١٢

دولـــة فلـسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الريادي والفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الفترة الأولى

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولـــة فلـسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

mohe.ps | mohe.pna.ps | moche.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

المحتويات

الفترة ١

المصفـوفة	Matrix	٣
جمع المصفوفات وطرحها	Summation and Subtraction of Matrices	٦
ضرب المصفوفات	Matrix Multiplication	١٠
المحددات	Determinants	١٣
النظير الضربي للمصفوفة المربعة	Inverse Matrix	١٥
حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات	Solving Linear System of Equations by Matrices	١٨
متوسط التغير	Rate of Change	٢١
مفهوم المشتقة الأولى	First Derivative	٢٣
قواعد الاشتقاق	Differentiation Rules	٢٦

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات وقواعد الاشتقاق في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- التعرف على مفهوم المصفوفة.
- تنظيم بيانات معطاة على شكل مصفوفة وتحديد رتبة هذه المصفوفة.
- إيجاد ناتج جمع وطرح المصفوفات.
- إيجاد ناتج ضرب المصفوفات.
- إيجاد محدد المصفوفات المربعة من الرتبة ٢×٢ ، ٣×٣.
- إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة ٢×٢.
- حل نظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.
- توظيف المصفوفات في مسائل عملية وحل تمارين عامة.
- التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران ق(س) وإيجاده.
- التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.
- التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.

البنود الملونة باللون الأحمر يستثنى منها الفندقي والاقتصاد المنزلي والزراعي

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

المصفوفة (Matrix)

تعريف:

المصفوفة: ترتيب من الأعداد الحقيقية على شكل مستطيل، مكونة من عدد من الصفوف وعدد من الأعمدة ومحصورة بالحاصرتين [ ]، ويرمز للمصفوفة بأحد الرموز: أ، ب، جـ، ....

(١) إذا كانت أ مصفوفة تتكون من م صف، ن عمود (م ، ن ∈ ص$^{+}$) فإن م × ن تسمى رتبة المصفوفة أ، وتقرأ م في ن، ويرمز لها بالرمز (أ$_{م \times ن}$) .

(٢) الأعداد الحقيقية المكونة للمصفوفة تسمى عناصر (مدخلات)،

أ$_{ي هـ}$ تعني مدخلة الصف ي والعمود هـ في المصفوفة أ.

(٣) ناتج الضرب م×ن يمثل عدد مدخلات(عناصر) المصفوفة أ.

(٤) تكتب المصفوفات حسب مدخلاتها، فمثلاً : أ$_{٢\times٣}$ $= \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$ ، أ$_{٢\times٢}$ $= \begin{bmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix}$

نشاط: إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٠ \\ ٤- & ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ \frac{١}{٢} & \sqrt{٥} \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٥- & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

رتبة أ تساوي ٣×٣ ، رتبة ب ..... ، رتبة جـ .....

أ$_{٢١}$ هي مدخلة الصف الأول والعمود الثاني وتساوي ٣ ، ب$_{٢٢}$ = ... ، جـ$_{٣١}$ = ...

العدد -٤ هو مدخلة الصف الثاني والعمود الأول في المصفوفة أ وتمثل بالرموز أ$_{١٢}$

مثال (١): المصفوفة أ من الرتبة ٢×٢، إذا عرفت مدخلات المصفوفة أ بحيث أن أ$_{ي هـ}$ = ي + هـ ، اكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها؟

الحل: أ$_{٢\times٢}$ $= \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، أ$_{١١}$ = ١ + ١ = ٢ ، أ$_{٢١}$ = ١ + ٢ = ٣

أ$_{١٢}$ = ٢ = ١ + ١ ، أ$_{٢٢}$ = ٢ + ٢ = ٤

أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مصفوفات خاصة:

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكون من صفّ واحد فقط.

مثال: $أ = \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{٥} & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ$ رتبتها ١×٣ ، تسمى $أ$ مصفوفة صف.

مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

مثال: $جـ = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ -٣ \end{bmatrix}$ ، $جـ$ رتبتها ٢×١ ، تسمى $جـ$ مصفوفة عمود.

المصفوفة المربعة: المصفوفة التي فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

مثال (١): $أ = \begin{bmatrix} ١ & \sqrt{٢} \\ ٣ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ ويمكن تسميتها مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

تسمى المدخلات $\sqrt{٢}$ ، ٣ القطر الرئيس للمصفوفة $أ$ ، والمدخلات ١ ، $\frac{١}{٢}$ القطر الثانوي للمصفوفة $أ$.

مثال (٢): $جـ = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & -٤ & ١٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ويمكن كتابتها بالصورة $جـ_٣$ أو $جـ_{٣ \times ٣}$.

المصفوفة الصفرية: المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار، ويرمز لها بالرمز (و).

تعريف:

تتساوى المصفوفتان $أ$ ، $ب$ إذا كان لهما نفس الرتبة، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية ($أ_{ي هـ} = ب_{ي هـ}$) والعكس صحيح.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مثال (١): إذا كانت $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ص & ١ \\ ٣ & ١ & ٢س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ٦ & ٢- \\ ٣ & ١ & ٦- \end{bmatrix}$ ما قيمة س، ص؟

الحل: المصفوفتان متساويتان، فمدخلاتهما المتناظرة متساوية.

ص = ٦

٢س = ٦- ومنها س = ٣-

تمارين ومسائل

س١: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١- & ٢ & ٤ \\ \sqrt{٥} & \frac{٢}{٣} & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٨ & ٣- \\ \sqrt{١٦} & ٤ \\ ٢,٣ & ٥- \end{bmatrix}$

١) ما رتبة كل من المصفوفات أ ، ب ، جـ ؟

٢) ما قيمة $أ_{٢٢}$ ، $ب_{١٢}$ ، $جـ_{١٣}$ ، $جـ_{٢٣}$ ؟

٣) ما قيمة $أ_{٢١} + جـ_{٢٣}$ ؟

س٢: أجد قيمة س، ص في المصفوفات الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ص \\ ١-س & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ٢- & ٢- \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س+٤ \\ ص \end{bmatrix}$

س٣: المصفوفة جـ من الرتبة ٣×٢، إذا عرفت مدخلاتها بحيث أن $جـ_{ي هـ} = ٢ي - هـ$، أكتب المصفوفة بذكر مدخلاتها.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

جمع المصفوفات وطرحها

(Summation and Subtraction of Matrices)

تعريف:

تجمع المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية جمع المصفوفتين بجمع مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

تطرح المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة، وتتم عملية طرح المصفوفتين بطرح مدخلاتهما المتناظرة. وتكون مصفوفة الناتج من نفس الرتبة.

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٤- & ١ \end{bmatrix}$ ، أجد أ + ب ، أ − ب ؟

الحل: أ + ب = $\begin{bmatrix} ٣ + ٦ & ٩ + ٣ & ١ + ٠ \\ ٠ + ١ & ٢ + ٤- & ٣- + ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٩ & ١٢ & ١ \\ ١ & ٢- & ٢- \end{bmatrix}$

أ − ب = $\begin{bmatrix} ٣ - ٦ & ٩ - ٣ & ١ - ٠ \\ ٠ - ١ & ٢ - ٤- & ٣- - ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٣- & ٦ & ١ \\ ١ & ٦ & ٤- \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفة بعدد حقيقي:

إذا كان ك عدداً حقيقياً، أ $_{م×ن}$ مصفوفة، فإن (كأ)$_{م×ن}$ مصفوفة، تنتج مدخلاتها من ضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة أ في ك.

مثال (٢): إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٩ & ٣- \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ أجد: ١) ٢ أ ٢) $\frac{١}{٢}$ أ ٣) - أ

الحل: ١) ٢ أ = $\begin{bmatrix} ٢ \times ٩ & ٢ \times ٣- \\ ٢ \times ٥ & ٢ \times ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٨ & ٦- \\ ١٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $\frac{١}{٢}$ أ = $\begin{bmatrix} \frac{٩}{٢} & \frac{٣}{٢} - \\ \frac{٥}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$

٣) -أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩- \\ ٠ & ٥- \end{bmatrix}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمعكوس الجمعي للمصفوفة أ.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مثال (٣): إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١١ \\ ٩ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٣- \end{bmatrix}$

أجد: ١) $-أ + ٢ب$ ٢) $٣ب - ٢أ$

الحل: ١) $-أ + ٢ب = \begin{bmatrix} ٢- & ٣- & ١١- \\ ٩- & ٦- & ٥- \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- + ٢ & ٣- + ٦ & ١١- + ٢ \\ ٩- + ٤ & ٦- + ٠ & ٥- + ٦- \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٤- & ٣ & ٩- \\ ٥- & ٦- & ١١- \end{bmatrix}$

٢) $٣ب - ٢أ = ٣\begin{bmatrix} ١- & ٣ & ١ \\ ٣- & ٠ & ٢ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١١ \\ ٩ & ٦ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٩ & ٣ \\ ٩- & ٠ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٢٢ \\ ١٨ & ١٢ & ١٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٧- & ٣ & ١٩- \\ ١٢- & ١٢- & ١٩- \end{bmatrix}$

مثـال (٤): أجد قيمة س، ص فيما يأتي: $٢\begin{bmatrix} س \\ ٣ \end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix} ٤ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

الحل: $\begin{bmatrix} ٢س \\ ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} ٢س - ١٢ \\ ٦ - ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$

$٢س - ١٢ = ٢$ ومنها $س = ٧$

$٦ - ٣ص = ٩$ ومنها $ص = -١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

اذا كانت أ، ب، جـ مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∈ ح:

أ) أ + ب = ب + أ ..... (الخاصية التبديلية).

ب) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ..... (الخاصية التجميعية).

جـ) أ + و = و + أ = أ ..... (المصفوفة الصفرية).

د) أ + (-أ) = (-أ) + أ = و..... (المعكوس الجمعي).

هـ) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب .....(ضرب عدد في مجموع مصفوفتين).

مثال (٥): أجد المصفوفة س~ في المعادلة الآتية: $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \text{س}~٢ + \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ،

الحل: $\left(\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix}\right) + \text{س}~٢ = \left(\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix}\right)$ (بإضافة المعكوس الجمعي)

$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \text{س}~٢ = \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٣- & ٧- \end{bmatrix}$ ومنها $\text{س}~ = \begin{bmatrix} \frac{١-}{٢} & \frac{١-}{٢} \\ \frac{٣-}{٢} & \frac{٧-}{٢} \end{bmatrix}$

المعادلة $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} + \text{س}~٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ تسمى معادلة مصفوفية، حيث س~ مصفوفة،

وكذلك $\begin{bmatrix} س \\ ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ **تسمى معادلة مصفوفية، حيث س ، ص أعداد حقيقية.**

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

تمارين ومسائل

س٢: أجد ناتج ما يأتي:

١) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ -٢ & ٣ \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٦ & -٢ & ١ \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٣ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

أجد: ١) $(أ + ب) - ٢ جـ$ ٢) $(أ + ب) + جـ$ ٣) $أ + (ب + جـ)$

٤) $٢ (أ + جـ)$ ٥) $(ب + جـ)$ ٦) $(جـ + ب)$

س٤: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} ٨ & س + ص \\ ٧ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ س - ٣ص & ٧ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ١١ \\ ١٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ص \\ -١ \end{bmatrix} ٣ + \begin{bmatrix} س \\ ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$

س٥: أحل المعادلات المصفوفية الآتية:

١) $\begin{bmatrix} -٥ & ٠ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix} ٣ = ~~س~~ ٢ - \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١٠ \end{bmatrix}$

٢) $~~ص~~ \frac{١}{٢} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ & -٢ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ -٦ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

ضرب المصفوفات
(Matrix Multiplication)

تعريف:
إذا كانت أ ، ب مصفوفتين، وكان عدد الأعمدة في أ يساوي عدد الصفوف في ب، فإن المصفوفة أ . ب معرفة، والناتج مصفوفة جـ من الرتبة (عدد صفوف أ في عدد أعمدة ب)، أي أن $أ_{م\times ن} \cdot ب_{ن\times هـ} = جـ_{م\times هـ}$

نشاط (١): أكمل الجدول الآتي:

رتبة المصفوفة أ	رتبة المصفوفة ب	أ . ب معرفة	أ . ب غير معرفة	رتبة المصفوفة الناتجة
٣×٢	٢×٣	✓	_____	٢×٢
٢×٣	٢×٣	.....	.....	_____
١×٣	.....	✓	_____	٣×٣

مثال (١): إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٠ & ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ -١ & -٢ & -١ \end{bmatrix}$

أجد: أ.ب ، ب.أ إن أمكن؟

الحل: $أ_{٢\times٣} \cdot ب_{٣\times٣} = جـ_{٢\times٣} = \begin{bmatrix} جـ_{١١} & جـ_{٢١} & جـ_{٣١} \\ جـ_{١٢} & جـ_{٢٢} & جـ_{٣٢} \end{bmatrix}$

$$جـ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٠ & ١ & -٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & ٢ & -٥ \\ ٠ & ١ & -٢ \\ -١ & -٢ & -١ \end{bmatrix}$$

$جـ_{١١} = ٢ \times -١ + -١ \times ٠ + ٤ \times -١ = -٦$ وهي ناتج جمع (ضرب مدخلات الصف الأول من المصفوفة أ في مدخلات العمود الأول من المصفوفة ب). وهكذا بقية مدخلات المصفوفة جـ.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

$$جـ = \begin{bmatrix} ٢ \times -١ + ٠ \times -١ & ٤ \times -١ + ١ \times -٢ \\ ٢ \times -١ + ٥- \times -١ & ٤ \times -٢ + ١ \times -٢ \end{bmatrix}$$

$$جـ = أ . ب = \begin{bmatrix} ٦- & ٥- & ١٢- \\ ٢ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

ب . أ غير معرفة، لأن عدد أعمدة ب لا يساوي عدد صفوف أ.

المدخلة جـ ي هـ = مجموع حواصل ضرب المدخلات في الصف ي من المصفوفة أ في مدخلات العمود هـ من المصفوفة ب.

خصائص عملية الضرب على المصفوفات:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن عملية الضرب والجمع في العبارات الآتية معرفة، ك∈ح فإن:

١. (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ)..... الخاصية التجميعية.

٢. أ . (ب + جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ)... توزيع الضرب على الجمع من اليمين.

٣. (أ + ب) . جـ = (أ . جـ) + (ب . جـ).. توزيع الضرب على الجمع من اليسار.

٤. أ . م = م . أ = أ ..... (م) المصفوفة المحايدة.

٥. ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

تمارين ومسائل

س١: أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٨ \\ ٩ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٥- \\ ٢ & ١- & ٦ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٢- \\ ٠ & ١٠ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٧- \end{bmatrix}$

س٢: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ١٥ \\ ٣ & ٥ & ٦- \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٩ \\ ١- & ٢- & ٤ \\ ٠ & ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

أجد (إن أمكن):

١) ب . جـ ٢) ٢أ . (-ب) ٣) جـ^{٢} ٤) أ^{٢}

س٣: أجد قيم س ، ص فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} س & ٣- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٤- \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$$

س٤: إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٧ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥- & ١ \end{bmatrix}$ $جـ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٣- \\ ١- & ٢- & ٢ \\ ٠ & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ أجد:

١) (أ . ب) . جـ ٢) أ . (ب . جـ) ٣) ٢ (أ . ب)

٤) (٢أ) . ب ٥) أ . (٢ب)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

المحددات (Determinants)

تعريف:
إذا كانت $أ_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ ، فإن المقدار $(أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{٢١} \times أ_{١٢})$ يسمى محدد المصفوفة أ ويرمز له بالرمز $|أ|$.

مثال (١): إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$.

أجد: ١) $|أ|$ ٢) $|ب|$ ٣) $|أ . ب|$

الحل: ١) $|أ| = \begin{vmatrix} ٦ & -٣ \\ ١ & \frac{١}{٢} \end{vmatrix} = (٦ \times \frac{١}{٢}) - (-٣ \times ١) = ٣ + ٣ = ٦$

٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٢ \times ٣) - (١ \times ١) = ٦ - ١ = ٥$

٣) $أ . ب = \begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ ٢,٥ & ٢,٥ \end{bmatrix}$ ، $|أ . ب| = (٩ \times ٢,٥) - (-٣ \times ٢,٥) = ٣٠$

مثال (٢): إذا كان $\begin{vmatrix} ٣ & س \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = ٧$، أجد قيمة س.

الحل: $(٣ \times ٥) - (س \times ٢) = ٧$ ومنها $س = ٤$

تعريف:
تعريف: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$ ، فإن محدد المصفوفة أ هو:

$$|أ| = أ_{١١} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} - أ_{٢١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} + أ_{٣١} \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مثال (٣): أجد محدد المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١- \\ ١ & ٣- & ٢ \\ ٠ & ٢- & ٥ \end{bmatrix}$ ؟

الحل: $|أ| = ٢ \begin{vmatrix} ٣- & ١ \\ ٢- & ٠ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix} + ١- \begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ٥ & ٢- \end{vmatrix}$

$= ٢((٣-\times٥) - (٢-\times٢)) - ٣((١\times٥) - (٠\times٢)) + (١-)((٢-\times١) - (٣-\times٠))$

$= ٢(١١-) - ٣(٥) - ١(٢-) = ٢٢- - ١٥ + ٢ = ٣٥-$

تمارين ومسائل

س١: أجد: ١) $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ ، ٢) $\begin{vmatrix} ١٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، ٣) $\begin{vmatrix} ٣- & ٢ & ١ \\ ٣- & ٢ & ١- \\ ٤ & ٣ & ٢- \end{vmatrix}$

س٢: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أجد $|أ . ب|$ ، $|أ + ب|$ ، $|أ - ٢ب|$

س٣: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٥$

س٤: أجد قيمة س بحيث $\begin{vmatrix} س & ٢- & ١ \\ ٠ & ١ & ١- \\ ٥ & ٦ & ٠ \end{vmatrix} = ١١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

النظير الضربي للمصفوفة المربعة
(Inverse Matrix)

تعريف:

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين ثنائيتين، وكان أ.ب = ب.أ = م$_{٢}$ (م$_{٢}$ المصفوفة المحايدة أو مصفوفة الوحدة).
فإن ب تسمى النظير الضربي لِـ أ، وبالرموز ب = أ$^{-١}$ ، (أ$^{-١}$ النظير الضربي للمصفوفة أ).

مثال (١): إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$ أبين أن ب = أ$^{-١}$ ؟

الحل: أ . ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١\times٥ + ٢\times٢- & ١\times٢- + ٢\times٥ \\ ٢\times٥ + ٢\times٢- & ٢\times٢- + ٢\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

ب . أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥\times١ + ٢-\times٢ & ٥\times٢ + ٢-\times٥ \\ ٢-\times١ + ١\times٢ & ٢-\times٢ + ١\times٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

أ . ب = ب . أ = م ومنها ب = أ$^{-١}$ وكذلك أ = ب$^{-١}$.

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة الثنائية:

تعريف:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} م_{١١} & م_{٢١} \\ م_{١٢} & م_{٢٢} \end{bmatrix}$ فإن أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}$ $\begin{bmatrix} م_{٢٢} & -م_{٢١} \\ -م_{١٢} & م_{١١} \end{bmatrix}$ حيث |أ| ≠ ٠

إذا كان |أ| = ٠ فإن أ ليس لها نظير ضربي (تسمى أ مصفوفة منفردة).

مثال (٢): أي من المصفوفات الآتية منفردة؟

١) $\begin{bmatrix} ١ & ٣- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ٥- & ١٠ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} \frac{٣}{٤} & \sqrt{٤} \\ ١ & \frac{٤}{٣} \end{bmatrix}$.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

الحل: ١) $\begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ = (١×٤) − (-٣×٢) = ١٠ ≠ ٠ ليست منفردة. ٢) $\begin{vmatrix} -٥ & ١٠ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}$ = ٠ منفردة.

٣) $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١٢ − ١٢ = ٠ منفردة. ٤) $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٤} & ٢ \\ ١ & \frac{٤}{٣} \end{vmatrix}$ = -١ ليست منفردة.

مثال (٣): أجد $أ^{-١}$ (إن أمكن) حيث $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix}$.

الحل: | أ | = ٧×٥ − ٤×٩ = ٣٥ − ٣٦ = -١

$أ^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} ٧ & -٤ \\ -٩ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ٤ \\ ٩ & -٥ \end{bmatrix}$ أتحقق من أن النظير الضربي لِـ $أ^{-١}$ هو أ .

مثال (٤): أحل المعادلة المصفوفية الآتية: $س \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$.

الحل: أضرب طرفي المعادلة بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ من اليسار.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ لماذا ؟

$س . \left(\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \right)$

$س . \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ لماذا؟

$س . م = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ومنهـا $س = \begin{bmatrix} ٦ & -٩ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

تمارين ومسائل

س١: أجد النظير الضربي للمصفوفات الآتية (إن أمكن):

١) $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ٣) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

س٢: أجد قيمة س التي تجعل المصفوفات الآتية منفردة حيث ١) $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} س & ٩ \\ ٤ & س \end{bmatrix}$

س٣: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت ب = ٤أ ، أجد ب$^{-١}$ ؟

س٤: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، أجد: (أ . ب)$^{-١}$ ، ب$^{-١}$. أ$^{-١}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

س٥: أحل المعادلة المصفوفية ٢س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات
(Solving Linear System of Equations by Matrices)

١- طريقة النظير الضربي:

مثال (١): أحل النظام الآتي باستخدام النظير الضربي: ٢س + ص = ٤

٥س − ٢ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$$

أضرب طرفي المعادلة المصفوفية بالنظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ من اليمين.

النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{٢-}{٩} \end{bmatrix}$ لماذا ؟

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{٢-}{٩} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{٢}{٩} & \frac{١}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{٢-}{٩} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$ ومنها $$\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

ومنها س = ١ ، ص = ٢ (أتحقق من ذلك).

٢- طريقة المحددات (طريقة كريمر).

طريقة كريمر: في النظام $أ_١$ س + $ب_١$ ص = ك

$أ_٢$ س + $ب_٢$ ص = ل ،

تكون س = $\frac{|أ_س|}{|أ|}$ ، ص = $\frac{|أ_ص|}{|أ|}$ حيث $أ = \begin{bmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{bmatrix}$ ، $|أ| \neq ٠$ ، $أ_س = \begin{bmatrix} ك & ب_١ \\ ل & ب_٢ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} أ_١ & ك \\ أ_٢ & ل \end{bmatrix}$.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مثال (٢): أحل النظام الآتي باستخدام طريقة كريمر: ٢س − ص = ٧ ، س + ٢ ص = ١

الحل: أكتب النظام على صورة معادلة مصفوفية $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ١ \end{bmatrix}$

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات، ومنها $|أ| = (٢\times٢) - (-١\times١) = ٥$

$أ_{س} = \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الأول في المصفوفة أ بالثوابت، ومنها $|أ_{س}| = ١٥$

$أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ استبدال العمود الثاني في المصفوفة أ بالثوابت، ومنها $|أ_{ص}| = -٥$

ومنها $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-٥}{٥} = -١$ (أتحقق).

مثال (٣): أحل المعادلة المصفوفية الآتية بطريقة كريمر $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ١ \end{bmatrix}$

الحل: $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{س} = \begin{bmatrix} ٩ & ٥ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ٩ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

$|أ| = ٧$ ، $|أ_{س}| = ٧$ ، $|أ_{ص}| = ١٤$

$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٧}{٧} = ١$ ، $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ (أتحقق).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

تمارين ومسائل

س١: أحل الأنظمة الخطّيّة الآتية باستخدام طريقة النظير الضربي:

١) ٣س − ٤ص = ٤ ، −٢س + ٤ص = ٤

٢) س − ص = ٣ ، ٢س = ٦ − ص

س٢: أحل الأنظمة الخطّيّة الآتية باستخدام طريقة كريمر:

١) س − ص = ٨ ، ٢س + ص = ١

٢) ٢ ص − س = ١ ، ٢س + ص − ٨ = ٠

س٣: في نظام من معادلتين خطّيّتين كانت | أ | = ١١، |أس| = ٣٣، | أص | = ١١، أجد قيم س ، ص ؟

س٤: في نظام من معادلتين خطّيّتين على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ ، كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المعاملات، ب = $\begin{bmatrix} -٢ \\ ٩ \end{bmatrix}$ هي مصفوفة الثوابت.

أ) أكتب المعادلتين الخطّيّتين بدلالة س ، ص.

ب) أستخدم طريقة كريمر لحل النظام.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

متوسط التغير
(Rate of Change)

تعريف:

إذا كان ص = ق(س) اقتراناً، وتغيرت فيه س من $س_1$ إلى $س_2$ فإن $\triangle س = س_2 - س_1$ تمثل التغير في س وتقرأ دلتا س.

وبناءً على التغير في س تتغير ص، حيث $\triangle ص = ص_2 - ص_1 = ق(س_2) - ق(س_1)$ تمثل التغير في ص وتقرأ دلتا ص.

مثال (١): إذا كان ص = ق (س) =٢س + ٣ أجد $\triangle س$ ، $\triangle ص$ ، عندما تتغير س من $س_1 = ١$ إلى $س_2 = ٤$.

الحل: $\triangle س = س_2 - س_1 = ٤ - ١ = ٣$

$\triangle ص = ص_2 - ص_1 = ق(س_2) - ق(س_1) = ق(٤) - ق(١) = ١١ - ٥ = ٦$

تعريف:

يسمى المقدار $\frac{\triangle ص}{\triangle س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$ متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$.

مثال (٢): إذا كان ص= ق(س)=٢$س^2$ + ٤ ، س∈ ح ، وتغيرت س من $س_1 = ٢$ إلى $س_2 = ٥$، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير $= \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٥٤ - ١٢}{٥ - ٢} = ١٤$

مثال (٣): إذا كان ص= ق(س) = ١ – ٣س ، س∈ ح، وزادت س من $س_1 = ٣$ بمقدار ٢، أجد متوسط التغير للاقتران ق(س).

الحل: متوسط التغير $= \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

$\triangle س = س_2 - س_1$

$٢ = س_2 - ٣$ ومنها $س_2 = ٥$

متوسط التغير $= \frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = \frac{-٨ - (-١٤)}{٥ - ٣} = -٣$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

أتذكر

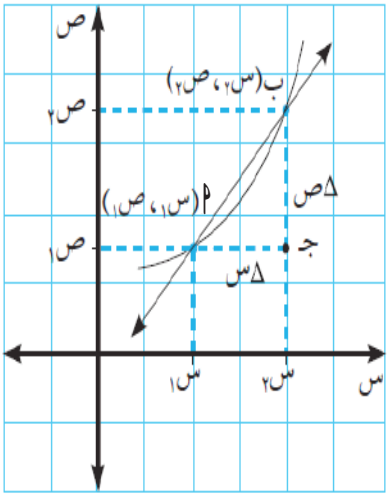
إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران

ص= ق(س)، والنقطتان أ(س$_١$ ،ص$_١$) ، ب(س$_٢$،ص$_٢$)

واقعتين عليه، فإن ميل المستقيم القاطع أب = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

ومتوسط التغير للاقتران ص= ق(س) يساوي $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ أي

أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع.



مثال (٤): تقع النقطتان أ(-١، -٣)، ب(٣، ٩) على منحنى الاقتران ص= ق(س)، أجد ميل المستقيم القاطع أب.

الحل: ميل المستقيم القاطع أب = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٩ - (-٣)}{٣ - (-١)} = ٣$

تمارين ومسائل

س١: إذا كان ص = ق(س)= ٥س ـ ١ أجد Δس ، Δص عندما تتغير س:

أ) من س$_١$ = ٢ إلى س$_٢$ = ٣,٨

ب) من س$_١$ = ٤ إلى س$_٢$ = -٢

س٢: أجد متوسط التغير للاقتران ص = ق(س) في الحالات الآتية:

أ) ق(س) = $\sqrt{س - ٣}$ ، عندما تتغير س من س$_١$ = ٧ إلى س$_٢$ = ٤

ب) ق(س) = س^٢ ـ ١ ، عندما س$_١$ = ٢ ، Δس = ٤

س٣: ليكن ص = ق(س) اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من س$_١$ = ١ إلى س$_٢$ = ٤ هو ١٣، أجد:

أ) التغير في ص ب) ق(٤) علما بأن ق(١) = ٦

س٤: إذا كان ق(س) = س + ٧ ، أجد ميل القاطع المارّ بالنقطتين أ(-٢ ، ق(-٢)) ، ب(٣ ، ق(٣)).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مفهوم المشتقة الأولى
(First Derivative)

تعريف: المشتقة الأولى للاقتران ص= ق(س) عند النقطة (س$_{١}$ ،ق(س$_{١}$)) هي:

$$\text{نهـا}_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{ق(س_{١} + \Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}$$ ويرمز لها بالرمز ق$'$(س$_{١}$) أو $\frac{ص د}{س د}$ $|_{س=س_{١}}$ أو ص$'$ $|_{س=س_{١}}$

وللتبسيط يمكن كتابة $\Delta س$= هـ ، فتكون ق$'$(س$_{١}$) = $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س_{١} + هـ) - ق(س_{١})}{هـ}$

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٥ ، أجد ق$'$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: ق$'$(٢) = $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٥ - ٥}{هـ}$

= صفر

مثال (٢): إذا كان ق(س) = ٣س، أجد ق$'$(١) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الحل: ق$'$(١) = $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١ + هـ) - ق(١)}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(١ + هـ) - ٣(١)}{هـ}$

= $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣ + ٣هـ - ٣}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣هـ}{هـ}$

= ٣

مثال (٣): إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} + ١، أجد ق$'$(٢) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

الحل: ق$'$(٢) = $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٢ + هـ) - ق(٢)}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(٢ + هـ)^{٢} + ١ - (٣(٢)^{٢} + ١)}{هـ}$

= $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(٤ + ٤هـ + هـ^{٢}) + ١ - (٣ \times ٤ + ١)}{هـ}$

= $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{١٣ + ١٢هـ + ٣هـ^{٢} - ١٣}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{١٢هـ + ٣هـ^{٢}}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{هـ(١٢ + ٣هـ)}{هـ}$

= $\text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠}$ ١٢ + ٣هـ = ١٢ + ٣ × ٠

= ١٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مثال (٤): إذا كان ق(٢) = ٨ ، ق/(٢) = ٢ أجد $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{٥هـ}$

الحل: $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٢) - ق(٢ + هـ)}{٥هـ} = \frac{-١}{٥} \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$

$= \frac{-١}{٥}$ ق/(٢) لماذا؟

$= \frac{-١}{٥} \times ٢ = \frac{-٢}{٥}$

مثال (٥): إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س في الفترة [٣ ، ٣ + هـ].

يساوي $\frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$ ، أجد ق/(٣).

الحل: متوسط التغير = $\frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ} = \frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$

ق/(٣) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^٢ - ٥هـ}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(هـ - ٥)}{هـ} = -٥$

ألاحظ أن ق/(س١) تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [س١ ، س١ + هـ] عندما تؤول هـ إلى الصفر.

مثال (٦): إذا كان ق(س) = س^٢ + ٣، أجد ق/(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد ق/(٢) ؟

الحل: ق/(س) = $\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{(س+هـ)^٢ + ٣ - (س^٢+٣)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{(س^٢ + ٢سهـ + هـ^٢) + ٣ - (س^٢ + ٣)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{س^٢ + ٢سهـ + هـ^٢ + ٣ - س^٢ - ٣}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0} \frac{٢سهـ + هـ^٢}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ(٢س + هـ)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to 0}$ (٢س + هـ) = ٢س

ومنها ق/(٢) = ٢ × ٢ = ٤

ملاحظة: سنقتصر إيجاد المشتقة بإستخدام التعريف على الإقترانات كثيرة الحدود التي درجتها أقل من ٣.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

تمارين ومسائل

س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد ق/ (س) عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ) ق(س) = ٢س ـ ٧ ، س = -٣

ب) ق(س) = ٣ ـ س ، س = ٢

جـ) ق(س) = س^{٢} + س ، س = - $\frac{١}{٢}$

س٢: إذا كان ق/ (٣) = ٨ ، أجد:

أ) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(٣ + هـ) ـ ق(٣)}{هـ}$

ب) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(٣ + هـ) ـ ق(٣)}{٢هـ}$

جـ) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(٣) ـ ق(٣ + هـ)}{هـ}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٣ إلى س$_{٢}$= ٣ + هـ يساوي $\frac{٢}{(-١ + هـ)}$ ، أجد قيمة ق/ (٣).

س٤: إذا كانت △ص = $\frac{٧هـ ـ هـ^{٢}}{٤}$ هي التغير في الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٥ إلى س$_{٢}$ = ٥ + هـ، أجد ق/ (٥).

س٥: إذا كان ص = ق(س) = س^{٢} + ١ ، أجد ق/ (س) باستخدام تعريف المشتقة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

قواعد الاشتقاق
(Differentiation Rules)

قاعدة (١): إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ عدد حقيقي، فإن ق/(س) = صفر. ∀ س ∈ ح.

مثال (١): إذا كان ق(س) = ٣ ، أجد ق/(س) ، ق/(٥)

الحل: ق/(س) = صفر لجميع قيم س ∈ ح

ق/(٥) = صفر

قاعدة (٢): إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن ق/(س) = ن س$^{ن-١}$ ، ن عدد حقيقي، س ≠ ٠

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{ص}{س}$ في كل من الحالات الآتية:

أ) ص = س٤

ب) ص = س$^{-٥}$ ، س ≠ ٠

جـ) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ ، س ≠ ٠

د) ص= $\sqrt{س}$ ، س ≤ ٠

الحل: أ) ص = س^{٤}

$\frac{ص}{س}$ = ٤ س$^{٤-١}$ = ٤س^{٣} ، ∀ س ∈ ح

ب) ص = س$^{-٥}$ ، س ≠ ٠

$\frac{ص}{س}$ = -٥ س$^{-٥-١}$

= -٥س$^{-٦}$

جـ) ص = $\frac{١}{س^{٣}}$ = س$^{-٣}$

$\frac{ص}{س}$ = -٣ × س$^{-٣-١}$ = -٣ س$^{-٤}$ = $\frac{-٣}{س^{٤}}$

د) ص = $\sqrt{س}$ = س$^{\frac{١}{٢}}$ ، س ≤ ٠

$\frac{ص}{س}$ = $\frac{١}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}-١}$ = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ، س < ٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

قاعدة (٣): إذا كان الاقترانان ق(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س، وكانت أ ∈ ح، وكان هـ(س)= أ ق(س)، فإن هـ/ (س) = أ ق/ (س).

قاعدة (٤): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = ك(س) + ع(س) ، فإن ق/ (س) = ك/ (س) + ع/ (س).

مثال (٣): إذا كان ك(س) = س^{٢} ، ع(س) = ٢س، ق(س) = ك(س) + ع(س)، أجد ق/ (س) ، ق/ (٠)؟

الحل: ق/ (س) = ك/ (س) + ع/ (س)

= (٢ س) + (٢)

= ٢س + ٢

ق/ (٠) = ٢×٠ + ٢ = ٢

قاعدة (٥): إذا كان الاقترانان ك(س) ، ع(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س ، وكان ق(س) = ك(س) – ع(س) ، فإن ق/ (س) = ك/ (س) – ع/ (س).

مثال (٤): إذا كان ك(س) = ٥س ، ع(س) = ٢س^{٣} ، ق(س) = ك(س) – ع(س)، أجدق/ (س)، ق/ (-٢) ؟

الحل: ق/ (س) = ك/ (س) – ع/ (س)

ق/ (س) = ٥ – ٦س^{٢}

ق/ (-٢) = ٥ – ٦ (-٢)^{٢}

= ٥ – ٢٤

= - ١٩

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان ك/ (١) = ٣ ، ع/ (١) = ٢ وكان ق(س) = ك(س) – ٢ع(س) ، أجد ق/ (١) ؟

الحل: ق/ (س) = ك/ (س) – ٢ع/ (س)

ق/ (١) = ك/ (١) – ٢ع/ (١)

= ٣ – ٢ × ٢ = -١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

قاعدة (٦): إذا كان الاقترانان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) فإن
ل/(س) = ق(س) × هـ/(س) + هـ(س) × ق/(س)
وبالكلمات ل/(س) = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول.

مثال (٦): إذا كان ص = (س^{٢}+٣س+٢) (٥س+١) أجد $\frac{د ص}{د س}$ | $_{س=٢}$

الحل: ص = (س^{٢} +٣س+٢) (٥س+١)

$\frac{د ص}{د س}$ = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$\frac{د ص}{د س}$ = (س^{٢} +٣س+٢)×٥ + (٥س+١)×(٢س + ٣)

$\frac{د ص}{د س}$ | $_{س=٢}$ = (٤ + ٦ + ٢)×٥ + (١٠ + ١) × (٤ + ٣)

= ٦٠ + ٧٧ = ١٣٧

مثال (٧): إذا كان ك(٢) = ٥ ، ك/(٢) = ٣ ، ع(٢) = ٤ ، ع/(٢) = ٦ وكان
ق(س) = ك(س) × ع(س) ، أجد ق/(٢).

الحل: ق/(س) = ك (س) × ع/(س) + ع(س) × ك/(س)
ق/(٢) = ك (٢) × ع/(٢) + ع(٢) × ك/(٢)
= ٥ × ٦ + ٤ × ٣
= ٣٠ + ١٢ = ٤٢

قاعدة (٧): إذا كان الاقتران ل(س) = $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، هـ(س) ≠ ٠ فإن:

$$ل/(س) = \frac{هـ(س) \times ق/(س) - ق(س) \times هـ/(س)}{(هـ(س))^{٢}}$$

$$\text{وبالكلمات } ل/(س) = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

مثال (٨): إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ١}{٢س - ٥}$ ، س ≠ $\frac{٥}{٢}$ ، أجد ق/(س).

الحل: ق/(س) = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

$$= \frac{(٢س - ٥) \times ٣ - (٣س + ١) \times ٢}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٦س - ١٥ - ٦س - ٢}{(٢س - ٥)^{٢}} = \frac{-١٧}{(٢س - ٥)^{٢}}$$

مثال (٩): إذا كان ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ ، هـ(س) ≠ صفر، وكان ق/(٢) = -١ ، ق(٢) = ١ ، هـ(٢) = ٢،

ل/(٢) = -٢ أجد هـ/(٢).

الحل: ل/(س) = $\frac{\text{هـ(س)} \times \text{ق/(س)} - \text{ق(س)} \times \text{هـ/(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٢}}$

ل/(٢) = $\frac{\text{هـ(٢)} \times \text{ق/(٢)} - \text{ق(٢)} \times \text{هـ/(٢)}}{(\text{هـ(٢)})^{٢}}$

$$-٢ = \frac{٢ \times -١ - ١ \times \text{هـ/(٢)}}{(٢)^{٢}}$$

$$-٨ = -٢ - \text{هـ/(٢)}$$

ومنها هـ/(٢) = ٦ لماذا ؟

مثال (١٠): إذا كان ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{س}+١}$ ، س ≠ -١ أجد ق/(١)، علماً بأن هـ(١) = ٢ ، هـ/(١) = ٣

الحل: ق/(س) = $\frac{(\text{س}+١) \times \text{هـ/(س)} - \text{هـ(س)} \times ١}{(\text{س}+١)^{٢}}$

ق/(١) = $\frac{(١+١) \times \text{هـ/(١)} - \text{هـ(١)}}{(٢)^{٢}}$

$$= \frac{٢\text{هـ/(١)} - \text{هـ(١)}}{٤}$$

$$= \frac{٢ \times ٣ - ٢}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

قاعدة (٨): إذا كان ص = ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت ق/(س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، فإن المشتقة الأولى للاقتران ق/(س) تسمى المشتقة الثانية للاقتران ق(س) ويرمز لها بالرمز ق//(س) أو $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ أو ص//.

وكذلك يرمز للمشتقة الثالثة للاقتران ق(س) بالرمز ق///(س) أو $\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}}$ أو ق(٣) (س) أو ص///، وهكذا.*

مثال (١١): إذا كان ق(س)= س^{٣} − ٤س^{٢} + ٣س + ٢ أجد ق/(س)، ق//(س)، ق(٣) (س).

الحل: ق/(س) = ٣س^{٢} - ٨ س + ٣

ق//(س) = ٦س - ٨

ق(٣) (س) = ٦

مثال (١٢): إذا كان ص = ٣س^{٢} − ٥س + ٧ ، أجد $\frac{د ص}{د س}$ | $_{س=٢}$. $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ | $_{س=٢}$ ، $\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}}$ | $_{س=٢}$

الحل: $\frac{د ص}{د س}$ = ٦س − ٥ ومنها $\frac{د ص}{د س}$ | $_{س=٢}$ = ٧

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ٦ ومنها $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ | $_{س=٢}$ = ٦

$\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}}$ = صفر ومنها $\frac{د^{٣}ص}{د س^{٣}}$ | $_{س=٢}$ = صفر.

مثال (١٣): إذا كان ع(س) = ٣س^{٤} + ب س^{٢}، وكانت ع/(١) = ٢٢، أجد قيمة الثابت ب، ثم أجد ع//(٠).

الحل: ع/(س) = ١٢س^{٣} + ٢ب س

ع/(١) = ١٢(١)^{٣} + ٢ب (١)

٢٢ = ١٢ + ٢ب

١٠ = ٢ب ومنها ب = ٥

ع/(س) = ١٢س^{٣} + ١٠س

ع//(س) = ٣٦س^{٢} + ١٠

ع//(٠) = ١٠

---

* المشتقة النونية يرمز لها بالرمز ق(ن) ، ن ≥ ٣

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

تمارين ومسائل

س١: أجد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ب) ص = ٥س + ٣

ج) ص = $\frac{٣}{س^{٢}}$ + ٥س ، س ≠ ٠

د) ص = ٧س^{٢} + $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

هـ) ص = (٢س + ٥) (٣ − س^{٣})

و) ص = $\frac{س}{س + ٣}$، س ≠ -٣ ، عندما س = ١

س٢: أجد ق$'$(٣)، علماً بأن ق(س) = س^{٢} − س + ٥

س٣: إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣س، وكان ل(س) = ق(س) + ٣هـ(س)، هـ(٢) = ٥، هـ$'$(٢) = ١ أجد ل$'$(٢).

س٤: إذا كان ق(س) = $\frac{٣س + ٢}{٤س + ١}$ ، س ≠ $\frac{-١}{٤}$ ، أحسب ق$'$(٢)؟

س٥: إذا كانت ق(س) = س^{٣} ل(س) + هـ(س)، وكان ل(٢) = ٥، هـ$'$(٢) = ٧ ، ل$'$(٢) = −٣ فما قيمة ق$'$(٢) ؟

س٦: أجد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات إزاء النقط المبينة بجانبها:

أ) ق(س) = س^{٤} − ٢س^{٣} + س + ١ ، س = ٢

ب) هـ(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$ ، س > ٠ ، س = ١

س٧: أجد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ق(س) = ٢س^{٤} + س^{٣} − ٤س + ١، ثم أبين أن ق$^{(٥)}$ (١) = صفر.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

ورقة عمل

س(١): إذا كان $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ص & س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ع & ص \end{bmatrix}$ أجد قيم كل من س، ص، ع ؟

س(٢): إذا كانت المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣- & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$، أجد المصفوفة ب$_{٢\times٣}$ بحيث أ + ب = و

س(٣): إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ وكانت جـ = أ . ب، أجد قيمة جـ$_{٢١}$.

س(٤): إذا كان $\begin{vmatrix} ٣- & ٢- & ١ \\ س & ٢ & ١- \\ ٤ & ٣ & ٢- \end{vmatrix} = ٢-$، أجد قيمة س.

س(٥): إذا كان ق(س) = ٥ – ٢س، أجد ق$'$(٤) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

س(٦): إذا كان ق(س) = ٢س^{٥} ، أجد ق$'$(س) ، ق$'$(-١).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

نموذج إختبار

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١. إذا كان $\begin{bmatrix} ٢س+٣ & ٥ \\ ٤ & ص-٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ، ص على الترتيب ؟

أ) ١-،٧ ب) ٣-،٥ جـ) ١،٢ د) ٢،١

٢. إذا كانت $س^{-} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ فما قيمة | ٢$س^{-}$ | ؟

أ) ٣ ب) ٦ جـ) ١٢ د) ٢٨-

٣. ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣ & ٣س \end{bmatrix}$ مصفوفة منفردة؟

أ) ١٢ ب) ٢- جـ) ٢ د) صفر

٤. إذا كان $أ_{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $أ_{ص} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ أجد المصفوفة أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

٥. ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) المارّ في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

أ) ٣- ب) ٣ جـ) ٢ د) ٦

٦. إذا كان ق(س) = $\sqrt{٧س}$، ما قيمة ق/(٤)؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٤}$ د) ٢

٧. ما ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٥}{س٢ - ١}$ عند س = ٢ ؟

أ) $\frac{٤}{٩}$ ب) $-\frac{٢٠}{٩}$ جـ) ١٥ د) $\frac{٥}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c

س٢: إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ & ٥ \\ ٦ & -٥ & ٤ \end{bmatrix}$ جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ،

د= $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ & -٢ \\ -٤ & ١ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ل= $\begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ أجد الآتي (إن أمكن):

أ) جـ + ل ب) ٣جـ − ٢ل جـ) (أ.ب) . د د) ل $^{-١}$ هـ) | جـ |

س٣: أستخدم طريقة كريمر لحل النظام الآتي:

٢ ص − ٤ س = ٢ ، ٥س + ص = ٨

س٤: إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ = ٥ هو ١٠، أجد ق(٥) علماً بأن ق(٢) = ٦ ؟

س٥: إذا كان متوسط التغير للاقتران ق(س) = $س^٢$ + ٣ عندما تتغير س من ٢ إلى أ يساوي ٦ فما قيمة الثابت أ ؟

س٦: إذا كان ق(س) = $س^٢$ + ١، أجد ق/(٣) باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #111066 | TRACK 2b73787debb9993c