

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

١٢



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الأدبي والشرعي
الفترة الثانية

الطبعة الثانية

٢٠٢٠ م / ١٤٤١ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | mohe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltym

+970-2-2983250 هاتف | فاكس +970-2-2983280

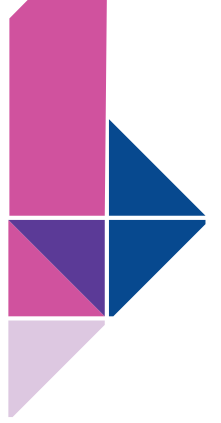
حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

الوحدة المتمازجة للفترة الثانية

المصفوفات Matrix



يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والعمليات عليها في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. التعرف إلى المصفوفة وعناصرها.
٢. إيجاد ناتج جمع مصفوفتين وطرحهما.
٣. إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين.
٤. حل معادلات مصفوفية.
٥. إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
٦. حلّ نظام من المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر.

المحتويات

٤٣	Matrix	(١ - ٢) المصفوفة
٤٩	Matrix Operations	(٢ - ٢) العمليات على المصفوفات
٥٨	Matrix Multiplication	(٣ - ٢) ضرب المصفوفات
٦٣	Matrix Inverse	(٤ - ٢) النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية
٧١	Cramer`s Rule	(٥ - ٢) حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر
٧٥	Chapter Exercises	(٦ - ٢) تمارين عامة

المصفوفة

تعريف

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها (ن)، محصورة بين قوسين من النوع []، ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية، وتكون المصفوفة من الرتبة م × ن.

نشاط (٢)

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٥ \end{bmatrix} = \text{ج} \quad , \quad \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٧ & ٤- \\ ١٠ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \text{ب} \quad , \quad \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٤ \\ ٦ & ٨- \end{bmatrix} = \text{أ}$$

(أ) رتبة المصفوفة أ تساوي ٢×٣. (لماذا؟)

(ب) رتبة المصفوفة ب تساوي _____.

(ج) رتبة المصفوفة ج تساوي _____.

(د) يقع العدد ٦ في تقاطع الصف الثالث والعمود الثاني في المصفوفة أ، ولذلك يسمى المدخلة $a_{٣٣}$.

(هـ) المدخلة التي قيمتها ٨- في المصفوفة أ تسمى $a_{١٣}$.

أتعلم

يسمى كل عدد في المصفوفة أ مدخلة، ويرمز له بالرمز a_{ij} ، حيث: (ي) (هـ) الصف والعمود الذين تقع المدخلة في تقاطعهما.

مثال (١)

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣ & ٩ \\ ٨- & ٧ \end{bmatrix} = \text{أ} \quad \text{إذا كانت المصفوفة أ تساوي } ٢ \times ٣$$

$$\text{المدخلة } a_{٢١} = ٦, \quad \text{المدخلة } a_{١٢} = ٩, \quad \text{المدخلة } a_{٣٣} = ٨-$$

تعريف

- مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكوّن من صف واحد فقط، و(ن) من الأعمدة، وتكون رتبها $1 \times n$.
- مصفوفة العمود: هي المصفوفة التي تتكوّن من عمود واحد فقط، و(م) من الصفوف، وتكون رتبها $1 \times m$.
- المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ويساوي (ن)، وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.
- المصفوفة الصفرية: هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفراً، ويرمز لها بالرمز (و).

مثال (٢)

ما رتبة كل من المصفوفات الآتية؟ وما نوعها.

$$س = \begin{bmatrix} ٢ & ٩- & ٥,٠ \end{bmatrix} ، ص = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ٩ \end{bmatrix} ، ع = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٩ & ١- & ٦ \end{bmatrix} ، و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

الحل:

- (١) رتبة س = 3×1 ، وهي مصفوفة صف.
- (٢) رتبة ص = 1×3 ، ص مصفوفة عمود.
- (٣) ع مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة.
- (٤) رتبة و = 3×2 ، وهي مصفوفة صفرية.

تعريف

تساوى المصفوفتان A ، B إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

مثال (٤)

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} ٢+س & ٤ \\ ٩- & ٤ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ٩- & ٤ \\ ٩- & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س التي تجعل $A = B$ ؟

الحل: بما أن $A = B$ ، فإن $\begin{bmatrix} ٢+س & ٤ \\ ٩- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩- & ٤ \\ ٩- & ٤ \end{bmatrix}$ ، وبحل المعادلة ينتج أن $س = ١١-$.

تمارين ومسائل (٢ - ١)



١ أجد قيم الثابتين ب، ج فيما يأتي:

$$(أ) \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ١ + ج & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ - ب & ٥ \\ ب & ٧ \end{bmatrix}$$

$$(ب) \begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ - ب \\ ج + ب \end{bmatrix}$$

$$(ج) \begin{bmatrix} ٢ - ج & ٦ & ١ \\ ب & ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٦ & ١ \\ ٢ - ب & ٥ & ٨ \end{bmatrix}$$

٢ أجد قيمة س، ص حيث:

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ س - ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ + ص & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٩ - ٢ \\ ٧ - ١ & ٤ \end{bmatrix} = P \text{ إذا كانت } P \text{ فما قيمة } P_{١١} - P_{٢٢} + P_{٣٣} = ٢٥$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٧ & ١١ - ١ \end{bmatrix} = P \text{ إذا كانت } P \text{ ، ب مصفوفتان بحيث } P_{٢٢} = ٣ \text{ ، ب، ج المصفوفة ب.}$$

العمليات على المصفوفات

أولاً: جمع المصفوفات وطرحها:

تعريف

إذا كانت P ، B مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها $m \times n$ فإن المصفوفة J حيث: $P \pm B = J$ ، حيث J مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وتكون كل مدخلة في المصفوفة J مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين P ، B ، أي أن: $J_{ij} = P_{ij} \pm B_{ij}$

مثال (١)

$$\text{إذا كانت } P = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 & 1- \\ 3 & 3 \end{bmatrix} , J = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3- & 10 \end{bmatrix}$$

أجد $A + B$ ، $J - B$.

الحل: بما أن رتبة المصفوفة P = رتبة المصفوفة B ، فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالآتي.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 1-+8 \\ 3+1 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1- \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = B + P$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6- & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 1--3 \\ 3-3- & 3-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1- \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3- & 10 \end{bmatrix} = B - J$$



خصائص عملية جمع المصفوفات

- (١) عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية.
- (٢) عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية.
- (٣) المصفوفة الصفرية (و) هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.
- (٤) إذا كانت P ، B مصفوفتين حيث: $P + B = B + P$ ، فإن B هي النظير الجمعي للمصفوفة P ، وتكون $B = -P$

مثال (٢)

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ ، $W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ،

أجد: (١) $P + (W + P)$ (٢) $P + (W + B)$

الحل: باستخدام الخصائص فإن $P + W = P$ ومنها فإن $P + (W + P) = P + P = 2P = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} = W + P$$

$W + P = \dots$ ماذا تلاحظ؟

ثانياً: ضرب المصفوفات بعدد ثابت:

تعريف

إذا كانت P مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وكان k عدداً حقيقياً فإن kP مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة P مضروبة بالثابت k . أي أن: $(kP)_{ij} = k(P_{ij})$

مثال (٢)

إذا كانت $S = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، فإن $7S = \begin{bmatrix} 21 & 28 & 35 & 42 \\ 7 & 49 & 28 & 7 \end{bmatrix}$

مثال (٣)



أحلّ المعادلة المصفوفية الآتية: $س - ٣ = \begin{bmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} ٨ & ٧- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

الحل:

$$س - ٣ = س + \begin{bmatrix} ٨ & ٧- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٩ \\ ٠ & ١١ \end{bmatrix} \quad \text{إذن } س = \begin{bmatrix} ٢٠ & ٢ \\ ٢ & ١٢ \end{bmatrix}, \text{ ومنها } س = \begin{bmatrix} ١٠ & ١ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$$



تمارين ومسائل (٢ - ٢)

١ إذا كانت المصفوفة ج = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ + ب، وكانت المدخلة $٩ = ٢$ ، والمدخلة ب = $٨-$ ، فما قيمة المدخلة ج = ؟

٢ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٣ & ٨ \\ ٣ & ١ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ & ٧ \\ ٨ & ٦ & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ١ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

أجد ما يأتي (إن أمكن):

(أ) س + ص (ب) س - ص (ج) ص - س (د) س - ع (هـ) ص - ٣×٣

٣ أجد ناتج ما يأتي $٣ - \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٥ & ٦ & ١ \end{bmatrix} - ٤ \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ & ٣- \end{bmatrix}$

٤ إذا كانت $٢ = \begin{bmatrix} ٧- & ٢ \\ ١ & ٤ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} = ب$ ، $٨ = \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٨ \\ ٧ & ٢- \end{bmatrix}$ ، أجد المصفوفة س حيث: $س - ٢ = ٣ - ب$

٥ أحلّ كلاً من المعادلات المصفوفية الآتية:

(أ) $س + ٣ = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ (ب) $٢ + س = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ $٢ - س = \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

(ج) $٢ - س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦- & ٠ \\ ٠ & ٥ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$



ضرب المصفوفات

تعريف

إذا كانت P مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، B مصفوفة من الرتبة $n \times h$ ، فإن:
 $P \cdot B = B \cdot P$ حيث: $P = P_{1h} + P_{2h} + \dots + P_{nh}$ $B = B_{1n} + B_{2n} + \dots + B_{hn}$
 عملية ضرب المصفوفات ليست تبديلية.

مثال (١)

أجد ناتج ضرب المصفوفتين P ، B في كل من الحالات الآتية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3- & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = B \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4- & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = P \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = B \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = P \quad (2)$$

الحل: ألاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة P = عدد صفوف المصفوفة B

$$P \cdot B = \begin{bmatrix} (0 \times 0) + (3- \times 1) + (2 \times 3) & (6 \times 0) + (1 \times 1) + (5 \times 3) \\ (0 \times 3) + (3- \times 4-) + (2 \times 0) & (6 \times 3) + (1 \times 4-) + (5 \times 0) \\ (0 \times 5) + (3- \times 2) + (2 \times 1) & (6 \times 5) + (1 \times 2) + (5 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 12 & 14 \\ 4- & 37 \end{bmatrix}$$

مثال (٢)

إذا كانت P ، B مصفوفتان حيث: $P_{4 \times 3}$ ، $B_{3 \times 5}$ ، فإن رتبة المصفوفة $B \cdot P$ تساوي 5×3 .

مثال (٣)

إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أجد ناتج كل من $(A) \cdot B$.

الحل:

$$(A) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = B \cdot P$$

أتعلم

المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية، ويرمز لها بالرمز M ، ويطلق عليها أيضاً اسم **مصفوفة الوحدة**.

تمارين ومسائل (٢ - ٣)

١ أجد ناتج ضرب المصفوفات فيما يأتي (إن أمكن):

$$(A) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} (B) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\begin{bmatrix} 4 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & A \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ما قيمة كل من الثابتين A ، B ؟

$$(A) \cdot \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(A) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وكانت $P_2 + P_3 = S$ ، أجد المصفوفة S .

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً: المحددات: (Determinants)

تعريف (١)

إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، فإن محدد المصفوفة $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقي ويرمز له بالرمز $|P|$ حيث $|P| = (p_{11} \times p_{22}) - (p_{21} \times p_{12})$.

مثال (١)

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3- & 1 \end{bmatrix} = P \quad \text{أجد محدد كل من المصفوفات الآتية: (١)}$$

الحل:

$$|P| = (p_{11} \times p_{22}) - (p_{21} \times p_{12}) = (9 \times 1) - (3- \times 3) = 9 - 9- = ١٨-$$

أتعلم

إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، K عدد حقيقي، $K \neq 0$ صفر، فإن $|K P| = K^2 |P|$.

نشاط (١)

إذا كانت P مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|P| = ٥٠-$ ، فإن:

$$|P| = \underline{\hspace{2cm}} \quad |P| = \underline{\hspace{2cm}}$$

ثانياً: النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

تعريف (٢)



تُسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة المنفردة.

مثال (٢)



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} 3 & 1-s \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، أجد قيمة s التي تجعل P مصفوفة منفردة.

الحل: بما أن P مصفوفة منفردة فإن محدد $|P| = 0$.

ومنها $(s-1) \times 2 - 2 \times 3 = 0$ صفر ومنها: $s-2-6 = 0$ صفر $s-8=0$ إذن $s=8$.

تعريف (٣)



إذا كانت P مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة B من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة P إذا كان $P \cdot B = B \cdot P = M$ ، حيث M المصفوفة المحايدة. ويرمز للنظير الضربي للمصفوفة P بالرمز P^{-1} ، أي أن $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = M$.

تعريف



إذا كانت $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ ، حيث $|P| \neq 0$ صفر، فإن: $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{bmatrix} p_{22} & -p_{12} \\ -p_{21} & p_{11} \end{bmatrix}$

وإذا كانت المصفوفة P منفردة فإنه لا يوجد لها نظير ضربي



مثال (٢)



أجد النظير الضربي للمصفوفة $P = \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 4- & 1 \end{bmatrix}$ (إن أمكن).
الحل:

$$(P \times P) - (P \times P) = |P|$$

إذا يوجد للمصفوفة P نظير ضربي P^{-1} ، $2- = (2 \times 1) - (4 \times 1) = |P|$

$$\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 0,5- & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4- \\ 1 & 1- \end{bmatrix} \times \frac{1-}{2-} = P^{-1}$$

أتعلم



$$P = P^{-1}$$

تمارين ومسائل (٢ - ٤)



١ أجد قيمة s التي تحقق $6 = \begin{vmatrix} 5 & 12- \\ 3- & s \end{vmatrix}$

٢ إذا كان $|A| = 32-$ ، أجد: قيمة $|B| + |3B|$ ، حيث B مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

٣ أجد النظير الضربي لكل من المصفوفات الآتية (إن أمكن):
 $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = J$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2- & 4 \end{bmatrix} = B$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3- & 2- \end{bmatrix} = P$

٤ ما قيمة s التي تجعل المصفوفة $P = \begin{bmatrix} 1+s & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ منفردة؟

حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كرامر

قاعدة كرامر:

تستخدم قاعدة كرامر لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: $P \cdot E = J$ ، حيث:

P : مصفوفة المعاملات، E : مصفوفة المتغيرات، J : مصفوفة الثوابت، $|P| \neq 0$ صفر فيكون:

$$S = \frac{|P_S|}{|P|} \quad \text{و} \quad V = \frac{|P_V|}{|P|} \quad \text{حيث:}$$

P_S : المصفوفة P بعد استبدال مدخلات عمود معاملات S فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

P_V : المصفوفة P بعد استبدال مدخلات عمود معاملات V فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

مثال (١)

استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات الآتي:

$$S - V = 4$$

$$5S + 2V = 6$$

الحل:

أكتب نظام المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = P \quad \text{أفرض}$$



$$7 = (1 \times 5) - (2 \times 1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = |P|$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \text{المصفوفة } P$$

$$14 = (6 \times 1) - (2 \times 4) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = |P| \text{ ومنها:}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \text{المصفوفة } P$$

$$14 = (0 \times 4) - (6 \times 1) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = |P| \text{ ومنها:}$$

$$2 = \frac{14}{7} = \frac{|P|}{|P|} = \text{ص} , 2 = \frac{14}{7} = \frac{|P|}{|P|} = \text{س} \therefore$$

إذن الحل: (س، ص) = (2، 2)

مثال (2)

عند استخدام قاعدة كرامر في حل نظام المعادلات الخطية نتج أن $|P| = 3$ ، $|P|_{\text{ص}} = 15$ ، $\text{ص} = 5$ ، فما قيمة س؟

$$\text{الحل: } \text{ص} = \frac{|P|_{\text{ص}}}{|P|}$$

$$3 = \frac{15}{5} \Leftrightarrow |P| \Leftrightarrow 15 = |P| \cdot 5 = \frac{15}{5} = 5$$

$$\frac{|P|_{\text{س}}}{|P|} = \text{س} \therefore$$

$$1 = \frac{3}{3} =$$

تمارين ومسائل (٢ - ٥)



١ إذا كانت P مصفوفة من الرتبة الثانية

$$\text{وكان } |P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = |P_s|, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = |P_s|, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = |P_s|$$

أجد قيمة كل من s ، v .

٢ استخدم قاعدة كرامر في حل أنظمة المعادلات الآتية:

$$\text{أ) } 3s - 4v = 8$$

$$s + v = 12$$

$$\text{ب) } 3s - 2v - 19 = 0$$

$$v + 3s = 13$$

٣ عند استخدام قاعدة كرامر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أن $v = 4$ ، $|P_s| = 20$ ،

$$|P| = -15$$

تمارين عامة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

(١) إذا كانت $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) ٥ (ب) ٢ (ج) ١ (د) ١-

(٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، ص على الترتيب؟

(أ) (٢، ١) (ب) (١، ٢) (ج) (٢، ٥) (د) (١، ١-)

(٣) إذا كانت $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأَي من المصفوفات الآتية تمثل $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(٤) إذا كانت $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، وكان $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 8$ ، فما قيمة $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) ١٨ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٢

(٥) أي من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربي؟

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(٦) إذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) ٢ (ب) ١ (ج) ١- (د) ٢-

(٧) عند حل نظام من معادلتين خطيتين، وُجِدَ أن $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) ٣ (ب) ١ (ج) ١- (د) ٣-

(٨) إذا كان $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ؟

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر



٩) إذا كانت A ، B ، C مصفوفات حيث $A = B = C$ وكانت A ، B ، C فما رتبة المصفوفة B ؟

- أ) 4×1 ب) 3×1 ج) 1×1 د) 3×4

السؤال الثاني: أستخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات الآتي: $2s + 1 = v$ ، $2 - v = 4$

إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل من الفقرات الآتية:

١) إذا كانت المصفوفة $S = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ فما رتبة المصفوفة S ؟

- أ. 3×2 ب. 2×3 ج. 6 د. 2

٢) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ فما قيمة المدخلة B_{23} ؟

- أ. 1 ب. 23 ج. 10 د. 2

٣) إذا كانت $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فما قيمة v ؟

- أ. 2 ب. 20 ج. 4 د. 40

٤) كانت المصفوفة A هي النظير الضربي للمصفوفة B فإن واحدة من العبارات الآتية صحيحة:

- أ. $A \times B = I$ ب. $A = B$ ج. $A \times B = B$ د. $A \times B = B$

٥) ما قيمة s التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & s \\ s & 9 \end{bmatrix}$ منفردة؟

- أ. $6 \pm$ ب. 6 ج. 6 د. 63

٦) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فما قيمة $|A|$ ؟

- أ. 82 ب. 7 ج. 82 د. 41

٧) إذا كانت $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ فما $(\frac{1}{S})^{-1}$ ؟

- أ. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

٨ إذا كان $\frac{1}{p} |s| = |3| = 18$ حيث A مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية فما قيمة s ؟

- أ. ١٨ ب. ٣٦ ج. -١٨ د. ١

٩ إذا كان $A = B$ ، s ، حيث A ، B غير منفردتين فما المصفوفة B ؟

- أ. $A^{-1}s$ ب. $s.A^{-1}$ ج. $s^{-1} - B$ د. $A^{-1}s$

١٠ ما ناتج $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ؟

- أ. $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

السؤال الثاني:

استخدم قاعدة كرامر في حل النظام الآتي من المعادلات:

$$3x + 2y - z = 7 \quad 2x + 4y = 61$$

السؤال الثالث: حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = 2x - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع: إذا كانت $3x = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، جد x^{-1} .

السؤال الخامس: ما قيم s التي تحقق المعادلة: $8 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ s-3 & 4 \end{vmatrix}$ ؟