إدارة المنتزة التعليمية
توجيه الرياضيات

إجتماع المكتب الفني

يوم : الأحد الموافق : ٢٠١٩/٠٢/٢٤م

محاضرة في ألومبياد الرياضيات

إعداد

موجه / أحمد إبراهيم

موجه أول

أ/ سميحة سعدى

إدارة المنتزة التعليمية
توجيه الرياضيات

مكتب فنى ٢٠١٩/٢/٢٤م

الإستعداد لمسابقة الألومبياد

بعض القوانين والعلاقات التي لا غنى عنها عند حل تمارين الالومبيات

الاوساط وعلاقتها ببعضها :

لأي عددين حقيقيين موجبين س ، ص يوجد ٤ أوساط هي

أ	(الوسط التربيعي(ع) $ع^٢ = \frac{س^٢ + ص^٢}{٢}$
ب	الوسط الحسابي (ح)= $\frac{س + ص}{٢}$
حـ	الوسط الهندسي(هـ) = $\sqrt{س ص}$
ء	الوسط التوافقي (ن)= $\frac{٢}{\frac{١}{س} + \frac{١}{ص}}$

العلاقة بينهم

ع ⩾ ح ⩾ هـ ⩾ ن

و	الوسط الحسابي (ح) لثلاثة أعداد س ، ص ، ع = $\frac{س + ص + ع}{٣}$
حـ	الوسط الهندسي(هـ) لثلاثة أعداد س ، ص ، ع = $\sqrt[٣]{س ص ع}$

العلاقة بينهم ح ⩾ هـ

إذا كان س ، ص ، ع أعداد حقيقية فإن :

(١) **إذا كان** : $س + ص + ع = 0$ **فإن** : $س^{3} + ص^{3} + ع^{3} = 3\, س\, ص\, ع$

(٢) $س^{3} + ص^{3} + ع^{3} - 3\, س\, ص\, ع = (س+ص+ع)(س^{2}+ص^{2}+ع^{2} - س\,ص - س\,ع - ص\,ع)$

(٣) $(س^{2}+ص^{2}+ع^{2} - س\,ص - س\,ع - ص\,ع) = \frac{1}{2}\left((س-ص)^{2}+(س-ع)^{2}+(ص-ع)^{2}\right)$

(٤) $س^{3} + ص^{3} + ع^{3} - 3\, س\, ص\, ع =$

$$= \frac{1}{2}(س+ص+ع)\left[(س-ص)^{2}+(س-ع)^{2}+(ص-ع)^{2}\right]$$

(٥) **متباينة كوشي**

لكل الأعداد أ ، ب ، حـ ، س ، ص ، ع نجد أن

$$(أ+ب+حـ)(س+ص+ع) \geq \left(\sqrt{أ\,س}+\sqrt{ب\,ص}+\sqrt{حـ\,ع}\right)^{2}$$

(متباينة كوشي - شفارتس) إذا كانت $أ_1،\dots،أ_ن ، ب_1،\dots، ب_ن \in ح$ ، فإن

$$(أ_1ب_1+\dots+أ_نب_ن)^{2} \leq (أ_1^{2}+\dots+أ_ن^{2})(ب_1^{2}+\dots+ب_ن^{2})$$

(٦) $س^{2}(ص-ع)+ص^{2}(ع-س)+ع^{2}(س-ص) = (س-ص)(ص-ع)(س-ع)$

(٧) $(س+ص+ع)^{2} = س^{2}+ص^{2}+ع^{2}+2(س\,ص+س\,ع+ص\,ع)$,

(٨) **المقدار الدورى أو الدالة الدورية :**

$$أ^{2}(ب+حـ)+ب^{2}(أ+حـ)+حـ^{2}(أ+ب)+2أبحـ = (أ+ب)(ب+حـ)(أ+حـ)$$

(٩)

متباينة الوسط التوافقى – الوسط الحسابى –الوسط الهندسي – الوسط التربيعي :

إذا كان أ،ب عددين حقيقيين موجبين، فإن

$$\text{أصغر}(أ،ب) \leq \frac{2أب}{أ+ب} \leq \sqrt{أب} \leq \frac{أ+ب}{2} \leq \sqrt{\frac{أ^{2}+ب^{2}}{2}} \leq \text{أكبر}(أ،ب)$$

حيث يرمز **أصغر** (أ،ب) لأصغر العددين و **أكبر** (أ،ب) لأكبرهما.

إذا كانت أ،ب،جـ $\in$ ح، فإن

$$أ^{2}+ب^{2}+جـ^{2} \geq أب+ب\,جـ+جـ\,أ$$

إذا كانت أ، ب، جـ، د أعداداً نسبية غير سالبة فإن

$$\sqrt{أ ب} + \sqrt{جـ د} \geq \sqrt{(أ + جـ)(ب + د)}$$

لتكن $أ س^2 + ب س + جـ = 0$، معادلة تربيعية، حيث أ، ب، جـ أعداد نسبية وَ $أ \neq 0$. إذا كان $ك + ل\sqrt{م}$ جذراً للمعادلة التربيعية، حيث ك، ل، م أعداد نسبية وَ $\sqrt{م}$ غير نسبي، فإن $ك - ل\sqrt{م}$ هو الجذر الثاني للمعادلة التربيعية.

جذور المعادلات التكعيبية

الشكل العام للمعادلة التكعيبية هو:

$أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د = 0$، حيث أ، ب، جـ، د $\in$ ح، $أ \neq 0$

إذا كانت $س_1$، $س_2$، $س_3$ الجذور الثلاثة للمعادلة التكعيبية

$$س_1 + س_2 + س_3 = -\frac{ب}{أ}$$

$$س_1 س_2 س_3 = -\frac{د}{أ}$$

$$س_1 س_2 + س_2 س_3 + س_3 س_1 = \frac{جـ}{أ}$$

$$\frac{1}{س_1} + \frac{1}{س_2} + \frac{1}{س_3} = \frac{س_1 س_2 + س_2 س_3 + س_3 س_1}{س_1 س_2 س_3} = \frac{\frac{جـ}{أ}}{-\frac{د}{أ}} = -\frac{جـ}{د}$$

(1) $س^2 - أ^2 = (س + أ)(س - أ)$

(2) $س^3 - أ^3 = (س - أ)(س^2 + أ س + أ^2)$

(3) $س^3 + أ^3 = (س + أ)(س^2 - أ س + أ^2)$

(1) $(س + ص)^2 = س^2 + 2 س ص + ص^2$

(2) $(س - ص)^2 = س^2 - 2 س ص + ص^2$

(3) $(س + ص)^3 = س^3 + 3 س^2 ص + 3 س ص^2 + ص^3$

(4) $(س - ص)^3 = س^3 - 3 س^2 ص + 3 س ص^2 - ص^3$

لنفرض أن ك أي عدد حقيقي ثابت وأن م أي عدد صحيح موجب.

(١) $\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ك} = \text{م}\,\text{ك}$

(٢) $\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ن} = \frac{\text{م}(\text{م}+١)}{٢}$

(٣) $\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ن}^{٢} = \frac{\text{م}(\text{م}+١)(٢\text{م}+١)}{٦}$

(٤) $\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ن}^{٣} = \left(\frac{\text{م}(\text{م}+١)}{٢}\right)^{٢}$

(٥) $\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ك}\,\text{أ}_{\text{ن}} = \text{ك} \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{أ}_{\text{ن}}$

(٦) $\sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} (\text{أ}_{\text{ن}} \mp \text{ب}_{\text{ن}}) = \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{أ}_{\text{ن}} \mp \sum_{\text{ن}=١}^{\text{م}} \text{ب}_{\text{ن}}$

يوجد ٤ طرق لإختيار ر من العناصر من ن من العناصر كما يلي :

بتكرار		بدون تكرار	
بترتيب	بدون ترتيب	بترتيب	بدون ترتيب
$\text{ن}^{\text{ر}}$	${}^{\text{ن}+\text{ر}-١}\text{ق}_{\text{ر}}$	${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$	${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

خد بالك : قاعدة هامة :

لو عندك عناصر من انواع مختلفة : $\text{ع}_{١}$، $\text{ع}_{٢}$، ....، $\text{ع}_{\text{ن}}$ وأخذنا منها عينات عددها بالترتيب : $\text{م}_{١}$، $\text{م}_{٢}$، ....، $\text{م}_{\text{ن}}$ بحيث كان :

عددها $= \text{ك} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢} + \cdots + \text{م}_{\text{ن}}$

فإن عدد تباديل هذه العناصر $= \frac{\text{ك}!}{\text{م}_{١}! \times \text{م}_{٢}! \times \cdots \times \text{م}_{\text{ن}}!}$

هناك حالات مختلفة لتوزيع ر من الكرات على ن من الصناديق:

(١) الكرات مختلفة والصناديق مختلفة: عدد الطرق $= \text{ن}^{\text{ر}}$

(٢) الكرات متطابقة والصناديق مختلفة: عدد الطرق $= {}^{\text{ن}+\text{ر}-1}\text{ق}_{\text{ر}}$

---

(٣) الكرات مختلفة والصناديق متطابقة (ولا صندوق فارغ):

$$\text{عدد الطرق} = \text{ع}(\text{ر}،\text{ن}) = \frac{1}{\underline{|\text{ن}}} \sum_{\text{هـ}=0}^{\text{ن}} (-1)^{\text{هـ}} \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{هـ}} \times (\text{ن}-\text{هـ})^{\text{ر}}$$

---

(٤) الكرات متطابقة والصناديق متطابقة (ولا يوجد صندوق فارغ):

$$\text{عدد الطرق} = \text{ع}(\text{ر}،\text{ن}) = \frac{1}{\underline{|\text{ن}}} \sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \text{ع}(\text{ر}-\text{ن}،\text{هـ}) = \text{ع}(\text{ر}-1،\text{ن}-1) + \text{ع}(\text{ر}-\text{ن}،\text{ن})$$

مع العلم بأن : $\text{ع}(\text{ر}،\text{ن}) = 0$ **عندما** $\text{ر} < \text{ن}$ ، $\text{ع}(\text{ر}،\text{ر}) = \text{ع}(\text{ر}،1) = 1$

---

(٥) عدد طرق توزيع ر من الكرات المختلفة علي ن من الصناديق المختلفة حيث $\text{ر} \le \text{ن}$ بحيث لا يزيد عدد الكرات في كل صندوق علي واحد $= {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$

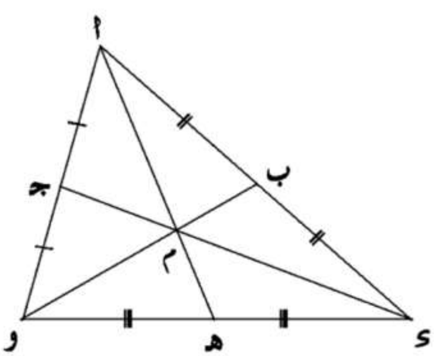
---

(٦) لأي عدد صحيح $\text{ر} \geqslant 0$ فإن عدد الحلول الكلية للمعادلة :

$$\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \dots\dots + \text{س}_{\text{ن}} = \text{ر}$$

يساوي $ {}^{\text{ن}+\text{ر}-1}\text{ق}_{\text{ر}}$

ملاحظات في الهندسة :



(١) متوسطات المثلث تتلاقي جميعا في نقطة واحدة

م تقسم المتوسط بنسبة :

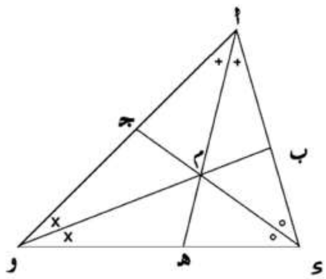
٢:١ من جهة القاعدة ، ٢ : ١ من جهة الرأس

المساحات :

- $\text{م}_{\text{س}}(\Delta\, \text{أ ب م}) = \text{م}_{\text{س}}(\Delta\, \text{أ م حـ})$
- $\text{م}_{\text{س}}(\Delta\, \text{أ ء م}) = \text{م}_{\text{س}}(\Delta\, \text{أ م و})$

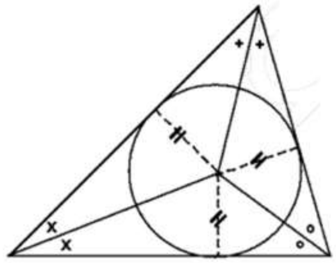
• م س (Δ ء م هـ) = م س (Δ هـ م و)

• م س (Δ ب ء هـ م) = م س (Δ حـ م هـ و)



(٢) منصفات زوايا المثلث تتلاقي جميعا في نقطة واحدة

م هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث



نجد أن :

أولا) ء هـ : هـ و = ء أ : و أ

ثانيا) أ ب : ب ء = أ و : ء و

ثالثا) حـ و : حـ أ = و ء : أ ء

رابعا) نظرية سيفا :

أ ب × ء هـ × و حـ = ب ء × هـ و × حـ أ

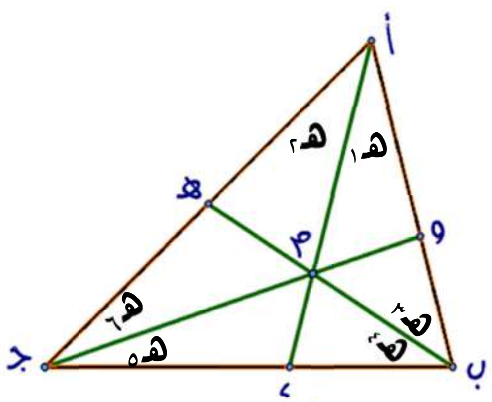
نظرية سيفا أو [شيفا] :

تطبق علي المثلث لاي ثلاثة مستقيمات مرسومة من رأوس المثلث وتتلاقي في نقطة داخل المثلث .

يمكن تطبيقعا في حالة (المتوسطات – والاعمدة – ومنصفات زواياه الداخلة)

(٣) نظرية سيفا (الصورة المثلثية)

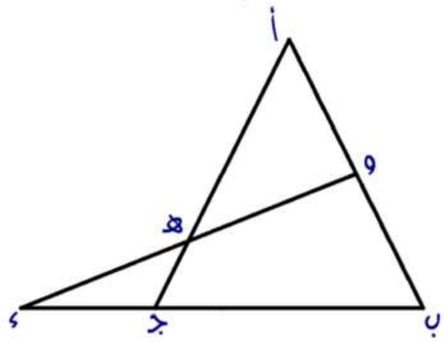
جا هـ١ × جا هـ٤ × جا هـ٦ = جا هـ٢ × جا هـ٣ × جا هـ٥



(٤) في الشكل :

$$\frac{\text{أ و}}{\text{و ب}} \times \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} \times \frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ أ}} = 1$$

((نظرية منيلوس))



مثال(١) : حل المعادلة $(س^٢ + س - ٢)^٣ + (٢س^٢ - س - ١)^٣ = ٢٧ (س^٢ - ١)^٣$

الحل : بفرض أن :

$أ = س^٢ + س - ٢ ، ب = ٢س^٢ - س - ١ ، ح = - ٣ (س^٢ - ١)$

إذا كان: $أ + ب + ح = ٠$ **فإن :** $أ^٣ + ب^٣ + ح^٣ = ٣ أ ب ح$

$أ + ب + ح = س^٢ + س - ٢ + ٢س^٢ - س - ١ - ٣س^٢ + ٣ = ٠$

بتعديل المعادلة لتكون علي الصورة

$(س^٢ + س - ٢)^٣ + (٢س^٢ - س - ١)^٣ + (- ٣ (س^٢ - ١))^٣ =$ **صفر**

بتطبيق النتيجة :

$٣ (س^٢ + س - ٢) (٢س^٢ - س - ١) (- ٣ (س^٢ - ١)) = ٠$

إما : $س^٢ + س - ٢ = ٠ \therefore (س + ٢)(س - ١) = ٠ \therefore س = - ٢ ، س = ١$

إو : $٢س^٢ - س - ١ = ٠ \therefore (٢س + ١)(س - ١) = ٠ \therefore س = - \frac{١}{٢} ، س = ١$

إو : $س^٢ - ١ = ٠ \therefore (س + ١)(س - ١) = ٠ \therefore س = - ١ ، س = ١$

م.ح $= \{ - ٢ ، ١ ، - ١ ، - \frac{١}{٢} \}$

(٢) حلل المقدار: $(س - ص)^٣ + (ص - ع)^٣ + (ع - س)^٣$

الحل :

نجد أن النتيجة إذا كان: $أ + ب + ح = ٠$ **فإن :** $أ^٣ + ب^٣ + ح^٣ = ٣ أ ب ح$

بفرض : $أ = (س - ص) ، ب = (ص - ع) ، ح = (ع - س)$

$\therefore أ + ب + ح = (س - ص) + (ص - ع) + (ع - س) =$ **صفر**

ومن ذلك :

$(س - ص)^٣ + (ص - ع)^٣ + (ع - س)^٣ = ٣ (س - ص)(ص - ع)(ع - س)$

---

(٣) إذا كان: س ، ص ، ع **أعداد حقيقية بحيث :** $س ص + ص ع + س ع = ٤$

أوجد أقل قيمة للمقدار : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢$

الحل :

$\because (س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - س ص - س ع - ص ع) = \frac{١}{٢}((س - ص)^٢ + (س - ع)^٢ + (ص - ع)^٢)$

$\therefore س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - (س ص + س ع + ص ع) = \frac{١}{٢}((س - ص)^٢ + (س - ع)^٢ + (ص - ع)^٢)$

$\therefore س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٤ = \frac{١}{٢}((س - ص)^٢ + (س - ع)^٢ + (ص - ع)^٢)$

$\therefore س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤ + \frac{١}{٢}((س - ص)^٢ + (س - ع)^٢ + (ص - ع)^٢)$

أقل قيمة للمقدار : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤$ **عندما** $س = ص = ع$

$$\left|\text{س}^2(\text{ص}-\text{ع})+\text{ص}^2(\text{ع}-\text{س})+\text{ع}^2(\text{س}-\text{ص})\right| < \text{س ص ع}$$

الحل : من العلاقة :

$$\text{س}^2(\text{ص}-\text{ع})+\text{ص}^2(\text{ع}-\text{س})+\text{ع}^2(\text{س}-\text{ص}) = (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{س}-\text{ع})$$

نلاحظ من متباينة المثلث أن :

$\because$ $\text{ص}-\text{ع} < \text{س} < \text{ص}+\text{ع}$ $\therefore$ $-\text{ع} < \text{س}-\text{ص} < \text{ع}$

$\therefore$ $|\text{س}-\text{ص}| < \text{ع}$ $\therefore$ **بالمثل :** $|\text{ص}-\text{ع}| < \text{س}$ ، $|\text{س}-\text{ع}| < \text{ص}$

بالضرب :

$$|(\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{س}-\text{ع})| < \text{س ص ع}$$

$$\therefore \left|\text{س}^2(\text{ص}-\text{ع})+\text{ص}^2(\text{ع}-\text{س})+\text{ع}^2(\text{س}-\text{ص})\right| < \text{س ص ع}$$

---

(٥) إذا كانت $\text{س} > \text{ص} > \text{ع}$ **برهن أن :**

$$\text{س}^2(\text{ص}-\text{ع})+\text{ص}^2(\text{ع}-\text{س})+\text{ع}^2(\text{س}-\text{ص}) > \textbf{صفر}$$

الحل :

$$\text{س}^2(\text{ص}-\text{ع})+\text{ص}^2(\text{ع}-\text{س})+\text{ع}^2(\text{س}-\text{ص}) = (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{س}-\text{ع})$$

$\because$ $\text{س} > \text{ص}$ $\therefore$ $\text{س}-\text{ص} > 0$

$\because$ $\text{ص} > \text{ع}$ $\therefore$ $\text{ص}-\text{ع} > 0$

$\because$ $\text{س} > \text{ع}$ $\therefore$ $\text{س}-\text{ع} > 0$

بالضرب :

$$\text{س}^2(\text{ص}-\text{ع})+\text{ص}^2(\text{ع}-\text{س})+\text{ع}^2(\text{س}-\text{ص}) = (\text{س}-\text{ص})(\text{ص}-\text{ع})(\text{س}-\text{ع}) > 0$$

$$\text{س}^2(\text{ص}-\text{ع})+\text{ص}^2(\text{ع}-\text{س})+\text{ع}^2(\text{س}-\text{ص}) > \textbf{صفر}$$

---

(٦) إذا كان : أ، ب، حـ **تحقق التالي :** $\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2 = 4$ ، $\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ} = 2\sqrt{3}$

أوجد قيمة :

$$(\text{أ}-2\text{ب}+\text{حـ}+1)^{23}+(\text{أ}+\text{ب}-2\text{حـ}-1)^{9}+(-2\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ}+1)^{2018}$$

الحل : من العلاقة

$$(\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ})^2 = \text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2+2(\text{أب}+\text{ب حـ}+\text{أ حـ})$$

$$(2\sqrt{3})^2 = 4+2(\text{أب}+\text{ب حـ}+\text{أ حـ})$$

$$2(\text{أب}+\text{ب حـ}+\text{أ حـ}) = 12-4 = 8$$

$$\therefore (\text{أب}+\text{ب حـ}+\text{أ حـ}) = 4 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\because (\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2)-(\text{أب}+\text{ب حـ}+\text{أ حـ}) =$$

$$\tfrac{1}{2}\left((\text{أ}-\text{ب})^2+(\text{أ}-\text{حـ})^2+(\text{ب}-\text{حـ})^2\right) = 4-4 = 0$$

$(\text{أ} - \text{ب})^{٢} = ٠$ ، $(\text{أ} - \text{حـ})^{٢} = ٠$ ، $(\text{ب} - \text{حـ})^{٢} = ٠$

$\therefore$ أ = ب = حـ

قيمة المقدار =

$$(\text{أ} - ٢\text{ب} + \text{حـ} + ١)^{٢٣} + (\text{أ} + \text{ب} - ٢\text{حـ} - ١)^{٩} + (-٢\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} + ١)^{٢٠١٨}$$

$$= (١)^{٢٣} + (-١)^{٩} + (١)^{٢٠١٨} = ١$$

---

(٧) حل المعادلة : علما بأن $\text{س} \in [٠ ، \pi]$

$$(١٦)^{\text{حتا ٢س}} - (١٦)^{\text{جا}^{٢}\text{س}} = ٢$$

الحل :

$\because$ **جتا ٢س = ١ − جا^{٢}س**

$$(١٦)^{١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س}} - (١٦)^{\text{جا}^{٢}\text{س}} = ٢$$

بوضع $(١٦)^{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \text{ص}$

$$\therefore \frac{١٦}{\text{ص}^{٢}} - \text{ص} = ٢$$

$\therefore$ ص^{٣} + ٢ص^{٢} − ١٦ = ٠ $\therefore$ (ص − ٢)(ص^{٢} + ٤ص + ٨) = ٠

$\therefore$ ص = ٢ $\therefore$ $(١٦)^{\text{جا}^{٢}\text{س}} = ٢$

$\therefore$ ٤جا^{٢}س = ٢ $\therefore$ جا^{٢}س = $\frac{١}{٤}$ $\therefore$ **جا** س = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ س = $\frac{١}{٦}\pi$ ، س = $\frac{٥}{٦}\pi$

$$\frac{(أ+ب+١)^{٣} - (أ-ب+١)^{٣}}{٢أب+٢ب} = ...$$

① فردى دائما ② زوجى دائما

③ فردى إذا كان أ فردى . ④ فردى إذا كان ب فردى .

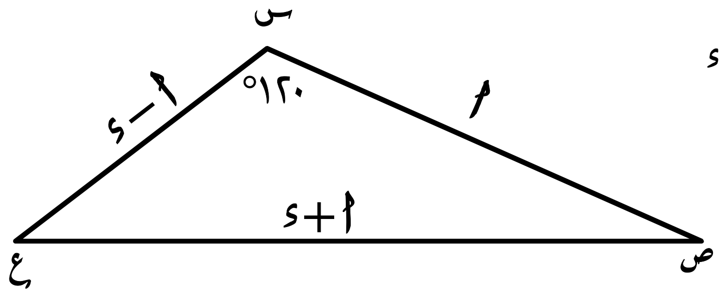
⑤ زوجى إذا كان ب فردى .

الحل : نضع ب = أ + ١ وبالتعويض

$$\frac{(أ+أ+١+١)^{٣} - (أ-أ-١+١)^{٣}}{٢أ(أ+١)+٢(أ+١)} = \frac{٨(أ+١)^{٣}}{٢(أ+١)^{٢}} = ٢(أ+١)$$

= ٢ب هو دائما عدد زوجي

(٩) إذا كان أطوال أضلاع مثلث هي متتابعة حسابية ومحيط المثلث = ٣٠ سم ، قياس أكبر زواياه ١٢٠ ° أوجد مساحة المثلث.



الحل : نفرض أضلاع المثلث هى : أ − ء ، أ ، أ + ء

المحيط = أ − ء + أ + أ + ء = ٣٠

∴ ٣أ = ٣٠ ∴ أ = ١٠

باستخدام قاعدة جيب التمام

$(أ+ء)^{٢} = أ^{٢} + (أ-ء)^{٢} - ٢ × أ × (أ-ء)$ جتا ١٢٠°

بالفك وحل المعادلة ء = ٤ س ص = ١٠ ، ص ع = ١٤ ، س ع = ٦

∴ مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٦ × جا١٢٠° = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم²

(١٠) إذا كان $٢^{س} = ٣^{ص} = ٤^{ع} = ٥٧٦$ أوجد قيمة : $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع}$

الحل :

((الحل الثانى))	((الحل الأول))
$٢^{س} = ٥٧٦ \quad \therefore س = لو_{٢}(٥٧٦)$	$٢^{س} = (٢٤)^{٢} \quad \therefore ٢^{س ص ع} = (٢٤)^{٢ ص ع}$
$٣^{ص} = ٥٧٦ \quad \therefore ص = لو_{٣}(٥٧٦)$	$٣^{ص} = (٢٤)^{٢} \quad \therefore ٣^{س ص ع} = (٢٤)^{٢ س ع}$
$٤^{ع} = ٥٧٦ \quad \therefore ع = لو_{٤}(٥٧٦)$	$٤^{ع} = (٢٤)^{٢} \quad \therefore ٤^{س ص ع} = (٢٤)^{٢ س ص}$
$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} =$	**بالضرب نجد أن :**
$\frac{١}{لو_{٢}(٥٧٦)} + \frac{١}{لو_{٣}(٥٧٦)} + \frac{١}{لو_{٤}(٥٧٦)}$	$٢^{س ص ع} \times ٣^{س ص ع} \times ٤^{س ص ع} = (٢٤)^{٢ ص ع + ٢ س ع + ٢ س ص}$
$= لو_{٥٧٦}(٢) + لو_{٥٧٦}(٣) + لو_{٥٧٦}(٤)$	$(٢٤)^{س ص ع} = (٢٤)^{٢ ص ع + ٢ س ع + ٢ س ص}$
$= لو_{٥٧٦}(٢ \times ٣ \times ٤) = لو_{٥٧٦}(٢٤) = \frac{١}{٢}$	$س ص ع = ٢ ص ع + ٢ س ع + ٢ س ص$
	بالقسمة علي $٢ س ص ع$
	$\frac{١}{٢} = \frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع}$

الحل الثالث :

$$٢^{س} = (٢٤)^{٢} \qquad \text{كذلك } ٤^{ع} = (٢٤)^{٢} = ٢^{٢ع}$$

$$٢^{س} \times ٢^{٢ع} \times ٣^{ص} = (٢٤)^{٦} = ٨^{٦} \times ٣^{٦}$$

$$٢^{س + ٢ع} \times ٣^{ص} = ٨^{٦} \times ٣^{٦}$$

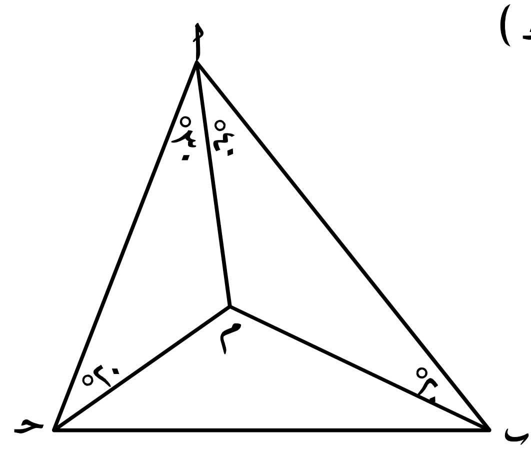
$$٣^{ص} = ٣^{٦} \quad \therefore ص = ٦ \quad ، \quad ٢^{س + ٢ع} = ٢^{١٨} \quad \therefore س + ٢ع = ١٨$$

$$س = ٢ع \quad \therefore ٤ع = ١٨ \quad \therefore ع = ٣,٥ \quad \therefore س = ٧$$

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = \frac{١}{٧} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٣,٥} = \frac{١}{٢}$$

---

(١١) في الشكل المقابل : أوجد : ق ($\angle$ م ب ح)



الحل :

نفرض أن : ق ($\angle$ م ب ح) = س

$\therefore$ ق ($\angle$ م ح ب) = $٧٠° - س$

من نظرية (شيفا للجيوب)

جا ٤٠° × جا س × جا ٢٠° = جا ٣٠° × جا ٢٠° × جا (٧٠° − س)

جا ٤٠° × جا س = جا ٣٠° × جا (٧٠° − س)

س = ٣٠° تحقق الطرفين

جتا ١٢° × جتا ٢٤° × جتا ٣٦° × جتا ٤٨° × جتا ٦٠° × جتا ٧٢° × جتا ٨٤°

الحل

نفرض أن :

أ = جتا ١٢° × جتا ٢٤° × جتا ٣٦° × جتا ٤٨° × جتا ٦٠° × جتا ٧٢° × جتا ٨٤°

ب = جا ١٢° × جا ٢٤° × جا ٣٦° × جا ٤٨° × جا ٦٠° × جا ٧٢° × جا ٨٤°

أ×ب =

= جتا ١٢° × جتا ٢٤° × جتا ٣٦° × جتا ٤٨° × جتا ٦٠° × جتا ٧٢° × جتا ٨٤°

× جا ١٢° × جا ٢٤° × جا ٣٦° × جا ٤٨° × جا ٦٠° × جا ٧٢° × جا ٨٤°

$$\text{أ×ب} = \frac{\text{جا } ٢٤° \times \text{جا } ٤٨° \times \text{جا } ٧٢° \times \text{جا } ٩٦° \times \text{جا } ١٢٠° \times \text{جا } ١٤٤° \times \text{جا } ١٦٨°}{٢^{٧}}$$

$$\text{أ×ب} = \frac{\text{ب}}{٢^{٧}} \qquad \therefore \text{أ} = \frac{١}{١٢٨}$$

---

(١٢) إذا كان : $\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} = ١٤$ **أوجد** $\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$

الحل :

$$\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{٢} = \text{س} + ٢ + \frac{١}{\text{س}} \quad \text{.......................... (١)}$$

$$\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} = \text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٢ = ١٤ + ٢ = ١٦ \quad \text{...... (٢)}$$

$$\text{س} + \frac{١}{\text{س}} = ٤$$

$$\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{٢} = \text{س} + ٢ + \frac{١}{\text{س}} = ٢ + ٤ = ٦$$

$$\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} = \sqrt{٦}$$

الحل : نفرض أن : أ = ٢$^{\text{س}}$ ، ب = ٣$^{\text{ص}}$

∴ المعادلة : أ + ب − أ^{٢} + أب − ب^{٢} = ١ بالضرب في −٢

−٢أ − ٢ب + ٢أ^{٢} − ٢أب + ٢ب^{٢} + ٢ = ٠

(أ^{٢} − ٢أ + ١) + (ب^{٢} − ٢ب + ١) + (أ^{٢} − ٢أب + ب^{٢}) = ٠

(أ − ١)^{٢} + (ب − ١)^{٢} + (أ − ب)^{٢} = ٠

(أ − ١)^{٢} = ٠ ، (ب − ١)^{٢} = ٠ ، (أ − ب)^{٢} = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ١ ، أ = ب

٢$^{\text{س}}$ = ١ ∴ س = ٠ ، ٣$^{\text{س}}$ = ١ ∴ س = ٠

---

(١٤) عدد قيم س التي تجعل : √(٤٨ − √س) عدد صحيح

الحل :

يجب أن يكون المقدار (٤٨ − √س) مربع كامل

(٤٨ − √س) = ٠	∴ س = ٤٨^{٢}
(٤٨ − √س) = ١	∴ س = ٤٧^{٢}
(٤٨ − √س) = ٤	∴ س = ٤٤^{٢}
(٤٨ − √س) = ٩	∴ س = ٣٩^{٢}
(٤٨ − √س) = ١٦	∴ س = ٣٢^{٢}
(٤٨ − √س) = ٢٥	∴ س = ٢٣^{٢}
(٤٨ − √س) = ٣٦	∴ س = ١٢^{٢}

(١٥) برهن أن العدد : ٢^{١٠٠} + ٢^{١٠١} + ٢^{١٠٣} يقبل القسمة علي ١١

الحل :

٢^{١٠٠} + ٢^{١٠١} + ٢^{١٠٣} = ٢^{١٠٠} (١ + ٢ + ٢^{٣}) = ٢^{١٠٠} (١ + ٢ + ٨) = ٢^{١٠٠} × ١١

∴ **العدد : ٢^{١٠٠} + ٢^{١٠١} + ٢^{١٠٣} يقبل القسمة علي ١١**

---

(١٦) قيمة : (١٨٤−١) (١٨٤−٢) (١٨٤−٣) (١٨٤−٤) .... (١٨٤−٢٨٤) = ...

الناتج = صفر

وذلك لوجود القوس (١٨٤−١٨٤) في حاصل الضرب

أوجد قيمة $\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٣٠}$

الحل:

نضع $\text{ص} = \sqrt[٥]{٢}$ ∴ $\text{س} = ١ + \text{ص} + \text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٣} + \text{ص}^{٤}$

$$\text{س} = \frac{١ \times (\text{ص}^{٥}-١)}{\text{ص}-١} = \frac{\text{ص}^{٥}-١}{\text{ص}-١} \quad ∴ \quad \frac{١}{\text{س}} = \frac{\text{ص}-١}{\text{ص}^{٥}-١} = \frac{\text{ص}-١}{٢-١}$$

∴ $\text{س} = \text{ص} - ١$

$$\left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٣٠} = (١+\text{ص}-١)^{٣٠} = \left(\sqrt[٥]{٢}\right)^{٣٠} = ٢^{٦} = ٦٤$$

---

(١٨) إذا س ، ص ، ع ، ل ، م أعداد صحيحة مختلفة وكان:

$$(٦-\text{س})(٦-\text{ص})(٦-\text{ع})(٦-\text{ل})(٦-\text{م}) = ٤٥$$

أوجد قيمة: س + ص + ع + ل + م

الحل:

بتحليل العدد ٤٥ الي عوامله الاولية نجد أن ٤٥ = ٣ × ٣ × ٥

$$(٦-\text{س})(٦-\text{ص})(٦-\text{ع})(٦-\text{ل})(٦-\text{م}) = ١ \times ٣ \times ٥ \times -١ \times -٣$$

ستجد أن:

س = ٥ ، ص = ٣ ، ع = ١ ، ل = ٧ ، م = ٩

∴ **دائما مهما اختلفت القيم** = س + ص + ع + ل + م

= ٥ + ٣ + ١ + ٧ + ٩ = ٢٥

---

(١٩) أوجد قيمة: $\sqrt{٤\,\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٤}\text{س}} + \sqrt{٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٤}\text{س}}$

الحل:

$٤\,\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٤}\text{س} = ٤\,\text{جا}^{٢}\text{س} + (١ - \text{جا}^{٢}\text{س})^{٢} =$

$= \text{جا}^{٤}\text{س} + ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س} + ١ = (١ + \text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}$ .... ①

$٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٤}\text{س} = ٤(١ - \text{جا}^{٢}\text{س}) + \text{جا}^{٤}\text{س}$

$= ٤ - ٤\,\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٤}\text{س} = (٢ - \text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}$ .... ②

∴ $\sqrt{٤\,\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٤}\text{س}} + \sqrt{٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٤}\text{س}} =$

$= \sqrt{(١ + \text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}} + \sqrt{(٢ - \text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}}$

$= (١ + \text{جا}^{٢}\text{س}) + (٢ - \text{جا}^{٢}\text{س}) = ٣$

$$\frac{١}{\sqrt{٢}+١}+\frac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}+\frac{١}{٢+\sqrt{٣}}+\cdots+\frac{١}{\sqrt{\text{ن}+١}+\sqrt{\text{ن}}}\geqslant ١٠٠$$

الحل :

$$\frac{١}{\sqrt{٢}+١}=\sqrt{٢}-١$$

$$\frac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}=\sqrt{٣}-\sqrt{٢}$$

$$\vdots$$

$$\frac{١}{\sqrt{\text{ن}+١}+\sqrt{\text{ن}}}=\sqrt{\text{ن}+١}-\sqrt{\text{ن}}$$

بالجمع:

$$\frac{١}{\sqrt{٢}+١}+\frac{١}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}}+\frac{١}{٢+\sqrt{٣}}+\cdots+\frac{١}{\sqrt{\text{ن}+١}+\sqrt{\text{ن}}}\geqslant ١٠٠$$

$$\sqrt{\text{ن}+١}-١\geqslant ١٠٠ \qquad \therefore \sqrt{\text{ن}+١}\geqslant ١٠١$$

$$\text{ن}+١\geqslant ١٠١^{٢} \qquad \therefore \text{ن}\geqslant ١٠٢٠٠$$

$$\therefore \text{ن}=١٠٢٠٠$$

---

(٢١) أوجد قيمة : $\left(\text{جتا س}+\sqrt{٣}\,\text{جا س}\right)^{٢}+\left(\text{جا س}-\sqrt{٣}\,\text{جتا س}\right)^{٢}$

الحل : المقدار =

$$=\text{جتا}^{٢}\text{س}+٢\sqrt{٣}\,\text{جا س جتا س}+٣\,\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جا}^{٢}\text{س}-٢\sqrt{٣}\,\text{جتا س جا س}+٣\,\text{جتا}^{٢}\text{س}$$

$$=٤\,\text{جا}^{٢}\text{س}+٤\,\text{جتا}^{٢}\text{س}=٤\left(\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س}\right)=٤\times١=٤$$

---

(٢٢) ايهما أكبر : $\sqrt[٣]{٢}$ أم $\sqrt[٥]{٣}$

الحل :

$$\sqrt[٣]{٢}=\sqrt[١٥]{٢^{٥}}=\sqrt[١٥]{٣٢}\;\ldots\ldots\ldots(١)$$

$$\sqrt[٥]{٣}=\sqrt[١٥]{٣^{٣}}=\sqrt[١٥]{٢٧}\;\ldots\ldots\ldots(٢)$$

من (١) ، (٢) : $\sqrt[١٥]{٣٢}>\sqrt[١٥]{٢٧}$

$$\therefore \sqrt[٣]{٢}>\sqrt[٥]{٣}$$

الحل :

المقدار = ٥($\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ جا س + $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ جتا س) = ٥ (جتا س جتا ص + جا س جا ص)

= ٥ (جتا (س – ص))

∵ – ١ ≤ جتا (س – ص) ≤ ١ بالضرب في ٥

∴ – ٥ ≤ جتا (س – ص) ≤ ٥

∴ – ٥ ≤ (٣ جا س + ٤ جتا س) ≤ ٥

∴ أكبر قيمة للمقدار (٣ جا س + ٤ جتا س) = ٥

---

(٢٤) إذا كان :

$$\frac{\text{١٩}}{\text{٨}} = \text{أ} + \cfrac{\text{١}}{\text{أ} + \cfrac{\text{١}}{\text{ب} + \cfrac{\text{١}}{\text{ح}}}}$$

أوجد قيمة : أ ، ب ، ح

الحل

$$\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{٨}} = \text{أ} + \cfrac{\text{١}}{\text{أ} + \cfrac{\text{١}}{\text{ب} + \cfrac{\text{١}}{\text{ح}}}} \qquad \therefore \text{أ} = \text{٢}$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{٨}} = \cfrac{\text{١}}{\text{٢} + \cfrac{\text{١}}{\text{ب} + \cfrac{\text{١}}{\text{ح}}}}$$

$$\frac{٨}{٣} = ٢ + \frac{\quad}{\text{ب} + \frac{١}{\text{ح}}}$$

$$٢ + \frac{٢}{٣} = ٢ + \frac{١}{\text{ب} + \frac{١}{\text{ح}}}$$

$$\frac{٢}{٣} = \frac{١}{\text{ب} + \frac{١}{\text{ح}}}$$

$$\frac{٣}{٢} = \text{ب} + \frac{١}{\text{ح}}$$

$$١ + \frac{١}{٢} = \text{ب} + \frac{١}{\text{ح}}$$

ب = ١ ، ح = ٢ ، أ = ٢

---

(٢٥) أوجد قيمة : $\sqrt{٦} - \sqrt{٧ - \sqrt{٢٤}}$

الحل : $\sqrt{٦} - \sqrt{٧ - \sqrt{٢٤}} = \sqrt{٦} - \sqrt{٧ - ٢\sqrt{٦}}$

$= \sqrt{٦} - \sqrt{(\sqrt{٦} - ١)^{٢}} = \sqrt{٦} - (\sqrt{٦} - ١) = \sqrt{٦} - \sqrt{٦} + ١ = ١$

---

(٢٦) حلل المقدار : $\text{س}^{٣}(\text{ص} - \text{ع}) + \text{ص}^{٣}(\text{ع} - \text{س}) + \text{ع}^{٣}(\text{س} - \text{ص})$

الحل : أولا : بالتعويض في هذا المقدار عن س = ص

ستجد أن هذا المقدار $= \text{ص}^{٣}(\text{ص} - \text{ع}) + \text{ص}^{٣}(\text{ع} - \text{ص}) + \text{ع}^{٣}(\text{ص} - \text{ص}) = ٠$

معنى ذلك أن هذا المقدار أحد عوامله هو (س − ص) ١

بنفس الطريقة : (ص − ع) **أحد عوامله.......** ٢

بنفس الطريقة : (ع − س) **أحد عوامله.......** ٣

$\text{س}^{٣}(\text{ص} - \text{ع}) + \text{ص}^{٣}(\text{ع} - \text{س}) + \text{ع}^{٣}(\text{س} - \text{ص}) =$

$(\text{س} - \text{ص}) \times (\text{ص} - \text{ع}) \times (\text{ع} - \text{س}) \times \text{ل}\,(\text{س} + \text{ص} + \text{ع})$

تم كتابته بهذه الصورة لانه مقدار من الدرجة الرابعة

٠+١×١×(٢−٠)+٨×(٠−١) = −١ × −١ × ٢ × ٣ك

−٦ = −٦ك ∴ ك = ١

∴ س^{3} (ص − ع) + ص^{3} (ع − س) + ع^{3} (س − ص) =

(س − ص) × (ص − ع) × (ع − س) × (س + ص + ع)

---

(٢٧) **حلل المقدار:** أ^{2}(ب+حـ)+ب^{2}(أ+حـ)+حـ^{2}(أ+ب)+٢أبحـ

الحل :

بالتعويض في المقدار : ب = −حـ

المقدار = أ^{2}(−حـ+حـ)+حـ^{2}(أ+حـ)+حـ^{2}(أ−حـ)+٢أ× −حـ×حـ

= أ^{2}(٠)+٢حـ^{2}(أ) − ٢أ×حـ^{2} = **صفر**

∴ (ب+حـ) **أحد عوامل المقدار**

بنفس الطريقة : (أ+حـ) ، (أ+ب) **عوامل لهذا المقدار**

∴ أ^{2}(ب+حـ)+ب^{2}(أ+حـ)+حـ^{2}(أ+ب)+٢أبحـ = ك(ب+حـ)(أ+حـ)(أ+ب)

وبالتعويض عن (أ، ب، حـ) = (٠، ١، ٢)

ك = ١

∴ أ^{2}(ب+حـ)+ب^{2}(أ+حـ)+حـ^{2}(أ+ب)+٢أبحـ = (ب+حـ)(أ+حـ)(أ+ب)

---

(٢٨) إذا كان ن عدد فردي برهن أن ن^{2} عدد فردي.

الحل : نفرض أن م عدد صحيح فيكون ن = ٢م + ١ عدد فردي

ن^{2} = (٢م+١)^{2} = ٤م^{2}+٤م + ١ = ٢(٢م^{2}+٢م) + ١

ن^{2} = ٢ك + ١ **هو عدد فردي**

---

(٢٩) **إذا كان :** (٥−٣$\sqrt{٧}$) **جذر للمعادلة :** س^{2} + ب س + حـ = ٠ **أوجد قيمة** ب ، حـ

الحل : من المعروف أنه

> لتكن أس^{2}+ب س+جـ=٠ معادلة تربيعية، حيث أ،ب،جـ أعداد نسبية وَ أ≠٠. إذا كان ك+ل$\sqrt{م}$ جذراً للمعادلة التربيعية، حيث ك،ل،م أعداد نسبية وَ $\sqrt{م}$ غير نسبي، فإن ك−ل$\sqrt{م}$ هو الجذر الثاني للمعادلة التربيعية.

الجذرين هما : (٥−٣$\sqrt{٧}$) ، (٥ + ٣$\sqrt{٧}$)

مجموع الجذرين = (٥−٣$\sqrt{٧}$) + (٥ + ٣$\sqrt{٧}$) = ١٠ = −ب ∴ ب = −١٠

حاصل ضرب الجذرين = (٥−٣$\sqrt{٧}$) × (٥ + ٣$\sqrt{٧}$) = ٢٥ − ٦٣ = −٣٨ = حـ

كثيرة الحدود د(س) = ٦س٣ − ٢١س٢ − ٤س + ١٤ إلى عواملها الأولية.

د (س) = (٦س٣ − ٤س) − (٢١س٢ − ١٤)

= ٢س (٣س٢ − ٢) − ٧ (٣س٢ − ٢)

= (٣س٢ − ٢) (٢س − ٧)

(٣١) أوجد :

عدد المجموعات الجزئية من المجموعة س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

الحل : نعرف ن (س) على انها مجموعة القوة للمجموعة س وهي تساوي مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة س ويكون عدد عناصرها = ٢ن حيث ن عدد عناصر المجموعة س وبالتالي عدد عناصر مجموعة القوة للمجموعة س = ٢٥ = ٣٢

(٣٢) أوجد عدد الطرق لأخذ عينة ثنائية مكونة من عنصرين من المجموعة {أ، ب، جـ، د}

(١) التكرار مسموح والترتيب مهم:

عدد الطرق = ٤٢ = ١٦ وهي كما يلي

(أ، أ)، (ب، ب)، (جـ، جـ)، (د، د)، (أ، ب)، (أ، جـ)، (أ، د)، (ب، جـ)، (ب، د)، (جـ، د)، (ب، أ)، (جـ، أ)، (د، أ)، (جـ، ب)، (د، ب)، (د، جـ)

(٢) التكرار غير مسموح والترتيب مهم

عدد الطرق = ٤ل٢ = ٤ × ٣ = ١٢ وهى كما يلي

(أ، ب)، (أ، جـ)، (أ، د)، (ب، جـ)، (ب، د)، (جـ، د)، (ب، أ)، (جـ، أ)، (د، أ)، (جـ، ب)، (د، ب)، (د، جـ)

(٣) التكرار غير مسموح والترتيب غير مهم:

عدد الطرق = ٤ق٢ = $\frac{٤ \times ٣}{٢}$ = ٦ وهى كما يلي

(أ، ب)، (أ، جـ)، (أ، د)، (ب، جـ)، (ب، د)، (جـ، د)

التكرار مسموح والترتيب غير مهم.

عدد الطرق = $^{٤+٢-١}ق_{٢}$ = $\frac{٥ \times ٤}{٢}$ = ١٠ وهى كما يلي

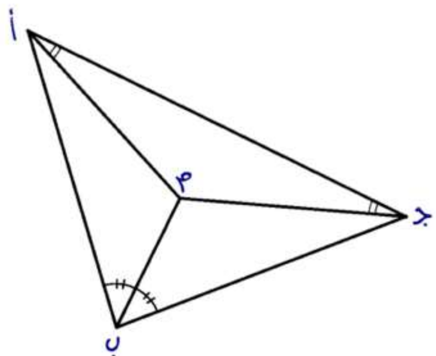
(أ،أ)،(ب،ب)،(جـ،جـ)،(د،د)،(أ،ب)،(أ،جـ)،(أ،د)،(ب،جـ)،(ب،د)،(جـ،د) .

---

٣٣) في الشكل المقابل : م نقطة داخل $\triangle$ أ ب جـ بحيث

ق(∠م ب أ) = ق(∠م ب جـ) ، ق(∠م أ جـ) = ق(∠م جـ أ)

برهن أن مثلث أ ب جـ متساوى الساقين



باستخدام نظرية (سيفا)

جا (∠جـ أ م) **جا** (∠م جـ ب) **جا** (∠أ ب م) = **جا** (∠أ جـ م) **جا** (∠جـ ب م) **جا** (∠ب أ م)

جا (∠م جـ ب) = **جا** (∠ب أ م)

ق(∠م جـ ب) = ق (∠ب أ م)

المثلث فيه : ب جـ = ب أ هو متساوى الساقين (يوجد حلول أخرى)

---

٣٤) عند قسمة الدالة : د(س) = ٣ س^{٤} + أ س^{٣} + ب س + ٧ **على كلا من** (س+٢) ، (س - ١)
كان الباقي ٦٣ ، ١٢ على الترتيب أوجد باقي قسمة د(س) **علي** (س + ١)

الحل :

معلوم أن باقي قسمة الدالة د(س) **علي** (س - أ) **يساوى** د(أ)

د(-٢) = ٣ (-٢)^{٤} + أ (-٢)^{٣} + ب × -٢ + ٧ = ٦٣

∴ ٤٨ - ٨أ - ٢ب + ٧ = ٦٣ ∴ - ٨أ - ٢ب = ٨

∴ ٤أ + ب = - ٤ .... (١)

د(١) = ٣ (١)^{٤} + أ (١)^{٣} + ب × ١ + ٧ = ١٢

∴ ٣ + أ + ب + ٧ = ١٢

∴ أ + ب = ٢........ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن :

أ = - ٢ ، ب = ٤

∴ د(س) = ٣ س^{٤} - ٢ س^{٣} + ٤ س + ٧

∴ د(-١) = ٣ (-١)^{٤} - ٢ (-١)^{٣} + ٤ × -١ + ٧

= ٣ + ٢ - ٤ + ٧ = ٨ = باقي قسمة الدالة علي (س + ١)

$$\boxed{س^3 - (ل + م + ن)س^2 + (لم + من + لن)س - لمن = صفر}$$

المعادلة التربيعية التي جذريها ل ، م

$$\boxed{س^2 - (ل + م)س + لم = 0}$$

٣٥) كون المعادلة التكعيبية التي جذورها ٢ ، ٣ ، ٤

الحل :

$$ل = ٢ ، م = ٣ ، ن = ٤$$

$$ل + م + ن = ٩ ، لم + من + نل = ٢٦ ، لمن = ٢٤$$

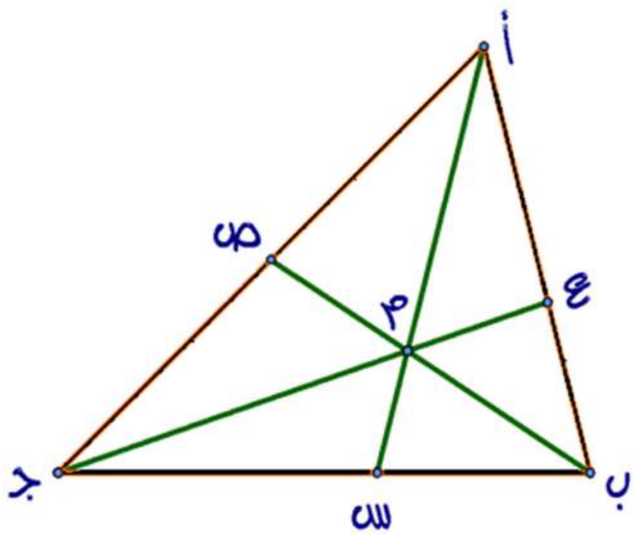
$$س^3 - ٩س^2 + ٢٦س - ٢٤ = ٠$$

٣٦)

في الشكل المقابل

٤ ب س = ٣ س جـ ، جـ أ = ٢ جـ ص

أثبت أن $\overline{س ع}$ // $\overline{جـ أ}$



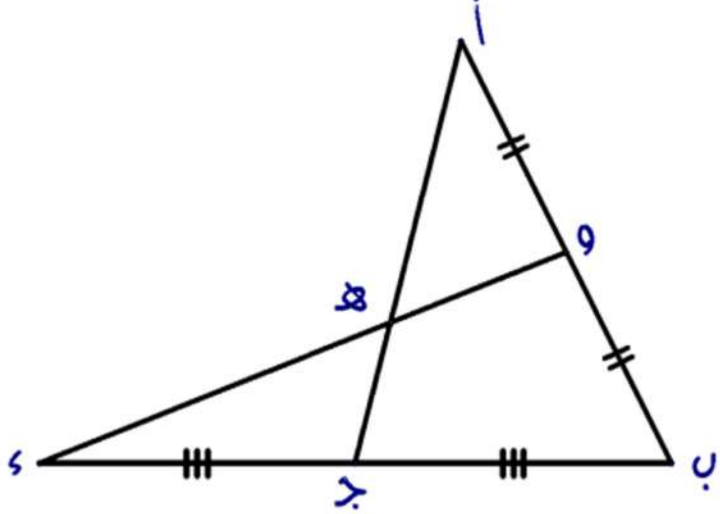
الحل : من نظرية سيفا :

$$\frac{أع}{عب} \times \frac{بس}{سجـ} \times \frac{جـص}{صأ} = ١$$

$$\frac{أع}{عب} \times \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{١} = ١ \quad \therefore \frac{أع}{عب} = \frac{٤}{٣}$$

$$\therefore \frac{أع}{عب} = \frac{جـس}{سب} = \frac{٤}{٣}$$

$$\therefore \overline{سع} // \overline{جـأ}$$



في الشكل المقابل

أو = وب ، ب جـ = جـ ء

أثبت أن : ❶ ء هـ = ٢ هـ و

❷ أ هـ = ٢ هـ جـ

من نظرية منيلوس :

نأخذ المثلث أ ب جـ ، $\overleftrightarrow{\text{و ء}}$ **قاطع في** و ، هـ ، ء

$\therefore \frac{\text{أو}}{\text{وب}} \times \frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} \times \frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ أ}} = ١$ $\qquad \therefore ١ \times ٢ \times \frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ أ}} = ١$

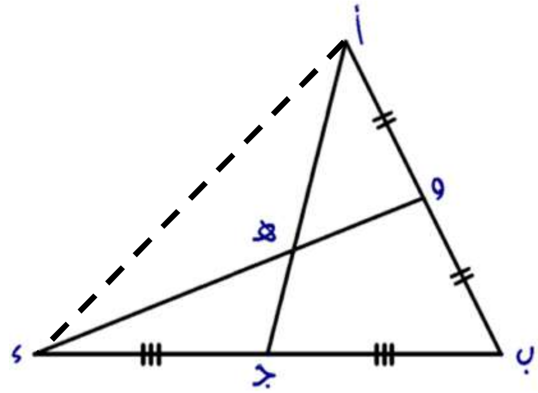
$\therefore$ أ هـ = ٢ جـ هـ

من نظرية منيلوس :

نأخذ المثلث ء و ب ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ **قاطع في** أ ، هـ ، جـ

$\therefore \frac{\text{ء هـ}}{\text{و هـ}} \times \frac{\text{و أ}}{\text{أ ب}} \times \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ ء}} = ١$ $\qquad \therefore \frac{\text{ء هـ}}{\text{و هـ}} \times \frac{١}{٢} \times ١ = ١$

$\therefore$ ٢ و هـ = ء هـ



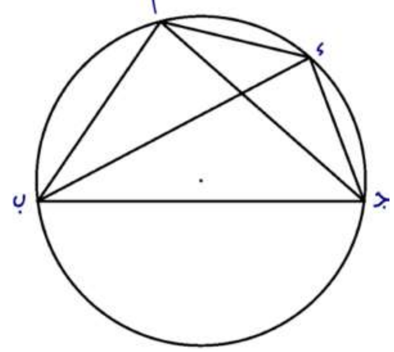
يمكن الحل بطريقة أخرى :

نصل : $\overline{\text{أ ء}}$ **وبذلك تكون** هـ **هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث** أ ب ء

أ هـ = ٢ هـ جـ ، ء هـ = ٢ هـ و

وإذا كان : أب = ٤ سم ، ب ح = ٦ سم ، أ ح = ٥ سم

، أء = ح ء **برهن أن** : ب ء = ٢ أ ء

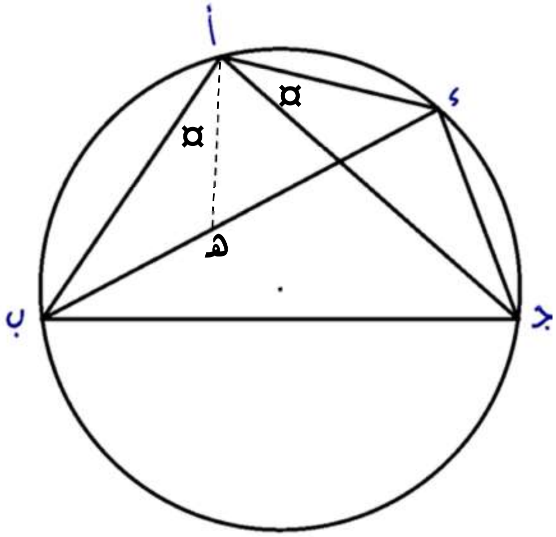


الحل :

نبرهن أولا أن :

ء ب × أ ح = أ ء × ح ب + ء ح × أ ب

نرسم $\overline{\text{أهـ}}$ **بحيث :**



∴ Δ ء أ ح ~ Δ هـ أ ب

$$\frac{\text{أء}}{\text{هـأ}} = \frac{\text{أح}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءح}}{\text{هـب}}$$

∴ أ ح × هـ ب = أ ب × ء ح (١)

∴ Δ ء أ هـ ~ Δ ح أ ب

$$\frac{\text{أء}}{\text{حأ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{حب}}$$

∴ أء × ح ب = أ ح × ء هـ (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع :

أء × ح ب + ء ح × أ ب = أ ح × هـ ب + أ ح × ء هـ = أ ح × (هـ ب + ء هـ) = أ ح × ء ب

∴ ء ب × أ ح = أء × ح ب + ء ح × أ ب

بالتعويض :

أ ب = ٤ سم ، ب ح = ٦ سم ، أء = ح ء

ء ب × ٥ = ٦ أء + ٤ ء ح ∴ ء ب × ٥ = ٦ أء + ٤ أء

٥ ء ب = ١٠ أء ∴ ء ب = ٢ أء

٣٩) قيمة :

$\sqrt{\text{١ + ٢ + ٣ + ... + ٩٩ + ١٠٠ + ٩٩ + ... + ٣ + ٢ + ١}}$ يساوي

أ) ١٠ ب) ١٠٠ ج) ١٠٠٠ ء) ١٠٠٠٠ هـ) غير ذلك

$\sqrt{١^٣+٢^٣+٣^٣+٤^٣+٥^٣+٦^٣+٧^٣+٨^٣+٩^٣+١٠^٣}$ يساوي

أ) ٥٥ ب) ١٠٠ ج) ١٢٥ ء) ١٠٠٠٠ هـ) غير ذلك

الحل :

من المعلوم أن المقدار على الصورة:

$$١^٣+٢^٣+٣^٣+\cdots+ن^٣=(١+٢+٣+\cdots+ن)^٢.$$

الجذر $=\sqrt{(١+٢+٣+\cdots\cdots+١٠)^٢}=١+٢+٣+\cdots\cdots+١٠=٥٥$

---

٤١)

$$\sqrt{٢^{لو٢}\times ٢^{لو٥}+٢^{\frac{لو٧}{لو٢}}}=$$

أ) ٢ ب) ٢,٥ ج) ٣ ء) ٣,٥ هـ) ٤

نفرض أن $\frac{لو٧}{لو٢}=م \Longrightarrow لو٧=م\ لو٢=لو٢^م \Longrightarrow ٧=٢^م$

إذن $م=لو_٢ ٧$ أي أن: $\frac{لو٧}{لو٢}=لو_٢ ٧$

ثم نفرض أن $٢^{لو_٢ ٧}=ن \Longrightarrow لو_٢ ن=لو_٢ ٧ \Longrightarrow ن=٧$

$$\therefore \sqrt{٢^{لو٢}\times ٢^{لو٥}+٢^{\frac{لو٧}{لو٢}}}=\sqrt{٢^{لو٢+لو٥}+٢^{لو_٢ ٧}}=\sqrt{٢^{لو١٠}+٧}$$

$$=\sqrt{٢+٧}=٣$$

حل آخر :

$$٢^{لو٢}\times ٢^{لو٥}=٢^{لو٢+لو٥}=٢^{لو١٠}=٢$$

$$\frac{لو٧}{لو٢}=لو_٢ ٧ \quad \therefore ٢^{لو_٢ ٧}=٧$$

المقدار $=\sqrt{٢+٧}=\sqrt{٩}=٣$

صندوق على شكل متوازي مستطيلات أطوال أضلاعه أعدا صحيحة وحجمه ٢٠٠٢سم^{٣} ، أوجد أقل مجموع من السنتيمترات لأبعاده الثلاثة.

أ) ٣٦سم ب) ٣٨سم جـ) ٤٢سم ء) ٤٤سم هـ) ٩٢سم

الحل

بتحليل العدد (٢٠٠٢) إلى عوامله الأولية نجد أن: ٢٠٠٢ = ٢ × ٧ × ١١ × ١٣

وبالتالي فإن أصغر مجموع لثلاثة أبعاد ممكنة يكون للأبعاد : ١١، ١٣، ١٤

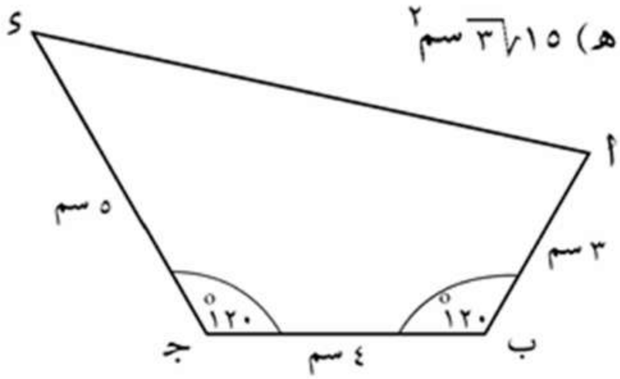
---

٤٢)

أ ب جـ ء شكل رباعي فيه ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$) = ١٢٠°، أ ب = ٣سم، ب جـ = ٤سم، جـ ء = ٥سم، أوجد مساحة الشكل الرباعي.

أ) ١٥سم^{٢} ب) ٩$\sqrt{٣}$ سم^{٢} جـ) $\frac{٤٥\sqrt{٣}}{٤}$سم^{٢}

ء) $\frac{٤٧\sqrt{٣}}{٤}$سم^{٢} هـ) ١٥$\sqrt{٣}$ سم^{٢}



(٤٣) **إذا كان : أ، ب، ح تحقق التالي**

أ+ب+ح=٠ ، أ ب ح = −١٠ **وبفرض أن** س = $\frac{١}{أ}$ + $\frac{١}{ب}$ + $\frac{١}{ح}$

فأي العلاقات التالية صحيحة :

س > ٠ ، س < ٠ ، س = ٠ ، −١ < س < ٠ ، −١٠ < س < ١٠

(٤٤) **عين الأعداد الصحيحة غير السالبة** (س، ص) **والتي تحقق :**

$(\text{س ص} - ٧)^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}$

(٤٥) **أوجد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة :**

$(\text{س}^{٢}+١)(\text{ص}^{٢}+١) + ٢(\text{س} - \text{ص})(١ - \text{س ص}) = ٤(١ + \text{س ص})$

(٤٦) **إذا كان أ ، ب أعداد أولية برهن أن :** $\text{أ}^{\text{ب}} + \text{ب}^{\text{أ}}$ **هو عدد أولى أقل من ١٨**

(٤٧) **إذا كانت :** د(س) = $\text{س}^{٥} + ٢\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + ١٠\text{س}^{٢} + \text{أ س} + \text{ب}$ **تقبل القسمة علي** ($\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣$) **أوجد قيمة أ ، ب .**

(٤٨) **برهن أن :** (س − ٢) **أحد عوامل المقدار :** ($\text{س}^{٧} - ٢^{٧}$)

(٤٩) **كون المعادلة التكعيبية التي جذورها** ل، م، ن **حيث :**

ل+م+ن = ٣ ، $\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢} + \text{ن}^{٢}$ = ١٩ ، ل م ن = ١ .

(٥٠

إذا كانت م نقطة داخل △ أ ب جـ بحيث م أ = م ب ، ق(م ب جـ) = ٣٠° ، ق(م أ جـ) = ٦٠°

ق(م جـ ب) = س° ، ق(م جـ أ) = ص° فاثبت أن ٣ $\text{جا}^{٢}$ س + $\text{جتا}^{٢}$ ص = ١

(٥١

أ ب جـ ء مربع مرسوم داخل دائرة ، س نقطة على القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$.

أثبت أن : $\frac{\text{س أ} + \text{س جـ}}{\text{س ب} + \text{س ء}} = \frac{\text{س ء}}{\text{س جـ}}$

أ ب جـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة قطرها ٥ سم ، أ ب = ٣ سم ، فرضت النقطة هـ على القوس الأصغر $\frown$ أ ء ، أثبت أن

❶ ٣ هـ أ + ٥ هـ ء = ٤ هـ جـ ❷ ٤ هـ أ + ٣ هـ جـ = ٥ هـ ب

٥٣)

استخدم القسمة التركيبية لايجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة

د(س) = ٣س^{٤} − ٢س^{٣} + ٤س − ٥ علي س + ٣

٥٤)

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{٢}+١}{\sqrt{٢}-١}} - \sqrt{\frac{\sqrt{٢}-١}{\sqrt{٢}+١}}\right)^{\text{لو}_{٨}\,٠,١٢٥} =$$

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\sqrt{٢}$ ء) $\frac{٣}{٤}$ هـ) غير ذلك

٥٥) حل المعادلة : س = ١٢ − $\sqrt{١٢ - \sqrt{س}}$ حيث س عدد حقيقي

٥٦)

لأي مثلث أ ب جـ ، أثبت أن: ٤ نق^{٢}(جتا^{٢}ب − جتا^{٢}جـ) = جـ^{٢} − ب^{٢} ، حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ .

مع تحيات توجيه الرياضيات

موجه : أ/أحمد إبراهيم
الموجه الأول : أ/ سميحة سعدى