

**الدرس الأول: الأسس واللوغاريتمات**

**أولاً: قوانين الأسس:**

إذا كانت أصغر ، م، ن أعداد حقيقية فإن:

**تعريف:**  $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$  (ن من المرات) ، حيث يسمى  $a$  بالأساس ،  $n$  هو الأس

مثلاً:  $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  (نضرب الأساس ٣ في نفسه ٤ مرات وهي قيمة الأس)

القانون	مثال عليه
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$5^6 \div 5^2 = 5^4 = 625$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(10^2)^4 = 10^8 = 100000000$
$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$(3 \times 2)^2 = 3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$
صفر $0 = 1$	٦ صفر = ٥ صفر = (٢-) صفر = ١
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{2}{3}} = 8$

**نشاط (١) : جد قيمة كل من:**

- (١)  $5^2 = \dots$  (٢)  $4^{-3} = \dots$
- (٣)  $2^2 \times 2^0 = \dots$  (٤)  $(7, 0)^{-2} = \dots$
- (٥)  $5^6 \times 2^6 = \dots$  (٦)  $\frac{3^5 \times 3^7}{3^9 \times 3^2} = \dots$
- (٧)  $(-125)^{\frac{1}{3}} = \dots$  (٨)  $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dots$

**نشاط (٢): حل المعادلات الأسية التالية:**

- (١)  $3^{2+5} = 81$
- (٢)  $5^{3-2} = 1$
- (٣)  $3^2 \times 4^3 = 32$
- (٤)  $3^2 \times 3^2 \times 3^1 = 9$
- (٥)  $\frac{5^{2-1}}{5^{3-2}} = \frac{1}{125}$

ثانياً: قوانين اللوغاريتمات:

تعريف: لو<sub>م</sub> س = ب تعني أن م<sup>ب</sup> = س مثلاً : لو<sub>٥</sub> ٢ = ٢٥ لأن ٥<sup>٢</sup> = ٢٥

ملاحظة: إذا كان الأساس = ١٠ فإنه لا يكتب تحت رمز لو (و يطلق عليه اسم اللوغاريتم العادي)

القانون	مثال عليه
لو <sub>م</sub> س + لو <sub>م</sub> ص = لو <sub>م</sub> (س×ص)	لو <sub>٦</sub> ٤ + لو <sub>٦</sub> ٩ = لو <sub>٦</sub> (٩×٤) = لو <sub>٦</sub> ٣٦ = ٢
لو <sub>م</sub> س - لو <sub>م</sub> ص = لو <sub>م</sub> (س÷ص)	لو <sub>٢</sub> ١٠ - لو <sub>٢</sub> ٥ = لو <sub>٢</sub> (١٠÷٥) = لو <sub>٢</sub> ٢ = ١
لو <sub>م</sub> ١ = ٠	لو <sub>٧</sub> ١ = ٠
لو <sub>١</sub> ص = ص	لو <sub>١</sub> ٨ = ٨
لو <sub>م</sub> س <sup>ن</sup> = ن لو <sub>م</sub> س	لو <sub>٣</sub> ٩ <sup>٥</sup> = ٥ لو <sub>٣</sub> ٩ = ٥ لو <sub>٣</sub> ٣ = ٥
لو <sub>م</sub> م <sup>ن</sup> = ن لو <sub>م</sub> م	لو <sub>٤</sub> ١٠ <sup>٤</sup> = ٤ لو <sub>٤</sub> ١٠ = ٤
لو <sub>م</sub> (1/س) = - لو <sub>م</sub> س	لو <sub>٢</sub> (1/٨) = - لو <sub>٢</sub> ٨ = -٣

نشاط(١): حول من الصيغة الأسية للوغاريتمية:

- (١) لو<sub>٦</sub> ٣٦ = ٢ ..... ٦٤ = ٢<sup>٤</sup> .....  
 (٢) لو<sub>٥</sub> ٣ = ٣ ..... ٣٢ = ٥<sup>٣</sup> .....

نشاط (٢): جد قيمة ما يلي:

- (١) لو<sub>٣</sub> ٨١ = .....  
 (٢) لو<sub>٤</sub> (٠,٢٥) = .....  
 (٣) لو<sub>٢</sub> + لو<sub>٥</sub> = .....  
 (٤) لو<sub>٤</sub> (٠,٠٠١) = .....  
 (٥) لو<sub>٣</sub> √٢٧ = .....  
 (٦) لو<sub>٥</sub> ١٢٥ - لو<sub>٥</sub> ٢٥ = .....  
 (٧) لو<sub>٤٩</sub> ٧ = .....  
 (٨) لو<sub>٢</sub> ١٢ - لو<sub>٢</sub> ٣ = .....

نشاط(٣) حل المعادلات اللوغاريتمية التالية:

- (١) لو<sub>٢</sub> (س-٣) = ٥ .....  
 (٢) لو<sub>٣</sub> (س-٦) + لو<sub>٣</sub> س = ٢ .....  
 (٣) لو<sub>٥</sub> (٢س) - لو<sub>٥</sub> (س+١٨) = ١ .....  
 (٤) لو<sub>٣</sub> √(س+٣) = ٣ .....

نشاط(٤): إذا كان لو<sub>٢</sub> ٣ = ٥ ، لو<sub>٢</sub> ٨ = ٧ فإن :

- (١) لو<sub>٢</sub> ٢٥ = ..... ، لو<sub>٢</sub> ١٤ = .....  
 (٢) لو<sub>٢</sub> ٣٥ = ..... ، لو<sub>٢</sub> ٠,٧ = .....

**الدرس الثاني : الاقتران الأسّي:**

**الهدف**

- يعرف الاقتران الأسّي
- يمثل الاقتران الأسّي بيانياً
- يدرس خصائص الاقتران الأسّي
- يتعرف إلى العدد النيبيري

**تعريف**

الاقتران الأسّي هو أي اقتران يمكن كتابته على الصورة  
 ق(س) =  $a^s$  حيث  $a > 0$  ،  $a \neq 1$  ،  $s \in \mathbb{R}$

**أولاً : عندما تكون  $a < 1$  صفر**

**نشاط (١):** مثل الاقتران : ق(س) =  $2^{-s}$  بيانياً من خلال الجدول التالي:

س	-٢	-١	٠	١	٢
ق(س)					

**من خلال الرسم لاحظ أن :**

- ١- الاقتران يقطع محور الصادات عند النقطة .....
- ٢- كلما زادت قيم س ..... قيم ص المناظرة لها .  
 بمعنى أن الاقتران .....
- ٣- مجال الاقتران هو ..... ، ومداه هو .....

**نشاط (٢) :** مثل بيانياً الاقتران ق(س) =  $3^{-s}$  ثم ادرس خصائصه

س	-٢	-١	٠	١	٢
ق(س)					

.....  
 .....  
 .....

**ثانياً : عندما تكون صفر  $1 > a > 0$**

**نشاط (٣) :** مثل بيانياً الاقتران ق(س) =  $(\frac{1}{2})^s$

س	-٢	-١	٠	١	٢
ق(س)					

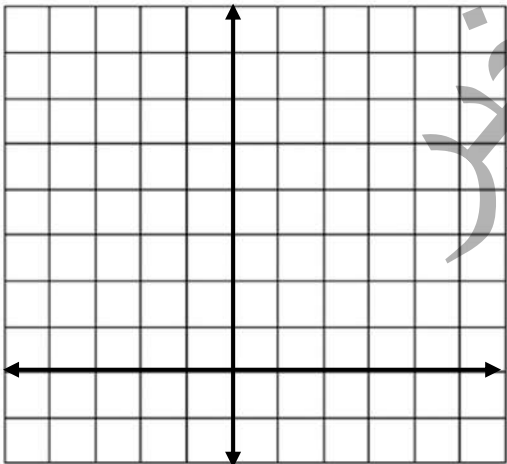
**من خلال الرسم لاحظ أن :**

- ١- الاقتران يقطع محور الصادات عند النقطة .....
- ٢- كلما زادت قيم س ..... قيم ص المناظرة لها .  
 بمعنى أن الاقتران .....
- ٣- مجال الاقتران هو ..... و مداه هو .....
- ٤- الاقتران ق(س) =  $(\frac{1}{2})^s$  هو انعكاس للاقتران .....  
 حول محور .....

**\*\* هل يمكنك استنتاج خصائص الاقتران ق(س) =  $(\frac{1}{3})^s$  دون رسمه ؟**

**رلاحظ**

$(\frac{1}{2})^s = 2^{-s}$  ، لماذا ؟

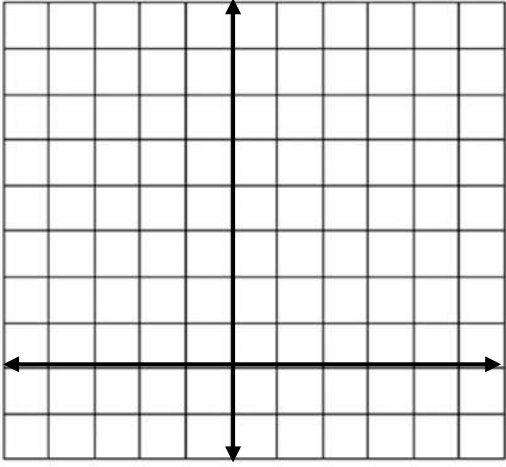


ملاحظة

- العدد النيبيري ه هو عدد غير نسبي يساوي تقريباً ٢,٧٢
- الاقتران الأسي الطبيعي هو اقتران أسي أساسه العدد ه

**نشاط (١) :** باستخدام الآلة الحاسبة جد قيمة كل من :

(١) ه + ٣ = ..... (٢) ه<sup>٢</sup> = ..... (٣) ه<sup>٣</sup> = ..... (٤) ه<sup>-٢</sup> = .....



**نشاط (٢) :** مثل بيانياً الاقتران ق(س) = ه<sup>س</sup> مع بيان خصائصه.

س	٢-	١-	٠	١	٢
ق(س)					

.....  
 .....  
 .....

\*\* هل يمكنك ذكر خصائص الاقتران ق(س) = ه<sup>س</sup> دون رسمه ؟

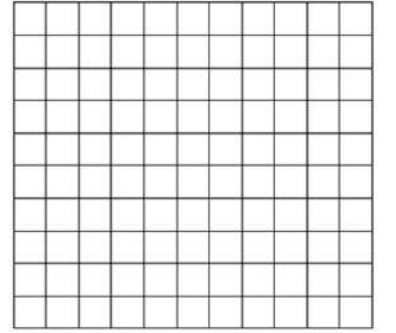
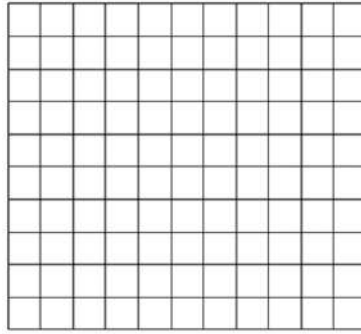
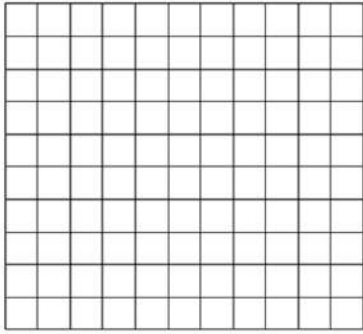
.....

**نشاط (٣) :** باستخدام التحويلات الهندسية ارسم منحنى كل من الاقترانات التالية مع إيجاد المدى .

(٣) ق(س) = ٣ - (س-٢)

(٢) ق(س) = ٢ - (س-٣)

(١) ق(س) = ١ + س<sup>٢</sup>



..... = المدى

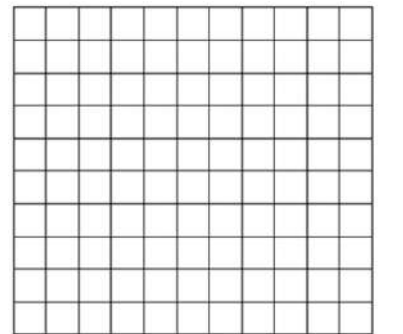
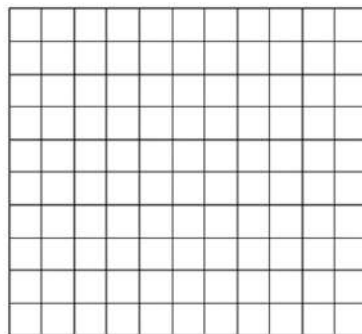
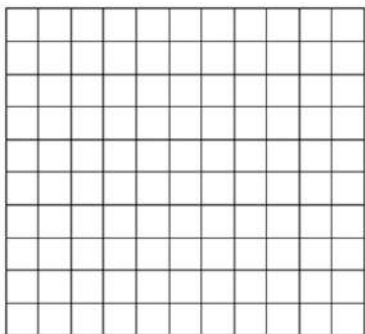
..... = المدى

..... = المدى

(٦) ق(س) = ه<sup>-س</sup>

(٥) ق(س) = ٣ - ه<sup>س</sup>

(٤) ق(س) = ه<sup>-س</sup>



..... = المدى

..... = المدى

..... = المدى

ماذا تلاحظ على مدى الاقترانات السابقة ؟

## الدرس الثاني : الاقتران اللوغاريتمي

### الهدف

- يعرف الاقتران اللوغاريتمي
- يمثل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً
- يجد مجال الاقتران اللوغاريتمي
- يحدد خصائص الاقتران اللوغاريتمي

### تعريف

الاقتران اللوغاريتمي هو أي اقتران يمكن كتابته على الصورة:  
 $q(s) = \log_p s$  حيث  $p < \text{صفر}$  ،  $p \neq 1$  ،  $s < \text{صفر}$

تعالوا نتذكر بعض قوانين اللوغاريتمات من خلال ما يلي :

(١)  $\log_3 81 = \dots$  لأن  $\dots = 81$  ،  $\log_2 (2) = \frac{1}{8} = \dots$   
 (٣)  $\log_7 1 = \dots$  ،  $\log_4 (4) = 125 = \dots$

**نشاط (١) :** أكمل الجدول التالي ثم مثل الاقتران ق(س) =  $\log_2 s$  بيانياً

س	١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤
ق(س)							

من خلال الرسم لاحظ أن :

- ١- مجال الاقتران هو ..... ، ومداه هو .....
- ٢- الاقتران يقطع محور السينات عند النقطة .....
- ٣- كلما زادت قيم س ..... قيم ص المناظرة، بمعنى أن الاقتران .....
- ٤- الاقتران ق(س) =  $\log_2 s$  س هز انعكاس للاقتران ق(س) =  $2^s$  حول .....

**نشاط (٢) :** ارسم منحنى الاقتران ق(س) =  $\log_2 s$

س	١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤
ق(س)							

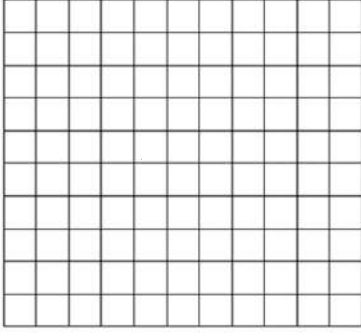
- ١- مجال الاقتران هو ..... ، ومداه هو .....
- ٢- الاقتران يقطع محور السينات عند النقطة .....
- ٣- الاقتران متناقص لأنه .....
- ٤- الاقتران ق(س) =  $\log_2 s$  س انعكاس للاقتران ق(س) =  $2^s$  حول .....

**نشاط (٣) :** دون رسم الاقتران احسب مجال كل من الاقترانات التالية:

- ١- ق(س) =  $\log_2 (s + 3)$  .....
- ٢- ق(س) =  $\log_2 (s - 5) + 1$  .....
- ٣- ق(س) =  $\log_2 (s^2 - 7)$  .....
- ٤- ق(س) =  $\log_2 (s - 9)$  .....
- ٥- ق(س) =  $\log_2 (s - 2)$  .....

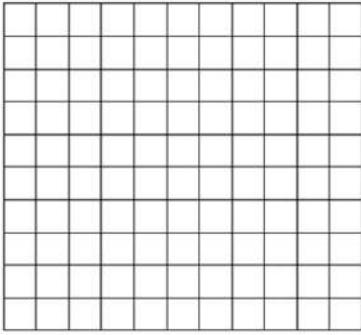
نشاط (٤) : باستخدام التحويلات الهندسية ارسم منحني كل من الاقترانات التالية مع توضيح مجال كل اقتران

(٣) ق(س) = لو ٣ + (س)



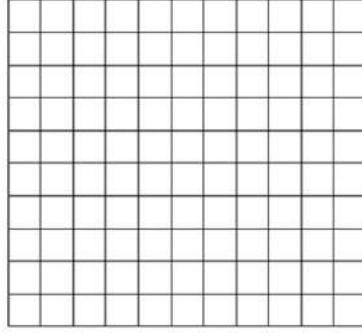
المجال .....

(٦) ق(س) = - لو ١ + (س)



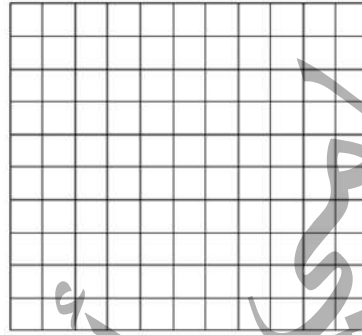
المجال .....

(٢) ق(س) = لو ٢ - (س)



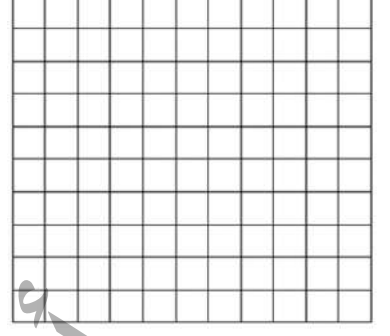
المجال .....

(٥) ق(س) = ١ - لو ٣ (س)



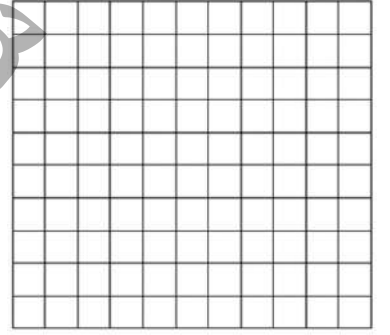
المجال .....

(١) ق(س) = لو ٣ س



المجال .....

(٤) ق(س) = لو ٢ (س + ١) - ٢



المجال .....

نشاط (٥) أكمل جدول المقارنات بين كل من الاقترانات التالية :

وجه المقارنة	ق(س) = لو ٢ س	ق(س) = لو ٣ س	ق(س) = لو ١ س	ق(س) = لو ٢ س
المجال				
المدى				
المقطع السيني			****	****
المقطع الصادي	****	****		
التزايد و التناقص				
الانعكاس	* ق(س) = لو ٢ س حول ..... * ق(س) = لو ٣ س حول .....	* ق(س) = لو ١ س حول ..... * ق(س) = لو ٢ س حول .....	* ق(س) = لو ١ س حول ..... * ق(س) = لو ٢ س حول .....	* ق(س) = لو ٢ س حول ..... * ق(س) = لو ٣ س حول .....

### تمارين عامة

#### السؤال الأول : ضع علامة (✓) أو (✗)

- ١- ( ) الاقتران ق(س) = (-٢)<sup>س</sup> يعتبر اقتراناً أسياً .
- ٢- ( ) يكون الاقتران ق(س) =  $p = s$  متزايداً إذا كانت  $1 < p$
- ٣- ( ) لو  $s$  يسمى اللوغاريتم الطبيعي .
- ٤- ( ) الاقتران ق(س) =  $7^s$  يمر بالنقطة (١،٧) .
- ٥- ( ) الاقتران ق(س) =  $10^s$  يمر بالنقطة (١، ١٠) .
- ٦- ( ) الاقتران ق(س) =  $10^s$  يعتبر اقتراناً لوغاريتمياً .
- ٧- ( ) إذا قلت قيم  $s$  كلما زادت قيم  $v$  المتناظرة يكون الاقتران متناقصاً .
- ٨- ( ) مجال الاقتران ق(س) =  $2^s$  هو مجموعة الأعداد الحقيقية .
- ٩- ( ) الاقتران ق(س) =  $10^s$  هو انعكاس للاقتران ه(س) =  $10^s$  حول المستقيم  $v = s$
- ١٠- ( ) الاقتران ق(س) =  $h = s$  انعكاس للاقتران م(س) =  $10^s$  حول محور السينات .
- ١١- ( ) مدى الاقتران ق(س) =  $h = s$  هو  $-c$
- ١٢- ( ) إذا كان  $10^s = 1$  فإن  $s = 0$  .
- ١٣- ( ) إذا كان  $3 = 4 + s^2$  فإن  $s = -2$
- ١٤- ( ) الصورة اللوغاريتمية للمقدار:  $h = 3 = (s-2)$  هي: لو  $h = 3 = (s-2)$
- ١٥- ( ) إذا كان  $2^s = 4$  فإن  $s = 2$

#### السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة

- ١- صورة الاقتران ق(س) =  $3^s$  بالانسحاب وحدتين للأسفل هي :
  - (أ) م(س) =  $3 + s$
  - (ب) م(س) =  $3^{(s+2)}$
  - (ج) م(س) =  $3^{(s-2)}$
  - (د) م(س) =  $3 - s$
- ٢- واحد من الاقترانات التالية يعتبر اقتراناً لوغاريتمياً :
  - (أ) ق(س) =  $2 - 10^s$
  - (ب) ق(س) =  $10^s$
  - (ج) ق(س) =  $10^s$
  - (د) ق(س) =  $10^s - 1$
- ٣- واحد من الاقترانات التالية هو انعكاس للاقتران ق(س) =  $h = s$  في محور السينات .
  - (أ) م(س) =  $h = s$
  - (ب) م(س) =  $h = s$
  - (ج) م(س) =  $10^s$
  - (د) م(س) =  $10^s$
- ٤- إحدى الخصائص التالية لا تنطبق على الاقتران ق(س) =  $2^{-s}$ 
  - (أ) يمر بالنقطة (٠، ١)
  - (ب) الاقتران متناقص
  - (ج) مداه هو  $c$
  - (د) مجاله هو  $c$
- ٥- واحدة من العبارات التالية صحيحة بشأن الاقتران ق(س) =  $10^s$ 
  - (أ) يمر بنقطة الأصل
  - (ب) يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١)
  - (ج) يقطع محور السينات في النقطة (٠، ١)
  - (د) لا يقطع أي من المحورين
- ٦- مجال الاقتران ق(س) =  $10^s$  هو
  - (أ)  $[-٢، ٠]$
  - (ب)  $[-٢، ٠]$
  - (ج)  $[-٢، ٠]$
  - (د)  $[-٢، ٠]$

٧- مجال الاقتران ق(س) = لو (٤-س) هو

(أ) ]٢ ، ٢-[ (ب) [٢ ، ٢-] (ج) ع - [٢ ، ٢-] (د) ع - [٢ ، ٢-]

٨- صورة الاقتران ق(س) = لو٢ س بالانعكاس في محور السينات ثم الانسحاب ٣ وحدات للأعلى هي :

(أ) ه(س) = ٣- لو٢ س (ب) ه(س) = - لو٢ (س-٣) (ج) ه(س) = لو٢ س - ٣ (د) ه(س) = لو٢ (س-٣)

٩- أي من الاقترانات التالية هو انعكاس للاقتران ق(س) = ٣ حول المستقيم ص = س

(أ) ه(س) = ٣- (ب) ه(س) = (٣)- (ج) ه(س) = لو٢ س (د) ه(س) = - لو٢ س

١٠- واحد من الاقترانات التالية يعتبر اقتراناً أسياً

(أ) ق(س) = (١- )<sup>س</sup> (ب) ق(س) = (١)<sup>س</sup> (ج) ق(س) = س<sup>س</sup> (د) ق(س) = س<sup>٣</sup>

١١- إذا كان ٣<sup>٤-س</sup> = ٢٧ فإن س =

(أ) ١ (ب) ٧ (ج) ١- (د) ٧-

١٢- إذا كان لو٢ س - لو٢ ص = ١ فإن :

(أ) س = ص (ب) س = ٢ص (ج) ٢س = ص (د) س - ص = ١

١٣- مدى الاقتران ق(س) = ٢- ه<sup>س</sup>

(أ) ع<sup>+</sup> (ب) ع<sup>-</sup> (ج) ]٢ ، ٢[ (د) ]٢ ، ٢٠٠-[

١٤- إذا كان لو٢ س = ٥ ، لو٢ ص = ٧ فإن لو٢ (س×ص) =

(أ) ١٢ (ب) ٣٥ (ج) ٢ (د) ٢-

١٥- الصورة الأسية للوغاريتم : لو٢ (س+١) = ٢ هي :

(أ) م<sup>(١+س)</sup> = <sup>٢</sup>/<sub>٣</sub> (ب) م<sup>٢</sup> = (١+س)<sup>٢</sup> (ج) م<sup>٢</sup> = ٣<sup>(١+س)</sup> (د) م<sup>٣</sup> = (١+س)<sup>٢</sup>

### السؤال الثالث: أكمل ما يلي

١- الاقتران و(س) = ٣<sup>(٢-س)</sup> + ٥ هو انسحاب للاقتران ق(س) = ٣<sup>س</sup> بمقدار ..... وحدة إلى .....

٢- الاقتران و(س) = لو٢ (س+٤) - ٣ هو انسحاب للاقتران ق(س) = ..... بمقدار ..... وحدة إلى .....

٣- الاقتران و(س) = ٣- ه<sup>(س)</sup> هو ..... للاقتران ق(س) = ه<sup>س</sup> حول ..... متبوعاً بانسحاب مقداره ..... إلى .....

السؤال الرابع: إذا كان لو٢ س = ٨ ، لو٢ ص = ١٤ جد قيمة ما يلي:

- (١) لو٢ س×ص = .....
- (٢) لو٢ ٤ ص = .....
- (٣) لو٢ <sup>ص</sup>/<sub>س</sub> = .....
- (٤) لو٢ <sup>١</sup>/<sub>س</sub> = .....
- (٥) لو٢ <sup>١</sup>/<sub>س</sub> × <sup>٤</sup>/<sub>ص</sub> = .....

السؤال الخامس : جد قيمة كل من :

- (١) لو١ = ٠.١
- (٢) لو٣ ه٣ =
- (٣) لو٤ + لو٩ =
- (٣) لو٣٢ + لو٢ =  $\sqrt[١٢٨]{}$
- (٤) لو٠,٠٠١ =
- (٥) لو٠,٥ =
- (٦) ه٣ + ٢ =
- (٧) ٢ ه٥ + ٥ =
- (٨) ٢٥ × ٤ =
- (٩)  $\sqrt[٨]{٣}$  =
- (١٠)  $\frac{٣-٢ \times ٤}{٤ \times ٨}$  =

السؤال السادس: حل المعادلات التالية:

- (١) لو٥ (س+٢) + لو٥ (س-٢) = ١
- (٢) لو٧ (٤س) = لو٧ (س٣+٢)
- (٣) لو (س٢) - لو (س٣) = ١
- (٤)  $\frac{١}{٢٧} = ٣ \times ٣ \times (١+س)$
- (٥)  $٢ \times ٢^{س+١} \times ٤ = ٣٢$
- (٦)  $٢ \times ٢^{س-٢} - ٣ \times ٢^{س+٢} = ٠$

السؤال الخامس : أدرس سلوك الاقترانات التالية حسب المطلوب:

$$(1) \text{ ق(س)} = ٢ \text{ لو } (٣ + ٥)$$

المجال : .....

المدى : .....

التزايد والتناقص : .....

$$(2) \text{ ق(س)} = ٣ - ٤$$

المجال : .....

المدى : .....

التزايد والتناقص : .....

السؤال السادس:

$$(1) \text{ جد قيمة كل من أ، ب التي تجعل منحنى الاقتران ق(س) = أ(٣) + ب يمر بالنقطتين (١، ٣) ، (٠، ٢)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(2) \text{ جد قيمة أ ، ب التي تجعل الاقتران ق(س) = أ(٢) + ب يمر بالنقطتين (٢، ٧) ، (١، ٥)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مع تمنياتنا لكم بالتفوق الدائم

أ. سامي عبد العزيز أبو الخير