frac{2}{3})$ فإن :

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + ٢ + جـ$، أي أن $جـ = -٢$ فيكون $ص(س) = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ٢ س^{\frac{1}{2}} - ٢$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثامن:

نفرض ف : ازاحة الجسم عن قمة البرج فيكون ع $= \frac{ف}{ن}$ $= -٥ن^{٢} + ٤٠ن$ **ومنها**

$$ف = \int (-١٠ن + ٤٠) ن$$

أي أن ف $= -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ج$، **لكن** ف$(٠) = ٠$

فيكون ف $= -٥ن^{٢} + ٤٠ن$ **وعندما** ف $= -٤٥$ **فإن الجسم يصل الأرض ومنها**

ف $= -٥ن^{٢} + ٤٠ن = -٤٥$ **أي أن** $٥ن^{٢} - ٤٠ن - ٤٥ = ٠$ **ومنها** ن $= ٩$ **ثانية**

السؤال التاسع: $ص ن = (ص + س) ن س$

ومنها يكون $ص ن = س(ص + ١) ن س$

أي أن $\frac{١}{س} ن س = (ص + ١) ن ص$ **ومنها** $ص = \int \frac{١}{س} ن س$

فينتج $\frac{١}{٢} ص^{٢} + ص = لـو_{هـ} |س| + ج$

لكن عندما س $= ١$ ، ص $= ٢$ **فإن** ج $= ٤$

فيكون $\frac{١}{٢} ص^{٢} + ص = لـو_{هـ} |س| + ٤$ **ونجد ص بإكمال المربع في ص**

تمارين (٤-٤ أ) صفحة ١٥٦

السؤال الاول:

أ) $$\int \frac{٤}{(س + ٢)^{٥}} ن س = ٤ \int (س + ٢)^{-٥} ن س = -(س + ٢)^{-٤} + ج$$

ب) $$\int (١ - س) جا(س^{٢} - ٢س) ن س$$

نفرض ص $= (س^{٢} - ٢س)$ **فيكون** $ن ص = (٢س - ٢) ن س$ **ومنها** $ن س = \frac{ن ص}{(٢س - ٢)}$

$$\int (١ - س) جا(س^{٢} - ٢س) ن س = \int (١ - س) جا ص \frac{ن ص}{٢(س - ١)}$$

$$= \frac{-١}{٢} \int جا ص ن ص = \frac{١}{٢} جتا ص + ج = \frac{١}{٢} جتا(س^{٢} - ٢س) + ج$$

ج) $$\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} ن س$$

نفرض ص $= لـو_{هـ} س$ **ومنها** $ن ص = \frac{١}{س} ن س$ ، **أي أن** $س ن ص = ن س$

$$\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} ن س = \int ص س ن ص = \frac{ص^{٢}}{٢} + ج = \frac{(لـو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + ج$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

د) $\int (س^{٢}+٢)\sqrt{س+١}\,ds$

نفرض $ص = س+١$ **فيكون** $ds = ds$ **ويكون**

$$\int (س^{٢}+٢)\sqrt{س+١}\,ds = \int (ص^{٢}-٢ص+٣)ص^{\frac{١}{٢}}\,ds = \int (ص^{\frac{٥}{٢}}-٢ص^{\frac{٣}{٢}}+٣ص^{\frac{١}{٢}})ds$$

$$= \frac{٢}{٧}ص^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٤}{٥}ص^{\frac{٥}{٢}}+٢ص^{\frac{٣}{٢}}+جـ = \frac{٢}{٧}(س+١)^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٤}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}}+٢(س+١)^{\frac{٣}{٢}}+جـ$$

هـ) $\int (س+٢)^{٢}(س-١)^{٦}\,ds$

نفرض $ص = س-١$ **فيكون** $ds = ds$

$$\int (س+٢)^{٢}(س-١)^{٦}\,ds = \int (ص+٣)^{٢}ص^{٦}\,ds$$

$$= \int (ص^{٨}+٦ص^{٧}+٩ص^{٦})ds = \frac{ص^{٩}}{٩}+\frac{٦ص^{٨}}{٨}+\frac{٩ص^{٧}}{٧}+جـ$$

$$= \frac{(س-١)^{٩}}{٩}+\frac{٦(س-١)^{٨}}{٨}+\frac{٩(س-١)^{٧}}{٧}+جـ$$

و) $\int جتا^{٤}س\,ds = \int (جتا^{٢}س)^{٢}\,ds$

$$= \int (\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}جتا٢س)^{٢}\,ds = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٤}جتا^{٢}٢س)ds$$

$$= \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٤}جتا^{٢}٢س)ds = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}جتا٤س)ds$$

$$\int (\frac{٣}{٨}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٨}جتا٤س)ds = \frac{٣}{٨}س+\frac{١}{٤}جا٢س+\frac{١}{٣٢}جا٤س+جـ$$

ز) $\int \frac{١}{١+جاس}\,ds = \int \frac{١-جاس}{(١+جاس)(١-جاس)}\,ds$

$$= \int \frac{١-جاس}{(١-جا^{٢}س)}ds = \int \frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}ds = \int (قا^{٢}س-قاسظاس)ds$$

$$= ظاس-قاس+جـ$$

ح) $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{س}+هـ^{٢س}}\,ds = \int \frac{(هـ^{س})^{٢}}{هـ^{س}+(هـ^{س})^{٢}}\,ds =$

$$\int \frac{(هـ^{س})^{٢}}{هـ^{س}(١+هـ^{س})}ds = \int \frac{(هـ^{س})}{(١+هـ^{س})}ds = لـو_{هـ}(١+هـ^{س})+جـ$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثاني:

أ) $\int \frac{س+١}{س^{٥}}\sqrt{\frac{١}{س}+١}\,ءس = \int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{\frac{١}{س}+١}\,ءس$

نفرض $ص = \frac{١}{س}+١$ **فيكون** $ءص = -س^{٢}ءس$

ومنها $\int \frac{١}{س^{٢}}\sqrt{\frac{١}{س}+١}\,ءس = \int \frac{١}{س^{٢}}ص^{\frac{١}{٢}}(-س^{٢})ءص$

$= -\int ص^{\frac{١}{٢}}ءص = -\frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}+جـ = -\frac{٢}{٣}(\frac{١}{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}+جـ$

ب) $\int \frac{١}{س^{٢}}جا\frac{١}{س}\,ءس$

نفرض $ص = \frac{١}{س}$ ، **فيكون** $ءص = -س^{٢}ءس$

$\int \frac{١}{س^{٢}}جا\frac{١}{س}ءس = \int \frac{١}{س^{٢}}جاص \times -س^{٢}ءص = -\int جاصءص = جتاص+جـ = جتا\frac{١}{س}+جـ$

ج) $\int (جاس+قتاس)^{٢}ءس = \int (جا^{٢}س+٢+قتا^{٢}س)ءس = \int جا^{٢}س ءس + ٢س - ظتاس+جـ$

لكن $\int جا^{٢}س ءس = \int (\frac{١}{٢}-\frac{١}{٢}جتا٢س)ءس = \frac{١}{٢}س-\frac{١}{٤}جا٢س$

$\int (جاس+قتاس)^{٢}ءس = \frac{٥}{٢}س-\frac{١}{٤}جا٢س - ظتاس+جـ$

د) $\int \frac{(س+٢)^{٥}}{س^{٧}}ءس = \int \frac{(س+٢)^{٥}}{س^{٥}\times س^{٢}}ءس = \int \frac{(\frac{س+٢}{س})^{٥}}{س^{٢}}ءس = \int \frac{(١+\frac{٢}{س})^{٥}}{س^{٢}}ءس$

نفرض $ص = ١+\frac{٢}{س}$ **ومنها يكون** $ءص = -س^{٢}ءس$

أي أن $\int \frac{(س+٢)^{٥}}{س^{٧}}ءس = \int \frac{(١+\frac{٢}{س})^{٥}}{س^{٢}}ءس = \int \frac{ص^{٥}}{س^{٢}}\times\frac{-س^{٢}}{٢}ءص$

$= \frac{-١}{٢}\int ص^{٥}ءص = \frac{-١}{١٢}ص^{٦}+جـ = \frac{-١}{١٢}(١+\frac{٢}{س})^{٦}+جـ$

هـ) $\int س^{٢}(س^{٧}+س^{٣})^{\frac{١}{٣}}ءس = \int س^{٢}(س^{٣}(س^{٤}+١))^{\frac{١}{٣}}ءس = \int س^{٣}(س^{٤}+١)^{\frac{١}{٣}}ءس$

نفرض $ص = ١+س^{٤}$ **فيكون** $ءس = \frac{ءص}{٤س^{٣}}$

ومنها $\int س^{٢}(س^{٧}+س^{٣})^{\frac{١}{٣}}ءس = \int س^{٣}(س^{٤}+١)^{\frac{١}{٣}}ءس = \frac{١}{٤}\int ص^{\frac{١}{٣}}ءص = \frac{٣}{١٦}(س^{٤}+١)^{\frac{٤}{٣}}+جـ$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

و) $\int$ظا^{٣}س ؤس $= \int$ظاس ظا^{٢}س ؤس $= \int$ظاس(قا^{٢}س $-$ ١) ؤس $= \int$ظاس قا^{٢}س ؤس $-\int$ظاس ؤس

نفرض ص $=$ ظاس **ومنها** $\frac{\text{ؤص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} =$ ؤس **فيكون**

$\int$ظا^{٣}س ؤس $= \int$ظاس قا^{٢}س ؤس $-\int$ظاس ؤس $= \int$ص ؤص $= \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} +$ لـو$_{هـ}$ \|جتاس\| $+$ جـ

$= \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} +$ لـو$_{هـ}$ \|جتاس\| $+$ جـ

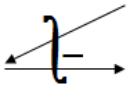
تمارين (٤ – ٤ ب) صفحة ١٦٠

السؤال الاول:

أ) $\int$س لـو$_{هـ}$ س ؤس

نفرض أن: ن $=$ لـو$_{هـ}$ س ؤع $=$ س ؤس

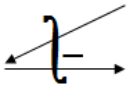
$\therefore$ ؤن $= \frac{١}{\text{س}}$ ؤس ع $= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$



$\int$س لـو$_{هـ}$ س ؤس $= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لـو$_{هـ}$ س $-\int \frac{١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ ؤس $= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لـو$_{هـ}$ س $- \frac{\text{س}^{٢}}{٤} +$ جـ

ب) $\int$س قا^{٢}س ؤس

نفرض أن: ن $=$ س ؤع $=$ قا^{٢}س ؤس



$\therefore$ ؤن $=$ ؤس ع $=$ ظاس

$\int$س قا^{٢}س ؤس $=$ س ظاس $-\int$ظاس ؤس $=$ س ظاس $+$ لـو$_{هـ}$ \|جتاس\| $+$ جـ

$\int$لـو$_{هـ}$(س$+$٢) ؤس $= \int$٣ لـو$_{هـ}$(س$+$٢) ؤس

ج)

نفرض أن: ن $=$ ٣ لـو$_{هـ}$(س $+$ ٢) ؤع $=$ ؤس

$\therefore$ ؤن $= \frac{٣}{\text{س}+٢}$ ؤس ع $=$ س

$\int$لـو$_{هـ}$(س$+$٢) ؤس $= ٣$س لـو$_{هـ}$(س$+$٢) $-\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}+٢}$ ؤس

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$= ٣س لـو_{هـ}(س+٢) - \int (\frac{٦}{س+٢} - \frac{٣س+٦}{س+٢}) دس$$

$$= ٣س لـو_{هـ}(س+٢) - ٣\int \frac{س+٢}{س+٢} دس + \int \frac{٦}{س+٢} دس$$

$$= ٣س لـو_{هـ}|س+٢| - ٣س + ٦ لـو_{هـ}|س+٢| + جـ$$

د) $\int س جا٢س دس$

نفرض أن: $ن = س$ ، $دع = جا٢س دس$

$\therefore دن = دس$ ، $ع = -\frac{١}{٢} جتا٢س$

$$\int س جا٢س دس = -\frac{١}{٢} س جتا٢س + \frac{١}{٢}\int جتا٢س دس = -\frac{١}{٢} س جتا٢س + \frac{١}{٤} جا٢س + جـ$$

هـ) $\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١} دس = \int س^{٢} \times س هـ^{س^{٢}+١} دس$

نكامل بالتعويض بفرض أن $ص = س^{٢} + ١$ **ومنها** $دس = \frac{دص}{٢س}$

$$\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١} دس = \int س^{٢} \times س هـ^{ص} \frac{دص}{٢س}$$

$$= \frac{١}{٢}\int (ص-١) \times هـ^{ص} دص$$ **وهنا نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ن = \frac{١}{٢}(ص-١)$ ، $دع = هـ^{ص} دص$

$\therefore دن = \frac{١}{٢} دص$ ، $ع = هـ^{ص}$

$$\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١} دس = \frac{١}{٢}(ص-١) هـ^{ص} - \frac{١}{٢}\int هـ^{ص} = \frac{١}{٢} س^{٢} هـ^{س^{٢}+١} - \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}+١} + جـ$$

و) $\int جا \sqrt{س+١} دس$

نفرض $ص = \sqrt{س+١}$ **ومنها** $٢ص دص = دس$

$\int جا \sqrt{س+١} دس = \int ٢ص جاص دص$ **ثم نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ن = ٢ص$ ، $دع = جاص دص$

$\therefore دن = ٢دص$ ، $ع = -جتاص$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+1}\,\text{د س} = 2\text{ص}\,\text{جا}\text{ص}\,\text{د ص} = -2\text{ص}\,\text{جتا}\text{ص} + 2\,\text{جا}\text{ص} + \text{ج}$$
$$= -2\sqrt{\text{س}+1}\ \ \text{جتا}\sqrt{\text{س}+1} + 2\,\text{جا}\sqrt{\text{س}+1} + \text{ج}$$

ز) $$\int \frac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,\text{د س} = \int 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{س}+1)^{-2}\,\text{د س}$$

نفرض أن: $\text{ب} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad \text{د ع} = (\text{س}+1)^{-2}\,\text{د س}$

$\therefore \text{د ب} = (2\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{د س}$ $\quad \text{ع} = \frac{-1}{\text{س}+1}$

$$\int \frac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,\text{د س} = \int 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{س}+1)^{-2}\,\text{د س} = \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{(2\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})}{\text{س}+1}\,\text{د س}$$
$$= \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{(2\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})}{\text{س}+1}\,\text{د س}$$
$$= \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{2\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(1+\text{س})}{\text{س}+1}\,\text{د س} = \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$$

ح) $$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{د س} = \frac{1}{2}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{د س}$$

نفرض أن: $\text{ب} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad \text{د ع} = \text{جا}2\text{س}\,\text{د س}$

$\therefore \text{د ب} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د س}$ $\quad \text{ع} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{د س} = \frac{1}{2}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{د س} = -\frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{د س}$$

ثم نكامل بالأجزاء مرة أخرى للمقدار $\int \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{د س}$

نفرض أن: $\text{ب} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad \text{د ع} = \text{جتا}2\text{س}\,\text{د س}$

$\therefore \text{د ب} = \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د س}$ $\quad \text{ع} = \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{د س} = \frac{1}{2}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{د س} = -\frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س} + \frac{1}{8}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} - \int \frac{1}{8}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{د س}$$

ومنها $$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,\text{د س} = -\frac{2}{5}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{5}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س} + \text{ج}$$

ط) $$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{قتاس} - \text{قتاس}\,\text{ظتاس})\,\text{د س} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قتاس}\,\text{د س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قتاس}\,\text{ظتاس}\,\text{د س}$$

نفرض أن: $\text{ب} = \text{قتاس}$ $\quad \text{د ع} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د س}$

$\therefore \text{د ب} = -\text{قتاس}\,\text{ظتاس}\,\text{د س}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$ع = هـ^{س} \int هـ^{س}(قتاس - قتاس ظتاس)وس = \int هـ^{س} قتاس وس - \int هـ^{س} قتاس ظتاس وس$$

$$= هـ^{س} قتاس + \int هـ^{س} قتاس ظتاس وس - \int هـ^{س} قتاس ظتاس وس$$

$$\int هـ^{س}(قتاس - قتاس ظتاس)وس = هـ^{س} قتاس + جـ$$

ي) $\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) وس$

نفرض $ص = \frac{١}{س}$ **ومنها** $وص = -\frac{١}{س^{٢}} وس$

$$\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) وس = -\int ص جتا ص وص$$

ثم نكامل الناتج بالأجزاء فيكون الجواب $\int \frac{١}{س^{٣}} جتا\left(\frac{١}{س}\right) وس = -\frac{١}{س} جا\frac{١}{س} - جتا\frac{١}{س} + جـ$

السؤال الثاني:

نفرض أن: $ن = لـو_{هـ} س$ $\quad وع = س^{ن} وس$

$\therefore ون = \frac{١}{س} وس$ $\quad ع = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

$$\int س^{ن} لـو_{هـ} س وس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لـو_{هـ} س - \int \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \times \frac{١}{س} وس$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لـو_{هـ} س - \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}(لـو_{هـ} س - \frac{١}{ن+١}) + جـ$$

تمارين (٤ - ٤ ج) صفحة ١٦٥

السؤال الأول:

أ) $\int \frac{س+٢}{س^{٢} - ٢س - ٣} وس = \int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} وس$

$$\frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+١}$$ **ومنها يكون** $س + ٢ = أ(س+١) + ب(س-٣)$

وتكون $أ = \frac{٥}{٤}$، $ب = \frac{-١}{٤}$ **ومنها**

$$\int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} وس = \int \frac{\frac{٥}{٤}}{س-٣} وس + \int \frac{\frac{-١}{٤}}{س+١} وس = \frac{٥}{٤} لـو_{هـ}|س-٣| + \frac{-١}{٤} لـو_{هـ}|س+١| + جـ$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}$ ءس . بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام،

فنجري القسمة المطولة $س^{٢}+٢$) $س^{٢}+س-٦$ وينتج أن

$$\frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}=١+\frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)}$$

ومنها $\frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)}=\frac{أ}{س+٣}+\frac{ب}{س-٢}$، وبعد الحل ينتج أن أ $=\frac{-١١}{٥}$، ب $=\frac{٦}{٥}$

ويكون $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}$ ءس $=س+\frac{-١١}{٥}$ لـو$_{هـ}|س+٣|+\frac{٦}{٥}$ لـو$_{هـ}|س-٢|+$جـ

ج) $\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}$ ءس نفرض ص $=\sqrt{س}$ ومنها ٢صءص $=$ ءس

$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}$ ءس $=\int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢}$ ءص وبإجراء القسمة المطولة ينتج أن:

$$\frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢}=٢+\frac{٤+٢ص}{ص^{٢}-ص-٢}=٢+\frac{أ}{ص-٢}+\frac{ب}{ص+١}$$

$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}$ ءس $=٢\sqrt{س}+\frac{٨}{٣}$ لـو$_{هـ}(\sqrt{س}-٢)-\frac{٢}{٣}$ لـو$_{هـ}(\sqrt{س}+١)+$جـ

د) $\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}$ ءس

$$\frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}=\frac{أ}{س}+\frac{ب}{س-١}+\frac{جـ}{س+١}$$ وينتج أن أ $=-٢$، ب $=\frac{٣}{٢}$، جـ $=\frac{١}{٢}$

$\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}$ ءس $=-٢$ لـو$_{هـ}|س|+\frac{٣}{٢}$ لـو$_{هـ}|س-١|+\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}|س+١|+$جـ

هـ) $\int$ قتاس ءس $=\int \frac{قتاس(قتاس+ظتاس)}{قتاس+ظتاس}$ ءس

$=\int \frac{قتا^{٢}س+قتاس ظتاس}{قتاس+ظتاس}$ ءس $=-$ لـو$_{هـ}|قتاس+ظتاس|+$جـ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

و) $\int \frac{1}{س - س(لـو_{٥} س)^{٢}} ؤس$

الحل: نفرض ص $= لـو_{٥} س$ **ومنها** س ؤص $=$ ؤس

$$\int \frac{س}{س - س ص^{٢}} ؤص = \int \frac{١}{١ - ص^{٢}} ؤص = \int \frac{-١}{ص^{٢} - ١} ؤص$$

ومنها $\frac{-١}{ص^{٢} - ١} = \frac{أ}{ص - ١} + \frac{ب}{ص + ١}$

$$\int \frac{١}{س - س(لـو_{٥} س)^{٢}} ؤس = \frac{-١}{٢} لـو_{٥} |لـو_{٥} س - ١| + \frac{١}{٢} لـو_{٥} |١ + لـو_{٥} س| + جـ$$

ز) $\int \frac{-س + ٧}{س^{٢} + س - ٢} ؤس$

$$\frac{-س + ٧}{(س - ١)(س + ٢)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ٢}$$ **ومنها** أ $= ٢$، ب $= -٣$

وينتج أن $\int \frac{-س + ٧}{س^{٢} + س - ٢} ؤس = ٢ لـو_{٥} |س - ١| - ٣ لـو_{٥} |س + ٢| + جـ$

ح) $\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} ؤس$ **نفرض** ص $=$ جتاس **ومنها** $\frac{ؤص}{-جاس} = ؤس$

$$\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} ؤس = \int \frac{جاس}{١٦ - ص^{٢}} \frac{ؤص}{-جاس} = \int \frac{ؤص}{ص^{٢} - ١٦}$$

$$\frac{١}{ص^{٢} - ١٦} = \frac{أ}{ص - ٤} + \frac{ب}{ص + ٤}$$ **ومنها** أ $= \frac{١}{٨}$ ، ب $= \frac{-١}{٨}$

$$\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} ؤس = \frac{١}{٨} لـو_{٥} |ص - ٤| - \frac{١}{٨} لـو_{٥} |ص + ٤| + جـ$$

أي أن $\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} ؤس = \frac{١}{٨} لـو_{٥} |جتاس - ٤| - \frac{١}{٨} لـو_{٥} |جتاس + ٤| + جـ$

ط) $\int \frac{قتا^{٢} س}{٢ - قتا^{٢} س} ؤس = \int \frac{قتا^{٢} س}{١ - ظتا^{٢} س} ؤس$ ، **نفرض** ص $=$ ظتاس **ومنها** $\frac{ؤص}{-قتا^{٢} س} = ؤس$

$$\int \frac{قتا^{٢} س}{٢ - قتا^{٢} س} ؤس = \int \frac{قتا^{٢} س}{١ - ص^{٢}} \frac{ؤص}{-قتا^{٢} س} = \int \frac{١}{ص^{٢} - ١} ؤص$$ **ثم نكامل بالكسور الجزئية**

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$\frac{١}{ص^{٢}-١}=\frac{أ}{ص-١}+\frac{ب}{ص+١}$ وينتج أن $أ=\frac{١}{٢}$، $ب=\frac{-١}{٢}$ فيكون

$\int \frac{قتا^{٢}\,س}{٢-قتا^{٢}\,س}\,د س=\int \frac{\frac{١}{٢}}{ص-١}\,د س-\int \frac{\frac{١}{٢}}{ص+١}\,د س=\frac{١}{٢}لـو_{هـ}|ظتاس-١|-\frac{١}{٢}لـو_{هـ}|ظتاس+١|+جـ$

ي) $\int \frac{س^{٢}}{س^{٦}+س^{٣}}\,د س=\int \frac{س^{٢}}{س^{٣}\,(س^{٣}+١)}\,د س=\int \frac{١}{س\,(س^{٣}+١)}\,د س$

نفرض $ص=س^{٣}+١$ ومنها $\frac{د ص}{٣س^{٢}}=د س$ فيكون $\int \frac{س^{٢}}{س^{٦}+س^{٣}}\,د س=\int \frac{د ص}{٣ص(ص-١)}$

وينتج أن $\int \frac{س^{٢}}{س^{٦}+س^{٣}}\,د س=\frac{١}{٣}(لـو_{هـ}|س^{٣}|-لـو_{هـ}|س^{٣}+١|)+جـ$

السؤال الثاني:

بما أن $\sqrt[٣]{س}\,د ص=٦س\,د س-د ص$ فإن $\frac{١}{٦}د ص=\frac{١}{(١+\sqrt[٣]{س})}د س$ ومنها

$\int \frac{١}{٦}د ص=\int \frac{١}{(١+\sqrt[٣]{س})}د س$ أي أن $\frac{١}{٦}ص=\int \frac{١}{(١+\sqrt[٣]{س})}د س$ ونفرض $ع=١+\sqrt[٦]{س}$

فينتج أن $(ع^{٢}-٢)د ع=د س$ أي أن $\frac{١}{٦}ص=\int \frac{ع(ع^{٢}-٢)}{ع}=ع^{٢}-٢لـو_{هـ}|ع|+جـ$

وينتج أن $\frac{١}{٦}ص=٢(\sqrt[٦]{س}+١)-٢لـو_{هـ}|\sqrt[٦]{س}+١|+جـ$

وعندما $ص=٢$ ، $س=٠$ فإن $\frac{١}{٣}=٢(١)+جـ$ ومنها $جـ=+=\frac{-٥}{٣}$

$\frac{١}{٦}ص=٢(\sqrt[٦]{س}+١)-٢لـو_{هـ}|\sqrt[٦]{س}+١|-\frac{٥}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين عامة(الوحدة الرابعة): صفحة ١٦٦

السؤال الأول: الموضوعي

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
الاجابة	ج	د	ج	ب	ب

السؤال الثاني:

يكون م(س) اقترانا أصليا للاقتران ن(س) اذا كان م´(س) = ن(س)

وبما أن $م´(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{-١-س^{٢}}} = \frac{-س}{\sqrt{-١-س^{٢}}}$ = هـ(س)

السؤال الثالث:

$\int ن´(س)ds = \int (س^{٢} + ٣جاس)ds$ = هـ(س)+جـ ومنها

$ن´(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٣جتاس+جـ$، وبما أن ن´(٠) = ٣فتكون جـ = ٦

أي أن $ن´(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٣جتاس + ٦$

كما أن $ن(س) = \int ن´(س)ds = \frac{س^{٤}}{١٢} - ٣جاس + ٦س + ع$

وبما أن ن(٠) = ٢ فإن ع=٢ومنها $ن(س) = \frac{س^{٤}}{١٢} - ٣جاس + ٦س + ٢$

السؤال الرابع

$ف(ن) = \int ٤ن ع = \int (٤ن+لـو_{هـ}(ن+١))ن ع$

$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لـو_{هـ}(ن+١) - ن+لـو_{هـ}(ن+١)+جـ$

وبما أن ف(١) = ٨، فإن جـ = ٧-لـو_{هـ}٤ فيكون

$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لـو_{هـ}(ن+١) - ن+لـو_{هـ}(ن+١) + ٧-لـو_{هـ}٤$

ف(٣) = ٢٢+٣لـو_{هـ}٤ مترا

السؤال الخامس:

بما أن $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٣س^{٢} - ٢}{(٢س^{٣} - ٤س)^{٤}}$ فإن $\int ع ص = \int \frac{٣س^{٢} - ٢}{(٢س^{٣} - ٤س)^{٤}} ع س$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

نفرض ع = ٢س^{٣} − ٤س فيكون $\frac{ع}{(٢-٣س^{٢})٢}$ = ع ومنها يكون

$$ص = \int \frac{٣س^{٢}-٢}{(ع)^{٤}} \frac{ع}{(٢-٣س^{٢})٢} = \frac{١}{٢}\int ع^{-٤}ع = \frac{-١}{٣ع^{٣}}+جـ$$

أي أن $ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣}-٤س)^{٣}}+جـ$

وعندما ص=١ ، س = ١ يكون $ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣}-٤س)^{٣}}+\frac{٤٧}{٤٨}$

السؤال السادس:

١) $\int س\sqrt{٨س^{٢}-٣}$ع

نفرض $ص = ٨س^{٢}-٣$ فيكون $ع = \frac{ص}{٢س}$ ع $\int س ص^{\frac{١}{٢}} \frac{ع ص}{٢س} = \frac{١}{٣}(س^{٢}-٣)^{\frac{٣}{٢}}+جـ$

٢) $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}$ع نفرض $ص = س^{٩}+١$ فيكون $ع = \frac{ع ص}{٩س^{٨}}$

أي أن $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}ع = \int \frac{١}{س(س^{٩}+١)}ع = \frac{١}{٩}\int \frac{١}{ص(ص-١)}ع$

وبالكسور الجزئية ينتج أن: $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}ع = \frac{١}{٩}(لـو_{هـ}|س^{٩}|-لـو_{هـ}|س^{٩}+١|)+جـ$

٣) $\int ق^{٢}\sqrt{س}ع$ نفرض $ص = \sqrt{س}$ فيكون $ع = ٢صع$ أي أن

$\int ق^{٢}\sqrt{س}ع = \int ٢ص ق^{٢}ص ع$ ثم نكامل بالأجزاء

نفرض أن: $ن = ٢ص$ $ع = ق^{٢}ص ع$

$\therefore ع ن = ٢ع ص$ $ع = ظاص$

$$\int ق^{٢}\sqrt{س}ع = \int ٢ص ق^{٢}ص ع = ٢ص ظاص - ٢\int ظاص ع$$

$$= ٢\sqrt{س}ظا\sqrt{س}+٢لـو_{هـ}|جتا\sqrt{س}|+جـ$$

$$\int ق(٣س+١)ظا(٣س+١)ع = \frac{١}{٣}ق(٣س+١)+جـ$$

٥) $\int (س^{٢}+١)جتاس ع$ نكامل بالأجزاء مرتين فينتج أن :

$$\int (س^{٢}+١)جتاس ع = (س^{٢}+١)جاس + ٢س جتاس - ٢جاس+جـ$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

٦) $\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) ءس

نفرض أن: ص = لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) ، ءص = $\frac{٢س}{س^{٢}-١}$ ءس ∴

ع = س	ع −
ءع = ءس	

$\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) ءس = س لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) − $\int \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}-١}$ ءس

ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية وينتج أن: $\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) ءس

= س لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) − ٢س + لـو$_{هـ}$ |س + ١| − لـو$_{هـ}$ |س − ١| + جـ

٧) $\int \frac{س^{٢}+١}{س^{٣}+س}$ ءس = $\int \frac{١}{س}$ ءس = لـو$_{هـ}$ |س| + جـ

٨) $\int \frac{قا^{٤}س}{١-ظا^{٢}س}$ ءس نفرض ص = ظاس فيكون $\frac{ءص}{قا^{٢}س}$ = ءس

$\int \frac{قا^{٤}س}{١-ظا^{٢}س}$ ءس = $\int \frac{قا^{٢}س}{١-ص^{٢}}$ ءص = $\int \frac{١+ص^{٢}}{١-ص^{٢}}$ ءص ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية

وينتج $\int \frac{قا^{٤}س}{١-ظا^{٢}س}$ ءس = − ظاس − لـو$_{هـ}$ |١ − ظاس| + لـو$_{هـ}$ |١ + ظاس| + جـ

٩) $\int$ (جتا^{٤}س − جا^{٤}س) ءس = $\int$ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)(جتا^{٢}س + جا^{٢}س) ءس

= $\int$ جتا٢س ءس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س + جـ

١٠) $\int$ (قتاس + ظتاس)^{٨} قتاس ءس = $\int$ (قتاس + ظتاس)^{٧} (قتاس + ظتاس) قتاس ءس

= $\int$ (قتاس + ظتاس)^{٧} (قتا^{٢}س + ظتاس قتاس) ءس = − $\frac{١}{٨}$ (قتاس + ظتاس)^{٨} + جـ

١١) $\int$ (س^{٨} − ٦س)^{٦} ءس = $\int$ (س(س^{٧} − ٦))^{٦} ءس = $\int$ س^{٦} (س^{٧} − ٦)^{٦} ءس

= $\frac{١}{٧}$ $\int$ ٧س^{٦} (س^{٧} − ٦)^{٦} ءس = $\frac{١}{٤٩}$ (س^{٧} − ٦)^{٧} + جـ

السؤال السابع:

بما أن ع = أ$\sqrt{ف}$ فإن $\frac{ءف}{ءن}$ = أ$\sqrt{ف}$ ومنها $\frac{ءف}{\sqrt{ف}}$ = أءن

ف$^{-\frac{١}{٢}}$ ءف = أءن ويكون ٢ف$^{\frac{١}{٢}}$ = أن + جـ

لكن ف(٢) = ٩ ومنها ٢أ + جـ = ٦ ، كذلك ف(٤) = ١٦ فيكون ٤أ + جـ = ٨

وبحل المعادلتين ينتج أن أ = ١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثامن:

بما أن $س^{٢}\,ص - لـو_{هـ} س\,ص = ٠$ **فإن** $\int ص = \int \frac{لـو_{هـ} س}{س^{٢}}\,س$

ومنها $ص = \int \frac{لـو_{هـ} س}{س^{٢}}\,س$ **فنكامل بالتعويض بوضع** $ع = لـو_{هـ} س$

فينتج أن $ص = \int ع\,هـ^{-ع}\,ع$ **وبعد اجراء التكامل بالأجزاء ينتج أن**

$ص = \frac{-لـو_{هـ} س}{س} - \frac{١}{س} + جـ$ **وعندما ص=٠ ، س = هـ فإن:**

$ص = \frac{-لـو_{هـ} س}{س} - \frac{١}{س} + \frac{٢}{هـ}$

السؤال التاسع:

نكامل الطرفين بالنسبة ل س

$\int س\,ه'(س)\,س + \int ه(س)\,س = \int جتاس\,س$

وبتكامل الجزء الأول $\int س\,ه'(س)\,س$ **بالأجزاء ينتج أن**

$س\,ه(س) - \int ه(س)\,س + \int ه(س)\,س = جاس + جـ$

أي أن $س\,ه(س) = جاس + جـ$ **وبما أن** $ه(\pi) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$

$ه(س) = \frac{جاس}{س}$

حل آخر: بما أن $س\,ه'(س) + ١ \times ه(س) = جتاس$ **فإن** $(س\,ه(س))' = جتاس$ **ومنه**

$\int (س\,ه(س))'\,س = \int جتاس\,س$

أي أن $س\,ه(س) = جاس + جـ$ **وبما أن** $ه(\pi) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$ **ومنها يكون** $ه(س) = \frac{جاس}{س}$

حلول الوحدة الخامسة

تمارين (٥-١) صفحة ١٧٦

السؤال الأول: أ) $س_{٢} = -١ + \frac{٢}{٦} \times ٢ = ٠$

ب) **الفترة الجزئية الرابعة** $= [\frac{١}{٢}، ١]$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثاني: $س_{ع} = جـ + \frac{ع-٧}{١٠} \times ٤ = ٤$ ومنها $جـ = ٢$

السؤال الثالث: $\sigma_{ع} = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ لأن طول الفترة الجزئية يساوي ١ ، فتكون

$$م(\sigma_{ع}، ن) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٤} ن(س_{ر}^{*}) = ١ \times (ن(٢) + ن(٣) + ن(٤) + ن(٥))$$

$$م(\sigma_{ع}، ن) = ١ \times (٢- + ٣- + ١٠ + ١٩-) = ٣٠-$$

السؤال الرابع: $ن(س) = ٢ + هـ^{س}$ ، طول الفترة الجزئية = ١

فتكون $\sigma_{٣} = \{-١، ٠، ١، ٢\}$

$$م(\sigma_{٣}، ن) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٣} ن(س_{ر}^{*}) = ١ \times (ن(٠) + ن(١) + ن(٢)) = ٧ + هـ + \frac{١}{هـ}$$

السؤال الخامس: $ن(س) = \frac{س^{٣}}{س + ٢}$، $\sigma_{٥} = \{-١، ٠، ١، ٢، ٣، ٦، ٨\}$

الفترات الجزئية هي : $[-١، ٠]، [٠، ٢]، [٢، ٣]، [٣، ٦]، [٦، ٨]$

$$م(\sigma_{٥}، ن) = ١ \times -١ + ٠ \times ٢ + ١ \times \frac{١٢}{٤} + ٣ \times \frac{١٣}{٥} + ٢ \times \frac{١٦}{٨}$$

ومنها يكون $\frac{١٢٨}{١٠} = ٥و٦$ ومنها $ا = ٢$

السؤال السادس: $س_{٢} = ا + \frac{ب-ا}{٨} \times ٢ = ٢$ ومنها $١٣ + ب = ٨$

، $س_{٤} = ا + \frac{ب-ا}{١٢} \times ٤ = ٤$ ومنها $١٢ + ب = ١٢$ **وبحل المعادلتين ينتج أن :**

$ا = -٤$ ، $ب = ٢٠$

السؤال السابع : $ن(س) = جاس$، $\sigma_{٤} = \{٠، \frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٢}\}$

$$م(\sigma_{٤}، ن) = \frac{\pi}{٦} \times جا٠ + \frac{\pi}{١٢} \times جا\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{١٢} \times جا\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٦} \times جا\frac{\pi}{٣}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$= \frac{\pi}{٦} \times ٠ + \frac{\pi}{١٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\pi}{١٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\pi}{٢٤} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = (\sqrt{٣}\ ٢ + \sqrt{٢}\ + ١)\frac{\pi}{٢٤}$$

السؤال الثامن : طول الفترة الجزئية $= \frac{١}{ن}$

$$ل = ع(ب، ن\sigma) = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_ر) \quad ، \quad ك = ع(ب، ن\sigma) = \frac{١}{ن}\sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_{ر-١})$$

$$ل - ك = \frac{١}{ن}\left(\sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_ر) - \sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_{ر-١})\right)$$

$$ل = \frac{١}{ن}\left(ب(س_١) + ب(س_٢) + ب(س_٣) + \ldots + ب(س_ن)\right)$$

$$ك = \frac{١}{ن}\left(ب(س_٠) + ب(س_١) + ب(س_٢) + \ldots + ب(س_{ن-١})\right)$$

وبالطرح ينتج أن $ل - ك = \frac{١}{ن}\left(ب(س_ن) - ب(س_٠)\right) = \frac{١}{ن}(ب(١) - ب(٠))$

تمارين (٥-٢) صفحة ١٨١

السؤال الأول: $ع(ب، ن\sigma) = \sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س^*_ر)\frac{ا - ب}{ن}$ ، $س^*_ر = س_ر = -١ + ر\frac{٤}{ن}$

ويكون $ب(س_ر) = -١ + ر\frac{٤}{ن} = ٧ - ر\frac{٢٠}{ن}$

$$ع(ب، ن\sigma) = \frac{٤}{ن}\sum_{ر=١}^{ن=ن}(٧ - ر\frac{٢٠}{ن}) = \frac{٤}{ن}(٧ن - \frac{٢٠}{ن}\frac{ن(ن+١)}{٢}) = -١٢ - \frac{٤٠}{ن}$$

السؤال الثاني: $ع(ب، ن\sigma) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} ب(س^*_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن}(ا\ هـ(س^*_ر) + ب)$

$$= ا(\frac{١}{ن})\sum_{ر=١}^{ن} هـ(س^*_ر) + \sum_{ر=١}^{ن} ب = ا(\frac{١}{ن})\sum_{ر=١}^{ن} هـ(س^*_ر) + ب$$

$$= ا\ ع(هـ، ن\sigma) + ب$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثالث: $\int_{1}^{3} 2s\,ds = \lim_{n\to\infty} \frac{3-1}{n} \sum_{r=1}^{n} f(s_r^*) = \lim_{n\to\infty} \frac{3-1}{n} \sum_{r=1}^{n} 2\left(1+\frac{3-1}{n}r\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3-1}{n} \sum 2 + 2\left(\frac{3-1}{n}r\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3-1}{n}\left(2+2\frac{3-1}{n}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

بالاختصار والتبسيط ينتج ان $\int_{1}^{3} 2s\,ds = 2(3-1)+(3-1)^2 = \lim_{n\to\infty}\left(8+\frac{32}{n}\right) = 35$

وبحل المعادلة ينتج القيمة المطلوبة ب=٦

السؤال الرابع: نستخدم تعريف التكامل المحدود (ريمان)وينتج ان

أ) $\int_{-1}^{4} \frac{1}{2}s\,ds$ ، $\Delta x = \frac{5}{n}$ ، $f(s_r^*)$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{5}{n} f\left(-1+\frac{5}{n}r\right) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \frac{5}{n} = \frac{5}{2}$$

وينتج أن $\int_{-1}^{4} \frac{1}{2}s\,ds = \lim_{n\to\infty} \Delta x\,(f\,\Delta x) = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

ب) $\Delta x = \frac{2}{n}$ $f(s_r^*)$ $\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{n} f\left(1+\frac{2}{n}r\right)$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{n}(6-4)\left(1+\frac{2}{n}r\right) = \sum_{r=1}^{n} \frac{2}{n}\left(-2-\frac{12}{n}r\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(-2n - \frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right) = -10 - \frac{12}{n}$$

$$\int_{1}^{2} (6s-4)\,ds = \lim_{n\to\infty} \Delta x\,(f\,\Delta x) = -10$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس: لاحظ ان $ن(س) = \frac{جتا^{٣}س - ١}{جتاس - ١} = \frac{(جتاس - ١)(جتا^{٢}س + جتاس + ١)}{جتاس - ١}$ ،

نفرض $هـ(س) = جتا^{٢}س + جتاس + ١$ معرفا على الفترة $\left[\frac{-\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right]$ ، فيكون $ن(س) = هـ(س)$

$\forall س \in \left[\frac{-\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right] - \{٠\}$

بما ان $هـ(س)$ متصلا على مجاله فهو قابل للتكامل ايضا

حسب النظرية فان $ن(س)$ قابل للتكامل على الفترة $\left[\frac{-\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right]$

تمارين (٥ــــ٣) صفحة ١٨٦

السؤال الأول: أ) $\int_{٠}^{٤} (٣ + \sqrt{س})^{٢} ءس = \int_{٠}^{٤} (٩ + ٦\sqrt{س} + س) ءس =$

$$= \int_{٠}^{٤} (٩ + ٦س^{\frac{١}{٢}} + س) ءس = ٩س + ٤س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{٤} = ٧٦$$

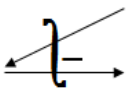
ب) $\int_{١}^{٢} س(س^{٢} - ٣)^{٣} ءس$ ، بفرض $ص = (س^{٢} - ٣)$ واجراء التكامل بالتعويض ينتج

$$\int_{١}^{٢} س(س^{٢} - ٣)^{٣} ءس = \frac{١}{٢} \int_{-٢}^{١} ص^{٣} ءص = \frac{١ - (-٢)^{٤}}{٨} = \frac{-١٥}{٨}$$

ج) $\int_{١}^{هـ} لـو_{هـ} س ءس$

بالأجزاء $ن = لـو_{هـ} س$ ، $ءن = \frac{١}{س} ءس$

$ءو = ءس$ ، $و = س$



$$\int_{١}^{هـ} لـو_{هـ} س ءس = س لـو_{هـ} س - س\Big|_{١}^{هـ} = هـ - ٠ - (هـ - ١) = ١$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

د) $\int_{ب}^{٢} ٢٠ ١ س^{٢} (س-١)^{٣} \, وس$ بفرض $س-١ = ص$ ، $وس = وص$

$$\int_{ب}^{٢} ٢٠ ١ س^{٢} (س-١)^{٣} \, وس = \int_{-١}^{١} ٢٠ ١ (ص+١)^{٢} (ص)^{٣} \, وص$$

$$= \int_{-١}^{١} ٢٠ ١ (ص^{٢} + ٢ص + ١) ص^{٣} \, وص = \int_{-١}^{١} ٢٠ ١ \, (ص^{٥} + ٢ص^{٤} + ص^{٣}) وص$$

$$= ٢٠ ١ (\frac{١}{٦} + ٢ \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤}) - ٢٠ ١ (\frac{(-١)^{٦}}{٦} + ٢ \times \frac{(-١)^{٥}}{٥} + \frac{(-١)^{٤}}{٤}) = ٢٠ ١ \times \frac{٤}{٥} = ٩٦$$

السؤال الثاني : $ت(س) = \frac{س}{س+١}$ ، في الفترة $[٠ ، ٤]$

$$ت(س) = \int_{ب}^{س} ث(ص) وص = \int_{ب}^{س} \frac{ص}{ص+١} وص$$

$$= \int_{ب}^{س} \frac{ص+١-١}{ص+١} وص = \int_{ب}^{س} ١ وص - \int_{ب}^{س} \frac{١}{ص+١} وص$$

$$= (ص - لـو_{هـ} |ص+١|) \Big|_{ب}^{س} = س - لـو_{هـ} |س+١|$$

السؤال الثالث: بما أن $ت(-٢) = ٠$ فإن $٢(-٢)^{٢} + ا = ٠$ ومنها $ا = -٨$

كما أن ت(س) متصل دائما على مجاله

$ت(٣^{-}) = ت(٣^{+})$ ومنها $١٠ = ٣ب + ١$ ، ومنها تكون $ب = ٣$

السؤال الرابع : $ت(س) = \int_{\frac{١}{٢}}^{س} ث(ص) وص = س + جا \pi س + جـ$

لمعرفة قيمة الثابت جـ ، فإن $ت(\frac{١}{٢}) = ٠$ ومنها $\frac{١}{٢} + ١ + جـ = ٠ \Leftarrow جـ = \frac{-٣}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$ت'(س) = ن(س) = ١ + \pi$ جتاπ س

لإيجاد ن(٢) نعوض بدل س (١) فينتج ان $= ن(٢) = ١ + \pi$ جتا$٢\pi = ١ + \pi$

السؤال الخامس: $ت'(س) = (أ + هـ^{س})$

$ت'(٢) = (أ + هـ^{٢}) = -١$ ومنها $أ = -١ - هـ^{٢}$

السؤال السادس : $\int_{٠}^{١} (س^{٢} - ٢س)(س - ١)^{٥}$ دس

نفرض ص = س − ١ ، فيكون دص = دس ، **وعندما س= ٠ فإن ص=-١ ، وعندما س=١ فإن ص= ٠**

أي أن $\int_{-١}^{٠} (ص + ١)(ص - ١)(ص)^{٥}$ دص $= \int_{-١}^{٠} (ص^{٢} - ١)(ص)^{٥}$ دص

$= \int_{-١}^{٠} (ص^{٧} - ص^{٥})$ دص $= \left| \frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{ص^{٦}}{٦} \right|_{-١}^{٠} = \frac{١}{٢٤}$

تمارين (٥-٤) صفحة ١٩٣

السؤال الاول: أ) $\int_{٠}^{\pi} جا^{٢}س$ دس $= \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}(١ - جتا٢س)$ دس $= \frac{\pi}{٢} - \frac{جا٢\pi}{٢} = ٠ - \frac{\pi}{٢}$

ب) $\int_{٠}^{٢} (١ + هـ^{س})^{٢}$ دس $= \int_{٠}^{٢} (١ + ٢هـ^{س} + هـ^{٢س})$ دس $= (س + ٢هـ^{س} + \frac{١}{٢}هـ^{٢س}) \Big|_{٠}^{٢}$

$= (٢ + ٢هـ^{٢} + \frac{هـ^{٤}}{٢}) - (٠ + ٢هـ^{٠} + \frac{هـ^{٠}}{٢}) = \frac{هـ^{٤}}{٢} + ٢هـ^{٢} - \frac{١}{٢}$

جـ) $\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (س + ١)(س^{٢} + ٤)$ دس $= \int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (س^{٣} + س^{٢} + ٤س + ٤)$ دس

$= (\frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢} + ٤س) \Big|_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} = ١٠\sqrt{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

د) $\int_{-٢}^{١} \frac{س^{٣}-٢٧}{س^{٢}+٣س+٩}\,ds = \int_{-٢}^{١} \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{س^{٢}+٣س+٩}\,ds$

$= \int_{-٢}^{١} (س-٣)\,ds = \left(\frac{س^{٢}}{٢}-٣س\right)\Big|_{-٢}^{١} = \frac{-٢١}{٢}$

السؤال الثاني: أ) نفرض $ق(س) = س^{٢}+٢-(٢س-١) = س^{٢}-٢س+٣$

لاحظ ان $ق(س) \geq ٠$ دائما لان المميز سالب ومنها $(س^{٢}+٢)-(٢س-١) \geq ٠$

$(س^{٢}+٢) \geq (٢س-١)\ \forall س \in [١،٢]$ أي ان $\int_{١}^{٢}(س^{٢}+٢)\,ds \geq \int_{١}^{٢}(٢س-١)\,ds$

ب) لا حظ ان $س^{٢}+٢ \geq ٠$ ، $\forall س \in ع$ ، و حسب خاصية المقارنة

$\int_{٢}^{٣}(س^{٢}+٢س)\,ds \geq ٠$

السؤال الثالث: أ) $\int_{١}^{٧} س^{٣}\,ds + \int_{٥}^{٧} س^{٣}\,ds = \int_{١}^{٧} س^{٣}\,ds$

ب) $\int_{١}^{٢} |س+٢|\,ds - \int_{٤}^{٢} |س+٢|\,ds$

$= \int_{١}^{٢} |س+٢|\,ds + \int_{٢}^{٤} |س+٢|\,ds = \int_{١}^{٤} |س+٢|\,ds$

ج) $\int_{١}^{٣} س^{٢}\,ds - \int_{٣}^{١} ٤\,ds + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds =$

$= \int_{١}^{٣} س^{٢}\,ds + \int_{١}^{٣} ٤\,ds + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds = \int_{١}^{٣}(س^{٢}+٤)\,ds + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds$

$= \int_{١}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

د) $\int_{٢}^{٧}(س-١)\,د س + \int_{٧}^{٢}(١-س)\,د س = \int_{٢}^{٧}\frac{س^{٢}-١}{س+١}\,د س = \int_{٢}^{٧}(س-١)\,د س + \int_{٧}^{٥}(١-س)\,د س$

$= \int_{٢}^{٧}(س-١)\,د س + \int_{٧}^{٥}(١-س)\,د س = \int_{٢}^{٥}(س-١)\,د س$

$= \int_{٢}^{٧}(س-١)\,د س$

السؤال الرابع: $\int_{١}^{٢} ن(س)\,د س = ٧$

أ) $\int_{١}^{٢}(٢ن(س)-(س)ن٣-س٣+١)\,د س = ٢\int_{١}^{٢} ن(س)\,د س - ٣\int_{١}^{٢} س\,د س + \int_{١}^{٢}\,د س$

$= ٢\times٧-٣(٢)١+٤ = -١٨$

ب) $\int_{١}^{٢}٢ا ن(س)\,د س = ٢ا\int_{١}^{٢} ن(س)\,د س = ٢ا\times٧ = ١$ ومنها $ا = \frac{١}{١٤}$

السؤال الخامس: $\forall س \in [\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٤}]$ ، جتاس ≤ جاس

$-$جتاس ≥ $-$جاس

١ $-$ جتاس ≥ ١ $-$ جاس

ومنها $\frac{٢}{١-\text{جتاس}} \leq \frac{٢}{١-\text{جاس}}$

$\frac{-٢}{١-\text{جتاس}} \geq \frac{-٢}{١-\text{جاس}}$

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}\frac{-٢}{١-\text{جتاس}}\,د س \geq \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}\frac{-٢}{١-\text{جاس}}\,د س$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السادس: $\int_{1}^{0} ن(س)\,ءس = ٨$

أ) $\int_{1}^{0} (٣ن(س) - ٢)\,ءس = ٣\int_{1}^{0} ن(س)\,ءس - \int_{1}^{0} ٢\,ءس$

$٣ \times ٨ - ٢ \times ٤ = ١٦$

ب) $\int_{٣}^{٧} (٤ن(س - ٢) - ٢س)\,ءس$

بفرض ص $= س - ٢$ وتبديل حدود التكامل يصبح $\int_{٣}^{٧} ن(س - ٢)\,ءس = \int_{1}^{0} ن(ص)\,ءص$

$\int_{٣}^{٧} (٤ن(س - ٢) - ٢س)\,ءس = ٤\int_{1}^{0} ن(ص)\,ءص - ٢\int_{٣}^{٧} س\,ءس = ٤ \times ٨ - ٤٠ = -٨$

السؤال السابع:

$\int_{٢}^{٧} ٣ن(س)\,ءس = ٩ ، \int_{٢}^{٤} ٥ن(س)\,ءس = ١٠$

$\int_{٤}^{٧} ٢ن(س)\,ءس = ٢\int_{٤}^{٧} ن(س)\,ءس = ٢(\int_{٤}^{٢} ن(س)\,ءس + \int_{٢}^{٧} ن(س)\,ءس)$

$٢(-\int_{٢}^{٤} ن(س)\,ءس + \int_{٢}^{٧} ن(س)\,ءس)$

$٢(-٢ + ٣) = ٢$

السؤال الثامن: $\int_{1}^{٣} ن(س)\,ءس = ١٨$

$\int_{1}^{٣} ن(س)\,ءس = \int_{1}^{٢} (أس + ١)\,ءس + ٣\int_{٢}^{٣} س^{٢}\,ءس = ١٨$

$أ(\frac{-٤}{٢}) + ١ + (٢٧ - ٨) = ١٨$

$أ = -٢ \Leftarrow \frac{-١٣}{٢} = -\frac{٤}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال التاسع: $\int_{-1}^{2} 3ع^2 \, دع = ع^3 \Big|_{-1}^{2} = 9$ فيكون

$$\int_{1}^{ب} (4س - 9) \, دس = \int_{-1}^{2} 3ع^2 \, دع = 12$$

ومنها $2ب^2 - 9ب - 5 = 0$ أي أن $(2ب + 1)(ب - 5) = 0$

$ب = -\frac{1}{2}$ ، $ب = 5$

السؤال العاشر: $ت(س) = |س - 2| = \begin{cases} 2 - س ، 0 \leq س \leq 2 \\ س - 2 ، 2 \leq س \leq 5 \end{cases}$

١) عندما $0 \leq س \leq 2$ ، فإن $ت(س) = \int_{ب}^{س} ت(ص) \, دص = \int_{ب}^{س} (2 - ص) \, دص = 2س - \frac{س^2}{2}$

٢) عندما $2 \leq س \leq 5$ فإن $ت(س) = \int_{ب}^{2} ت(ص) \, دص = \int_{ب}^{2} (2 - ص) \, دس + \int_{2}^{س} ت(ص) \, دص$

$= ت(2) + \int_{2}^{س} (ص - 2) \, دص = 2 + (\frac{س^2}{2} - 4س + 2)$ ومنها

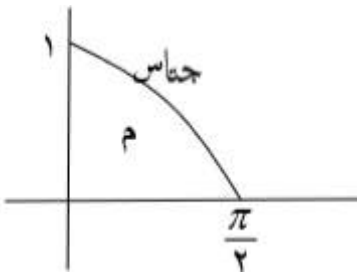
$$ت(س) = \begin{cases} 2س - \frac{س^2}{2} ، 0 \leq س < 2 \\ \frac{س^2}{2} - 4س + 4 ، 2 \leq س \leq 5 \end{cases}$$

تمارين (٥-٤أ) صفحة ٢٠٠

السؤال الاول :

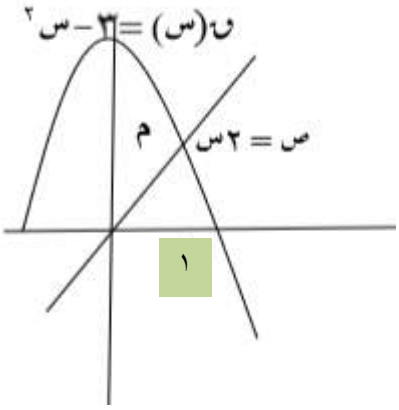
$$م = \int_{ب}^{\frac{\pi}{2}} |ت(س)| \, دس = \int_{ب}^{\frac{\pi}{2}} جتاس \, دس$$

$= جا\frac{\pi}{2} - جا(0) = 1$ وحدة مساحة



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثاني: معادلة المستقيم



المار بالنقطتين أ(٠،٠) ، ب(١، ٢) هي

$$\frac{ص-٠}{س-٠}=\frac{٢-٠}{١-٠} \Leftarrow ص=٢س$$

نجد نقاط تقاطع ق(س) والمستقيم ص = ٢س ⇐ هـ(س) = ٢س

$$٣-س^{٢}=٢س$$

$$\Leftarrow ٠=س^{٢}+٢س-٣=(س+٣)(س-١)$$

⇐ **س=١ أو س= -٣ ترفض**

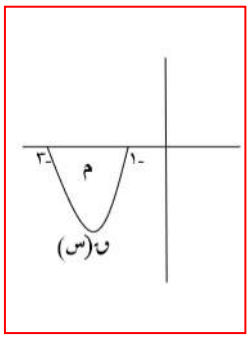
$$م=\int_{٠}^{١}|ن(س)-هـ(س)|\,ءس=\int_{٠}^{١}(٣-س^{٢}-٢س)\,ءس$$

$$=٣(٠-١)-\frac{٠-١}{٣}-٢\times\frac{٠-١}{٢}=\frac{٥}{٣}\text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الثالث:

$$ن(س)=(س^{٢}-٩)(س^{٢}-١)\Leftarrow ٠=(س-٣)(س+٣)(س-١)(س+١)$$

ومنها س=٣ أو س=١ ترفض لأن المساحة في الربع الثالث ، س=-٣ ، س=-١



$$م=\int_{-٣}^{-١}|ن(س)|\,ءس=\int_{-٣}^{-١}(س^{٢}-٩)(س^{٢}-١)\,ءس$$

$$=\int_{-٣}^{-١}(س^{٤}-١٠س^{٢}+٩)\,ءس=$$

$$=\left(\frac{(-١)^{٥}-(-٣)^{٥}}{٥}-١٠\times\frac{(-١)^{٣}-(-٣)^{٣}}{٣}+٩\times(-١+٣)\right)=\frac{٣٠٤}{١٥}\text{ وحدة مساحة}$$

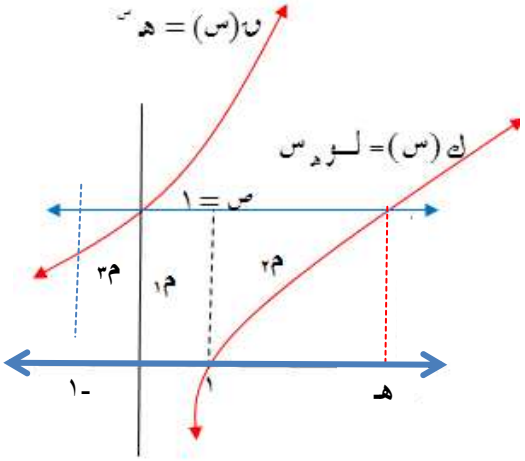
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الرابع :

نجد نقاط التقاطع بين

أولا : ق، ص $\Leftarrow$ $هـ^{س} = ١ \Leftarrow س = ٠$

ثانيا : ك ، ص $\Leftarrow$ $لـو_{هـ} س = ١ \Leftarrow س = هـ$



م = م١ + م٢ + م٣

$م_{١} = \int_{٠}^{١} ١ \, ءس = ١(١-٠) = ١$ **وحدة مساحة**

$م_{٢} = \int_{١}^{هـ} (١ - لـو_{هـ} س) \, ءس = \int_{١}^{هـ} ١ \, ءس - \int_{١}^{هـ} لـو_{هـ} س \, ءس$

$= ١(هـ-١) - \left(س لـو_{هـ} س |_{١}^{هـ} - \int_{١}^{هـ} س \times \frac{١}{س} \, ءس \right)$

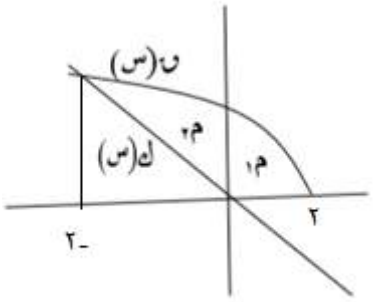
$= هـ - ١ - (هـ - ١ - ٠)) = هـ - ٢$ **وحدة مساحة**

$م_{٣} = \int_{-١}^{٠} هـ^{س} \, ءس = هـ^{س} |_{-١}^{٠} = \left(١ - \frac{١}{هـ}\right)$

م = م١ + م٢ + م٣ $= ١ + هـ - ٢ + ١ - \frac{١}{هـ} = هـ - \frac{١}{هـ}$ **وحدة مساحة**

السؤال الخامس:

نجد نقاط التقاطع بين ق(س) ، ك(س) $\Leftarrow$ $س^{٢} = ٢ - س$



$\leftarrow$ $س = ٢^{-}$ أو س= ١ ترفض

م = م١ + م٢

$م_{١} = \int_{٠}^{٢} ق(س) \, ءس = \int_{٠}^{٢} ٢\sqrt{٢ - س} \, ءس$

$= \left| \frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{١^{-} \times \frac{٣}{٢}} \right|_{٠}^{٢} = ٢^{-} \times \frac{٣}{٣} \left(\sqrt{٢ - س} \right)^{٣} |_{٠}^{٢}$

$= \frac{٢^{-}}{٣} \left(٢\sqrt{٢} \right)$ وحدة مساحة $= \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$م_{٢} = \int_{-٢}^{٠} |ن(س) - ك(س)| \, ءس = \int_{-٢}^{٠} \left(\sqrt{٢ - س} - (-س) \right) ءس$$

$$= \left| \frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-١ \times \frac{٣}{٢}} \right|_{-٢}^{٠} + \left| \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{-٢}^{٠} = \frac{-٢}{٣}(٢ - \sqrt{٢}٨) + \frac{٠ - ٤}{٢} = \frac{١٠}{٣} - \frac{\sqrt{٢}٤}{٣}$$ وحدة مساحة

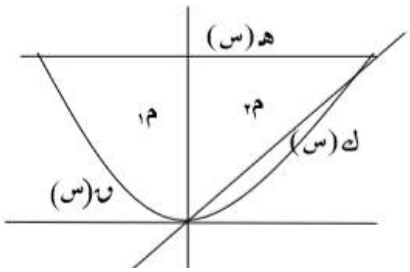
$$م = \frac{\sqrt{٢}٤}{٣} + \frac{١٠}{٣} - \frac{\sqrt{٢}٤}{٣} = \frac{١٠}{٣}$$ وحدة مساحة

السؤال السادس:

$ن(س) = هـ(س) \leftarrow س = \pm ٢$

$ن(س) = ك(س) \leftarrow س^{٢} = ٢س \leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

$هـ(س) = ك(س) \leftarrow س = ٢$



$م = م_{١} + م_{٢}$

$$م_{١} = \int_{-٢}^{٠} (هـ(س) - ن(س)) ءس = \int_{-٢}^{٠} (٤ - س^{٢}) ءس$$

$$= ٤(٠ + ٢) + \frac{(-٢)^{٣} - ٠}{٣} = ٨ - \frac{٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$$ وحدة مساحة

$$م_{٢} = \int_{٠}^{٢} (هـ(س) - ك(س)) ءس$$

$$= \int_{٠}^{٢} (٤ - ٢س) ءس = ٤(٢ - ٠) - ٢ \times \frac{٠ - ٤}{٢} = ٤$$ وحدة مساحة

$$م = \frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{٢٨}{٣}$$ وحدة مساحة

تمارين (٥-٤ب) صفحة ٢٠٥

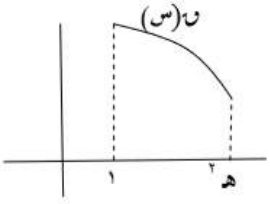
السؤال الأول: $ن(س) = ٤$ ومحوري السينات والصادات والمستقيم $س = ٥$ حول السينات

الحل : $ح = \pi \int_{٠}^{٥} ن(س)^{٢} ءس = \pi \int_{٠}^{٥} ١٦ ءس$

$= \pi ١٦ (٥ - ٠) = \pi ٨٠$ وحدة حجم

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثاني:

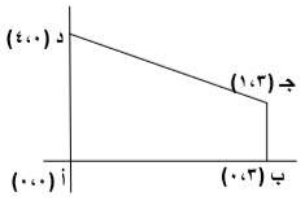


ن(س) = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١، س = هـ^{٢} حول السينات

الحل : ع = $\pi \int_{١}^{هـ^{٢}} ن^{٢}(س)$ ءس = $\pi \int_{١}^{هـ^{٢}} \frac{١٦}{س}$ ءس

= ١٦ π (لـو هـ$_{هـ^{٢}}$ − لـو هـ$_{١}$) = ١٦ π (٢ − ٠) = ٣٢ π وحدة حجم

السؤال الثالث:



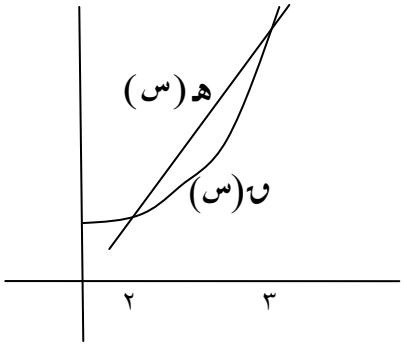
معادلة المستقيم جـ د هي

$\frac{ص - ٤}{س - ٠} = \frac{١ - ٤}{٠ - ٣}$ ← $\frac{ص - ٤}{س - ٠}$ = $^{-}$١ ← ص = $^{-}$س + ٤

ع = $\pi \int_{٠}^{٣} (٤ + ^{-}س)^{٢}$ ءس = $\left| \frac{\pi (٤ + ^{-}س)^{٣}}{٣ \times ^{-}١} \right|_{٠}^{٣}$

$\frac{\pi^{-}}{٣}$ (١^{٣} − ٤^{٣}) = $\frac{\pi ٦٣}{٣}$ = ٢١ π وحدة حجم

السؤال الرابع :



ن(س) = س^{٢} + ٦ ، هـ(س) = ٥س حول السينات

الحل : نجد نقاط التقاطع بين ن(س) ، هـ(س)

س^{٢} + ٦ = ٥س ← س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

⇐ (س − ٢)(س − ٣) = ٠ ← س = ٢ ، س = ٣

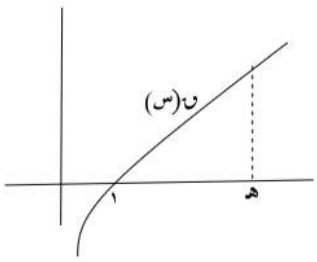
= $\pi \int_{٢}^{٣} ((هـ^{٢}(س) - ن^{٢}(س))$ ءس

= $\pi \int_{٢}^{٣} (٢٥س^{٢} - (س^{٤} + ١٢س^{٢} + ٣٦))$ ءس = $\pi \int_{٢}^{٣} (١٣س^{٢} - س^{٤} - ٣٦)$ ءس

= $\pi \left(١٣ \times \frac{٣^{٣} - ٢^{٣}}{٣} - \frac{٣^{٥} - ٢^{٥}}{٥} - ٣٦(٣ - ٢) \right)$ = $\frac{\pi ٦٢}{١٥}$ وحدة حجم

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس:



ن(س)=لـو$_{هـ}$ س ومحور السينات ، س = ١، س = هـ

ع = $\pi \int_{١}^{هـ} ن(س)^{٢} \, دس$ = $\pi \int_{١}^{هـ} (لـو_{هـ} س)^{٢} \, دس$ بالتعويض

نفرض أن

ص=لـو$_{هـ}$ س ⇐ س = هـ^{ص}

دص=$\frac{١}{س}$ دس ⇐ دس = هـ^{ص} دص

عندما س=١ ⇐ ص = ٠ ، س=هـ ⇐ ص = ١

ع = $\pi \int_{٠}^{١} ص^{٢} \times هـ^{ص} \, دص$ نكامل بالأجزاء

نفرض أن ن(س)=ص^{٢} ⇐ دن = ٢ص دص

ونفرض أن د و = هـ^{ص} دص ⇐ و = هـ^{ص}

ع = $\pi \left(ص^{٢} هـ^{ص} \Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} \, دص \right) = \pi \left(هـ - ٠ - \int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} \, دص \right)$

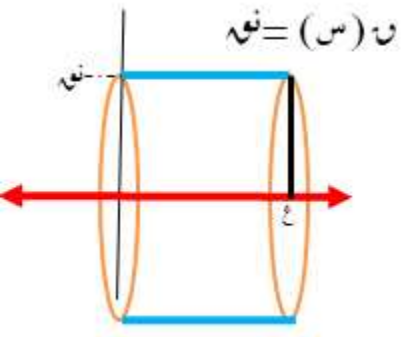
نجد $\int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} \, دص$ بالأجزاء

نفرض أن ن=٢ص ⇐ دن = ٢ دص ، د و = هـ^{ص} دص ⇐ و = هـ^{ص}

$\int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} \, دص = ٢ص \times هـ^{ص} \Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢هـ^{ص} \, دص = ٢هـ - ٠ - ٢(هـ - ١) = ٢$

ع = π (هـ − ٢) وحدة حجم

السؤال السادس :



الحل: نجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين
ن(س) =نهـ ومحوري الاحداثيات والمستقيم س = ع دورة كاملة حول محور السينات

ع = $\pi \int_{٠}^{ع} ن(س)^{٢} \, دس = \pi \int_{٠}^{ع} نهـ^{٢س} \, دس$

= π نهـ^{٢} (ع − ٠) = π نهـ^{٢} ع وحدة حجم

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السابع:

$ص(س) = \frac{٤}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ ومحور السينات والمستقيمين

س=٢ ، س=٣ دورة كاملة حول محور السينات

الحل : $ع = \pi \int_{٢}^{٣} ص^{٢}(س) \, ءس = \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{س^{٢} - ١} \, ءس$

$= \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{(س-١)(س+١)} \, ءس$ **نكامل بالكسور الجزئية**

$$\frac{١٦}{(س-١)(س+١)} = \frac{ا}{س-١} + \frac{ب}{س+١}$$

$$١٦ = ا(س+١) + ب(س-١) \leftarrow$$

عندما $س = ١ \Leftarrow ١٦ = ٢ا \Leftarrow ا = ٨$ ، $س = -١ \Leftarrow ١٦ = -٢ب \Leftarrow ب = -٨$

$$ع = \pi \left(\int_{٢}^{٣} \frac{٨}{س-١} \, ءس + \int_{٢}^{٣} \frac{-٨}{س+١} \, ءس \right)$$

$$ح = \pi \left(٨(لـو_{هـ}(٣-١) - لـو_{هـ}(٢-١)) - ٨(لـو_{هـ}(٣+١) - لـو_{هـ}(٢+١)) \right)$$

$= ٨\pi لـو_{هـ} ٣ - ٨\pi لـو_{هـ} ٢ = ٨\pi (لـو_{هـ} \frac{٣}{٢})$ **وحدة حجم**

تمارين عامة (الوحدة الخامسة) صفحة ٢٠٦

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	ب	أ	ج	أ	د	ج	ب	ب	ج	ج

السؤال الثاني :

$ع_{١٢} \sigma$ ، $س_{٣} = ٧$ ، $[ا، ب]$ **جد** ا، ب

$$س_{ر} = ا + \frac{ب - ا}{٦} ر$$

$$س_{٦} = ا + \frac{ب - ا}{١٢} \times ٦ \leftarrow ١٢ = ا + \frac{ب - ا}{٢} \leftarrow ٢٤ = ا + ب \quad \text{-----(١)}$$

$$س_{٣} = ا + \frac{ب - ا}{١٢} \times ٣ \leftarrow ٧ = ا + \frac{ب - ا}{٤} \leftarrow ٢٨ = ا + ٣ب \quad \text{-----(٢)}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$٢٨ = ٣أ + ب$$
$$٢٤ = أ + ب$$

$$٤ = أ \leftarrow ٢ = أ \Leftarrow ٢٤ = ٢ + ب \leftarrow ب = ٢٢$$

السؤال الثالث:

$$هـ(س) = ٣ن(س) + س$$

$$م(\sigma_{٤}، ن(س)) = ٦، \quad س \in [٠،٢]$$

$$م(\sigma_{٤}، ن(س)) = \frac{١٠ - ٢}{٤} = ٢ \Rightarrow \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}^{*}) = ٦ \Leftarrow \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}) = ٣$$

$$م(\sigma_{٤}، هـ(س)) = \frac{١٠ - ٢}{٤} = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} هـ(س_{ر}^{*}) = \sum_{ر=١}^{٤} ٣ن(س_{ر}^{*}) + س_{ر}^{*})$$

$$= ٦ \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}) + ٢ \sum_{ر=١}^{٤} س_{ر} = ٦ \times ٣ + ٢ \sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ٢)$$

$$= ١٨ + ٢\left(٢ \times ٤ + ٢ \frac{(١+٤) \times ٤}{٢}\right) = ١٨ + ٥٦ = ٧٤$$

السؤال الرابع:

$$ن(س) = ٣س، [١،٥]، س_{ر}^{*} = س_{ر}$$

$$م(\sigma_{٤}، ن(س)) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ن(س_{ر}^{*})$$

$$= \frac{٥ - ١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٣س_{ر} = \frac{٤}{ن} \times ٣ \sum_{ر=١}^{ن} \left(١ + ر\frac{٤}{ن}\right) = \frac{١٢}{ن}\left(ن + \frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}\right)$$

$$= \frac{١٢}{ن}(ن + ٢ن + ٢) = \frac{١٢}{ن}(٣ن + ٢) = ٣٦ + \frac{٢٤}{ن}$$

$$\int_{١}^{٣} س ٣س = \lim_{ن(س) \to \infty} م(\sigma_{ن}، ن(س)) = \lim_{ن(س) \to \infty} \left(٣٦ + \frac{٢٤}{ن}\right) = ٣٦$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس :

نفرض أن $ن(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٢ ، ٢]$

نجد القيم القصوى

$ن'(س) = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}} = ٠ \Leftarrow$ $س = ٠$ ومنها تكون قيم س الحرجة هي : $س = -٢ ، ٠ ، ٢$

$ن(-٢) = \sqrt{٤ - (-٢)^{٢}} = ٠$ ، $ن(٠) = \sqrt{٤ - (٠)^{٢}} = ٢$ ، $ن(٢) = \sqrt{٤ - (٢)^{٢}} = ٠$

اذن

$$٠ \leq ن(س) \leq ٢ \leftarrow \int_{-٢}^{٢} (٠)\,ds \leq \int_{-٢}^{٢} ن(س)\,ds \leq \int_{-٢}^{٢} ٢\,ds \leftarrow ٠ \leq \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\,ds \leq ٨$$

حل آخر: يمكن حل السؤال باستخدام المتباينات

$-٢ \leq س \leq ٢$ ومنها $٠ \leq س^{٢} \leq ٤$

$-٤ \leq -س^{٢} \leq ٠$ وبإضافة ٤ ينتج أن $٠ \leq ٤ - س^{٢} \leq ٤$

فيكون $٠ \leq \sqrt{٤ - س^{٢}} \leq ٢$ ومنها $\int_{-٢}^{٢} ٠\,ds \leq \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\,ds \leq \int_{-٢}^{٢} ٢\,ds$

وينتج أن $٠ \leq \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\,ds \leq ٨$

السؤال السادس :

$\int_{ب}^{س} ن(س)\,ds = س^{٢} - \sqrt{س}$ $\leftarrow$ $ت(س) = س^{٢} - \sqrt{س}$

$ن(س) = ت'(س) = ٢س - \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ $\leftarrow$ $ن(٤) = ٨ - \frac{١}{٤} = ٧\frac{٣}{٤}$

$ن'(س) = ٢ - \frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٢} س^{\frac{-٣}{٢}}$

$ن'(س) = ٢ + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{س^{\frac{٣}{٢}}}$ $\leftarrow$ $ن'(٤) = ٢ + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٨} = \frac{٦٥}{٣٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السابع:

ت(٢)=٠ ومنها ٨+٤جـ =٠ إذن جـ =-٢

ت(س) متصل عند س=٣

أ) $\text{نهـــا}_{س\to ٣^+} ت(س) = \text{نهـــا}_{س\to ٣^-} ت(س)$

$$٩ - ب٣ = ١٨ + ٢ \times ^{-}٢ \times ٣ \leftarrow ٦ = ب - ٩ ٣ \quad \text{------(١)}$$

$$ن(س) = ت'(س) = \begin{cases} ٤س + ^{-}٤ & ٣ \geq س > ٢، \\ ٩ & ٥ \geq س > ٣، \end{cases}$$

ت'(٣)$^{+}$ = ت'(٣)$^{-}$ ← ٩ = ٨ نعوض قيمة ٩ في معادلة (١) فنحصل على ما يلي :

$$٣ \times ٨ - ب = ٦ \leftarrow ب = ١٨$$

ب) $$\int_{٢}^{٤} ن(س)ىس = ت(٤) - ت(٢) = (٨ \times ٤ - ١٨) - (٠) = ١٤$$

السؤال الثامن :

أ) $$\int_{١}^{٢} ٦ه(س - ٢)^{٢}(س - ١)^{٥}ىس$$ ، **نفرض ان** ص = س − ١ ← س = ص + ١

ىص=ىس ، س = ١ ← ص = ٠ ، س = ٢ ← ص = ١

$$\int_{١}^{٢} ٦ه(س - ٢)^{٢}(س - ١)^{٥}ىس = \int_{٠}^{١} ٦ه(ص + ١ - ٢)^{٢}(ص)^{٥}ىص$$

$$= \int_{٠}^{١} ٦ه(ص - ١)^{٢}(ص)^{٥}ىص = \int_{٠}^{١} ٦ه(ص^{٢} - ٢ص + ١)ص^{٥}ىص$$

$$= \int_{٠}^{١} \left(٦ه ص^{٧} - ١٢ ص^{٦} + ٦ه ص^{٥}\right)ىص = ٧ص^{٨} - ١٦ ص^{٧} + \frac{٢٨}{٣}ص^{٦}\Big|_{٠}^{١} = \frac{١}{٣}$$

ب) $$\int_{هـ}^{هـ^{٢}} لـو_{هـ} س ىس =$$ **نفرض ان** ن=لـو$_{هـ}$ س ← ىن = $\frac{١}{س}$ىس ، ىو = ىس

$$\int_{هـ}^{هـ^{٢}} لـو_{هـ} س ىس = س لـو_{هـ} س\Big|_{هـ}^{هـ^{٢}} - \int_{هـ}^{هـ^{٢}} \frac{١}{س} \times س ىس = ٢هـ^{٢} - هـ - هـ^{٢} + هـ = هـ^{٢}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ج) $\int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,د س = \int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,د س$

$$\frac{س+٥}{س(س-١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} \leftarrow س+٥ = أ(س-١) + ب س$$

عندما $س = ٠ \leftarrow ٥ = -أ \leftarrow أ = -٥$ ، $س = ١ \leftarrow ١+٥ = ب \leftarrow ب = ٦$

$$\int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,د س = \int_{٣}^{٥} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,د س = \int_{٣}^{٥} \frac{أ}{س}\,د س + \int_{٣}^{٥} \frac{ب}{س-١}\,د س$$

$$= -\int_{٣}^{٥} \frac{٥}{س}\,د س + \int_{٣}^{٥} \frac{٦}{س-١}\,د س = -٥(لـو_{هـ}٥ - لـو_{هـ}٣) + ٦(لـو_{هـ}٤ - لـو_{هـ}٢)$$

$$= ٥لـو_{هـ}\frac{٣}{٥} + ٦لـو_{هـ}٢$$

د) $\int_{٠}^{٢} ا|س| \sqrt{س^{٤}+س^{٢}}\,د س = \int_{٠}^{٢} س \sqrt{س^{٢}+١}\,د س$ نكامل بالتعويض

نفرض ان $ص = س^{٢}+١ \leftarrow د ص = ٢س\,د س \leftarrow د س = \frac{د ص}{٢س}$

عندما $س = ٠ \leftarrow ص = ١$ ، عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٥$ ،

$$\int_{٠}^{٢} س \sqrt{س^{٢}+١}\,د س = \int_{١}^{٥} \sqrt{ص}\,\frac{د ص}{٢س}$$

$$= \int_{١}^{٥} \frac{١}{٢} \sqrt{ص}\,د ص = \frac{١}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{٥} = \frac{١}{٣}\left(\left(\sqrt{٥}\right)^{٣} - ١\right)$$

هـ) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}\sqrt{س^{٢}+١}}\,د س = \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٣} \times \sqrt{\frac{١}{س^{٢}}+١}}\,د س$ نكامل بالتعويض

نفرض ان $ص = \frac{١}{س^{٢}}+١ \leftarrow د ص = \frac{-٢س}{س^{٤}}\,د س \leftarrow -\frac{س^{٣}}{٢}\,د ص = د س$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\int \frac{1}{س^{2}\sqrt{س^{2}+1}}\,د س = \int \frac{1}{س^{3}\times\sqrt{\frac{1}{س^{2}}+1}}\,د س = \int \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{ص}}\,د ص$$

$$= -\frac{1}{2}\int ص^{-\frac{1}{2}}\,د ص = -\sqrt{ص}$$

$$\therefore \int_{1}^{2} \frac{1}{س^{2}\sqrt{س^{2}+1}}\,د س = -\sqrt{\frac{1}{س^{2}}+1}\Big|_{1}^{2} = \frac{-\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{2}$$

السؤال التاسع :

$$\int_{7}^{3} ن(س-2)\,د س = \int_{5}^{1} ن(س)\,د س \text{ وذلك بفرض ان } ص = س-2 \leftarrow د ص = د س$$

عندما $س = 7 \leftarrow ص = 5$ ، **وعندما** $س = 3 \leftarrow ص = 1$

$$\int_{3}^{-1} هـ(س+2)\,د س = \int_{5}^{1} هـ(س)\,د س \text{ وذلك بفرض ان } ص = س+2 \leftarrow د ص = د س$$

عندما $س = 3 \leftarrow ص = 5$ ، **وعندما** $س = -1 \leftarrow ص = 1$

$$ن(س) \leq هـ(س) ، س \in [1،5] \leftarrow \int_{1}^{5} ن(س)\,د س \leq \int_{1}^{5} هـ(س)\,د س$$

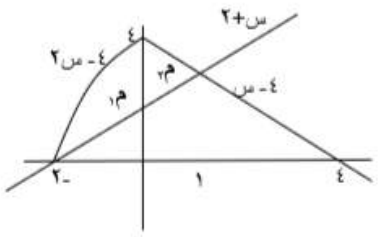
$$\leftarrow -\int_{1}^{5} ن(س)\,د س \geq -\int_{1}^{5} هـ(س)\,د س \leftarrow \int_{5}^{1} ن(س)\,د س \geq \int_{5}^{1} هـ(س)\,د س$$

$$\leftarrow \int_{7}^{3} ن(س-2)\,د س \geq \int_{3}^{-1} هـ(س+2)\,د س \text{ وهو المطلوب}$$

مكتبة الملتقى التربوي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال العاشر :



١) نجد نقاط تقاطع ق(س) ، هـ(س) عندما

$$س \geq ٠ \leftarrow س + ٢ = ٤ - س^{٢} \leftarrow س^{٢} + س - ٢ = ٠$$

$$(س + ٢)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = -٢ \ ، \ س = ١ \text{ ترفض}$$

$$\leftarrow م_{١} = \int_{-٢}^{١} (٤ - س^{٢} - س - ٢) د س = \int_{-٢}^{١} (٢ - س^{٢} - س) د س$$

$$= ٢(٠ + ٢) - \frac{٠ - (-٢)^{٣}}{٣} - \frac{٠ - (-٢)^{٢}}{٢} = \frac{١٠}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

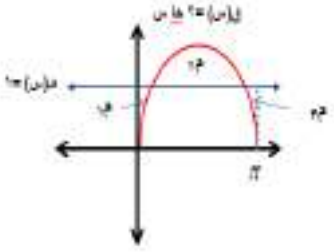
عندما $س < ٠ \leftarrow س + ٢ = ٤ - س \leftarrow ٢س = ٢ \leftarrow س = ١$

$$\leftarrow م_{٢} = \int_{٠}^{١} (٤ - س - س - ٢) د س = \int_{٠}^{١} (٢ - ٢س) د س$$

$$= ٢(١ - ٠) - \frac{١ - ٠}{٢} \times ٢ = ٢ - ١ = ١ \text{ وحدة مساحة}$$

م = م١ + م٢ = $\frac{١٠}{٣} + ١ = \frac{١٣}{٣}$ **وحدة مساحة**

٢) $ق(س) = ٢جاس \ ، \ هـ(س) = ١ \ ، \ س \in [٠ ، \pi]$



$$ق(س) = هـ(س) \leftarrow ٢جاس = ١ \leftarrow جاس = \frac{١}{٢}$$

$$س = \frac{\pi}{٦} \ ، \ س = \frac{٥\pi}{٦}$$

م = م١ + م٢ +م٣

$$م_{١} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} (١ - ٢جاس) د س = س + ٢جتاس \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢ \text{ وحدة مساحة}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$م_{٢} = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi ٥}{٦}} (٢جاس - ١)ءس = -٢جتاس - س \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi ٥}{٦}} = ٢\sqrt{٣} - \frac{\pi ٢}{٣}$$ وحدة مساحة

$$م_{٣} = \int_{\frac{\pi ٥}{٦}}^{\pi} (١ - ٢جاس)ءس = س + ٢جتاس \Big|_{\frac{\pi ٥}{٦}}^{\pi} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$$ وحدة مساحة

$$م = ٢(\frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢) + ٢\sqrt{٣} = \frac{\pi ٢}{٣} - \sqrt{٣} ٤ - \frac{\pi}{٣} - \sqrt{٣} ٤$$ وحدة مساحة

السؤال الحادي عشر :

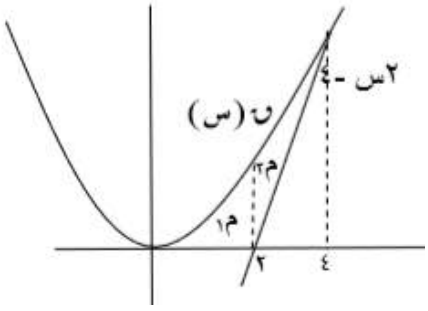
$$ب = \int_{١}^{٣} جتا^{٢}س ءس \quad ، \quad ا = \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + هـ^{س}) ءس$$

$$ا + ب = \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + هـ^{س}) ءس + \int_{١}^{٣} جتا^{٢}س ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + جتا^{٢}س + هـ^{س}) ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} (١ + هـ^{س}) ءس = ١(٣ - ١) + هـ^{٣} - هـ^{١} = ٢ + هـ^{٣} - هـ$$

السؤال الثاني عشر :



ن(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} والمماس المرسوم له عند (٤، ٤)

ومحور السينات

ن′(س) = $\frac{١}{٢}$ س ← ميل المماس = ن′(٤) = ٢

معادلة المماس هي ص - ٤ = ٢(س - ٤)

ص = ٢س - ٤

م = م١ + م٢

$$م_{١} = \int_{٠}^{٢} ن(س) ءس = \int_{٠}^{٢} \frac{١}{٤} س^{٢} ءس$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٢^{٣} - ٠^{٣}}{٣}\right) =$ وحدة مساحة $\frac{٢}{٣}$

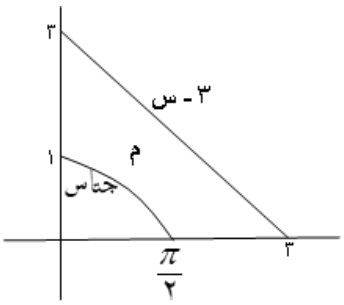
$م_{٢} = \int_{٢}^{٤} (ق(س) - ص)\,ﺩس = \int_{٢}^{٤} \left(\frac{١}{٤}س^{٢} - ٢س + ٤\right)ﺩس$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٤^{٣} - ٢^{٣}}{٣} - ٢ \times \frac{٤^{٢} - ٢^{٢}}{٢} + ٤(٤ - ٢) =$ وحدة مساحة $\frac{٢}{٣}$

$م = \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٣} =$ وحدة مساحة $\frac{٤}{٣}$

السؤال الثالث عشر:

$ق(س) =$ جتاس ، $ص = ٣ - س$ والمحورين الاحداثيين



$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (٣ - س)\,ﺩس - \int_{٠}^{٣} جتاس\,ﺩس$

$= ٣(٣ - ٠) - \frac{٣^{٢} - ٠^{٢}}{٢} - \left(جا\left(\frac{\pi}{٢}\right) - جا(٠)\right)$

$= ٩ - \frac{٩}{٢} - ١ =$ وحدة مساحة $\frac{٧}{٢}$

السؤال الرابع عشر:

أ) ف(٥) = بعد الجسم عن النقطة وعندما ن=٥ ثواني

$ف(٥) = \int_{٠}^{٥} ع(ن)\,ﺩن = \int_{٠}^{٢} ٥ن^{٢}\,ﺩن + \int_{٢}^{٥} (٢٤ - ٢ن)\,ﺩن$

$= ٥ \times \frac{٢^{٣} - ٠^{٣}}{٣} + ٢٤(٥ - ٢) - ٢ \times \frac{٢٥ - ٤}{٢}$

$= ٥١ + \frac{٤٠}{٣} = \frac{١٥٣ + ٤٠}{٣} = \frac{١٩٣}{٣}$ م

ب) ع(ن) = ٠ عندما $٠ \geq ن \geq ١٢ \leftarrow ٠ = ٥ن^{٢} \leftarrow ٠ = ن$

عندما $٢ > ن \geq ١٢ \leftarrow ٠ = ٢٤ - ٢ن \leftarrow ن = ١٢$ يتوقف الجسم عن الحركة عندما ن=١٢

$ف(١٢) = \int_{٠}^{١٢} ع(ن)\,ﺩن = \int_{٠}^{٢} ٥ن^{٢}\,ﺩن + \int_{٢}^{١٢} (٢٤ - ٢ن)\,ﺩن$

$= \frac{٤٠}{٣} + ٢٤٠ - ١٤٠ = ١٠٠ + \frac{٤٠}{٣} =$ وحدة مسافة $\frac{٣٤٠}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس عشر:

$ن'(س) = ن(س)$ ، $ن(س) \neq ٠$

أ) نفرض ان $ص = ن(س) \leftarrow ص = ن(س) \leftarrow ص = ن'(س) س \leftarrow ص = \frac{ص}{ن'(س)} \leftarrow س = \frac{ص}{ص}$

$$\int (ن(س))^{ن} س = \int ص^{ن} \times \frac{ص}{ص} = \int ص^{ن-١} \times ص$$

$$= \frac{ص^{ن}}{ن} + جـ = \frac{١}{ن} (ن(س))^{ن} + جـ \quad : جـ \in ع$$

ب) $ن'(س) = ن(س) \leftarrow \frac{ن'(س)}{ن(س)} = ١$

$$\int \frac{ن'(س)}{ن(س)} س = \int ١ س \leftarrow لـو_{هـ} |ن(س)| = س + جـ$$

$$|ن(س)| = هـ^{س+جـ} \leftarrow ن(س) = \pm هـ^{س}$$

السؤال السادس عشر :

$$\int_{ب}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا٢س}{س + ١} س = ؟ \text{ ما قيمة } \int_{ب}^{\pi} \frac{جتاس}{(س+٢)^{٢}} س$$

نفرض ان $ص = ٢س \leftarrow س = \frac{ص}{٢} \leftarrow س = \frac{ص}{٢}$

عندما $س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow ص = \pi$ ، $س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$$؟ = \int_{ب}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا٢س}{س + ١} س = \int_{ب}^{\pi} \frac{جاص}{\frac{ص}{٢} + ١} \times \frac{ص}{٢} \leftarrow ؟ = \int_{ب}^{\pi} \frac{جاص}{ص + ٢} \times ص$$

$$\int_{ب}^{\pi} \frac{جتاس}{(س+٢)^{٢}} س = \int_{ب}^{\pi} (س+٢)^{-٢} جتاس \, س \quad \text{نكامل بالاجزاء}$$

نفرض ان $ن(س) = جتاس \leftarrow ن = -جاس س$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\text{هـ}\,\text{د}س = (س+٢)^{-٢}\,\text{د}س \leftarrow \text{هـ} = -(س+٢)^{-١}$$

$$\int_{\cdot}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(س+٢)^{٢}}\,\text{د}س = \left|\frac{-\text{جتاس}}{(س+٢)}\right|_{\cdot}^{\pi} - \int_{\cdot}^{\pi} \frac{\text{جاس}}{س+٢}\,\text{د}س = \frac{١}{٢+\pi} + \frac{١}{٢} - ١$$

السؤال السابع عشر:

$$\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س = \int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س$$

نكامل الجزء الأول بالأجزاء $\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س$

نفرض أن: $ن = \frac{١}{س}$ $\qquad$ $\text{د}ع = \text{ك}'(س)\,\text{د}س$

$\therefore \text{د}ن = \frac{-١}{س^{٢}}\,\text{د}س$ $\qquad$ $ع = \text{ك}(س)$

فيكون $\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س = \left|\frac{\text{ك}(س)}{س}\right|_{١}^{٣} + \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س$

ومنها $\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س = \frac{\text{ك}(٣)}{٣} - \frac{\text{ك}(١)}{١} = -٢ - \frac{٦}{٣} = \cdot$

حل آخر: نفرض ان $ن(س) = \frac{\text{ك}(س)}{س} \leftarrow ن'(س) = \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س) \times ١}{س^{٢}}$

$$\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س)}{س^{٢}}\,\text{د}س = \int_{١}^{٣} ن'(س)\,\text{د}س = ن(٣) - ن(١)$$

$$\text{ك}(٣) = ٣\,\text{ك}(١) = ٦ \leftarrow \text{ك}(٣) = ٣\,\text{ك}(١) = ٦ \text{ ، } \text{ك}(١) = ٢ \quad \frac{\text{ك}(٣)}{٣} - \frac{\text{ك}(١)}{١} = -٢ - \frac{٦}{٣} = \cdot$$

السؤال الثامن عشر :

ص$س$ = ٤ + $س^{٢}$ ومحور السينات و المستقيمين س=١ ، س=٤

الحل : ص$س$ = ٤ + $س^{٢}$ $\leftarrow$ $س^{٢}ص^{٢} = (٤ + س^{٢})^{٢}$ $\leftarrow$ $ص^{٢} = \frac{١٦ + ٨س^{٢} + س^{٤}}{س^{٢}}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$ص^{٢} = ١٦ س^{-٢} + ٨ + س^{٢}$

$ع = \pi \int_{١}^{٤} ص^{٢} ؤس = \pi \int_{١}^{٤} (١٦ س^{-٢} + ٨ + س^{٢}) ؤس$

$= \pi \left(\frac{-١٦}{س} + ٨س + \frac{س^{٣}}{٣} \right)_{١}^{٤} = \pi \left((-٤ + ٣٢ + \frac{٦٤}{٣}) - (-١٦ + ٨ + \frac{١}{٣}) \right)$

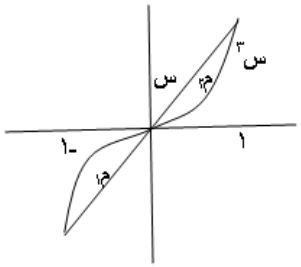
$= ٥٧ \pi$ وحدة حجم

السؤال التاسع عشر :

$ص_{١} = ظاس$ ، $ص_{٢} = قاس$ ، $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $س = \frac{\pi}{٦}$

$ظاس = قاس \leftarrow جاس = ١ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \notin \left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣} \right]$

$ع = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (قا^{٢}س - ظا^{٢}س) ؤس = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} ١ ؤس = \pi \left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٦} \right) = \frac{\pi}{٦}^{٢}$ وحدة حجم



السؤال العشرون :

$ع = ع_{١} + ع_{٢} = ٢ ع_{١} = ٢ \pi \int_{-١}^{٠} (هـ^{٢}(س) - ن^{٢}(س)) ؤس$

$= ٢ \pi \int_{٠}^{١} (س^{٢} - س^{٦}) ؤس = ٢ \pi \left(\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٧}}{٧} \right)_{٠}^{١} = \frac{٨ \pi}{٢١}$ وحدة حجم

السؤال الحادي والعشرون :

معتمدا على الشكل المجاور اوجد $\int_{-١}^{٢} س ن (س^{٢} - ٣) ؤس$ **علما بأن م١=٤ ، م٢=١٢**

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

الحل : نفرض ان : $ص = س^{-2} - ٣ \leftarrow ود ص = ٢س ود س \leftarrow ود س = \frac{ود ص}{٢س}$

عندما س = -١ فان ص = -٢ ، وعندما س = ٢ فان ص = ١

$$\int_{-١}^{٢} س\,ود(س^{-2} - ٣)\,ود س = \int_{-٢}^{١} س\,ود(ص) \times \frac{ود ص}{٢س} = \frac{١}{٢}\int_{-٢}^{١} ود(ص)\,ود ص$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\int_{-٢}^{١} ود(ص)\,ود ص + ص\,ود(ص)\right) = \frac{١}{٢}\left(٢^{-2} + ١^{-2}\right) = \frac{١}{٢}(٤ - ١٢) = -٤$$

حلول الوحدة السادسة(الأعداد المركبة)

تمارين ومسائل (٦-١) صفحة ٢١٥

السؤال الأول:

١) $٢ + ٢\,ط = ٢ + ٢\,ط^{-2}$

٢)
$$ط^{-1} \times ط^{٣٢} + ط^{-1} \times ط^{٢} = ط^{-2} + ط^{٣٢}$$
$$ط^{٥} + ط^{٠} = ط^{٥} = ط^{٤} + ط$$

٣)
$$ط^{-1} \times ط^{٢} \times ط^{-1} \times ط^{٨} = ط^{-2} \times ط^{-8}$$
$$= ٢\,ط \times ط^{٤} = ط^{٤} \times ١- = ٤- = ٤- + ط^{٠}$$

السؤال الثاني:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$\frac{٢}{٥}ت - ٣ = -٣ + \frac{٢}{٥}ت$	-٣	$\frac{٢}{٥}$
$ط^{-9} = ط^{٩}\,ت + ٠ = ٣\,ت$	٠	٣
$-١ + ط^{-1} = -١ + ت$	١	-١
$-٤ \times ط^{٩} = ط^{٣٦}\,ت + ٠ = ٦\,ت$	٠	٦

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$-٢ت= ٠ - ٢ ت$	٠	٢-
$\frac{١}{٣}=\frac{١}{٣}+ت،٠$	$\frac{١}{٣}$	٠

السؤال الثالث:

البرهان : الطرف الأيمن :

$$=(١+ت+ت^{٢})^{٣}(١-ت+ت^{٢})^{٣}$$
$$=(١-ت-١)^{٣}(١-ت+١)^{٣}$$
$$=(-ت)^{٣}(ت)^{٣}$$
$$=-ت^{٦}=-(-ت^{٢})^{٣}=١$$

= الطرف الأيسر

السؤال الرابع:

١) $ت^{٤٣}=ت^{٤٠}\times ت^{٣}=(ت^{٢})^{٢٠}\times -ت=-ت\times ١=-ت$

٢) $\frac{١}{ت^{٦٥}}=ت^{-٦٥}=ت^{-٦٨}\times ت^{٣}=(ت^{٢})^{-٣٤}\times -ت$
$=١\times -ت=-ت$

٣) $ت^{٢٧}+\frac{١}{ت^{٢٧}}=ت^{٢٧}+ت^{-٢٧}=ت^{٢٤}\times ت^{٣}+ت^{-٢٨}\times ت$
$=(ت^{٢})^{١٢}\times -ت+(ت^{٢})^{-١٤}\times ت=-ت+ت=٠=٠+٠=٠،ت$

السؤال الخامس:

البرهان : الطرف الأيمن=

$$\frac{ت^{٣}+ت^{٢}+٢ت+١}{ت^{٤}+ت^{٣}}=\frac{ت^{٣}(ت+١)+ت+١-\times ٢+١}{ت^{٣}(ت+١)}$$
$$=\frac{-ت+١}{-ت-ت^{٢}}=\frac{(ت-١)١-}{ت-١}=-١$$

= الطرف الأيسر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

تمارين ومسائل (٦-٢) صفحة ٢٢٠

السؤال الأول:

أ) $٤(٢+٤ت)+٥(٣-٢ت)$

$= ٨+١٦ت+١٥-١٠ت = ٢٣+٦ت$

ب)

$(٣+٤ت)(٣-٥ت)$

$= ٩-١٥ت+٢٠ت-٢٠ت^{٢}$

$= ٩-٣ت-٢٠\times-١ = ٢٩-٣ت$

ج)

$(٣+٤ت)^{٣} = (٣+٤ت)^{٢}(٣+٤ت)$

$= (٩+٢٤ت+١٦ت^{٢})(٣+٤ت)$

$= (٩-١٦+٢٤ت)(٣+٤ت)$

$= (-٧+٢٤ت)(٣+٤ت)$

$= -٢١-٢٨ت+٧٢ت+٩٦ت^{٢}$

$= -٢١-٩٦+٤٤ت = -١١٧+٤٤ت$

د) $٤ت(١-٥ت)^{٢} = ٤ت(١-١٠ت+٢٥ت^{٢})$

$= ٤ت(١-٢٥-١٠ت) = ٤ت(-٢٤-١٠ت)$

$= -٩٦ت-٤٠ت^{٢} = -٤٠-٩٦ت$

و) $(١-ت)^{٦} = ((١-ت)^{٢})^{٣} = (١-٢ت+ت^{٢})^{٣}$

$= (١-ت^{٢})^{٣} = (-٢ت)^{٣} = -٨ت^{٣}$

$= -٨\times-ت = ٨ت = ٨ت$

السؤال الثاني:

$س+٢س ت = -٥(س-٤ت)$

بوضع $س = ا+ب ت$

$\Leftarrow ا+ب ت+٢ت(ا+ب ت) = -٥(ا+ب ت-٤ت)$

$= ا+ب ت+٢ات-٢ب = -٢ا+(٢ا ب)ت$

$= -١٥ا+(-٥ب+٢٠)ت$

$\Leftarrow ا-٢ب = -١٥ا$

$\therefore ١٦ا = ٢ب \Leftarrow ب = ١٣ا$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\Leftarrow \quad ب + ١٢ا = -٥ب + ٢٠$$
$$\therefore ٦ب + ١٢ا = ٢٠ \Leftarrow ا + ٣ب = ١٠$$
$$\therefore ا + ٣ \times ١٣ا = ١٠ \Leftarrow ١٠ = ١١ا$$
$$\Leftarrow ا = ١، \quad ب = ٣ \qquad \therefore س = ١ + ٣ت$$

السؤال الثالث:

$$س - ص - ٢ = ص^{٢} ت - سـت$$
$$\therefore س + سـت = ص + ٢ + ص^{٢} ت$$
$$\therefore س = ص + ٢ \Leftarrow س - ص = ٢$$

$$، \quad س = ص^{٢} \Leftarrow \quad ص + ٢ = ص^{٢}$$
$$\Leftarrow ص^{٢} - ص - ٢ = ٠$$
$$(ص - ٢)(ص + ١) = ٠$$
$$\therefore ص = ٢ \Leftarrow س = ٤$$

$$، \quad ص = -١ \Leftarrow \quad س = ١$$

السؤال الرابع:

الطرف الأيمن= $ع^{٥} + ع^{٢}$

$$= ت^{٥} + ت^{٢} = ت + -١$$

الطرف الأيسر $= ع - ١ = ت + -١$

السؤال الخامس:

الطرف الأيمن= $ع^{٢} + ٢ع + ٢$

$$= (-١ + ت)^{٢} + ٢(-١ + ت) + ٢$$
$$= ١ + ت^{٢} - ٢ت - ٢ + ٢ت + ٢$$
$$= ١ - ١ - ٢ت - ٢ + ٢ت + ٢ = ٠$$

= الطرف الأيسر

السؤال السادس:

$$\frac{ت}{ت + ٣} = \frac{١ + ٣ت}{ا}$$
$$\Leftarrow اـت = (ت + ٣)(١ + ٣ت)$$
$$اـت = ت + ٣ت^{٢} + ٣ + ٩ت$$
$$اـت = ١٠ت - ٣ + ٣$$
$$\Leftarrow اـت = ١٠ت \Leftarrow ا = ١٠$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السابع:

١) $(٢ + \sqrt{٢}\,ت)^{-١} = س + ص ت$

$\Leftarrow (٢ + \sqrt{٢}\,ت)(س + ص ت) = ١$

$(٢س + ٢ص ت + \sqrt{٢}\,س ت + \sqrt{٢}\,ص ت^{٢}) = ١ + ٠ت$

$٢س - \sqrt{٢}\,ص + (٢ص + \sqrt{٢}\,س) ت = ١ + ٠ت$

$\therefore ٢ص + \sqrt{٢}\,س = ٠ \Leftarrow ص = -\sqrt{٣}\,س$

$٢س - \sqrt{٢}\,ص = ١ \Leftarrow ٢س - ٢ \times \sqrt{٣}\,س = ١$

$\therefore ٢س + ٦س = ١ \Leftarrow ٨س = ١ \Leftarrow س = \frac{١}{٨}$ $\quad ص = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{٨} = \frac{-\sqrt{٣}}{٨}$

$\therefore (٢ + \sqrt{٢}\,ت)^{-١} = \frac{١}{٨} - \frac{\sqrt{٣}}{٨} ت$

يمكن استخدام قاعدة النظير الضربي مباشرة

٢) $\left(\frac{ت}{٣ - ت}\right)^{-١} = س + ص ت$

$\Leftarrow \left(\frac{ت}{٣ - ت}\right)(س + ص ت) = ١$

$ت(س + ص ت) = ٣ - ت$

$ت س + ص ت^{٢} = ٣ - ت$

$\therefore ت س - ص = ٣ - ت$

$\therefore س = ١ ،\ ص = ٣$

$\therefore \left(\frac{ت}{٣ - ت}\right)^{-١} = ١ + ٣ت$

٣) $((١ + ت)^{١٣})^{-١} = (١ + ت)^{-١٣}$

$= (١ + ت)^{-١٤} \times (١ + ت)$

$= ((١ + ت)^{٢})^{-٧} \times (١ + ت)$

$= (١ + ٢ت + ت^{٢})^{-٧} \times (١ + ت)$

$= (٢ت)^{-٧} \times (١ + ت)$

$= \frac{١}{١٢٨} \times ت^{-٨} \times ت \times (١ + ت)$

$= \frac{ت}{١٢٨} \times (١ + ت) = \frac{-١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨} ت$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثامن:

بجمع المعادلتين ينتج أن:

$$٣ع_١ = -(-٨\sqrt{٢} + ٥٠\sqrt{٢}) = ت(-٢\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢}) = ت٣\sqrt{٢}$$

$$\Leftarrow ع_١ = ت\sqrt{٢}$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج أن:

$$٣ع_٢ = -٨\sqrt{٢}ت \Leftarrow ٣ع_٢ = -(-٨\sqrt{٢}ت - ٢\sqrt{٢}ت)$$

$$\Leftarrow ٣ع_٢ = -٢\sqrt{٢}ت - ٢\sqrt{٢}ت = -٣\sqrt{٢}ت$$

$$\Leftarrow ع_٢ = -\sqrt{٢}ت$$

تمارين ومسائل (٦-٣) صفحة ٢٢٦

السؤال الأول:

$$١ + \sqrt{-٤} + ١ = ت٢ + ١$$

$$\therefore |١ + \sqrt{-٤}| = |ت٢ + ١|$$

$$= \sqrt{١^٢ + ٢^٢} = \sqrt{٤ + ١}$$

$$= \sqrt{٥}$$

السؤال الثاني:

أ) $|-ع_١٣| = |-٣ - ٣ت| = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

ب) $ع_١ \overline{ع_١} = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^٢ = ٢$

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|٢ \times \frac{١}{٢}\right| = |١| = ١$$

حل آخر:

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢}(١^٢ + (١)^٢)\right|$$

$$= \left|\frac{١}{٢} \times ٢\right| = \sqrt{١} = ١$$

ج) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١ - ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{١ + ت^٢ - ٢ت}{١ + ١}$

$$= \frac{-٢ت}{٢} = -ت$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

$$\therefore \left|\frac{ع_٢}{ع_١}\right| = |ت - | = \sqrt{(٠)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{١} = ١$$

د) $ع_١ ع_٢ = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^٢ = ٢$

$$|٢ ع_١ ع_٢| = |٢ \times ٢| = |٤| = \sqrt{(٠)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

حل آخر:

$$|٢ ع_١ ع_٢| = |٢((١)^٢ + (١)^٢)| = |٢ \times ٢|$$

$$= |٤| = \sqrt{(٠)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

السؤال الثالث: $ع = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥} ت$

اولا: $ع^{-١} = \frac{١}{\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥} ت} = \frac{٥}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت}$

$$= \frac{١٥ + ٢٠ت}{٩ + ١٦} = \frac{١٥}{٢٥} + \frac{٢٠}{٢٥} ت = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} ت$$

ثانيا: $(٣ع)^{-١} = \left(\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥} ت\right)^{-١} = \frac{١}{\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥} ت}$

$$= \frac{٥}{٩ - ١٢ت} \times \frac{٩ + ١٢ت}{٩ + ١٢ت} = \frac{٤٥ + ٦٠ت}{٨١ + ١٤٤}$$

$$= \frac{٤٥}{٢٢٥} + \frac{٦٠}{٢٢٥} ت = \frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥} ت = \frac{١}{٣} ع^{-١}$$

ثالثا: $|ع^{-١}| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢} = \sqrt{\frac{٩ + ١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = \sqrt{١} = ١$

رابعا : $\left|\frac{ع}{٥}\right| = \left|\left(\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥} ت\right)\frac{١}{٥}\right| = \left|\left(\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} ت\right)\frac{١}{٥}\right|$

$$= \left|\frac{٣}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥} ت\right| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٢٥}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٩}{٦٢٥} + \frac{١٦}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{١}{٢٥}} = \frac{١}{٥}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الرابع:

أ) $\frac{-١+\sqrt{٢}ت}{ت+٢}=\frac{-١+\sqrt{٢}ت}{ت+٢}\times\frac{ت-٢}{ت-٢}$

$=\frac{-٢+ت+٢\sqrt{٢}ت-٢\sqrt{٢}ت^{٢}}{١+٤}$

$=\frac{-٢+\sqrt{٢}}{٥}+\frac{١+٢\sqrt{٢}}{٥}ت$

ب) $\frac{٣+٤ت}{٣-٥ت}+\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت}=\frac{٣+٤ت}{٣-٥ت}\times\frac{٣+٥ت}{٣+٥ت}+\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت}\times\frac{٢+٣ت}{٢+٣ت}$

$=\frac{٩+٢٧ت+٢٠ت^{٢}}{٩+٢٥}+\frac{٤+١٢ت+٩ت^{٢}}{٩+٤}$

$=\frac{-١١+٢٧ت}{٣٤}+\frac{-٥+١٢ت}{١٣}$

$=\frac{-١٤٣+١٧٠ت-٣٥١+٤٠٨ت}{٤٤٢}$

$=\frac{-٣١٣}{٤٤٢}+\frac{٧٥٩+}{٤٤٢}ت$

السؤال الخامس: **نفرض أن:** $ع=١+ب ت$

الطرف الأيمن= $ع-١=١+ب ت-١\Leftarrow|ع-١|=\sqrt{(١-١)^{٢}+ب^{٢}}$

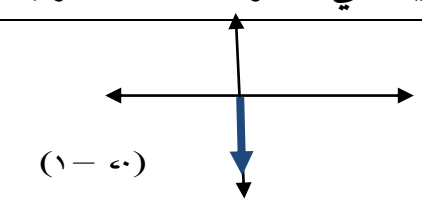
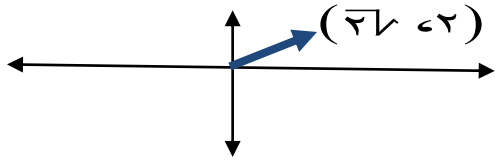
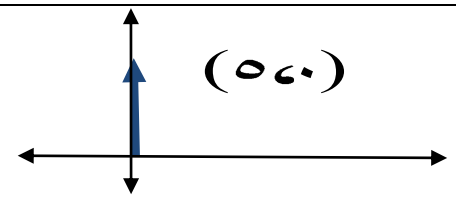
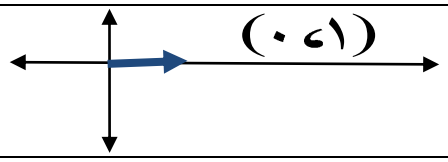
الطرف الأيسر= $\bar{ع}-١=١-ب ت-١\Leftarrow|\bar{ع}-١|=\sqrt{(١-١)^{٢}+(-ب)^{٢}}$

$\sqrt{(١-١)^{٢}+ب^{٢}}$

أي ان $|ع-١|=|\bar{ع}-١|$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال السادس

العدد	تمثيله في مستوى الأعداد المركبة
$ت^{٣٥} = ت^{٣٢} \times ت^{٣} = ١ \times -ت = -ت$ $= ٠ - ت = (٠، -١)$	
$٢ + \sqrt{-٢} + ٢ = ٢ + ت\sqrt{٢} = (\sqrt{٢}، ٢)$	
$\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩} = \sqrt{-١} \times \sqrt{٤} + \sqrt{-١} \times \sqrt{٩}$ $= ٢ت + ٣ت = ٥ت = ٠ + ٥ت = (٥، ٠)$	
$\frac{١}{ت^{٥٢}} = ت^{-٥٢} = (ت^{٢})^{-٢٦} = ١$	

السؤال السابع:

$\because ع^{٢} = (\bar{ع})^{٢} \Leftarrow (أ + ب ت)^{٢} = (أ - ب ت)^{٢}$

$\Leftarrow أ^{٢} - ب^{٢} + ٢أب ت = أ^{٢} - ب^{٢} - ٢أب ت$

$\therefore ٢أب = -٢أب \Leftarrow ٤أب = ٠$

$\therefore أ = ٠$ $\quad \therefore ع = ب ت$ **(عدد تخيلي)**

أو $ب = ٠$ $\quad \therefore ع = أ$ **(عدد حقيقي)**

السؤال الثامن:

أ) $ع = -١ + ت$

$|ع| = \sqrt{(-١)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{٢}$

$جتاه = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $جاه = \frac{١}{\sqrt{٢}}$،

$\therefore ه = \frac{٣\pi}{٤}$ **ومنها** $ع = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}\right)$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

ب) $ع = \frac{-١}{٢} + ٠ت$

$|ع| = \sqrt{\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$

$ظاهـ = \frac{٠}{\frac{-١}{٢}} = ٠ \quad \therefore هـ = \pi$

$\therefore ع = \frac{١}{٢}(جتا\pi + ت جا\pi)$

ج)

$ع = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت \quad ، \quad |ع| = ١$

$جتاهـ = -\frac{١}{٢} \quad ، جاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow هـ = \frac{٢}{٣}\pi$

$ع = (جتا \frac{٢}{٣}\pi + ت جا \frac{٢}{٣}\pi)$

السؤال التاسع:

ا)

$ع = ٧\left(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}\right) = ٧\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}ت\right)$

$= \frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}}ت$

ب)

$ع = ٣\left(جتا\frac{-\pi}{٦} + ت جا\frac{-\pi}{٦}\right) = ٣جتا\frac{\pi}{٦} - ٣ت جا\frac{\pi}{٦}$

$= ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣ \times \frac{١}{٢}ت = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}ت$

ج)

$ع = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٤} - ت جا\frac{\pi}{٤}\right) = ٢\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}ت\right)$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}ت = \sqrt{٢} - \sqrt{٢}ت$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

د) $ع = ٣\left(جتا\frac{\pi}{٣} + ت جا\frac{\pi}{٣}\right) = ٣\left(\frac{١}{٢} + ت\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$= \frac{٣}{٢} + ت\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

تمارين ومسائل (٦-٤) صفحة ٢٢٩

السؤال الأول:

أ) $ع^{٣} + ١ = ٠ \Leftarrow (ع+١)(ع^{٢} - ع + ١) = ٠$

$\therefore ع = -١$ أو، $ع = \frac{١ \pm \sqrt{١ \times ١ \times ٤ - ١}}{٢} = \frac{١}{٢} \pm ت\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الحلول = $\left\{-١ ، \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right\}$

ب) $(ع+١)^{٢} = ع \Leftarrow ع^{٢} + ٢ع + ١ = ع$

$\Leftarrow ع^{٢} + ع + ١ = ٠$

$\Leftarrow ع = \frac{-١ \pm \sqrt{١ \times ١ \times ٤ - ١}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ \pm ت\sqrt{٣}}{٢}$

الحلول = $\left\{\frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}\right\}$

ج) $(٣ - ٤ت)ع^{٢} = ت ع \Leftarrow ع((٣ - ٤ت)ع - ت) = ٠$

$\therefore ع = ٠$ أ، $ع = ت(٣ - ٤ت)$

$\Leftarrow ع = \frac{ت}{٣ - ٤ت} = \frac{ت}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت} = \frac{-٤ + ٣ت}{٢٥}$

الحلول هي: $\left\{٠ ، \frac{-٤ + ٣ت}{٢٥}\right\}$

السؤال الثاني: تكون المعادلة على الصورة

$س^{٢}$ - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠

مجموع الجذرين = $٣ + ٢ت$ ، حاصل ضربهما = $٥ + ٥ت$

المعادلة هي $س^{٢} - (٣ + ٢ت)س + ٥ + ٥ت = ٠$ يوجد طرق اخرى

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثالث:

أ) $(س + ص ت)^{٢} = \frac{١}{٤} \Leftarrow س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} = \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow س^{٢} - ص^{٢} = \frac{١}{٤}$ أو $٢س ص = ٠$

إما $س = ٠$ **مرفوض** أو $ص = ٠ \Leftarrow س^{٢} = \frac{١}{٤}$ $\therefore س = \pm \frac{١}{٢}$

الجذور = $\left(\frac{١}{٢} + ٠ت\right)$، $\left(-\frac{١}{٢} + ٠ت\right)$

ب) $(س + ص ت)^{٢} = -٤٩ \Leftarrow س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} = -٤٩ + ٠ت$

$\Leftarrow س^{٢} - ص^{٢} = -٤٩$ أو $٢س ص = ٠$

إما $ص = ٠$ **مرفوض** أو $س = ٠ \Leftarrow -ص^{٢} = -٤٩$ $\therefore ص = \pm ٧$

الجذور = $(٠ - ٧ت)$، $(٠ + ٧ت)$

ج) $(س + ص ت)^{٢} = ٢١ - ٠ ٢ت \Leftarrow س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} = ٢١ - ٢٠ت$

$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = ٢١$

أو $٢س ص = -٢٠ \Leftarrow س ص = -١٠ \Leftarrow ص = \frac{-١٠}{س}$

$\therefore س^{٢} - \left(\frac{-١٠}{س}\right)^{٢} = ٢١ \Leftarrow س^{٢} - \frac{١٠٠}{س^{٢}} = ٢١$

$\Leftarrow س^{٤} - ٢١ س^{٢} - ١٠٠ = ٠ \Leftarrow س^{٤} - ١٠٠ = ٢١ س^{٢}$

$\Leftarrow (س^{٢} + ٤)(س^{٢} - ٢٥) = ٠$

$\therefore س^{٢} = -٤ \Leftarrow س = \pm \sqrt{-٤} = \pm ٢ت$ **مرفوض**

أو $س^{٢} = ٢٥ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٢٥} = \pm ٥$ **بالتعويض ينتج أن:**

$ص = \frac{-١٠}{\pm ٥} = \mp ٢$

الجذور = $(٥ - ٢ت)$، $(-٥ + ٢ت)$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الرابع:

الطرف الأيسر= $(ع^{٢}-\sqrt{٢}ع+١)(ع^{٢}+\sqrt{٢}ع+١)$

$$=(ع^{٢}-\sqrt{٢}ع)(ع^{٢}+\sqrt{٢}ع+١)+(ع^{٢}+\sqrt{٢}ع+١)$$

$$=(ع^{٢}-\sqrt{٢}ع)(ع^{٢}+\sqrt{٢}ع)+(ع^{٢}-\sqrt{٢}ع)+(ع^{٢}+\sqrt{٢}ع+١)$$

$$=ع^{٤}-٢ع^{٢}+ع^{٢}-\sqrt{٢}ع+ع^{٢}+\sqrt{٢}ع+١$$

الطرف الأيمن= $ع^{٤}+١=$

ولحل المعادلة $ع^{٤}+١=٠$ **في كـ نضع** $(ع^{٢}-\sqrt{٢}ع+١)(ع^{٢}+\sqrt{٢}ع+١)=٠$

ومنها $(ع^{٢}-\sqrt{٢}ع+١)=٠$

$$ع=\frac{\sqrt{٢}\pm\sqrt{٢-}}{٢}=\frac{\sqrt{٢}\pm\sqrt{١\times١\times٤-٢}}{٢}\Leftarrow$$

$$\frac{\sqrt{٢}\pm\sqrt{٢}ت}{٢}$$

أو $(ع^{٢}+\sqrt{٢}ع+١)=٠$

$$ع=\frac{-\sqrt{٢}\pm\sqrt{٢-}}{٢}=\frac{-\sqrt{٢}\pm\sqrt{١\times١\times٤-٢}}{٢}\Leftarrow$$

$$\frac{-\sqrt{٢}\pm\sqrt{٢}ت}{٢}$$

إذن حلول المعادلة هي: $\left\{\frac{\sqrt{٢}\pm\sqrt{٢}ت}{٢}\text{، }\frac{-\sqrt{٢}\pm\sqrt{٢}ت}{٢}\right\}$

تمارين عامة/ الأعداد المركبة صفحة ٢٣٠

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الإجابة	ج	ج	أ	د	أ	ب	ب	أ	د

السؤال الثاني:

أ) $|ع_{١}|=|١+٢ت|=\sqrt{(١)^{٢}+(٢)^{٢}}=\sqrt{٥}$

ب) $|ع_{٢}|=|٢-ت|=\sqrt{(٢)^{٢}+(-١)^{٢}}=\sqrt{٥}$

ج) $|ع_{١}+ع_{٢}|=|٣+ت|=\sqrt{(٣)^{٢}+(١)^{٢}}=\sqrt{١٠}$

د) $|ع_{١}|+|ع_{٢}|=\sqrt{٥}+\sqrt{٥}=٢\sqrt{٥}=\sqrt{٢٠}$ **نلاحظ أن:** $|ع_{١}+ع_{٢}|\neq|ع_{١}|+|ع_{٢}|$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الثالث:

أ) $ت = ع(١ + ٣ت) \Leftarrow ت = ع + ٣ت ع$

$$ع = \frac{ت}{١ + ٣ت} = \frac{ت}{١ + ٣ت} \times \frac{١ - ٣ت}{١ - ٣ت}$$

$$\therefore ع = \frac{٣ + ت}{٩ + ١} = \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{١٠} ت$$

ب) $٠ = (١ + ع)١ + (١ + ع) ع^{٢} \Leftarrow ٠ = ١ + ع + ع^{٢} + ع^{٣}$

$$٠ = \left(١ + ع^{٢}\right)(١ + ع) \Leftarrow$$

$$\therefore ع = -١ \quad أ، \quad ع^{٢} = -١ \Leftarrow ع = \pm \sqrt{-١} = \pm ت$$

الحلول = $\{-١، ت، -ت\}$

ج) $٠ = \left(١ + ع^{٢}\right)\left(٤ + ع^{٢}\right) \Leftarrow ٠ = ٤ + ٥ع^{٢} + ع^{٤}$

$$٠ = \left(ع^{٢} - ت^{٢}\right)\left(ع^{٢} - ٤ت^{٢}\right) \Leftarrow$$

ومنها $ع = \pm ت٢ \Leftarrow ع^{٢} = ٤ت^{٢}$

أو $ع = \pm ت \Leftarrow ع^{٢} = ت^{٢}$

السؤال الرابع: $(س + صت)^{٢} = ٥ + ١٢ت \Leftarrow س^{٢} + ٢س صت - ص^{٢} = ٥ + ١٢ت$

$$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = ٥ \quad ..... \quad (١)$$

$$\text{أو } ٢س ص = ١٢ \Leftarrow س ص = ٦ \Leftarrow ص = \frac{٦}{س}$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore س^{٢} - \frac{٣٦}{س^{٢}} = ٥ \Leftarrow س^{٤} - ٥س^{٢} - ٣٦ = ٠$$

$$\therefore \left(س^{٢} + ٤\right)\left(س^{٢} - ٩\right) = ٠ \Leftarrow \left(س^{٢} - ٤ت^{٢}\right)\left(س^{٢} - ٩\right) = ٠$$

ومنها $س^{٢} = ٤ت^{٢} \Leftarrow س = \pm ت٢$ **مرفوض لأن س عدد حقيقي**

$$\text{أو } س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣ \Leftarrow ص = \frac{٦}{\pm ٣} = \pm ٢$$

الجذور = $\{٣ + ٢ت، -٣ - ٢ت\}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

السؤال الخامس:

$\because$ س^{٢} + س + (ص − ١) ت = − ت س^{٢}

$\therefore$ س^{٢} + س + (ص + س^{٢} − ١) ت = ٠

ومنها س^{٢} + س = ٠ ، ص + س^{٢} − ١ = ٠ $\Leftarrow$ ص = ١ − س^{٢}

$\Leftarrow$ س (س + ١) = ٠

إذن إما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ١

أو س = − ١ $\Leftarrow$ ص = ٠

الحلول هي (٠، ١)، (٠، − ١)

السؤال السادس:

أ) ل = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت}$، م = $\frac{١ ات - ٣}{١+٢ت}$

ل = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{٣-ت}{٣-ت}$

$= \frac{٥(١-٦ت-٩)}{١+٩} = \frac{-٨-٦ت}{٢} = -٤-٣ت$

م = $\frac{١ ات - ٢}{١+٢ت} = \frac{١ ات - ٢}{١+٢ت} \times \frac{-١-٢ت}{-١-٢ت}$

$= \frac{١ ات + ٢٢ - ٢ + ٤ت}{٤+١} = \frac{٢٠ + ١٥ ات}{٥} = ٤ + ٣ت = \bar{ل}$

إذن ل ، م مترافقان

ب) ل + م = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} + \frac{١ ات - ٣}{١+٢ت} = -٤-٣ت+٤+٣ت = ٨$

ل م = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{١ ات - ٣}{١+٢ت} = (-٤-٣ت)(٤+٣ت) = ١٦+٩ = ٢٥$

$\Leftarrow$ ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ل م = ٨^{٢} − ٢ × ٢٥ = ١٤

السؤال السابع:

$\frac{-ت-\sqrt{٣}}{١+ت\sqrt{٣}} = \frac{-ت-\sqrt{٣}}{١+ت\sqrt{٣}} \times \frac{-١-ت\sqrt{٣}}{-١-ت\sqrt{٣}} = \frac{-٤ت-\sqrt{٣}-\sqrt{٣}}{٣+١} = \frac{-٤ت}{٤} = -ت$

$\Leftarrow \left(\frac{-ت-\sqrt{٣}}{١+ت\sqrt{٣}}\right)^{٧} = (-ت)^{٧} = -١ \times ت^{٤} \times ت^{٣} = -١ \times ١ \times -ت = ت$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5

جدول يتضمن التعديلات على الاجابات التي وردت في كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر العلمي الجديد

الوحدة	البند/ الصفحه/ رقم السؤال	الاجابه في الكتاب	التعديل	الوحدة	البند/ الصفحه/ رقم السؤال	الاجابه في الكتاب	التعديل
الاولى	(١-٧) صفحه ٢٣٤ السؤال الثاني	$\frac{1}{هـ}-1$	$\frac{1}{هـ}-1$	الرابعة	(٤-٢) صفحه ٢٤٣ السؤال الأول /هـ	$\frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}س^{\frac{4}{3}}+س+جـ$	$\frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{4}س^{\frac{4}{3}}+س+جـ$
	(١-٧) صفحة ٢٣٤ السؤال الثالث	$\frac{3س^{2}-6س}{س^{3}-3س}$	$\frac{3س^{2}-6س}{3س-س^{3}}$		(٤ – ٤ ب) صفحه ٢٤٤ السؤال الأول د	$\frac{1}{2}جا2س+\frac{1}{4}جا2س+جـ$	$\frac{-1}{2}جا2س+\frac{-1}{4}جا2س+جـ$
	تمارين عامه صفحه ٢٣٥/س١٦	$\pm\sqrt{2}$	(ن(٢)، ن(٢))، (ن(٢)، ن(-٢))، (ن(-٢)، ن(٢))، (ن(-٢)، ن(-٢))		(٤ – ٤ ج) صفحه ٢٤٥ السؤال الأول /ي	$\frac{1}{3}لـ_{هـ}\|س^{3}\|+لـ_{هـ}\|س^{3}+1\|+جـ$	$\frac{-1}{3}لـ_{هـ}\|س^{3}\|+لـ_{هـ}\|س^{3}+1\|+جـ$
الثانية	(٢ – ٢) صفحة ٢٣٦ السؤال الثاني	في متزايد على ح	في متزايد على ح+		(٤ – ٤ ج) صفحه ٢٤٥ السؤال الأول /حـ	$\frac{1}{8}لـ_{هـ}\|٤+جتاس\|+\frac{1}{8}لـ_{هـ}\|٤-جتاس\|+جـ$	$\frac{-1}{8}لـ_{هـ}\|٤-جتاس\|+\frac{1}{8}لـ_{هـ}\|٤+جتاس\|+جـ$
	(٢ – ٣) صفحة ٢٣٧ السؤال الثالث /ج		يضاف ن$(\frac{\pi3}{2})=0$ قيمة عظمى مطلقة	الخامسة	تمارين عامه صفحه ٢٤٦ السؤال الخامس	$ص=\frac{-1}{3(2س^{3}-4س)^{3}}+جـ$	$ص=\frac{-1}{6(2س^{3}-4س)^{3}}+\frac{47}{48}$
	(٢ – ٤) صفحة ٢٣٨ السؤال الخامس/ أ		يضاف (٣ ، ق(٣)) نقطة انعطاف		(٥- ٤)صفحة ٢٤٧ السؤال العاشر	تعدل الفترة الثانية في ت(س) الى $س\in[٤،2]$	تعدل الفترة الثانية في ت(س) الى $س\in[٥،2]$
	(٢ – ٤) صفحة ٢٣٨ السؤال الثامن /أ		يضاف س=-٣ ، ٢وكذلك ق(-٣) صغرى محلية ، ق(٢) عظمى محلية	السادسة	تمارين عامه صفحه ٢٤٨ السؤال العاشر /ب	$\frac{\pi5}{12}+2\sqrt{5}$ وحدة مساحة	$4-\frac{\pi}{3}-3\sqrt{4}$ وحدة مساحة
	تمارين عامه صفحه ٢٣٩/موضوعي		تعدل اجابه الفقرة ٤ (ب)، ٥(د)، ٧(أ) ١٠(ج)		(٦ – ٣)صفحه ٢٤٩-٢٥٠/س ٣ أ	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}ن$
	تمارين عامه صفحه ٢٣٩السؤال الرابع	أ= ٤	أ= ٤ أو أ= -١		(٦ – ٣)صفحة ٢٤٩-٢٥٠/س ٨	$ع=\sqrt{2}(جتا\frac{\pi7}{4}+ن جتا\frac{\pi7}{4})$	$ع=\sqrt{2}(جتا\frac{\pi3}{4}+ن جتا\frac{\pi3}{4})$
الرابعة	تمارين عامه صفحة ٢٣٩السؤال الثامن	$ق_{هـ}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$	$ق_{هـ}=\frac{20\sqrt{2}}{3}$		(٦ – ٣)صفحة ٢٤٩-٢٥٠/س ٩ د	$\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}ن$	$\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}ن$
	(٤-٢) صفحة ٢٤٣ السؤال الأول /د	$\frac{2}{5}س^{2}+ق_{1}س+جـ$	$\frac{5}{2}س^{2}+ق_{1}س+جـ$		(٦ – ٤)صفحة ٢٥١ السؤال الثاني	$س^{2}-(3+2ن)س-(5+5ن)=0$	$س^{2}-(3+2ن)س+(5+5ن)=0$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109084 | TRACK 21fa34bea23c9ee5