حلول كتاب الرياضيات

للصف

الثانـي عشر التكنولوجي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

الوحدة الأولى

الإحصاء والاحتمال

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

حلول تمارين ومسائل ١ – ١

س١:

$$\mu = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{٤٠+٥٠+٦٠+٧٠+٥٥}{٥} = \frac{٢٧٥}{٥} = ٥٥$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س-\mu)^{٢}}{ن}} = \sqrt{\frac{٥٠٠}{٥}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

س	$س - \mu$	$(س-\mu)^{٢}$	$ع = \frac{س-\mu}{\sigma}$
٤٠	١٥-	٢٢٥	$\frac{١٥-}{١٠} = ١,٥-$
٥٠	٥-	٢٥	$\frac{٥-}{١٠} = ٠,٥-$
٦٠	٥	٢٥	$\frac{٥}{١٠} = ٠,٥$
٧٠	١٥	٢٢٥	$\frac{١٥}{١٠} = ١,٥$
٥٥	٠		$\frac{٠}{١٠} = ٠$
المجموع		٥٠٠	

س٢:

اللغة العربية $ع = \frac{٧٢-٦٩}{١} = \frac{٣}{١} = ٣$

المحاسبة $ع = \frac{٦٩-٦٨}{٤} = \frac{١}{٤}$

الرياضيات $ع = \frac{٧٥-٧٩}{٢} = \frac{٤-}{٢} = ٢-$

تحصيل علي كان أفضل في اللغة العربية .

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٣: $\mu = ١٧$ ، $\sigma = ٣$

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma} \Leftarrow -١,٨ = \frac{س - ١٧}{٣}$$

$$س - ١٧ = -٥,٤$$

$$س = ١١,٦$$

$$ع = \frac{س - \mu}{\sigma} \Leftarrow ٢ = \frac{س - ١٧}{٣}$$

$$س - ١٧ = ٦$$

$$س = ٢٣$$

س٤ :

$$٠,٥ + ك٥ + ٠ + ١,٥ - = ٠,٥ - ك٥ + ١,٥ = ٠$$

$$ك٥ = ١,٥ \Leftarrow ك٥ + ١,٥ = ٠$$

$$ك = \frac{١,٥}{٥} = ٠,٣ \Leftarrow$$

بحساب الانحراف المعياري للعلامات المعيارية سنجد بأن $\sigma = ١$

س٥:

$$ع_{٨٥} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$١ = \frac{\mu - ٨٥}{\sigma} \Leftarrow \sigma = \mu - ٨٥ .....(١)$$

$$ع_{٧٠} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$-٢ = \frac{\mu - ٧٠}{\sigma} \Leftarrow -٢\sigma = \mu - ٧٠ .....(٢)$$

$$\mu - ٨٥ = \sigma$$

$$\pm \mu \mp ٧٠ = \pm ٢\sigma$$

$$١٥ = ٣\sigma$$

$$٥ = \sigma$$

$$\mu - ٨٥ = \sigma$$

$$\mu - ٨٥ = ٥$$

$$\mu - = ٨٥ - ٥$$

$$-٨٠ = -\mu \quad \text{ومنها} \quad \mu = ٨٠$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$\therefore ع_{٧٥} = \frac{٨٠-٧٥}{٥}$$
$$= \frac{-٥}{٥} = -١$$

حلول تمارين ومسائل ١ – ٢

س١: أ) المساحة تحت $(ع = ١,٣٨) = ٠,٩١٦٢$

ب) المساحة فوق $(ع = ٠,٩)$ =١- المساحة تحت $(ع = ٠,٩) = ١-٠,٨١٥٩ = ٠,١٨٤١$

ج) المساحة بين $(ع = ١,٥)$ و $(ع = -١,٥)$ = المساحة تحت $(ع = ١,٥)$- المساحة تحت $(ع = -١,٥)$

$= ٠,٩٣٣٢ - ٠,٠٦٦٨ = ٠,٨٦٦٤$

س٢:

أ) المساحة تحت $ع = ٠,٨٥٥٤$ بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد $ع = ١,٠٦$

ب) المساحة تحت $ع = ١ - ٠,٧٧٣٤ = ٠,٢٢٦٦$ ومن الجدول $ع = -٠,٧٥$.

ج) بما أن المساحة بين (-ع و ع) = ٠,٦٠

فإن المساحة تحت (- ع) + المساحة فوق $(ع) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤$

ومنها المساحة تحت $(-ع) = \frac{٠,٤}{٢} = ٠,٢$ والمساحة تحت $ع = ٠,٦ + ٠,٢ = ٠,٨$

من الجدول نجد ع = تقريبا ٠,٨٤

س٣:

$$ع_{١٥٠} = \frac{١٥٠-١٦٥}{١٠} = \frac{-١٥}{١٠} = -١,٥$$

$$ع_{١٨٠} = \frac{١٨٠-١٦٥}{١٠} = \frac{١٥}{١٠} = ١,٥$$

نسبة الطلبة = المساحة بين (ع= ١,٥ و ع= - ١,٥) $= ٠,٩٣٣٢ - ٠,٠٦٦٨ = ٠,٨٦٦٤$

ومنها عدد الطلبة $= ٠,٨٦٦٤ \times ٥٠٠ = ٤٣٣$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س ٤:

أ) $ع_{٧٨} = \frac{٧٨ - ٧٢}{٨} = \frac{٦}{٨} = ٠,٧٥$ ، $ع_{٦٢} = \frac{٦٢ - ٧٢}{٨} = \frac{-١٠}{٨} = -١,٢٥$

نسبة الطلبة = المساحة بين (ع = ٠,٧٥)، (ع =- ١,٢٥)

= المساحة تحت (ع = ٠,٧٥) – المساحة تحت (ع =- ١,٢٥)

$= ٠,٦٦٧٨ = ٠,١٠٥٦ - ٠,٧٧٣٤$

ومنها النسبة المئوية للطلبة $= ٠,٦٦٧٨ \times ١٠٠٪ = ٦٦,٧٨٪$

ب) نسبة الطلبة الراسبين = المساحة تحت (ع = ٦٠)

$ع_{٦٠} = \frac{٦٠ - ٧٢}{٨} = \frac{-١٢}{٨} = -١,٥$

نسبة الطلبة الراسبين = المساحة تحت (ع =- ١,٥) $= ٠,٠٦٦٨$

عدد الطلبة الراسبين $= ٠,٠٦٦٨ \times ٦٠٠ = ٤٠$ طالباً.

س ٥:

$ع_{٦٨٠} = \frac{٦٨٠ - ٧٠٠}{٢٠} = \frac{-٢٠}{٢٠} = -١$ ، $ع_{٧٤٠} = \frac{٧٤٠ - ٧٠٠}{٢٠} = \frac{٤٠}{٢٠} = ٢$

المساحة بين (ع = ٢) و (ع =- ١) = المساحة تحت (ع = ٢) – المساحة تحت (ع =- ١)

$= ٠,٩٧٧٢ - ٠,١٥٨٧ = ٠,٨١٨٥$

عدد الموظفين $= ٠,٨١٨٥ \times ١٠٠٠ = ٨١٩$ موظفاً.

.

حلول تمارين ومسائل عامة ١ – ٣

س ١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
الإجابة	جـ	جـ	د	أ	ب	ب	د	أ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٢:

$$ع_{٧١} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$٢ = \frac{٧١ - \mu}{\sigma} \Leftarrow \sigma٢ = ٧١ - \mu \quad .....(١)$$

$$ع_{٥٣} = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

$$-١ = \frac{٥٣ - \mu}{\sigma} \Leftarrow -\sigma = ٥٣ - \mu \quad .....(٢)$$

بحل المعادلتين ينتج أن:

$$\sigma٣ = ١٨$$

$$\sigma = ٦$$

وبالتعويض في المعادلة .....(١) ينتج أن

$$\mu - ٧١ = ١٢$$

$$\mu = ٥٩$$

س٣: أ) $ع_{١,٠٣} = \frac{١,٠٣ - ١,٠١}{٠,٠٢} = ١$

نسبة الأكياس = المساحة تحت (ع = ١) = ٠,٨٤١٣

ب) $ع_{١} = \frac{١ - ١,٠١}{٠,٠٢} = -٠,٥$ ، $ع_{١,٠٥} = \frac{١,٠٥ - ١,٠١}{٠,٠٢} = ٢$

نسبة الأكياس = المساحة بين (ع= -٠,٥ و ع= ٢)

= المساحة تحت (ع= ٢) – المساحة تحت (ع= -٠,٥)

= ٠,٩٧٧٢ - ٠,٣٠٨٥ = ٠,٦٦٨٧

س٤:

أ) $ع_{١١٠٠٠٠} = \frac{١١٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١$ ، $\frac{٩٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = -١$

نسبة البطاريات المطلوبة = المساحة بين (ع = ١) و (ع =- ١)

= المساحة تحت (ع = ١) – المساحة تحت (ع =- ١)

= ٠,٨٤١٣ - ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٨٢٦

عدد البطاريات = ٠,٦٨٢٦ × ٢٠٠٠٠ = ١٣٦٥٢ بطارية

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

ب) $ع_{١٢٠٠٠٠} = \frac{١٠٠٠٠٠ - ١٢٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٢$

نسبة البطاريات = المساحة فوق (ع = ٢)

$= ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨$

عدد البطاريات $= ٠,٠٢٢٨ \times ٢٠٠٠٠ = ٤٥٦$

ج) $ع_{١١٠٠٠٠} = \frac{١٠٠٠٠٠ - ١١٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١$ ، $ع_{٨٠٠٠٠} = \frac{١٠٠٠٠٠ - ٨٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} = -٢$

نسبة البطاريات = المساحة تحت (ع = ١)– المساحة تحت (ع =– ٢)

$= ٠,٨٤١٣ - ٠,٠٢٢٨ = ٠,٨١٨٥$

النسبة المئوية $= ٠,٨١٨٥ \times ١٠٠٪ = ٨١,٨٥٪$

س٥: أ) $ع_{٥٠} = \frac{٤٠ - ٥٠}{٥} = ٢$

نسبة الأعضاء = المساحة فوق (ع = ٢)

= ١ – المساحة تحت (ع = ٢) $= ١ - ٠,٩٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨$

عدد الأعضاء $= ٠,٠٢٢٨ \times ٤٠٠ = ٩$

ب) $ع_{٣٥} = \frac{٤٠ - ٣٥}{٥} = \frac{٥-}{٥} = -١$ ، $ع_{٤٥} = \frac{٤٠ - ٤٥}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$

نسبة الأعضاء = المساحة بين (ع = ١) و (ع =– ١)

= المساحة تحت (ع = ١) – المساحة تحت (ع =– ١)

$= ٠,٨٤١٣ - ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٨٢٦$

عدد الأعضاء $= ٠,٦٨٢٦ \times ٤٠٠ = ٢٧٣$ عضواً .

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

الوحدة الثانية

النهايات والاتصال

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

حلول تمارين ومسائل ٢-١

س١: أ) $و(٤) = ٢$ ب) $\lim_{س \to ٤} و(س) = ٢$

ج) $ك(٤) = ٣$ د) $\lim_{س \to ٤} ك(س)$ = غير موجودة

هـ) $هـ(٤) = ١$ و) $\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٢$

ز) $ح(٤) = ١$ ح) $\lim_{س \to ٤} ح(س)$ = غير موجودة .

س٢): أ) $\lim_{س \to ٤} و(س) = ٣$ ب) $\lim_{س \to ٠^-} و(س) = ٣$

ج) $\lim_{س \to ٠^+} و(س) = ١$ د) $\lim_{س \to ٠} و(س)$ = غير موجودة

حلول تمارين ومسائل (٢ - ٢)

س١: أ) $\lim_{س \to ٢} (٢و(س) - هـ(س)) = \lim_{س \to ٢} ٢و(س) - \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢ \lim_{س \to ٢} و(س) - \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢(\lim_{س \to ٢} و(س))^{٢} - \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢ \times (-٢)^{٢} - ٣ = ٥$

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥و(س)}{هـ(س) + س} = \frac{\lim_{س \to ٢} ٥و(س)}{\lim_{س \to ٢} (هـ(س) + س)}$

$= \frac{\lim_{س \to ٢} ٥و(س)}{\lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} س}$

$= \frac{٥ \times -٢}{٢ + ٩}$

$= \frac{-١٠}{١١}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

ج) $\lim_{س\to ٢}(٤هـ(س)+س^{٢}-٣)=\lim_{س\to ٢}٤هـ(س)+\lim_{س\to ٢}س^{٢}-\lim_{س\to ٢}٣$

$=٤\times ٢-٤+٣=-٧$

س٢: أ) $\lim_{س\to ٤}\frac{٣س^{٢}-١٢س}{س^{٢}-١٦}=\lim_{س\to ٤}\frac{٣س(س-٤)}{(س+٤)(س-٤)}$

$=\lim_{س\to ٤}\frac{٣س}{(س+٤)}$

$=\frac{٣\times ٤}{(٤+٤)}$

$=\frac{١٢}{٨}=١٫٥$

ب) $\lim_{س\to ١}\frac{س^{٣}-١}{س^{٢}-١}=\lim_{س\to ١}\frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{(س-١)(س+١)}$

$=\lim_{س\to ١}\frac{(س^{٢}+س+١)}{(س+١)}$

$=\frac{٣}{٢}$

ج) $\lim_{س\to \sqrt{٥}}\frac{س^{٢}-٥}{س-\sqrt{٥}}=\lim_{س\to \sqrt{٥}}\frac{(س+\sqrt{٥})(س-\sqrt{٥})}{(س-\sqrt{٥})}=٢\sqrt{٥}$

س٣: $\lim_{س\to ٣}\frac{أ(س^{٢}-٩)}{(س-٣)}=\lim_{س\to ٣}\frac{أ(س-٣)(س+٣)}{(س-٣)}$

$=\lim_{س\to ٣}أ(س+٣)=٢٤$ ومنها

$أ٦=٢٤$

$أ=٤$

س٤: $\lim_{س\to ٢}\frac{س^{٢}-٢س}{س^{٢}+٢س-٨}=\lim_{س\to ٢}\frac{س(س-٢)}{(س+٤)(س-٢)}$

$=\lim_{س\to ٢}\frac{س}{(س+٤)}$

$=\frac{٢}{٦}=\frac{١}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

تمارين ومسائل (٢ – ٣)

س١: – $\lim_{س\to ١^-} و(س) = \lim_{س\to ١^-} (س-٢) = -٣$

– $\lim_{س\to ١} و(س) = \lim_{س\to ١} (س^{٢}-٢) = -١$

– $\lim_{س\to ٠^-} و(س) = \lim_{س\to ٠^-} (س-٢) = -٢$ ، $\lim_{س\to ٠^+} و(س) = \lim_{س\to ٠^+} (س^{٢}-٢) = -٢$

وبما أن $\lim_{س\to ٠^-} و(س) = \lim_{س\to ٠^+} و(س) = -٢$

فإن $\lim_{س\to ٠} و(س) = -٢$

س٢: $\lim_{س\to ١} و(س)$ موجودة $\leftarrow \lim_{س\to ١^+} و(س) = \lim_{س\to ١^-} و(س)$

$$\lim_{س\to ١^+} و(س) = \lim_{س\to ١^+} \frac{١-س}{س-١} = \lim_{س\to ١^+} \frac{-(س-١)}{(س-١)} = -١$$

$$\lim_{س\to ١^-} و(س) = \lim_{س\to ١^-} (أس^{٢}-٩) = أ-٩$$

$$أ-٩ = -١$$

$$أ = ٨$$

س٣: $\lim_{س\to ٤^-} و(س) = و(٤^-)$

$$ب = \lim_{س\to ٤^-} \frac{س^{٢}-١٦}{س+٤}$$

$$ب = \lim_{س\to ٤^-} \frac{(س-٤)(س+٤)}{(س+٤)}$$

$$ب = \lim_{س\to ٤^-} (س-٤)$$

$$ب = -٨$$

س٤: $\lim_{س\to أ} \frac{س^{٢}-أ^{٢}}{س-أ} = \lim_{س\to ٣} (س+٥)$

$$\lim_{س\to أ} \frac{س^{٢}-أ^{٢}}{س-أ} = ٨$$

$$\lim_{س\to أ} \frac{(س+أ)(س-أ)}{(س-أ)} = ٨$$

$٢أ = ٨$ ومنها $أ = ٤$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٥: - $\lim_{س\to 0} ه(س) = \lim_{س\to 0} (س^{٣}+٢) = ٢$

- $\lim_{س\to ١^{-}} ه(س) = \lim_{س\to ١^{-}} (س^{٣}+٢) = ٣$ ، $\lim_{س\to ١^{+}} ه(س) = \lim_{س\to ١^{+}} (٤س-١) = ٣$

وبما أن $\lim_{س\to ١^{-}} ه(س) = \lim_{س\to ١^{+}} ه(س)$

فإن $\lim_{س\to ١} ه(س) = ٣$

- $\lim_{س\to ٥} ه(س) = ١٩$

تمارين ومسائل (٢ - ٤)

س١: أ) $\lim_{س\to 0} س^{٢}(-٥س+٢) = \lim_{س\to 0} (-٥س^{٣}+٢س^{٢})$

$= \lim_{س\to \infty} س^{٣}(-٥+\frac{٢}{س})$

$= \lim_{س\to \infty} س^{٣} \times \lim_{س\to \infty} (-٥+\frac{٢}{س})$

$= \lim_{س\to \infty} س^{٣} \times (\lim_{س\to \infty} -٥ + \lim_{س\to \infty} \frac{٢}{س})$

$= -\infty$

ب) $\lim_{س\to \infty} (\frac{٨س^{٣}-١+س^{٢}+٤}{س^{٥}+٣+س^{٤}+١}) = ٠$ ، لأن درجة البسط أصغر من درجة المقام

ج) $\lim_{س\to \infty} \frac{(س+٢)(٣س+١)}{(س+١)(س+٣)} = \lim_{س\to \infty} \frac{٣س^{٢}+٧س+٢}{س^{٢}+٤س+٣} = ٣$

س٢: $\lim_{س\to \infty} \frac{س^{ن}+٥}{٣س^{٢}+١} = \frac{١}{٣}$ $\Leftarrow$ درجة البسط تساوي درجة المقام $\Leftarrow ن = ٢$

س٣: $\lim_{س\to ٢} (أس+٣) = \lim_{س\to \infty} \frac{٤س^{٣}-٢س+١}{س-س^{٣}}$

$١٢+أ٣ = -٤$

$أ١٢ = -٧$

$أ = \frac{-٧}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٤: أ) $\text{نهـا}_{س\to\infty}\left(\frac{٥س}{س-١}-\frac{٢س}{س+١}\right)=\text{نهـا}_{س\to\infty}\frac{٥س(س+١)-٢س(س-١)}{س^{٢}-١}$

$$=\text{نهـا}_{س\to\infty}\frac{٥س^{٢}+٥س-٢س^{٢}+٢س}{س^{٢}-١}=\text{نهـا}_{س\to\infty}\frac{٣س^{٢}+٧س}{س^{٢}-١}=٣$$

ب) $\text{نهـا}_{س\to\infty}\left(\frac{س^{٥}-٣س+٢}{س^{٢}+٦}\right)=\infty$ ، لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام

تمارين ومسائل (٢ – ٥)

س١: $\text{نهـا}_{س\to٤}\text{ق}_{١}(س)$ غير موجودة ، حيث أن $\text{نهـا}_{س\to٤^{+}}\text{ق}_{١}(س)\neq\text{نهـا}_{س\to٤^{-}}\text{ق}_{١}(س)$

$\text{نهـا}_{س\to٢}\text{ق}_{٢}(س)\neq\text{ق}_{٢}(٢)$

س٢: أ) $\text{ق}(س)$ متصل عند س = ٢ لأنه كثير حدود

ب) $\text{نهـا}_{س\to٢}\text{ق}(س)=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{س^{٢}-٢س}{س-٢}=\text{نهـا}_{س\to٢}\frac{س(س-٢)}{(س-٢)}=٢$

$\text{ق}(٢)=٧$

$\text{نهـا}_{س\to٢}\text{ق}(س)\neq\text{ق}(٢)$ ، $\text{ق}(س)$ غير متصل عند س = ٢ .

س٣: $\text{نهـا}_{س\to١^{+}}\text{ق}(س)=١+١=٢$ ، $\text{نهـا}_{س\to١^{-}}\text{ق}(س)=٣-١=٢$

$\text{نهـا}_{س\to١^{+}}\text{ق}(س)=\text{نهـا}_{س\to١^{-}}\text{ق}(س)=٢\Leftarrow\text{نهـا}_{س\to١}\text{ق}(س)=٢$

$\text{ق}(١)=١+١=٢$

$\text{نهـا}_{س\to١}\text{ق}(س)=\text{ق}(١)\Leftarrow\text{ق}(س)$ متصل عند س= ١

س٤: $\text{نهـا}_{س\to٢^{+}}\text{ق}(س)=\text{نهـا}_{س\to٢^{-}}\text{ق}(س)=\text{ق}(٢)$ لأن $\text{ق}(س)$ عند س = ٢.

$٣\times٢-٥=٤-أ$ ومنها $أ=٣$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

تمارين ومسائل (٢ – ٦)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الإجابة	د	جـ	ب	أ	أ	ب	أ	د	أ

س٢: أ) $\lim_{س \to -٤} \left(\frac{٢س}{س^{٢} - ٤} - \frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٤} \right) = \frac{-٨}{١٢} - \frac{١٦}{١٢} = \frac{-٢٤}{١٢} = -٢$

ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{س^{٢} - ٧س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س(س - ٧)} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{(س - ٧)} = \frac{-١}{٧}$

جـ) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٥س + ٦} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س - ٢)(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س - ٢)} = ٢٧$

د) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٨س} - ٢}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{(\sqrt{٨س} - ٢)}{(\sqrt{٨س} - ٢)(\sqrt{٨س} + ٢)} = \lim_{س \to ٤} \frac{١}{(\sqrt{٨س} + ٢)} = \frac{١}{٤}$

س٣: $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ٢ب س^{٢} + ١}{٤س^{٢} + ١} = \frac{٨ + ٨ب + ١}{١٦ + ١} = ١$

$٨ + ٨ب + ١ = ١٦ + ١$ ومنها ب $= ١$

س٤: $\lim_{س \to ٢^{+}} ن(س) = ٢ + ٤ = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = ٥ \times ٢ - ٤ = ٦$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ن(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ن(س) = ٦ \Leftarrow \lim_{س \to ٢} ن(س) = ٦$

$ن(٢) = ١٠ - ٤ = ٦$

$\lim_{س \to ٢} ن(س) = ن(٢) \Leftarrow ن(س)$ متصل عند س $= ٢$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٥: بما أن $ن(س)$ متصل عند س = −١ فإن $\lim_{س\to -١^-} ن(س)$ موجودة.

$$\lim_{س\to -١^+} ن(س) = \lim_{س\to -١^-} ن(س)$$

$$\lim_{س\to -١^+} (٣س^{٢} + ٢) = \lim_{س\to -١^-} (-٧س + أ)$$

$$٥ = ٧ + أ \quad \text{ومنها } أ = -٢$$

س٦: $$\lim_{س\to ٣} ن(س) = \lim_{س\to ٣} \frac{٢س^{٢} - ٦س}{س - ٣} = \lim_{س\to ٣} \frac{٢س(س-٣)}{(س-٣)} = ٦$$

$$ن(٣) = ٥$$

$\lim_{س\to ٣} ن(س) \neq ن(٣)$ ، $ن(س)$ غير متصل عند س = ٣ .

س٧: أ) $\lim_{س\to ٠^-} ن(س) = ١$

ب) $\lim_{س\to ٠^+} ن(س) = \lim_{س\to ٠^+} ٥ - ٠ = ٥$

ج) $\lim_{س\to ٠^+} ن(س) \neq \lim_{س\to ٠^-} ن(س)$ ومنها $\lim_{س\to ٠} ن(س)$ غير موجودة

د) $ن(س)$ غير متصل عند س = ٠ لأن $\lim_{س\to ٠} ن(س)$ غير موجودة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

الوحدة الثالثة

التفاضل

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

حلول تمارين ومسائل ٣-١

س١:

أ . $\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣,٨ - ٢ = ١,٨$

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = و(س_٢) - و(س_١)$

$= و(٣,٨) - و(٢) = ١٨ - ٩ = ٩$

ب. $\Delta س = س_٢ - س_١ = -٢ - ٤ = -٦$

$\Delta ص = ص_٢ - ص_١ = و(س_٢) - و(س_١)$

$= و(-٢) - و(٤) = ١١^{-} - ١٩ = -٣٠$

س٢:

أ) متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{و(٤) - و(٧)}{٤ - ٧} = \frac{٢ - ١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

ب) متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ = ٢$ ، $س_٢ = ٢ + ٤ = ٦$

$= \frac{و(٦) - و(٢)}{٦ - ٢} = \frac{٣٥ - ٣}{٤} = ٨$

س٣:

ميل القاطع أب $= \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{و(٣) - و(-٢)}{٣ - -٢} = \frac{١٠ - ٥}{٣ - -٢} = \frac{٥}{٥} = ١$

س٤:

أ. التغير في ص $= \Delta ص = ص_٢ - ص_١ = و(س_٢) - و(س_١)$

$١٣ = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{س_٢ - س_١} = \frac{\Delta ص}{٤ - ١} = \frac{\Delta ص}{٣}$

ومنها $\Delta ص = ٣٩$

ب. $\Delta ص = و(٤) - و(١)$

$و(٤) = \Delta ص + و(١) = ٣٩ + ٦ = ٤٥$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

حلول تمارين ومسائل ٣-٢

س١:

أ. $ن'(-٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(-٣+هـ) - ن(-٣)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢(-٣+هـ) - ٧ - (٢(-٣) - ٧)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٦ + ٢هـ - ٧ + ١٣}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ}{هـ}$

$= ٢$

ب. $ن'(٢) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢+هـ) - ن(٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-٣ - (٢+هـ) - (-٣ - ٢)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{-١ - هـ - ١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-هـ}{هـ}$

$= -١$

ج. $و'(٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{و(٠+هـ) - و(٠)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(هـ^{٢} + هـ) - (٠)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ^{٢} + هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ+١)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to ٠} (هـ+١)$

$= ١$

س٢: أ. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ} = و'(٣) = ٨$

ب. $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣+هـ) - ن(٣)}{هـ}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$= \frac{١}{٢} \quad \text{و}'(٣) = \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤$$

ج. $$\text{و}'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣) - ن(٣ + هـ)}{هـ} \times -١ = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{هـ}$$

$$= -\text{و}'(٣)$$

$$= -٨$$

س٣: $$\text{و}'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \text{متوسط التغير} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢}{(-١ + هـ)}$$

$$= -٢$$

س٤: $$\text{و}'(٥) = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٧هـ - هـ^{٢}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٧هـ - هـ^{٢}}{٤هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٧ - هـ)}{٤هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٧ - هـ}{٤}$$

$$= \frac{٧}{٤}$$

حلول تمارين ومسائل ٣-٣

س١: $$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢) - ن(٢ + هـ)}{هـ} = -\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢ + هـ) - ن(٢)}{هـ}$$

$$= -ن'(٢)$$

حيث $\text{و}(س) = س^{٣} - س$ ، $\text{و}'(س) = ٣س^{٢} - ١$ ، $\text{و}'(٢) = ١١$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢) - ن(٢ + هـ)}{هـ} = -١١$$

س٢: أجد $\frac{ص}{س}$ الاقترانات الآتية:

أ. $\frac{ص}{س}$ = صفر ب) $\frac{ص}{س} = ٥ + ٦س$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

ج. $ص = \frac{٤}{\sqrt{س}} = س^{\frac{-١}{٢}}$ ، $س > ٠$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٤}{٢} س^{\frac{-٣}{٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{س^{٣}}} \quad ، \quad س > ٠$$

س٣: أ) $ص = \frac{٣}{س^{٢}} + ٥س = ٣س^{-٢} + ٥س$

$$\frac{د ص}{د س} = -٦س^{-٣} + ٥ = \frac{-٦}{س^{٣}} + ٥$$

$$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=١} = -٦ + ٥ = -١$$

ب) $ص = ٧س^{٢} + \sqrt[٣]{س^{٢}} = ٧س^{٢} + س^{\frac{٢}{٣}}$

$$\frac{د ص}{د س} = ١٤س + \frac{٢}{٣} س^{\frac{-١}{٣}}$$

$$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=١} = ١٤ + \frac{٢}{٣} = \frac{٤٤}{٣}$$

س٤: $ع(س) = ٣س^{٤} + ب س^{٢}$

$ع'(س) = ١٢ س^{٣} + ٢ب س$

$ع'(١) = ١٢ + ٢ب = ٢٢$

$٢ب = ١٠$ ومنها $ب = ٥$

حلول تمارين ومسائل ٣-٤

س١: أ. $\frac{د ص}{د س}$ = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$= (٢س+٥) \times (-٣س^{٢}) + (٣ - س^{٣}) \times ٢$

$= -٦س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٦ - ٢ س^{٣}$

$= -٨ س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٦$

ب. $\frac{د ص}{د س} = \frac{(س+٣) \times ١ - س \times ١}{(س+٣)^{٢}}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$= \frac{س + ٣ - س}{(س + ٣)^{٢}} = \frac{٣}{(س + ٣)^{٢}}$$

$$\left| \frac{ص}{س} \right|_{س=١} = \frac{٣}{١٦}$$

س٢: $ه'(س) = ٢س - ١$

$$ه'(٣) = ٢ \times ٣ - ١ = ٥$$

س٣: $ل'(س) = ه'(س) + ٣هـ'(س)$

$$= (٢س + ٣) + هـ'(س)$$

$$ل'(٢) = (٢ \times ٢ + ٣) + ٣هـ'(٢)$$

$$= ٧ + ١ \times ٣$$

$$= ١٠$$

س٤: $ه'(س) = \frac{٤ \times (٢ + ٣س) - ٣ \times (١ + ٤س)}{(١ + ٤س)^{٢}}$

$$ه'(٢) = \frac{٤ \times ٨ - ٣ \times ٩}{(٩)^{٢}} = \frac{٣٢ - ٢٧}{(٩)^{٢}} = \frac{٥}{٨١}$$

س٥: $ه'(س) = (س^{٣} \times ل'(س) + ل(س) \times ٣س^{٢}) + هـ'(س)$

$$ه'(-١) = (-١ \times ل'(-١) + ل(-١) \times ٣) + هـ'(-١)$$

$$= (-١ \times -٣ + ٥ \times ٣) + ٧$$

$$= ٢٥$$

حلول تمارين ومسائل ٣-٥

س١: ميل المماس = $ه'(-٢)$

$$ه'(س) = \frac{١ \times (٢ + س^{٢}) - ٢س \times (٣ + س)}{(٣ + س)^{٢}}$$

$$ه'(-٢) = \frac{١ \times (٢ + ٤) - ٤ \times (٣ + ٤)}{(٣ + ٢)^{٢}} = \frac{٦ - ٤}{١} = ١٠$$

ميل المماس عندما (س = -٢) = - ١٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٢: معادلة المماس هي ص – ص١ = م (س – س١)

س١ = ٠ ، ص١ = ١ ، م = هـ´(٠) ، هـ´(س) = ٣س^{٢} + ٤س – ١

هـ´(٠) = ١$^{-}$ = م$_{م}$ ومنها م$_{ع}$ = ١

معادلة العمودي على المماس: ص – ١ = ١(س – ٠)

ص – س – ١ = صفر

س٣: المماس أفقي تعني أن ميل المماس = صفر ،

ومنها هـ´(س) = ٠ ، هـ(س) = س^{٢} – ٣س + ٥

هـ´(س) = ٢س – ٣

٢س – ٣ = ٠ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$ ، ص = هـ($\frac{٣}{٢}$) = $\frac{٩}{٤}$ – $\frac{٩}{٢}$ + ٥ = $\frac{١١}{٤}$

النقطة هي ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١١}{٤}$)

س٤: معادلة المماس هي ص – ص١ = م (س – س١) ، (٠ ، ٧)

م$_{م}$ = $\frac{١^{-}}{م_{ع}}$ = $\frac{١^{-}}{\frac{١-}{٣}}$ = ٣

معادلة المماس: ص – ٧ = ٣ (س – ٠)

ص – ٣س – ٧ = ٠

س٥: ميل المماس عندما (س= ١) =١١ تعني أن هـ´(١) = ١١ ، لكن هـ´(س) = ٢أس + ٥

هـ´(١) = ١١ ومنها ٢أ + ٥ = ١١ ومنها أ = ٣

حلول تمارين ومسائل ٣ – ٦

س١: (هـO هـ)´(س) = هـ´(هـ(س))هـ´(س)

حيث هـ´(س) = ٢س ، هـ´(س) = ١

(هـO هـ)´(س) = هـ´(س + ١)هـ´(س)

(هـO هـ)´(س) = ٢(س + ١)٢ × ١ = ٢(س + ١) × ١ = ٢س + ٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٢: $\frac{ص}{س} = ٢(٢س-١) \times ٢ = ٤(٢س-١) = ٨س-٤$

س٣: $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

حيث $\frac{ص}{ع} = ٢ع-٥$ ، $\frac{ع}{س} = ٢$

$\frac{ص}{س} = ٢ \times (٢ع-٥) = ٤ع-١٠ = ٤(٢س+٣)-١٠ = ٨س+٢$

س٤: $ه'(س) = ٤(س^{٢} - س)^{٣} (٢س-١)$

$ه'(٢) = ٤(٤-٢)^{٣} (٤-١) = ٣٢ \times ٣ = ٩٦$

س٥: $ه'(س) = هـ'(٣س^{٢}+١) \times (٦س)$

$ه'(١) = هـ'(٣ \times ١+١) \times (٦ \times ١) = هـ'(٤) \times (٦) = ٢ \times ٦ = ١٢$

س٦: $(ه \circ هـ)'(٢) = ه'(هـ(٢)) هـ'(٢)$

$= ه'(٤) \times ٣ = ٢ \times ٣^{-} = ٦^{-}$

$(هـ \circ ه)'(٢) = هـ'(ه(٢)) ه'(٢) = هـ'(٣) \times ٥ = ١ \times ٥ = ٥$

حلول تمارين ومسائل ٣ - ٧

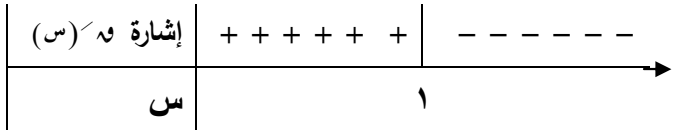
س١:

أ. $ه(س) = ٤س - ٢س^{٢}$

$ه'(س) = ٤ - ٤س$

$ه'(س) = ٠$

$٤ - ٤س = ٠$ ومنها $س = ١$



نلاحظ أن

إشارة $ه'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= ١) $\Leftarrow$ $ه(١)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $ه(س)$ وتساوي $ه(١) = ٤ - ٢ \times ١ = ٢$

ب. $ه(س) = س(س^{٢} - ١٢) = س^{٣} - ١٢ س$

$ه'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

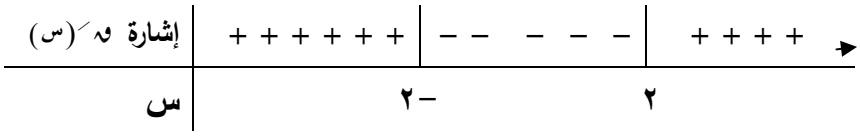
$ه'(س) = ٠$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$٣س^{٢} - ١٢ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٤) = ٠$ ومنها $س^{٢} - ٤ = ٠$

$(س + ٢)(س - ٢) = ٠$ ومنها $س = -٢$، $س = ٢$



نلاحظ أن

إشارة هـ´(س) تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -٢) ⇐ هـ(-٢) قيمة عظمى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(-٢) = ١٦.

إشارة هـ´(س) تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=٢) ⇐ هـ(٢) قيمة صغرى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(٢) = -١٦.

ج. هـ(س)= $س^{٣}$ -٣س +٢ ، س ∃ ح

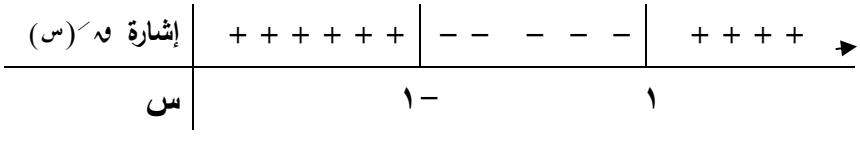
هـ´(س) = $٣س^{٢} - ٣$

هـ´(س) = ٠

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ١) = ٠$ ومنها $س^{٢} - ١ = ٠$

$(س + ١)(س - ١) = ٠$ ومنها $س = -١$، $س = ١$



نلاحظ أن

إشارة هـ´(س) تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= -١) ⇐ هـ(-١) قيمة عظمى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(-١) = ٤.

إشارة هـ´(س) تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س = ١) ⇐ هـ(١) قيمة صغرى محلية للاقتران هـ(س) وتساوي هـ(١) = ٠

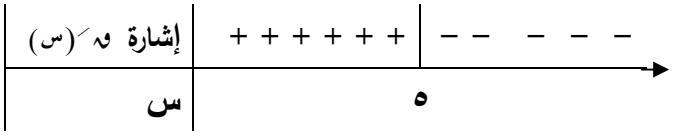
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

د. $\text{ه}(س) = -س^{٢} + ١٠س + ٥$ ، س $\in$ ح

$\text{ه}'(س) = -٢س + ١٠$

$\text{ه}'(س) = ٠$

$-٢س + ١٠ = ٠$ ومنها $س = ٥$



نلاحظ أن إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س = ٥) $\Leftarrow$ $\text{ه}(٥)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $\text{ه}(س)$ وتساوي $\text{ه}(٥) = ٣٠$

س٢: $\text{ه}(-٢)$ قيمة عظمى محلية $\Leftarrow$ $\text{ه}'(-٢) = ٠$

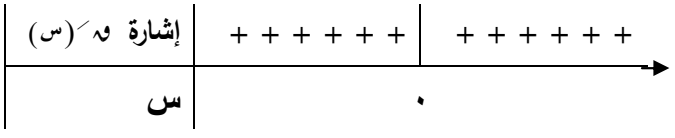
$\text{ه}'(س) = -٢س + ب$

$\text{ه}'(-٢) = ٠$ $\Leftarrow$ $-٢ \times -٢ + ب = ٠$ ومنها $ب = -٤$

س٣: $\text{ه}'(س) = ٣س^{٢}$

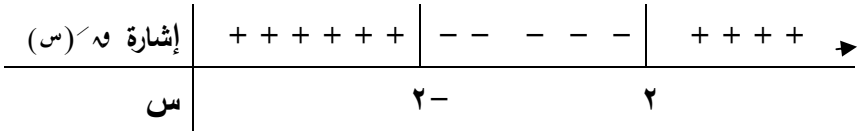
$\text{ه}'(س) = ٠$

$٣س^{٢} = ٠$ ومنها $س = ٠$



نلاحظ أن إشارة $\text{ه}'(س)$ لم تتغير حول $(س = ٠)$، $\text{ه}(٠)$ ليست قمة قصوى، ومنها $\text{ه}(س)$ ليس له أي قيم قصوى.

س٤:



نلاحظ أن

إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من موجبة إلى سالبة حول $(س = -٢)$ $\Leftarrow$ عند $(س = -٢)$ يوجد قيمة عظمى محلية.

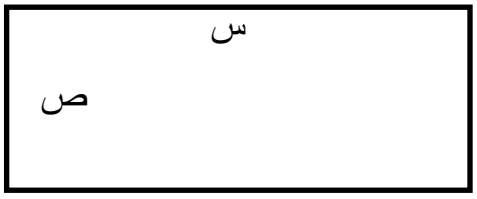
إشارة $\text{ه}'(س)$ تغيرت من سالبة إلى موجبة حول $(س = ٢)$ $\Leftarrow$ عند $(س = ٢)$ يوجد قيمة صغرى محلية.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

حلول تمارين ومسائل ٣ – ٨

س١: نفرض أن طول المستطيل = س

عرض المستطيل = ص



مساحة المستطيل = الطول × العرض

م(س) = س ص

مساحة المستطيل أكبر ما يمكن ⇐ إيجاد س التي يوجد عندها قيمة عظمى محلية للاقتران م(س).

لكن محيط المستطيل = ٢٠م

٢س + ٢ص = ٢٠

س + ص = ١٠ ومنها ص = ١٠ – س

م(س) = س (١٠ – س)

م(س) = ١٠س – س^{٢}

م´(س) = ١٠ – ٢س

م´(س) = ٠ ⇐ ١٠ – ٢س = ٠

ومنها س = ٥ م

إشارة م´(س)	+ + + + + + +	– – – – – – –
س	٥	

نلاحظ أن إشارة م´(س) تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= ٥) ⇐ عند (س= ٥) يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران م(س).

ص = ١٠–٥ = ٥م

البعدان هما ٥ م ، ٥ م ،

مساحة أكبر مستطيل = ٥×٥= ٢٥ م^{٢}

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٢: نفرض العدد الأول = س ، العدد الثاني = ص

س + ص = ٢٠

حاصل ضرب العددين = س × ص

ح (س) = س ص ، لكن ص = ٢٠ – س

ح (س) = س (٢٠ – س) = ٢٠ س – $س^{٢}$

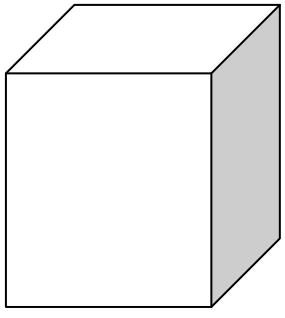
(نجد القيمة العظمى للاقتران ح(س))

ح ´(س) = ٢٠ – ٢ س

ح ´(س) = صفر ، ٢٠ – ٢ س = صفر ومنها س = صفر

العدد الأول = س = ١٠

العدد الثاني = ص = ٢٠ – س = ٢٠ – ١٠ = ١٠



س٣: نفرض طول ضلع القاعدة = س

ارتفاع الخزان = ع

سعة الخزان = $س^{٢}ع$

$س^{٢}ع$ = ٥٠٠

تكلفة بناء الخزان = ٥٠ (مساحة الأرضية + مساحة الجوانب الأربعة)

ت (س) = ٥٠ ($س^{٢}$ + ٤سع)

ت (س) = ٥٠$س^{٢}$ + ٢٠٠سع

لكن $ع = \frac{٥٠٠}{س^{٢}}$

ت (س) = ٥٠$س^{٢}$ + $\frac{١٠٠٠٠٠}{س}$ ،

أقل تكاليف تعني إيجاد القيمة الصغرى للاقتران ت(س).

ت ´(س) = ١٠٠س – $\frac{١٠٠٠٠٠}{س^{٢}}$

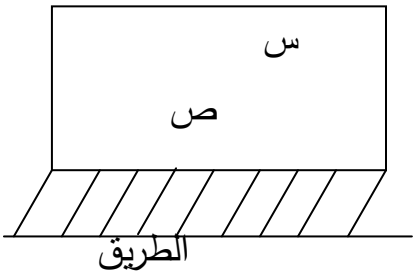
ت ´(س) = صفر ، ١٠٠س – $\frac{١٠٠٠٠٠}{س^{٢}}$ = صفر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

ومنها ١٠٠س = $\frac{١٠٠٠٠٠٠}{س^{٢}}$ ، ١٠٠س^{٣} = ١٠٠٠٠٠٠

س^{٣} = ١٠٠٠ ومنها س = ١٠م ، ع = $\frac{٥٠٠}{س^{٢}} = \frac{٥٠٠}{١٠٠}$ = ٥م

أبعاد الخزان هي: ١٠م ، ١٠م ، ٥م



س٤: نفرض أن طول الحديقة = س

عرضها = ص

مساحة الحديقة = س . ص = ٨٠٠

تكاليف السياج = ٦ س + ٢ (س + ٢ ص)

ت(س) = ٦ س + ٢ س + ٤ ص

= ٨ س + ٤ ص

لكن ص = $\frac{٨٠٠}{س}$

ت(س) = ٨ س + ٤ × $\frac{٨٠٠}{س}$

= ٨ س + $\frac{٣٢٠٠}{س}$

التكاليف أقل ما يمكن تعني إيجاد القيمة الصغرى للاقتران ت(س).

ت ´(س) = ٨ − $\frac{٣٢٠٠}{س^{٢}}$

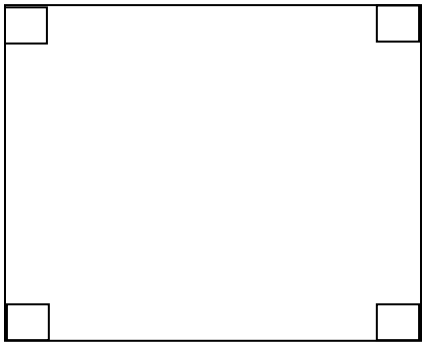
ت ´(س) = صفر ، ٨ − $\frac{٣٢٠٠}{س^{٢}}$ = صفر

٨ = $\frac{٣٢٠٠}{س^{٢}}$ ومنها ٨ س^{٢} = ٣٢٠٠ ،

س^{٢} = ٤٠٠ ومنها س = ± ٢٠ ، −٢٠ مرفوضة لأنها تمثل بعد،

س = ٢٠ م ومنها ص= $\frac{٨٠٠}{س}$ = ٤٠ م .

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4



س٥: نفرض أن طول ضلع المربع = س

طول ضلع قاعدة الصندوق = ٦٠ – ٢ س

حجم الصندوق = س (٦٠ – ٢ س) (٦٠ – ٢ س)

ح(س) = س (٣٦٠٠ – ٢٤٠ س + ٤ س^{٢})

= ٣٦٠٠ س – ٢٤٠ س^{٢} + ٤ س^{٣}

ح ′(س) = ٣٦٠٠ – ٤٨٠ س + ١٢ س^{٢}

(نجد س التي عندها القيمة العظمى)

ح ′(س) = صفر

٣٦٠٠ – ٤٨٠ س + ١٢ س^{٢} = صفر

س^{٢} – ٤٠ س + ٣٠٠= صفر

(س – ١٠) (س – ٣٠) = صفر ومنها س = ١٠ ، س =٣٠ (مرفوضة)

طول ضلع المربع = ١٠ سم

حلول تمارين عامة ٣ – ٩

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	أ	ب	ج	ب	د	أ	د	ج	ب	ج

س٢: متوسط التغير = $\frac{\text{ه}(٥) - \text{ه}(٢)}{٥ - ٢} = ١٠$

$\text{ه}(٥) - \text{ه}(٢) = ٣٠$

$\text{ه}(٥) - ٦ = ٣٠$ ومنها $\text{ه}(٥) = ٣٦$

س٣: متوسط التغير = $\frac{\text{ه}(أ) - \text{ه}(٢)}{أ - ٢} = ٦$

$\text{ه}(أ) - \text{ه}(٢) = ٦(أ - ٢)$

$أ^{٢} + ٣ - ٧ = ٦أ - ١٢$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$أ^{٢} - ١٦أ + ٨ = ٠$$

$$(أ - ٤)(أ - ٢) = ٠$$ ومنها $أ = ٤$ ، $أ = ٢$ لكن ٢ مرفوضة، ومنها $أ = ٤$

س٤: $$ن'(٣) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٣ + هـ) - ن(٣)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٣ + هـ)^{٢} + ١٠ - ١}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٩ + ٦هـ + هـ^{٢} + ١٠ - ١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٦هـ + هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٦ + هـ)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} ٦ + هـ = ٦$$

س٥: $$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢ + هـ) - ن(٢)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} ن'(٢)$$

$$ن'(س) = (س^{٢} + ٢) \times ٣ + (٣س + ٤) \times ٢س$$

$$ن'(٢) = ٦ \times ٣ + ١٠ \times ٤ = ٥٨$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٢ + هـ) - ن(٢)}{٢هـ} = \frac{١}{٢} \times ٥٨ = ٢٩$$

س٦: $$م'(س) = س^{٢} \times ه'(س) + ه(س) \times ٢س$$

$$م'(٣) = ٩ \times ه'(٣) + ٦ \times ه(٣) = ٩ \times ٥ + ٦ \times ٢^{-} = ٣٣$$

س٧: معادلة العمودي هي $ص - ص_{١} = م_{ع}(س - س_{١})$

$س = ١$، $ص = ه(١) = ٣$ ، $م_{ع} = \frac{-١}{م_{م}}$ لكن $م_{م} = ه'(١)$

$ه'(س) = ٣س^{٢} + ١٠س$ ومنها $ه'(١) = ١٣ = م_{م}$ ومنها $م_{ع} = \frac{-١}{١٣}$

معادلة العمودي: $ص - ٣ = \frac{-١}{١٣}(س - ١)$

$$١٣ص + س - ٤٠ = ٠$$

س٨: ميل المماس =٤ $\longleftarrow$ $ه'(١) = ٤$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$\text{هـ}'(س) = ٢أس + ٣$$

$$\text{هـ}'(١) = ٢أ + ٣ = ٤ \quad \text{ومنها قيمة الثابت } أ = \frac{١}{٢}$$

س٩: $\text{هـ}'(س) = ٣س^{٢} + ٦س$

$$\text{هـ}'(س) = ٠$$

$$٣س^{٢} + ٦س = ٠$$

$$٣س(س + ٢) = ٠ \quad ، \quad س = ٠ \ ، \ س = -٢$$

إشارة هـ′(س)	+ + + + + +	− − − − − −	+ + + +
س		−٢	٠

نلاحظ أن

إشارة هـ′(س) تغيرت من موجبة إلى سالبة حول (س= −٢) ⇐ هـ(−٢) قيمة عظمى محلية وتساوي ١١.

إشارة هـ′(س) تغيرت من سالبة إلى موجبة حول (س=٠) ⇐ هـ(٠) قيمة صغرى محلية وتساوي ٧

س١٠: نفرض طول ضلع القاعدة = س

ارتفاع الصندوق = ع

حجم الصندوق = $س^{٢}ع$

$$٥١٢ = س^{٢}ع$$

تكلفة عمل الصندوق = ٥ (مساحة القاعدتين + مساحة الجوانب الأربعة)

$$ت(س) = ٥(٢س^{٢} + ٤سع)$$

$$ت(س) = ١٠س^{٢} + ٢٠سع$$

$$\text{لكن } ع = \frac{٥١٢}{س^{٢}}$$

$$ت(س) = ١٠س^{٢} + \frac{١٠٢٤٠}{س}$$ أقل تكاليف تعني إيجاد القيمة الصغرى للاقتران ت(س).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$ت'(س) = ٢٠س - \frac{١٠٢٤٠}{س}$$

$$ت'(س) = صفر \quad ، \quad ٢٠س - \frac{١٠٢٤٠}{س} = صفر$$

$$ومنها \quad ٢٠س = \frac{١٠٢٤٠}{س} \quad ، \quad ٢٠س^{٣} = ١٠٢٤٠$$

$$س^{٣} = ٥١٢ \quad ومنها \quad س = ٨م \quad ، \quad ع = \frac{٥١٢}{س^{٢}} = \frac{٥١٢}{٦٤} = ٨م$$

الصندوق على شكل مكعب طول ضلعه ٨م.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

الوحدة الرابعة

التكامل

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

حلول تمارين ومسائل ٤ – ١

س١:

	المشتقة ق ′(س)	الاقتران الأصلي ق(س)+جـ
١.	٤س ٣	س ٤ +جـ
٢.	٤س ٣ + ٣س ٢ + ٢	س ٤ + س ٣ + ٢س+جـ
٣.	٢س + ١	س ٢ + س+جـ
٤.	٤س ٣ + ٣	∫(٤س ٣ + ٣)دس

س٢:

العبارة	أ	ب	ج	د	هـ	و
الإجابة	✗	✓	✗	✓	✗	✓

س٣: ق ′(س) = $\frac{س^{٢}+٣}{س+١}$.

حلول تمارين ومسائل ٤ – ٢

س١:

أ. ∫ $س^{\frac{٢}{٣}}$ دس = $\frac{٢}{٣}$ س+جـ

ب. ∫ دس = س+جـ

ج. ∫ $\sqrt{٥س}$ دس = $\frac{\sqrt{٥س}^{٢}}{٢}$ +جـ

د. ∫(٢س ٢ + ٣)دس = ∫٢س ٢ دس + ∫٣دس = $\frac{٢س^{٣}}{٣}$ +جـ١ + ٣س+جـ٢

= $\frac{٢س^{٣}}{٣}$ + ٣س+جـ

هـ. ∫(٧س ٣ − $\frac{٢}{س^{٢}}$ + ١)دس = ∫٧س ٣ دس − ∫٢س $^{-٢}$ دس + ∫١دس

= $\frac{٧س^{٤}}{٤}$ − $\frac{٢س^{-١}}{-١}$ + س+جـ = $\frac{٧س^{٤}}{٤}$ + $\frac{٢}{س}$ + س+جـ

و. ∫ك ٢ دس = ك ٢ س+جـ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٢: $\int (٢ص-٥)(ص+٣)\,دص = \int (٢ص^{٢}+ص-١٥)\,دص = \frac{٢ص^{٣}}{٣}+\frac{ص^{٢}}{٢}-١٥ص+جـ$

س٣: $\int \frac{ل^{٢}-٥ل+٦}{ل-٢}\,دل = \int \frac{(ل-٢)(ل-٣)}{(ل-٢)}\,دل = \int (ل-٣)\,دل = \frac{ل^{٢}}{٢}-٣ل+جـ$

س٤: $\int (٢س+١)(س^{٣}+س^{٢}-٣س+٤)\,دس = \int (٢س^{٤}+٣س^{٣}-٥س^{٢}+٥س+٤)\,دس$

$= \frac{٢س^{٥}}{٥}+\frac{٣س^{٤}}{٤}-\frac{٥س^{٣}}{٣}+\frac{٥س^{٢}}{٢}+٤س+جـ$

س٥: $ن'(س) = ٣س^{٣}+٥س^{٢}-٢س+٤$

س٦: $\frac{دص}{دس} = (٢س+٢)(س^{٢}+٢س)^{٥}$

حلول تمارين ومسائل ٤- ٣

س١: $هـ(س) = \int هـ'(س)\,دس = \int ٥\,دس = ٥س+جـ$

$هـ(س)$ يمر بالنقطة $(٢ ، ٣)$، $هـ(٢) = ٣$

$هـ(٢) = ٥\times٢+جـ$ ومنها $٣ = ١٠+جـ$ ، ومنها $جـ = -٧$

$هـ(س) = ٥س-٧$

س٢: $هـ(س) = \int هـ'(س)\,دس = \int (س+٣)\,دس = \frac{س^{٢}}{٢}+٣س+جـ$

$هـ(س)$ يمر بالنقطة $(٢ ، ٧)$، $هـ(٢) = ٧$

$هـ(٢) = ٢+٦+جـ = ٧$ ، ومنها $جـ = -١$

$هـ(س) = \frac{س^{٢}}{٢}+٣س-١$

س٣: $ك(س) = \int ك'(س)\,دس = \int (س+١)^{٣}\,دس = \int (س^{٣}+٣س^{٢}+٣س+١)\,دس$

$= \frac{س^{٤}}{٤}+س^{٣}+\frac{٣س^{٢}}{٢}+س+جـ$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$ك(٠) = ٢ = جـ$

$ك(س) = \frac{س^{٤}}{٤} + س^{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + س + ٢$

$ك(٢) = ٢٢$

س٤: $ع'(س) = ٢س - ٥$

$ع(س) = \int (٢س - ٥) د س = س^{٢} - ٥س + جـ$

$ع(٠) = ٣ \Leftarrow جـ = ٣$

$ع(س) = س^{٢} - ٥س + ٣$

معادلة المماس عند س =٢ هي :

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ع(٢) = ع'(٢)(س - ٢)$

لكن $ع(٢) = -٣$ ، $ع'(٢) = -١$

المعادلة هي $ص + ٣ = -١(س - ٢)$

$ص + س + ١ = ٠$

حلول تمارين ومسائل ٤ - ٤

س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ. $\int_{-١}^{٢} ٦\pi د س = ٦\pi س \Big|_{-١}^{٢} = ١٢\pi - (-٦\pi) = ١٨\pi$

ب. $\int_{٠}^{٢} (٥ - ٣س^{٢}) د س = (٥س - س^{٣}) \Big|_{٠}^{٢} = (٥ \times ٢ - ٨) - (٠ - ٠) = ٢$

ج. $\int_{١}^{٣} (\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}) د س = \int_{١}^{٣} (س^{-٢} - س^{-٣}) د س$

$= (\frac{س^{-١}}{-١} - \frac{س^{-٢}}{-٢}) \Big|_{١}^{٣} = (\frac{-١}{س} + \frac{-١}{٢س^{٢}}) \Big|_{١}^{٣}$

$= (\frac{-١}{٣} + \frac{-١}{١٨}) - (\frac{-١}{١} + \frac{١}{٢}) = ١ - \frac{-١}{٩} = \frac{٢}{٩}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

د. $\int_{١}^{٨} \sqrt[٣]{س}\, ءس = \int_{١}^{٨} س^{\frac{١}{٣}}\, ءس = \left| \frac{٣س^{\frac{٤}{٣}}}{٤} \right|_{١}^{٨}$

$= \left| \frac{٣\sqrt[٣]{س^{٤}}}{٤} \right|_{١}^{٨} = (\frac{٣\times ١٦}{٤}) - (\frac{٣\times ١}{٤}) = \frac{٤٥}{٤}$

س٢: $\int_{٣}^{٠} ب^{٢}\, ءس = ٣٢$، منها $\left| ب^{٢}س \right|_{٣}^{٠} = ٣٢$

$٥ب^{٢} - ٣ب^{٢} = ٣٢$ ومنها $٢ب^{٢} = ٣٢$

$ب^{٢} = ١٦$ ومنها $ب = \pm ٤$.

س٣: $\int_{-٢}^{أ} (٣ - ٢س)\, ءس =$ صفر، منها $\left| (٣س - س^{٢}) \right|_{-٢}^{أ} = ٠$

$(١٣ - أ^{٢}) - (٤ - ٢^{-}\times ٣) = ٠$ ومنها $١٣ - أ^{٢} + ١٠ = ٠$

$أ^{٢} - ١٣ - ١٠ = ٠$ ومنها $(أ - ٥)(أ + ٢) = ٠$

$أ = ٥$ ، -٢

س٤: $\int_{٠}^{٢} (٢س - ١)^{٢}\, ءس = \int_{٠}^{٢} (٤س^{٢} - ٤س + ١)\, ءس$

$= \left| (\frac{٤س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} + س) \right|_{٠}^{٢}$

$= (\frac{٣٢}{٣} - ٨ + ٢) - (٠) = \frac{١٤}{٣}$

س٥:

أ. $ص = \int (٤س^{٣} + ٢س - ٥)\, ءس$ ، $\frac{ء ص}{ء س} = ٤س^{٣} + ٢س - ٥$

ب. $ص = \int_{٢}^{٧} (٤س^{٣} + ٢س - ٥)\, ءس$ ، $\frac{ء ص}{ء س} =$ صفر.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

حلول تمارين ومسائل ٤ – ٥

س١: $\int_{٢}^{٢} (س^{٢} - ٦س) ءس$ = صفر

س٢: أ. $\int_{٢}^{٣} (س - ٦) ءس = (\frac{س^{٢}}{٢} - ٦س)\Big|_{٢}^{٣} = (١٨ - \frac{٩}{٢}) - (١٢ - \frac{٤}{٢}) = \frac{-٧}{٢}$

ب. $\int_{٢}^{٥} (س - ٦) ءس = (س^{٢} - ٦س)\Big|_{٢}^{٥} = (٣٠ - \frac{٢٥}{٢}) - (١٢ - \frac{٤}{٢}) = \frac{-١٥}{٢}$

ج. $\int_{٣}^{٥} (س - ٦) ءس = \int_{٢}^{٥} (س - ٦) ءس - \int_{٢}^{٣} (س - ٦) ءس = -٤$

س٣: إذا كان $\int_{-١}^{٢} ن(س) ءس = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} ن٢(س) ءس = ٤$ ، فإن:

أ- $\int_{٠}^{٢} -٣ن(س) ءس = -٣ \int_{٠}^{٢} هـ(س) ءس$

لكن $\int_{٠}^{٢} هـ(س) ءس = \frac{٤}{٢} = ٢$ ومنها

$\int_{٠}^{٢} -٣ن(س) ءس = -٣ \int_{٠}^{٢} هـ(س) ءس = -٣ \times ٢ = -٦$

ب- $\int_{-١}^{٠} ن(س) ءس = \int_{-١}^{٢} هـ(س) ءس + \int_{٠}^{٢} هـ(س) ءس$

لكن $\int_{-١}^{٢} ن(س) ءس = -٣$ ، $\int_{٠}^{٢} هـ(س) ءس = ٢$ ، $\int_{٢}^{٠} هـ(س) ءس = -٢$

ومن ذلك $\int_{-١}^{٠} ن(س) ءس = \int_{-١}^{٢} هـ(س) ءس + \int_{٢}^{٠} هـ(س) ءس = -٣ + -٢ = -٥$

ج- $\int_{-١}^{٢} (٣ن(س) + س) ءس = ٣ \int_{-١}^{٢} هـ(س) ءس + \int_{-١}^{٢} س ءس$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$= ٣ \int_{-١}^{٢} هـ(س) ى س + \int_{-١}^{٢} س ى س = ٣ \times ٣^{-} + \left| \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{-١}^{٢}$$

$$= ٩^{-} + (٢) - (\frac{١}{٢}) = \frac{١٥^{-}}{٢}$$

س٤: $\int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣ن(س)) ى س = ٥ \int_{٢}^{٣} هـ(س) ى س - ٣ \int_{٢}^{٣} هـ(س) ى س$

لكن $\int_{٢}^{٣} هـ(س) ى س = \frac{١٢}{٣} = ٤$ ، $\int_{٢}^{٣} هـ(س) ى س = \frac{٦}{٢^{-}} = ٣^{-}$

ومن ذلك $\int_{٢}^{٣} (٥هـ(س) - ٣ن(س)) ى س = ٥ \times ٣^{-} - ٣ \times ٤ = ٢٧^{-}$

حلول تمارين ومسائل ٤-٦

س١: $\int (٢ - ٣س)^{٣} ى س$

نفرض ص $= ٢ - ٣س$ ، $\frac{ى ص}{ى س} = ٣^{-}$ ، $ى س = \frac{ى ص}{٣^{-}}$

نعوض في التكامل $\int (٢ - ٣س)^{٣} ى س = \int ص^{٣} \frac{ى ص}{٣-}$

$$= \frac{١-}{٣} \int ص^{٣} ى ص = \frac{١-}{٣} \times \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ = \frac{-(٢ - ٣س)^{٤}}{١٢} + جـ$$

س٢: $\int \frac{٣}{(س - ١)^{٥}} ى س = ٣ \int (س - ١)^{-٥} ى س$

نفرض ص $= س - ١$

$\frac{ى ص}{ى س} = ١$ ، $ى س = ى ص$

نعوض في التكامل $٣ \int (س - ١)^{-٥} ى س = ٣ \int ص^{-٥} ى ص = \frac{٣ ص^{-٤}}{٤-} + جـ$

$$= \frac{-٣(س - ١)^{-٤}}{٤} + جـ = \frac{-٣}{٤(س - ١)^{٤}} + جـ$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٣: $\int (أ س + ب)^{٤}\, د س$ =

نفرض ص $= أ س + ب$ ، $\frac{د ص}{د س} = أ$ ، $د س = \frac{د ص}{أ}$

نعوض في التكامل $\int (أ س + ب)^{٤}\, د س = \int ص^{٤} \frac{د ص}{أ} = \frac{ص^{٥}}{٥ أ} + جـ$

$= \frac{(أ س + ب)^{٥}}{٥ أ} + جـ$

س٤: $\int س^{٢} (س^{٣} + ١)^{٤}\, د س$

نفرض ص $= س^{٣} + ١$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢}$ ، $د س = \frac{د ص}{٣ س^{٢}}$

نعوض في التكامل $\int س^{٢} (س^{٣} + ١)^{٤}\, د س = \int س^{٢} ص^{٤} \frac{د ص}{٣ س^{٢}}$

$= \frac{١}{٣} \int ص^{٤}\, د ص = \frac{ص^{٥}}{١٥} + جـ$

$= \frac{(س^{٣} + ١)^{٥}}{١٥} + جـ$

س٥: $\int_{١}^{٢} (٢ س - ١)^{٢}\, د س$

نجد التكامل غير المحدود $\int (٢ س - ١)^{٢}\, د س$

نفرض ص $= ٢ س - ١$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢$ ، $د س = \frac{د ص}{٢}$

نعوض في التكامل $\int (٢ س - ١)^{٢}\, د س = \int ص^{٢} \frac{د ص}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ = \frac{ص^{٣}}{٦} + جـ = \frac{(٢ س - ١)^{٣}}{٦} + جـ$

$\int_{١}^{٢} (٢ س - ١)^{٢}\, د س = \left| \frac{(٢ س - ١)^{٣}}{٦} \right|_{١}^{٢} = \frac{(٢ - ١)^{٣}}{٦} - \frac{(٤ - ١)^{٣}}{٦}$

$= \frac{١}{٦} - \frac{٢٧}{٦} = \frac{٢٦}{٦} = \frac{١٣}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٦: $\int_{0}^{1} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, دس$

نجد التكامل غير المحدود $\int (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, دس$

نفرض ص $= س^{٢} - ٥س + ٧$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢س - ٥$ ، $دس = \frac{د ص}{(٢س - ٥)}$

نعوض في التكامل $\int (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, دس$

$= \int (٢س - ٥) ص^{-٢} \frac{د ص}{(٢س - ٥)} = \int ص^{-٢}\, د ص = -ص^{-١} + جـ$

$= -(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-١} + جـ$

ومن ذلك $\int_{0}^{1} (٢س - ٥)(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-٢}\, دس = -(س^{٢} - ٥س + ٧)^{-١} \Big|_{0}^{1}$

$= -(-(١ - ٥ + ٧)^{-١}) + (٧)^{-١}$ ، $= \frac{١}{٣} + \frac{-١}{٧} = \frac{٣ + ٧ -}{٢١} = \frac{-٤}{٢١}$

س٧: $\int \sqrt{٣س - ١}\, دس = \int (٣س - ١)^{\frac{١}{٢}}\, دس$

نفرض ص $= ٣س - ١$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٣$ ، $دس = \frac{د ص}{٣}$

نعوض في التكامل $= \int (٣س - ١)^{\frac{١}{٢}}\, دس = \int ص^{\frac{١}{٢}} \frac{د ص}{٣} = \frac{١}{٣} \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ = \frac{٢(٣س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} + جـ$

س٨: $= \int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س + ٥}\, دس$

نفرض ص $= س^{٢} + ٤س + ٥$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س + ٤$ ، $دس = \frac{د ص}{(٢س + ٤)}$ $\qquad$ $دس = \frac{د ص}{٢(س + ٢)}$

نعوض في التكامل

$\int (س + ٢) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤س + ٥}\, دس = \int (س + ٢) ص^{\frac{١}{٣}} \frac{د ص}{٢(س + ٢)}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

$$= \frac{1}{2} \int ص^{\frac{1}{3}} \, ود ص = \frac{3}{8} ص^{\frac{4}{3}} + جـ$$

$$= \frac{3}{8} (س^2 + 4س + 5)^{\frac{4}{3}} + جـ$$

حلول تمارين ومسائل ٤-٧

س١: المساحة المطلوبة $= \int_{-1}^{3} هـ(س) \, ود س = \int_{-1}^{3} 3 \, ود س = 3(3 - (-1))$ $= 12$ وحدة مساحة.

س٢: المساحة المطلوبة $= \int_{1}^{3} هـ(س) \, ود س = \int_{1}^{3} (3س - 2) \, ود س$

$$= \left| \left(\frac{3س^2}{2} - 2س \right) \right|_{1}^{3} = (6 - \frac{27}{2}) - (2 - \frac{3}{2})$$

$= 8$ وحدات مساحة.

س٣: المساحة المطلوبة $= \int_{0}^{1} هـ(س) \, ود س = \int_{0}^{1} س^3 \, ود س = \left| \frac{س^4}{4} \right|_{0}^{1} = \frac{1}{4}$ وحدة مساحة.

س٤: المساحة المطلوبة $= \int_{1}^{5} هـ(س) \, ود س = \int_{1}^{5} أس \, ود س$

$$= \left| \frac{أس^2}{2} \right|_{1}^{5} = \frac{25أ}{2} - \frac{أ}{2} = 12أ = 8 \quad \text{ومنها} \quad أ = \frac{2}{3}$$

س٥: المساحة المطلوبة $= \int_{0}^{9} \sqrt{3س + 9} \, ود س = \int_{0}^{9} (3س + 9)^{\frac{1}{2}} \, ود س$

نجد التكامل غير المحدود $= \int (3س + 9)^{\frac{1}{2}} \, ود س$

نفرض ص $= 3س + 9$ ، $\frac{ود ص}{ود س} = 3$ ، $ود س = \frac{ود ص}{3}$

نعوض في التكامل $= \int (3س + 9)^{\frac{1}{2}} \, ود س = \int ص^{\frac{1}{2}} \frac{ود ص}{3}$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2ص^{\frac{3}{2}}}{3} + جـ = \frac{2ص^{\frac{3}{2}}}{9} + جـ = \frac{2(3س + 9)^{\frac{3}{2}}}{9} + جـ$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

المساحة المطلوبة $= \left| \frac{٢(٣س+٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٩} \right|_{٠}^{٩} = ٤٢$ وحدة مساحة

حلول تمارين عامة ٤ - ٨

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	ج	أ	ب	د	أ	أ	ج	د	أ	ج

س٢: $ق(س) = \int ق'(س) ى س = \int (٤س^{٣} + س^{٢} - ٢س) ى س$

$= س^{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + جـ$

لكن $ق(٠) = ٣ = جـ$ ، منها $ق(س) = س^{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + ٣$

$ق(١) = ١ + \frac{١}{٣} - ١ + ٣ = \frac{١٠}{٣}$

س٣: $ق(س) = \int ق'(س) ى س = \int (٣ - ٢س) ى س$

$= ٣س - س^{٢} + جـ$

$ق(س)$ يمر بالنقطة $(١ ، ٦)$، $ق(١) = ٦$

$ق(١) = ٦ = ٣ - ١ + جـ$ ، ومنها $جـ = ٤$

$ق(س) = ٣س - س^{٢} + ٤$

س٤: $\int_{١}^{٣} (٢ق(س) - ٥هـ(س) + ٢) ى س = \int_{١}^{٣} ٢ق(س) ى س - \int_{١}^{٣} ٥هـ(س) ى س + \int_{١}^{٣} ٢ ى س$

$= ٢\int_{١}^{٣} ق(س) ى س - ٥\int_{١}^{٣} هـ(س) ى س + \int_{١}^{٣} ٢ ى س$

$= ٢ \times ٧ - ٥ \times -٤ + ٤ = ٣٨$

س٥: $\int (٢س+١)\sqrt{(س^{٢} + س + ٤)^{٢}} ى س = \int (٢س+١)(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٢}{٣}} ى س$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

نفرض ص $= س^{٢} + س + ٤$ ، $\frac{ص}{س} = ٢س + ١$ ، $س = \frac{ص}{٢س + ١}$

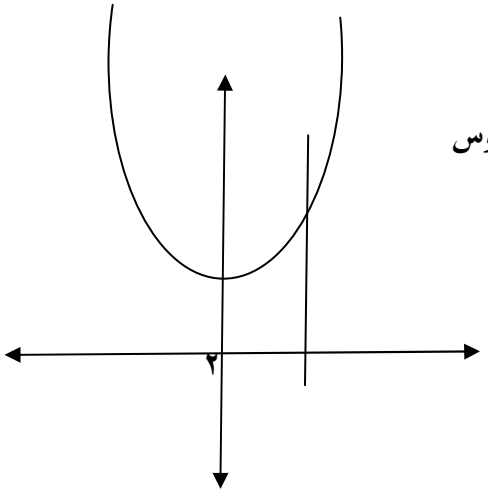
نعوض في التكامل $= \int (٢س + ١)(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٢}{٣}} س$

$= \int (٢س + ١) ص^{\frac{٢}{٣}} \frac{ص}{(٢س + ١)}$

$= \int ص^{\frac{٢}{٣}} ص = \frac{٣ص^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$

$= \frac{٣(س^{٢} + س + ٤)^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$

السؤال السادس:



المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٢} ق(س) س = \int_{٠}^{٢} (س^{٢} + ٥) س$

$= \left| (\frac{س^{٣}}{٣} + ٥س) \right|_{٠}^{٢}$

$= (\frac{٨}{٣} + ١٠) - (٠)$

$= \frac{٣٨}{٣}$ وحدة مساحة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

الوحدة الخامسة

الأعداد المركبة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

تمارين ومسائل (٥ - ١)

س١: أ) $\sqrt{-٢} + ٢ = ٢ + \sqrt{-١ \times ٢} = ٢ + \sqrt{٢} \times \sqrt{-١} = ٢ + \sqrt{٢}$ ت

ب) $\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩} = ٢$ ت $+ ٣$ ت $= ٥$ ت

جـ) $\sqrt{-٨} \times \sqrt{-٢} = ٢ \sqrt{٢}$ ت $\times \sqrt{٢}$ ت $= ٤$ ت$^{٢} = -٤ + ٠$ ت

س٢: أ) $\frac{٢}{٥}$ ت $- ٣ = -٣ + \frac{٢}{٥}$ ت $\Leftarrow$ -٣ ، $\frac{٢}{٥}$

ب) $\sqrt{-٩} = \sqrt{-١ \times ٩} = ٣$ ت $= ٠ + ٣$ ت $\Leftarrow$ ٠ ، ٣

جـ) ١ $- \sqrt{-١} = ١ -$ ت $\Leftarrow$ ١ ، -١

د) ٦ ت $\Leftarrow$ ٠ ، ٦

هـ) ٠ ، -٢

و) $\frac{١}{٣}$ ، ٠

س٣: $(١ + ت - ت^{٢})^{٣} (١ - ت - ت^{٢})^{٣} = (١ + ت + ١)^{٣} (١ - ت + ١)^{٣}$

$= (٢ + ت)^{٣} (٢ - ت)^{٣}$

$= ((٢ + ت)(٢ - ت))^{٣}$

$= (٤ - ت^{٢})^{٣}$

$= (-١)^{٥} (٤)^{٣} = ٥^{٣}$

$= ١٢٥$

س٤: أ) ت^{٤٣} $=$ ت^{٤٢} . ت $= (ت^{٢})^{٢١}$. ت $= -ت$

ب) $\frac{١}{ت^{٦٥}} = \frac{١}{ت^{٦٤} . ت} = \frac{١}{ت} = \frac{ت}{ت^{٢}} = -ت$

جـ) ت^{٢٧} $+ \frac{١}{ت^{٢٧}} =$ ت$^{٢٧} + (\frac{١}{ت})^{٢٧} =$ ت$^{٢٧} + (-ت)^{٢٧} =$ ت$^{٢٧} - (ت)^{٢٧} = ٠$

أو

ت^{٢٧} $+ \frac{١}{ت^{٢٧}} =$ ت$^{٣} + \frac{١}{ت^{٣}} = -ت + \frac{١}{-ت} = -ت - \frac{١}{ت} = \frac{-ت^{٢} - ١}{ت} = \frac{-١ - ١}{ت} = ٠$

س٥: $\frac{١ + ٢ت^{٢} + ت^{٣} + ٢ت}{ت^{٣} + ت^{٤}} = \frac{-١ - ٢ - ت + ٢ت}{-ت + ١} = \frac{-ت - ١}{-ت + ١} = \frac{-(ت + ١)}{-ت + ١} = -١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

تمارين ومسائل (٥ – ٢)

س١: أ) $٤(٢+٤ت)+٥(٣-٢ت)=٨+١٦ت+١٥-١٠ت=٢٣+٦ت$

ب) $(٣+٤ت)(٣-٥ت)=٩-٣ت-٢٠ت^{٢}=٩-٣ت+٢٠=٢٩-٣ت$

جـ) $(٣+٤ت)^{٣}=(٣+٤ت)^{٢}(٣+٤ت)$

$=(٣+٤ت)^{٢}(٣+٤ت)=(٩+٢٤ت+١٦ت^{٢})(٣+٤ت)$

$=(-٧+٢٤ت)(٣+٤ت)=-٢١+٢٨ت+٧٢ت+٩٦ت^{٢}$

$-٢١+٢٨ت+٧٢ت+٩٦ت^{٢}=-١١٧+٤٤ت$

د) $٤ت(١-٥ت)^{٢}=٤ت(-٢٤-١٠ت)=-٩٦ت+٤٠=٤٠-٩٦ت$

هـ) $(١-ت)^{٦}=(١-ت)^{٢})^{٣}=(-٢ت)^{٣}=-٨ت^{٣}=٨ت$

س٢: $س+٢ست=-٥(س-٤ت)$

$أ+بت+٢(أ+بت)ت=-٥(أ+بت)+٢٠ت$

$أ+بت+٢أت+٢بت^{٢}=-١٥أ-٥بت+٢٠ت$

$١٦أ-٢ب+(١٢أ+ب)ت=(٢٠-٥ب)ت$

ومنها

$١٦أ-٢ب=٠$

$١٢أ+ب=٢٠-٥ب$

$١٦أ-٢ب=٠$

$١٢أ+٦ب=٢٠$

وبحل المعادلتين ينتج أن: $ب=٣$ ، $أ=١$، $س=١+٣ت$

س٣: $س-ص-٢=ص^{٢}ت-ست$

$س-ص-٢=(ص^{٢}-س)ت$ ومنها

$ص=س-٢$

$ص^{٢}-س=٠$

$(س-٢)^{٢}-س=٠$

$س^{٢}-٥س+٤=٠$

$س=٤$ ، $ص=٢$

$س=١$ ، $ص=-١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٤: بتعويض $ع = ت$ في $ع^{٥} + ع^{٢} = ع - ١$ ينتج أن

الطرف الأيمن $ع^{٥} + ع^{٢} = ت^{٥} + ت^{٢} = ت - ١$

الطرف الأيسر $ع - ١ = ت - ١$

الطرفين متساويين، $ع = ت$ تحقق المعادلة $ع^{٥} + ع^{٢} = ع - ١$.

س٥: بتعويض $ع = -١ + ت$ في $ع^{٢} + ٢ع + ٢ = ٠$ ينتج أن

$$(-١ + ت)^{٢} + ٢(-١ + ت) + ٢ = ١ - ٢ت + ت^{٢} - ٢ + ٢ت + ٢ =$$
$$= ١ + ت^{٢}$$
$$= ١ - ١ = ٠$$

س٦: بالضرب التبادلي ينتج أن: $أ ت = ٣ + ١٠ ت + ٣ت^{٢}$

$$أ ت = ٣ + ١٠ ت - ٣$$
$$أ ت = ١٠ ت$$
$$أ = ١٠$$

س٧: أ) $ع = ٢ + ت\sqrt{١٢}$ ، $س = ٢، ص = \sqrt{١٢}$

$$ع^{-١} = \frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} + ت\frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}}$$
$$ع^{-١} = \frac{٢}{١٢ + ٤} - ت\frac{\sqrt{١٢}}{١٢ + ٤}$$
$$ع^{-١} = \frac{١}{٨} - ت\frac{\sqrt{٣}}{٨}$$

ب) $ع = \frac{ت}{ت - ٣}$ ،

نفرض أن $\left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)^{-١} = س + صت$

$$\Leftarrow \left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)(س + صت) = ١$$
$$ت(س + صت) = ت - ٣$$
$$ت س + صت^{٢} = ت - ٣$$
$$ت س - ص = ت - ٣$$
$$س = ١، ص = ٣$$
$$\left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)^{-١} = ١ + ٣ت$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

جـ) $ع = (١+ت)^{١٣}$

$$ع^{-١} = ((١+ت)^{١٣})^{-١} = (١+ت)^{-١٣}$$
$$= (١+ت)^{-١٤} \times (١+ت)$$
$$= ((١+ت)^{٢})^{-٧} \times (١+ت)$$
$$= (١+٢ت+ت^{٢})^{-٧} \times (١+ت)$$
$$= (٢ت)^{-٧} \times (١+ت)$$
$$= \frac{١}{١٢٨} \times ت^{-٨} \times ت \times (١+ت)$$
$$= \frac{ت}{١٢٨} \times (١+ت) = \frac{-١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨}ت$$

س٨: بجمع المعادلتين ينتج أن:

$$٣ ع_{١} = (-٨ط + ٥٠ط) ت = (-٢ ط٢ + ٥ ط٢) ت = ٣ ط٢ ت$$
$$\Leftarrow ع_{١} = ط٢ ت$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج أن:

$$٣ ع_{٢} = -٨ط ت \Leftarrow ٣ ع_{٢} + ط٢ ت = -٨ط ت - ط٢ ت$$
$$\Leftarrow ٣ ع_{٢} = -٢ ط٢ ت - ط٢ ت = -٣ ط٢ ت$$
$$\Leftarrow ع_{٢} = -ط٢ ت$$

تمارين ومسائل (٥ – ٣)

س١: $١ + ط\sqrt{-٤} = ١ + ٢ت$

$$\therefore |١ + ط\sqrt{-٤}| = |١ + ٢ت|$$
$$= \sqrt{١^{٢} + ٢^{٢}}ط$$
$$= \sqrt{١+٤}ط$$
$$= \sqrt{٥}ط$$

س٢: أ) $|-٣ ع_{١}| = |-٣ - ٣ت| = \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٣)^{٢}}ط = \sqrt{٩+٩}ط = \sqrt{١٨}ط$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

ب) $ع_١ \overline{ع_١} = (١+ت)(١-ت) = ١ - ت^{٢} = ٢$

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|٢ \times \frac{١}{٢}\right| = |١| = ١$$

أو

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢}\left((١)^{٢} + (١)^{٢}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{١}{٢} \times ٢\right| = \sqrt{١} = ١$$

ج) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١-ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{١+ت^{٢}-٢ت}{١+١}$

$$= \frac{-٢ت}{٢} = -ت$$

$$\therefore \left|\frac{ع_٢}{ع_١}\right| = |-ت| = \sqrt{(٠)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{١} = ١$$

د) $ع_١ ع_٢ = (١+ت)(١-ت) = ١ - ت^{٢} = ٢$

$$\left|٢ ع_١ ع_٢\right| = |٢ \times ٢| = |٤| = \sqrt{(٤)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

أو

$$\left|٢ ع_١ ع_٢\right| = \left|٢\left((١)^{٢} + (١)^{٢}\right)\right| = |٢ \times ٢|$$

$$= |٤| = \sqrt{(٤)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$$

س٣: $ع = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥} ت$

أ) $ع^{-١} = \frac{١}{\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥} ت} = \frac{٥}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت}$

$$= \frac{١٥ + ٢٠ت}{٩ + ١٦} = \frac{١٥}{٢٥} + \frac{٢٠}{٢٥} ت = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} ت$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

ب) $(ع٣)^{-١} = \left(\frac{٩}{٥} - ت\frac{١٢}{٥}\right)^{-١} = \frac{١}{\frac{٩}{٥} - ت\frac{١٢}{٥}}$

$= \frac{٥}{٩ - ١٢ت} \times \frac{٩ + ١٢ت}{٩ + ١٢ت} = \frac{٤٥ + ٦٠ت}{٨١ + ١٤٤}$

$= \frac{٤٥}{٢٢٥} + \frac{٦٠}{٢٢٥}ت = \frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥}ت = ع^{-١}\frac{١}{٣}$

ج) $|ع^{-١}| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}} = \sqrt{\frac{٩ + ١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = \sqrt{١} = ١$

د) $\left|\frac{\bar{ع}}{٥}\right| = \left|\frac{١}{٥}\left(\frac{٣}{٥} - ت\frac{٤}{٥}\right)\right| = \left|\frac{١}{٥}\left(\frac{٣}{٥} + ت\frac{٤}{٥}\right)\right|$

$= \left|\frac{٣}{٢٥} + ت\frac{٤}{٢٥}\right| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٢٥}\right)^{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٩}{٦٢٥} + \frac{١٦}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{١}{٢٥}} = \frac{١}{٥}$

س٤: أ) $\frac{-١ + \sqrt{٢}ت}{٢ + ت} = \frac{-١ + \sqrt{٢}ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت}$

$= \frac{-٢ + ت + ٢\sqrt{٢}ت - \sqrt{٢}ت^{٢}}{١ + ٤}$

$= \frac{-٢ + \sqrt{٢}}{٥} + \frac{١ + ٢\sqrt{٢}}{٥}ت$

ب) $\frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٥ت} + \frac{٢ + ٣ت}{٢ - ٣ت} = \frac{٣ + ٤ت}{٣ - ٥ت} \times \frac{٣ + ٥ت}{٣ + ٥ت} + \frac{٢ + ٣ت}{٢ - ٣ت} \times \frac{٢ + ٣ت}{٢ + ٣ت}$

$= \frac{٩ + ٢٧ت + ٢٠ت^{٢}}{٢٥ + ٩} + \frac{٤ + ١٢ت + ٩ت^{٢}}{٩ + ٤}$

$= \frac{-١١ + ٢٧ت}{٣٤} + \frac{-٥ + ١٢ت}{١٣}$

$= \frac{-١٤٣ + ٣٥١ت - ١٧٠ + ٤٠٨ت}{٤٤٢}$

$= \frac{-٣١٣}{٤٤٢} + ت\frac{+٧٥٩}{٤٤٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٥: نفرض أن: $ع = ا + ب ت$

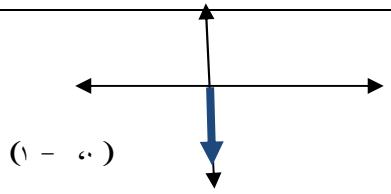
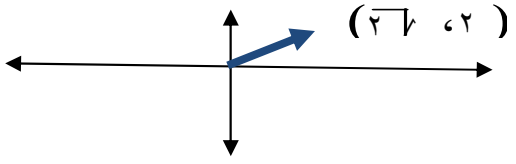
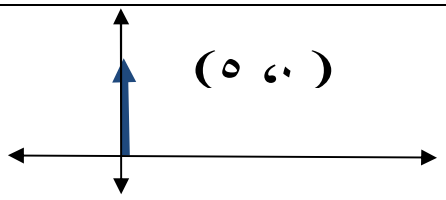
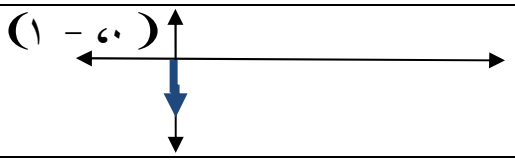
الطرف الأيمن $= ع - ١ = ا + ب ت - ١ \Leftarrow |ع - ١| = \sqrt{(ا - ١)^{٢} + ب^{٢}}$

الطرف الأيسر $= \overline{ع} - ١ = ا - ب ت - ١ \Leftarrow |\overline{ع} - ١| = \sqrt{(ا - ١)^{٢} + (-ب)^{٢}}$

$= \sqrt{(ا - ١)^{٢} + (ب)^{٢}}$

أي أن $|ع - ١| = |\overline{ع} - ١|$

س٦:

العدد	تمثيله في مستوى الأعداد المركبة
$ت^{٤٣} = ت^{٤٠} \times ت^{٣} = ١ \times - ت = - ت$ $= ٠ - ت = (٠، -١)$	
$٢ + \sqrt{-٢} + ٢ = \sqrt{٢} ت + ٢ = (٢، \sqrt{٢})$	
$\sqrt{-١} \times \sqrt{٩} + \sqrt{-١} \times \sqrt{٤} = \sqrt{-٩} + \sqrt{-٤}$ $= ٣ ت + ٢ ت = ٥ ت = ٠ + ٥ ت = (٠، ٥)$	
$\frac{١}{ت^{٦٥}} = \frac{١}{ت^{٦٤} . ت} = ت^{-١} = - ت$	

س٧: بفرض $ع = ا + ب ت$، $\overline{ع} = ا - ب ت$

$ع^{٢} = (\overline{ع})^{٢} \Leftarrow (ا + ب ت)^{٢} = (ا - ب ت)^{٢}$

$\Leftarrow ا^{٢} - ب^{٢} + ٢ ا ب ت = ا^{٢} - ب^{٢} - ٢ ا ب ت$

$٢ ا ب = - ٢ ا ب \Leftarrow ٤ ا ب = ٠$

إما $ا = ٠ \Leftarrow ع = ب ت$ (عدد تخيلي)

أو $ب = ٠ \Leftarrow ع = ا$ (عدد حقيقي)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٨: أ) $ع = -١ + ت$

$$|ع| = \sqrt{(-١)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{٢}$$

$$جتاهـ = \frac{-١}{\sqrt{٢}} \text{ ، } جاهـ = \frac{١}{\sqrt{٢}}، \text{ ومنها } هـ = \frac{٣\pi}{٤}$$

$$ع = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}\right)$$

ب) $ع = \frac{-١}{٢} + ٠ت$

$$|ع| = \sqrt{\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢} + (٠)^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$$

$$جتاهـ = \frac{\frac{-١}{٢}}{\frac{١}{٢}} = -١ \text{ ، } جاهـ = \frac{٠}{\frac{١}{٢}} = ٠، \text{ ومنها } هـ = \pi$$

$$ع = \frac{١}{٢}(جتا\pi + ت جا\pi)$$

ج) $ع = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$ ،

$$|ع| = \sqrt{(\frac{١}{٢})^{٢} + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}} = ١$$

$$جتاهـ = -\frac{١}{٢} \text{ ، } جاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow هـ = \pi\frac{٢}{٣}$$

$$ع = (جتا\pi\frac{٢}{٣} + ت جا\pi\frac{٢}{٣})$$

س٩: أ) $ع = ٧\left(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}\right) = ٧\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} ت\right)$

$$= \frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}} ت$$

ب) $ع = ٣\left(جتا\frac{-\pi}{٦} + ت جا\frac{-\pi}{٦}\right) = ٣جتا\frac{\pi}{٦} - ٣ت جا\frac{\pi}{٦}$

$$= ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣ \times \frac{١}{٢} ت = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢} ت$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

ج) $ع = ٢\left(جتا\frac{\pi}{٤} - ت جا\frac{\pi}{٤}\right) = ٢\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}ت\right)$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}ت = \sqrt{٢} - \sqrt{٢}ت$

د) $ع = ٣\left(جتا\frac{\pi}{٣} + ت جا\frac{\pi}{٣}\right) = ٣\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right)$

$= \frac{٣}{٢} + \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}ت$

تمارين عامة (٥ – ٤)

س١:

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الإجابة	جـ	جـ	د	أ	ب	ب	د

س٢: $ع_١ = ١ + ٢ت$ ، $ع_٢ = ٢ - ت$

أ) $|ع_١| = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

ب) $|ع_٢| = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$

ج) $|ع_١ + ع_٢| = |(١ + ٢ت) + (٢ - ت)| = |٣ + ت| = \sqrt{١٠}$

د) $|ع_١| + |ع_٢| = \sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥}$ نلاحظ أن $|ع_١ + ع_٢| \neq |ع_١| + |ع_٢|$

س٣: $س^٢ + س + (ص - ١)ت = -ت س^٢$

$س^٢ + س + (ص + س^٢ - ١)ت = ٠$

ومنها $ص + س^٢ - ١ = ٠ \Leftarrow ص = ١ - س^٢$

$س^٢ + س = ٠ \Leftarrow س(س + ١) = ٠$ ، $س = ٠$ ، -١

ومن ذلك $س = ٠ \Leftarrow ص = ١$

أو $س = -١ \Leftarrow ص = ٠$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4

س٤: أ) $ل = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت}$، $م = \frac{١١ات-٢}{١+٢ت}$

$$ل = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{٣-ت}{٣-ت}$$

$$= \frac{٥(٩-٦ت-١)}{١+٩} = \frac{٨-٦ت}{٢} = ٤-٣ت$$

$$م = \frac{١١ات-٢}{١+٢ت} = \frac{١١ات-٢}{١+٢ت} \times \frac{١-٢ت}{١-٢ت}$$

$$= \frac{١١ات+٢٢-٢+٤ت}{٤+١} = \frac{٢٠+١٥ات}{٥} = ٤+٣ت$$

$$= \bar{ل}$$

ل ، م مترافقان

ب) $ل + م = ٤-٣ت+٤+٣ت = ٨$

$$ل م = \frac{١١ات-٣}{١+٢ت} \times \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} = (٤-٣ت)(٤+٣ت) = ١٦+٩ = ٢٥$$

$ل^{٢} + م^{٢} = (ل+م)^{٢} - ٢ل م = ٨^{٢} - ٢ \times ٢٥ = ١٤$ ، **ويمكن حسابها بطريقة أخرى.**

س٥: $\frac{ت-\overline{٣}ط}{١+\overline{٣}ط ت} = \frac{ت-\overline{٣}ط}{١+\overline{٣}ط ت} \times \frac{١-\overline{٣}ط ت}{١-\overline{٣}ط ت} = \frac{\overline{٣}ط - ٤ت - \overline{٣}ط}{٣+١} = \frac{-٤ت}{٤} = -ت$

$$\left(\frac{ت-\overline{٣}ط}{١+\overline{٣}ط ت}\right)^{٧} = (-ت)^{٧} = -١ \times ت^{٤} \times ت^{٣} = -١ \times ١ \times -ت = ت$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #109933 | TRACK 40a345ad455091f4