

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفترة الثانية



mohe.ps | mohe.pna.ps | mohe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 هاتف | فاكس +970-2-2983280

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

٣	الدرس الأول: الأسس واللوغاريتمات
٩	الدرس الثاني: الاقتران الأسّي
١٣	الدرس الثالث: الاقتران اللوغاريتمي
١٨	الدرس الرابع: الارتباط الخطي
٢٠	الدرس الخامس: معامل ارتباط بيرسون
٢٣	الدرس السادس: معامل ارتباط سبيرمان
٢٦	الدرس السابع: الانحدار الخطي البسيط
٢٩	الدرس الثامن: مبدأ العدّ
٣١	الدرس التاسع: التباديل
٣٣	الدرس العاشر: التوافيق
٣٤	الدرس الحادي عشر: نظرية ذات الحدين
٣٦	ورقة عمل
٤٠	اختبار ذاتي

يتوقع من الطلبة بعد الإنهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات الأسية واللوغاريتمية والارتباط ونظرية ذات الحدين في الحياة العملية من خلال الآتي:

- التعرف إلى مفهوم اللوغاريتم وعلاقته بالأسس.
- استنتاج قوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات أسية أو لوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسية بيانياً.
- استنتاج خصائص الاقتران الأسّي.
- تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً.
- استنتاج خصائص الاقتران اللوغاريتمي.
- توظيف التحويلات الهندسية المختلفة في رسم الاقترانات اللوغاريتمية والأسية.
- استنتاج العلاقة بين الاقترانين الأسّي واللوغاريتمي.
- رسم شكل الانتشار الذي يمثل العلاقة بين متغيرين.
- إيجاد معامل ارتباط بيرسون.
- كتابة معادلة الانحدار.
- استخدام مبدأ العد في سياقات حياتية.
- حساب التباديل والتوافيق الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- استخدام نظرية ذات الحدين في إيجاد مفكوك مقدار جبري.

أكمل الجدول الآتي:

المقدار	2^2	2^{-3}	$8^{\frac{2}{3}}$	$4^{\frac{1}{2}}$	$5^0 \div 5^7$	$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$	$4^2 \times 4^{-1}$
قيمة المقدار	٨	$\frac{1}{9}$					



تعريف: إذا كان $v = a^b$ ، حيث v ، $a \neq 1$ ، $b \in \mathbb{R}$ ، نسمي b لوغاريتم العدد v للأس a ، ويُعبّر عنه رياضياً: $\log_a v = b$ (ص) = b (الصورة اللوغاريتمية)، ويُقرأ لوغاريتم v للأس a يساوي b . المثال الآتي يوضح العلاقة بين الصورة الأسية، والصورة اللوغاريتمية:



أكمل الجدول الآتي بما يناسبه:



الصورة الأسية	$8^2 = 64$	$3^{-4} = \frac{1}{81}$	$9 = 3^2$
الصورة اللوغاريتمية	_____	$\log_{10}(10000) = 4$	$\log_2 1 = 0$

أحول الآتي من الصورة الأُسَيَّة إلى الصورة اللُّوغاريتمِيَّة:



(أ) $3 = 13$ (ب) $2 = 12$ (ج) $1 = 3$
 (د) $1 = 5$ (هـ) $3 = 81$ (و) $2 = 32$
 (أ) لو (3) = 1 (ب) لو (2) = _____ (ج) لو (1) = صفر
 (د) لو (1) = _____ (هـ) لو (81) = 4 (و) لو (32) = _____

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: لو (1) = صفر، لو (1) = صفر، لو (1) = صفر، لو (1) = صفر



أجد قيمة اللُّوغاريتمات الآتية:

(1) لو (2) = 6.
 (2) لو (7) = _____.
 (3) لو (9) = _____.

أكمل الجدول الآتي ثم أجب عما يليه:



32	16	8		2	س
5	4	3	2	1	لو (س)
	2			$\frac{1}{2}$	لو (س)

(1) لو (2) = 4 = لو (8) = 3، لو (2) + لو (2) = 4 = 3 + 1 = 2 + 1 = 3
 (2) لو (2) = 4 = لو (8) = 3، لو (2) + لو (2) = 4 = 3 + 1 = 2 + 1 = 3
 (3) لو (2) = 4 = لو (8) = 3، لو (2) + لو (2) = 4 = 3 + 1 = 2 + 1 = 3
 (4) لو (2) = 4 = لو (8) = 3، لو (2) + لو (2) = 4 = 3 + 1 = 2 + 1 = 3

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان s ، v عددَيْن حقيقيَّين موجبيَّين، وكان m عدداً حقيقياً موجباً غير الواحد، فإنَّ: $\text{لوم } (s \times v) = \text{لوم } (s) + \text{لوم } (v)$.

أُكْمِلُ الجدول الآتي ثم أُجيب عما يليه:

س	٣	٢٧	٨١	
لوم (س)	١	٢	٥	



$$(1) \text{ لوم } \left(\frac{81}{27}\right) = \text{لوم } (3) = 1, \text{ لوم } (81) - \text{لوم } (27) = 3 - 1 = 2$$

$$(2) \text{ لوم } \left(\frac{243}{9}\right) = \text{لوم } (27) - \text{لوم } (9) = 5 - 2 = 3$$

ماذا تلاحظ؟

أتعلم: إذا كان s ، v عددَيْن حقيقيَّين موجبيَّين، وكان m عدداً حقيقياً موجباً غير الواحد، فإنَّ: $\text{لوم } \left(\frac{s}{v}\right) = \text{لوم } (s) - \text{لوم } (v)$

- إذا كان v عدداً حقيقياً موجباً، فإنَّ: $\text{لوم } (v) = m$ لوم (ص)، بحيث $m \in \mathbb{H}^*$.

أكتب كل ممّا يأتي بصورة لوغاريتم واحد:

$$(1) \text{ لوم } (8) - \text{لوم } (ص) = \text{لوم } \left(\frac{8}{ص}\right)$$

$$(2) \text{ لوم } (4) + \text{لوم } (س) - \text{لوم } (٢) = \text{لوم } (٤س) - \text{لوم } (٢) =$$



إذا كان $\text{لوم } (7) = 2,81$ ، أجد قيمة كل ممّا يأتي:

$$(1) \text{ لوم } (28) \quad (2) \text{ لوم } (7) \quad (3) \text{ لوم } (3,5)$$



$$(١) \text{ ل. (٢٨) } = \text{ ل. (٧} \times ٤) = \text{ ل. (٤) } + \text{ ل. (٧) } = ٢,٨١ + ٢ = ٤,٨١$$

$$(٢) \text{ ل. (٧) }^٢ = \text{ ل. (٧) } \times \text{ ل. (٧) } = ٣ \times \text{ ل. (٧) } = ٨,٤٣$$

$$(٣) \text{ ل. (٣,٥) }^٢ = \text{ ل. () }^٢ = \text{ ل. () } - \text{ ل. () } \times \text{ ل. () } =$$

مثال: أحل المعادلة: ل. (س + ٢) - ل. (س - ١) = ٢

$$\text{الحل: ل. (س + ٢) - ل. (س - ١) = ل. (س + ٢) - ل. (س - ١) = ٢}$$

$$٢ = \frac{س + ٢}{س - ١}$$

$$س + ٢ = ٤(س - ١)$$

$$س = ٤س - ٤ - ٢ = ٢$$

أحلّ المعادلة: ل. (س) + ل. (٣) = ٢

$$٢ = \text{ ل. () }$$

$$\text{ ل. () } = ١٠$$

$$\text{ ل. () } = ١٠٠$$

$$\frac{١٠٠}{٣} = س$$



تمارين ومسائل:

(١) أحسب قيمة كل من:

$$\text{أ) لو}_٣ (٦٤) \quad \text{ب) لو}_٣ (٨١)$$

(٢) أحوّل من الصّورة الأسّيّة إلى اللّوغاريتميّة:

$$\text{أ) } ١٦ = ٢^٤ \quad \text{ب) } ١٠ = ١٠^١$$

(٣) أحوّل من الصّورة اللّوغاريتميّة إلى الصّورة الأسّيّة:

$$\text{أ) لو}_٣ ١ = ٠ \quad \text{ب) لو}_٣ (٠,٠٠١) = -٣$$

(٤) إذا كان لو٣ (٧) = ٢,٨١ ، لو٣ (٥) = ٢,٣٢ ، أجد قيمة ما يأتي:

$$\text{أ) لو}_٣ (٣٥) \quad \text{ب) لو}_٣ \left(\frac{٧}{١٠}\right)$$

(٥) أجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

$$\text{أ) لو}_٣ ٣٢ + \sqrt{٢} \text{ لو}_٣ ٢ \quad \text{ب) لو}_٣ (٨١) - \text{لو}_٣ (٩) \quad \text{ج) لو}_٣ (٥) - ٢$$

(٦) أحلّ المعادلات الآتية:

$$\text{أ) لو}_٣ (٧س) = \text{لو}_٣ (١٢ + ٢س) \quad \text{ب) لو}_٣ (٥س - ٣) - \text{لو}_٣ (١ + س) = ٠$$

الاقتران الأسّي (Exponential Function)

(٢)

تعريف: يُسمّى الاقتران اقتراناً أسّيّاً إذا كان على الصورة: $ق(س) = ٢^س$ ، $١ \neq ٢$ ، $٠ < ٢$ ، $س \in ح$

لماذا $٠ < ٢$ ، $١ \neq ٢$ ؟

أناقش

أيّ من الاقترانات الآتية اقتران أسّي ؟
 ألاحظ أن: $ق(س) = ٢^س$ اقتران أسّي؛ لأنّ
 بينما $ق(س) = (٣-)^س$ ليس اقتراناً أسّيّاً؛ لأنّ الأساس $٣- > ٠$.
 وعليه فإنّ: $ل(س) = ٢^س$ هو اقتران؛ لأنّ المتغير ليس أسّاً.
 م $ق(س) = (\frac{1}{٢})^س$ هو اقتران؛ لأنّ



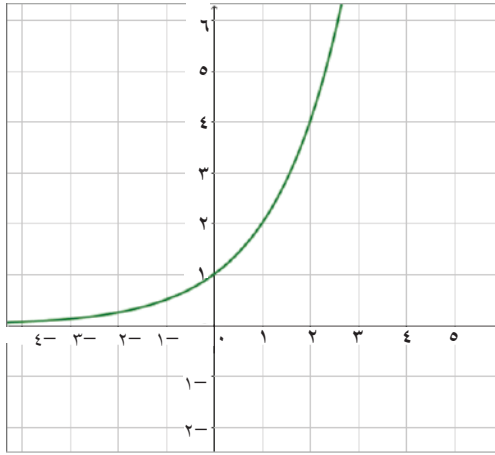
أمثّل الاقتران: $ق(س) = ٢^س$ ، $س \in ح$ في المستوى الديكارتي .
 أكمل الفراغات في الجدول الآتي:



س	٣	٢	١	٠	١-	٢-
ق(س)	٨			١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

• أعيّن النّقاط من الجدول السابق في المستوى الديكارتي،
 وألاحظ شكل منحنى الاقتران:

٨



من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران، أتعلّم أهم خصائص منحنى
(١) مدى الاقتران الأسّي هو مجموعة الأعداد الحقيقية
الموجبة (+).

(٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

(٣) كلما زادت قيم س تزداد قيم ص المناظرة لها.

أكمل الجدول الآتي لقيم س ، والاقتران ق(س) ، ثم أرسم منحنى الاقتران.

س	٣	٢	١	١-	٣-
ق(س) = $(\frac{1}{2})^s$	$\frac{1}{8}$		١	٢	٤



أعيّن النقاط على المستوى الديكارتي، وأرسم منحنى الاقتران.

• ألاحظ من الرسم أن: منحنى ق(س) = 2^s هو انعكاس لمنحنى الاقتران ه(س) = $(\frac{1}{2})^s$ في محور الصادات، أوضح ذلك جبرياً.

• من التمثيل البياني للاقتران في النشاط السابق، ألاحظ أهم خصائص الاقتران الأسّي:

ق(س) = 2^s ، $0 < 2 < 1$ وهي:

(١) مدى الاقتران الأسّي هو:

(٢) يقطع منحنى الاقتران محور الصادات في النقطة:

(٣) كلما زادت قيم س، فإن قيم ص المناظرة لها

- أَعَيْنُ النِّقَاطَ فِي الْجَدُولِ السَّابِقِ عَلَى الْمُسْتَوَى الدِّيكَارْتِي، وَأَرْسُمُ مَنَحْنِي الْاِقْتِرَانِ.

أَتَعْلَمُ: يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلاتِ الهندسيَّةِ التي تعلَّمْتُها على الاقترانِ الأسيِّ.

الاقتران الأسّي الطبيعي

الاقتران الأسّي الطبيعي: هو اقترانٌ أسّيّ يكون أساسه العدد e ، حيث e عددٌ غير نسبي له أهمية خاصة في الرياضيات ويسمى العدد النيبيري نسبة إلى (John Napier) ويساوي تقريباً ٢,٧١٨٢٨

أكمل الجدول الآتي لقيم s ، $q(s)$ للاقتران $q(s) = h^s$ ، باستخدام الآلة الحاسبة، ثم أرسم منحنى الاقتران:

				1.						
				1						
				6						
				ε						
				2						
ε-	3-	2-	1-	2-	.	1	2	3	ε	0
				ε-						
				ε-						

تمارين ومسائل:

(١) أيُّ من الاقترانات الآتية يُعدُّ اقتراناً أُسِّيًّا ؟ مع بيان السبب.

أ (ق(س) = s^5

ب) م(س) = s^{-4}

ج) هـ(س) = s^2

د (ص = $(2-s)^s$

هـ (ص = $(\frac{2}{3})^s$

(٢) أمثلُ منحنى الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ (ص = $s^3 - 2$

ب) ص = $5 - s^2$

ج) ص = s^{-4}

د (ص = $-(\frac{1}{4})^s$

مهمة تعليمية:

(١) استخدمُ منحنى ق(س) = h^s ، والتحويلات الهندسيّة المناسبة لرسم الاقترانات الآتية:

أ (ق(س) = h^{-s}

ب) ق(س) = $3 - h^s$

ج) ق(س) = $h^{(-s)}$

(٢) أجدُ قيمة كلِّ من: h ، ب لمنحنى ق(س) = $h^{(3-s)} + b$ ، الذي يمرُّ بالنقطتين: $(3, 1)$ ، $(2, 0)$.

أجد قيمة ما يأتي:

$$\log_4 64 = \dots\dots\dots$$

$$\log_{10} 100 = \dots\dots\dots$$

$$\log_8 1 = \dots\dots\dots \log_3 3 = \dots\dots\dots \log_{49} \frac{1}{7} = \dots\dots\dots$$



أتعلم: الاقتران على الصورة $q(s) = \log_s$ ، حيث $0 < s \neq 1$ ، $0 < s$ ، يُسمى اقتراناً لوغاريتمياً.

لماذا $0 < s \neq 1$ ؟



ملحوظة: من اللوغاريتمات الأكثر شيوعاً اللوغاريتم ذو الأساس ١٠ ، ويُسمى اللوغاريتم العادي، ويُكتب عادةً على الصورة $\log$ ، $0 < s \neq 1$ (لا يُكتب له الأساس ١٠).
وإذا كان الأساس العدد هـ يُسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب على الصورة: $\ln$ (س) = $\log_s$.

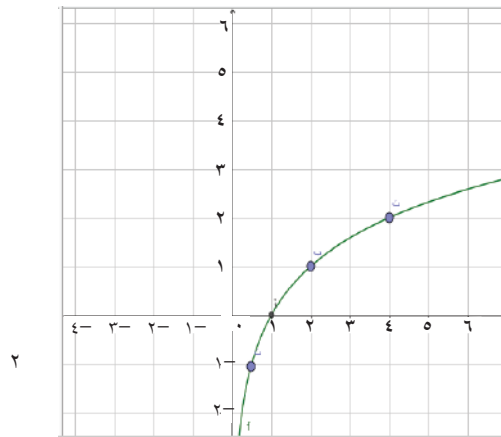


أكون جدولاً لقيم s ، $q(s)$ المناظرة لها، للاقتران $q(s) = \log_s$ ، ثم أرسم منحنى الاقتران.

س	٨	٤	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$q(s) = \log_s$	٣		١		٢-	٣-

أتذكر أن: لو $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ لأن $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = 2^{-1}$

عينُ النقاط في المستوى البياني، وأرسمُ منحنى الاقتران ، كما هو في الشكل (٣-٢):



- من منحنى الاقتران $ص = لوس$ ، ألاحظُ خصائصَ الاقتران $ص = لوس$ ، حيث $١ < ٢$:
- مجال الاقتران اللوغاريتمي هو: ومداه هو:
- نقطة (أو نقاط) تقاطع منحنى الاقتران مع محوريّ الإحداثيات هي:
- كلما زادت قيمُ س فإنَّ قيمَ ص المناظرة لها

أرسم منحنى $ص = ٢^س$ على المستوى المرسوم عليه منحنى الاقتران $ص = لوس$ ثم أقرأ بين منحنَيي الاقترانين .

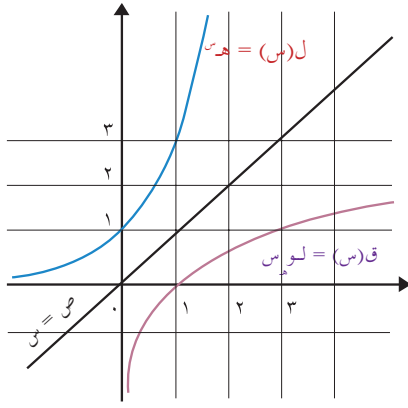


أتعلّم: بشكلٍ عام، يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلات الهندسيّة التي تعلمتها على الاقتران اللوغاريتمي.

مثال(١): بالاعتماد على منحنى الاقتران الأسّي الطبيعي ل(س) = $ه^س$ ، وخصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي، أرسمُ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = $لوس$



الحلّ: عرفت من النشاط السابق أن منحنى الاقتران ق(س) = $لوس$ ، هو انعكاسٌ لمنحنى $ص = ه^س$ في المستقيم $ص = س$.



نرسم منحنى ل(س) = هـ، ثم نرسم انعكاسه
في الخط المستقيم ص = س، فيكون لدينا
منحنى الاقتران، كما هو في الشكل المجاور.

أجد مجال كل من الاقترانات الآتية:

• ق(س) = لوس (س - 3)

• هـ(س) = لوس (س - 1)

• مجال الاقتران اللوغاريتمي هو ح⁺، فإن مجال ق(س) معرف عندما $3 - س < 0$
مجال ق(س) هو :

• أما مجال هـ(س) فهو معرف عندما $1 - س < 0$

وعليه فإن: مجال هـ(س) هو :

تمارين ومسائل:

(1) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران ق(س) = لوس، أمثل الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ (هـ(س) = لوس - 1

ب (ل(س) = لوس (س + 2)

ج (م(س) = -لوس (س + 1)

(2) أجد مجال كل من الاقترانات الآتية:

أ (ق(س) = لوس (س - 5)

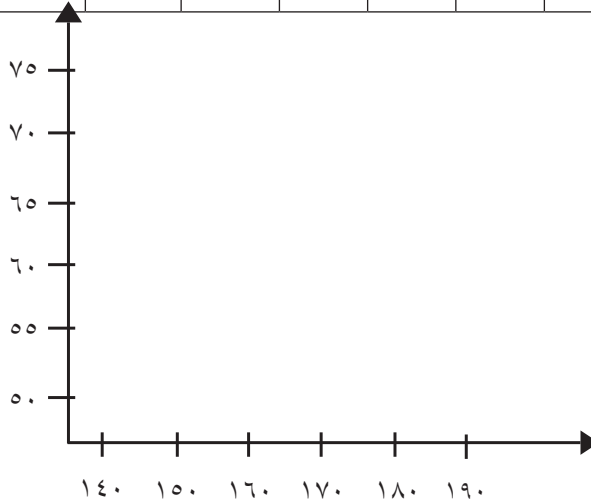
ب (ق(س) = لوس $\sqrt{3 - س}$

قام قيس بجمع بيانات حول أطوال مجموعة من طلبة الصف العاشر، وكتلتهم، فكانت كما في الجدول الآتي:



١٥٨	١٦٧	١٥٠	١٦٢	١٥٥	١٦٠	١٦٥	١٦٠	١٧٠	الطول بالسنتيمتر
٥٦	٦٨	٥٥	٦٠	٥٨	٦٠	٦٢	٦٥	٧٠	الكتلة بالكيلوغرام

أمثل شكل الانتشار لهذه البيانات:



- هل توجد علاقة بين طول الإنسان وكتلته ؟
- هل يمكن رسم مستقيم يمر بمعظم النقاط ؟

أتعلم: إذا أمكن رسم مستقيم يمر بمعظم النقاط في شكل الانتشار، فإن العلاقة بين المتغيرين خطية، وتسمى هذه العلاقة الارتباط الخطي.

- هل بالإمكان تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيرين؟

أستنتج: شكل الانتشار يفيد في تحديد ما إذا كانت هناك علاقة، ونوعها خطية، أو غير خطية بين متغيرين، ولكن لا يكفي للحكم على قوة الارتباط بين المتغيرين؛ لأن تقديره يختلف باختلاف الشخص الذي يقوم بالحكم على قوة الارتباط؛ ولذلك يجب استخدام طريقة أكثر دقة، يتم بواسطتها تحديد قيمة عددية لقوة الارتباط بين المتغيرين، وهي ما يسمى معامل الارتباط، وهذا ما سيتم تعلمه في الدرس القادم.

تمارين ومسائل:

١) يمثل الجدول الآتي علامات مجموعة من الطلبة في مبحثي الفيزياء (س)، والكيمياء (ص).
أرسم شكل الانتشار، وأبين نوع الارتباط.

س	٥	٩	٨	١٢	١٠	١١	٢	٤
ص	٧	١٠	٨	١٥	٩	١٣	٤	٦

٢) في الجدول الآتي أعمار مجموعة من الأشخاص (س)، وعدد الساعات اليومية التي يمارسون فيها التمارين الرياضية (ص):

س	٣٠	٢٥	٢٢	٢٠	٣٥	٤٠	٥٠	٥٥	٦٠
ص	٣	٢	١,٥	١	٤	٥	٣,٥	٢	١

- أرسم شكل الانتشار لهذه البيانات.
- هل يوجد ارتباط خطي بين عمر الشخص وعدد الساعات اليومية التي يقضيها في ممارسة التمارين الرياضية؟

معامل ارتباط بيرسون (Pearson Correlation Coefficient)

(٥)

تعريف: إذا كانت س ، ص مجموعتين من القيم المتناظرة فيعرف معامل ارتباط بيرسون r كما يأتي:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})(v_k - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (s_k - \bar{s})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (v_k - \bar{v})^2}}$$

حيث: $\bar{s}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم س ، $\bar{v}$ الوسط الحسابي لمجموعة قيم ص ، n عدد القيم.

خالد ورفاقه في الصف العاشر، يعيشون في حيّ الياسمين في نابلس، استلموا علاماتهم المدرسية، بعد اختبارات الشهرين، فأرادوا دراسة العلاقة بين علاماتهم في مبحثي اللغة العربية واللغة الانجليزية، من خلال حساب معامل ارتباط بيرسون.



٣٠	١٥	٢٠	٢٥	٢٠	اللغة العربية س
٣٠	٢٠	١٨	٢٢	٢٥	اللغة الانجليزية ص

أكمل الجدول الآتي

س	ص	س	ص	س	ص
			٢٥	٢٠	
	٤٨٤		٢٢	٢٥	
		٤٠٠	١٨	٢٠	
			٢٠	١٥	
٩٠٠			٣٠	٣٠	
	٢٧٣٣		١١٥	١١٠	المجموع

$$\sum_{k=1}^n \text{س} = \text{ص} \dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n \text{ص} = \text{س} \dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^n \text{س} = \text{ص} \dots\dots$$

• أحسب:

$$\overline{\text{س}} = \dots\dots \quad \overline{\text{ص}} = \dots\dots$$

• أحسب معامل ارتباط بيرسون:

$$23 \times 22 \times 5 - 2610$$

$$= \frac{23 \times 22 \times 5 - 2610}{\sqrt{(23 \times 5 - 2733)} \sqrt{(22 \times 5 - 2550)}} = r$$

$$r = \dots\dots$$

$$1 \geq r \geq -1 \text{ : أتعلم}$$

تمارين ومسائل:

(١) حسب تائر معدل درجات الحرارة في قريته، في الأسابيع الثمانية من شهري كانون أول وكانون ثاني، وعدد أسطوانات الغاز التي تستهلكها أسرته للتدفئة في كل أسبوع، فكانت على النحو الآتي:

٨	١٠	٢-	٠	١٢	٨	٥	١-	درجة الحرارة س
٢	١	٣	٢	١	٢	٢	٣	عدد أسطوانات الغاز ص

أحسب معامل ارتباط بيرسون.

(٢) قام طلبة الصف العاشر الأساسي في مدرسة المجدل الثانوية، بدراسة العلاقة بين عدد أفراد الأسرة لدى طلبة الصف، وكمية استهلاك الماء شهرياً، فجمعوا البيانات، وحصلوا على النتائج الآتية، علماً بأن عدد الأسر خمس. أحسب معامل ارتباط بيرسون.

$$\sum_{k=1}^n s = 20$$

$$\sum_{k=1}^n v = 110$$

$$\sum_{k=1}^n s \cdot v = 490$$

$$\sum_{k=1}^n s^2 = 90$$

$$\sum_{k=1}^n v^2 = 2700$$

مهمة تقويمية:

- أحسب معامل ارتباط بيرسون للبيانات في الجدول الآتي:

١٥	٦	١٦	٥	٨	١٠	س
١٢	٦	١٥	٥	٧	٩	ص

معامل ارتباط سبيرمان (Spearman Correlation Coefficient)

(٦)

قام معلّم الصفّ الثالث الأساسي في مدرسة فلسطين الأساسية بدراسة العلاقة بين تقديرات مبحثيّ اللغة العربيّة والرياضيات، لأربعة طلاب، ودون النتائج في الجدول الآتي:

اسم الطالب	سعيد	أيمن	ناجح	شادي
اللغة العربية س	جيد	ضعيف	ممتاز	مقبول
الرياضيات ص	مقبول	جيد	جيد جدا	ضعيف

نشاط

• أراد المعلم أن يحدّد العلاقة بين تحصيل الطلبة في مبحثيّ اللغة العربيّة والرياضيات، وإيجاد معامل ارتباط بينهما، فهل يستطيع إيجاد معامل ارتباط بيرسون لهذه البيانات؟ لماذا؟

• أُعبر عن البيانات الوصفية بقيم عددية، بإعطاء رتب للطلبة في المبحثين. أكمل الجدول الآتي:

اسم الطالب	سعيد	أيمن	ناجح	شادي
اللغة العربية س	...	الرابع	الأول	الثالث
الرياضيات ص	الثالث	...	...	...

تعريف: يُعرّف معامل ارتباط سبيرمان بين متغيرين، ويُرمز له بالرمز r_s حسب القانون:

$$r_s = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n d_k^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث :

ف : الفرق بين رتب المتغيّر س والمتغيّر ص.

ن : عدد قيم كلّ من المتغيّرين.

ملاحظة: إذا تساوت الرتبُ نأخذ الوسط الحسابي لرتب القيم المكررة.

$$r_s = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n r_{sk}^2}{n(n+1)} = \dots\dots\dots$$

أحسب معامل ارتباط سبيرمان للبيانات في الجدول الآتي:

س	٦٠	٨٠	٦٥	٧٠	٨٥	٦٥	٧٥	٥٥	٦٥	٩٠
ص	٧٠	٦٠	٧٠	٩٠	٧٠	٦٠	٨٠	٧٥	٦٥	٩٠



أكمل الجدول الآتي:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف ^٢
٦٠	٧٠	٩	٦	٣	
٨٠	٦٠				
٦٥	٧٠	٧			
٧٠	٩٠		١,٥		
٨٥	٧٠	٢		٤-	
٦٥	٦٠				
٧٥	٨٠		٣		
٥٥	٧٥				
٦٥	٦٥				
٩٠	٩٠	١			٠,٢٥

$$\dots\dots\dots = \sum_{k=1}^n r_{sk}^2$$

$$\dots\dots\dots = n$$

$$\dots\dots\dots = r$$

تمارين ومسائل:

(١) يُمثّل الجدول الآتي الدخل الشهريّ (س) لست أسرٍ فلسطينيّة، ومجموع نفقاتها الشهريّة (ص)، بالدينار الأردنيّ:

س	٦٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٤٠٠	٦٥٠	٥٥٠
ص	٥٥٠	٧٥٠	٧٠٠	٥٠٠	٥٠٠	٤٠٠

أحسب معامل ارتباط الرتب (سبيرمان).

(٢) إذا علمت أن مجموع مربعات فرق الرتب بين متغيريّ الطول والكتلة لدى عيّنة من تسعة أطفال، يساوي ٢١، أحسب معامل ارتباط سبيرمان.

مهمة تقويمية:

- يمثّل الجدول الآتي تقديرات مجموعة من طلبة الصف الثاني، في الفصلين الأول والثاني:

تقدير الفصل الأول	٢	ب	ج	٢	ب	د	ج
تقدير الفصل الثاني	ب	ب	ب	٢	٢	ج	د

أحسب معامل ارتباط سبيرمان.

الانحدار الخطي البسيط (Simple Linear Regression)

(٧)

تعريف:

تسمى المعادلة $\hat{y} = a + bx$ التي تربط بين قيم المتغيرين x ، y معادلة خط انحدار y على x

$$\text{حيث: } a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} n}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 n} \quad \text{و} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}$$

$\bar{x}$ الوسط الحسابي لقيم المتغير x

$\bar{y}$ الوسط الحسابي لقيم المتغير y

أحسب كلاً من: $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ للبيانات في الجدول الآتي:

س	٣	٦	٨	٢-	٥
ص	٧	١	٠	٦	٤-



$$\bar{x} = \dots\dots\dots , \bar{y} = \dots\dots\dots$$

أُكْمَلُ الْجَدْوَلَ الْآتِي:

س	ص	س ^٢	س ص
٣	٧		٢١
٦	١	٣٦	
٨	٠		
٢-	٦		
٥	٤-	٢٥	٢٠-

أَجِدْ مُعَادَلَةَ خَطِّ الْانْحِدَارِ: $\hat{ص} = م + ب$

أَحْسِبْ: قِيَمَةَ $م = \dots$ ، وقِيَمَةَ $ب = \dots$

مُعَادَلَةَ خَطِّ الْانْحِدَارِ: $\hat{ص} = \dots + \dots$

أَتَعَلَّمُ: يُمَكِّنُ اسْتِخْدَامَ مُعَادَلَةِ الْانْحِدَارِ فِي حِسَابِ قِيَمِ ص إِذَا عُلِمَتْ قِيَمُ س.

تمارين ومسائل:

- يُمثّل الجدول الآتي عدد ساعات الدراسة اليومية، ومعدّل الثانوية العامة، لدى مجموعة من الطلبة:

عدد ساعات الدراسة س	٢	٤	٦	٥	٣
معدل الثانوية العامة ص	٦٠	٧٠	٨٠	٧٠	٧٠

- أجدُ معادلةَ خطّ انحدارٍ ص على س.
- إذا درس طالب ٨ ساعات يومياً، فكم تتوقع المعدل الذي سيحصل عليه؟

مهمة تقويمية:

- اعتماداً على البيانات في الجدول الآتي، أجدُ معادلةَ خطّ انحدارٍ ص على س :

س	٣	٥	٧	٩	١١	٧
ص	٨	١٠	٧	١١	١٢	٦

مبدأ العدّ الأساسي:

إذا أمكننا إجراء عملية ما على خطوات عددها k ، بحيث تتم الأولى بطرق عددها n_1 ، وتتم الثانية بطرق عددها n_2 ، وهكذا حتى الخطوة الأخيرة التي تتم بطرق عددها n_k ، فإن عدد الطرق الكلية التي تتم بها هذه العملية هي: $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$.

يراد تكوين مجلس إدارة لشركة ما، مكوّن من رئيس، ونائب رئيس، وأمين للصندوق، بكم طريقة يمكن تكوين هذا المجلس، إذا كان عدد الأشخاص المرشحين ٥ ؟
لاختيار الرئيس، هناك ٥ طرق مختلفة.

لاختيار نائب الرئيس، هناك ٤ طرق مختلفة، لماذا ؟
لاختيار أمين الصندوق، هناك ٣ طرق مختلفة.

عدد الطرق المختلفة لتكوين المجلس = $5 \times 4 \times 3 = \dots$ طريقة مختلفة.



كم عدداً مكوّناً من منزلتين، يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام: $\{ 3, 5, 6, 8 \}$ ؟
(أ) إذا سُمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تتم العملية في مرحلتين: المرحلة الأولى اختيار منزلة الآحاد، وتتم بـ ٤ طرق، واختيار منزلة العشرات، وتتم أيضاً بـ ٤ طرق. إذن عدد الطرق الكلية = $4 \times 4 = 16$ طريقة.

(ب) إذا لم يُسمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

عدد طرق اختيار منزلة الآحاد... طرق، وعدد طرق اختيار منزلة العشرات... طرق.

عدد الطرق المختلفة = $4 \times 3 = 12$ طريقة، أي أن: عدد الأعداد المختلفة ١٢ عدداً.



مضروب العدد:

بكم طريقة مختلفة يمكن لخمس أشخاص أن يجلسوا في خمسة أماكن في خط مستقيم؟
حسب مبدأ العدّ: عدد الطرق المختلفة هي $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة مختلفة.

اصطُلِحَ على كتابة حاصل الضرب $٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ على الصورة $٥!$ ، وتُقرأ مضروب العدد ٥ .

تعريف: إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ مضروب العدد n ، ويُرمز له بالرمز $n!$

حيث: $n! = n(n-1)(n-2) \dots ٣ \times ٢ \times ١$ ، $٠! = ١$

أحسب قيمة كلِّ ممّا يأتي:

أ ($٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = \dots$)

ب ($\frac{٥!}{٣!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = \dots = ٢٠$)

ج ($\frac{٨!}{٥! \times ٣!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = \dots$)

أكتب $\frac{n!}{(n-2)!}$ في أبسط صورة.

$\dots = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \dots$

قيمة المقدار، عندما $n = ٥$ تساوي $\dots$

تمارين ومسائل:

(١) يقدم أحد المطاعم في مدينة نابلس ٣ أنواع من اللحوم، و ٤ أنواع من الحلوى، ونوعين من المشروبات. بكم طريقة يمكن لأحد مرتادي المطعم اختيار وجبة مكوّنة من نوع من اللحوم، ونوع من الحلوى، ومشروب؟

(٢) أُلقيت قطعة نقدٍ ٣ مرات، فما عدد النتائج الممكنة؟ أكتب النتائج في مجموعة.

(٣) كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل، يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام: $\{٢، ٤، ٦، ٨\}$ ؟

أ (إذا سُمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ب) إذا لم يُسمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تعريف:

التباديل: عدد الترتيب المختلفة لمجموعة من العناصر مأخوذة كلها أو جزء منها في كل مرة عدد تباديل n من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة، هو $n!$ ، ويُرمز له بالرمز $L(n, n)$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^+$

$$L(n, n) = n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

أجد قيمة: $L(6, 6)$.

$$L(6, 6) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$L(5, 5) = \dots \quad \text{ماذا نلاحظ؟}$$



أجد عدد الأعداد المكوّنة من منزلتين، التي يمكن تكوينها من مجموعة الأرقام: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ، إذا لم يُسمح بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ألاحظ أنّ المطلوب هو عدد الترتيبات الثنائية لمجموعة الأرقام هذه، بشرط عدم التكرار، ويساوي $\dots \times \dots = \dots$



وهذا ما يُسمّى التباديل الثنائية لمجموعة فيها n عناصر، وبشكل عام، فإنّ عدد التباديل الرائيّة لمجموعة مكوّنة من n من العناصر، ويُرمز له بالرمز $L(n, r)$ ،

$$\text{يساوي } \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{حيث } n, r \text{ عددان طبيعيان، } r \leq n$$

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي:

$$A) L(3, 5) = \frac{5!}{(3-5)!} = \dots$$

$$B) L(3, n) = \frac{n!}{(3-n)!} = \dots = \dots$$



أَتَعَلَّمُ: يمكنُ كتابةُ ل(ن، م) على الشكل: $ن(ن-١)(ن-٢)...(ن-٣)...(ن-١+١)$.

أَتَحَقَّقُ مِمَّا يَأْتِي:

أ) ل(ن، ١) = $\frac{ن!}{(١-ن)!} =$

ب) ل(ن، ٠) = $..... = ١$

ج) ل(ن، ن) = $..... = ن!$

بكم طريقة يمكنُ تشكيلُ لجنةٍ مكوَّنةٍ من رئيسٍ، ونائبٍ رئيسٍ، وأمينٍ سرٍّ من بين سبعة أشخاص؟
عدّد الطرق التي يمكنُ تشكيلُ اللجنة بها هي:

ل(٧، ٣) = $... \times ... \times ... = ٢١٠$ طرقٍ مختلفة.

تمارين ومسائل:

١) أحسبُ قيمةَ ما يأتي:

أ) ل(٦، ٤) ب) ل(٩، ٢) / ل(٩٠، ٠)

٢) أرادَ أحمدُ وإخوانه الثلاثة الذهابَ إلى المسجدِ الأقصى، واتفقوا على أن يدخلَ كلُّ منهم من بابٍ مختلفٍ من أبوابِ القدسِ السبعة. بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ للإخوة الأربعة الوصولُ إلى المسجد الأقصى؟

٣) أجدُ قيمةَ ن في كلِّ ممَّا يأتي:

أ) ل(ن، ٢) = ٥٦ ب) ل(ن-٣، ٢) = ٦

مهمة تقويمية:

أُعَبِّرُ عن كلِّ ممَّا يأتي بالصورة ل(ن، م):

أ) $٩ \times ٨ \times ٥ \times ٦ \times ٧$ ب) ٢٥٢٠ ج) $ن(ن-٢-٣+٢)$

التوافيق (Combinations)

(١٠)

تعريف: عدد المجموعات الجزئية التي عناصرها r مأخوذة من مجموعة عناصرها n
عدد التوافيق الرائية لمجموعة فيها n من العناصر، ويُرمز له بالرمز:

$$r \leq n, \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{(n, r)}{r!} \binom{n}{r} =$$

لدى معرض سيارات ٦ أنواع من السيارات، يريد صاحب المعرض اختيار ٤ منها، لعرضها للزبائن.
أجد عدد الطرق التي يمكن بها الاختيار.



بما أن إعادة الترتيب لا تعطي نتيجة جديدة، أي أن الترتيب غير مهم.

$$\text{إذن: عدد الطرق يساوي} \binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4!2!} = \dots\dots$$

$$\text{أتعلم:} \quad 1 = \frac{n!}{n!(n-0)!} = \binom{n}{0} \quad 1 = \binom{n}{n} \quad \text{ب}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{ج} \quad n = \binom{n}{1} \quad \text{د}$$

تمارين ومسائل:

$$(1) \text{ أحسب ما يأتي: أ) } \binom{9}{5} \quad \text{ب) } \binom{9}{4} \quad \text{ج) } \binom{70}{1}$$

$$(2) \text{ أجد قيم } n \text{ في كلٍّ من الحالات الآتية: أ) } 3 = \binom{n}{2} \quad \text{ب) } \binom{n}{4} = \binom{n}{9}$$

مهمة تقويمية:

(١) بكم طريقة يمكن تكوين فريق لكرة السلة، يتم اختياره من بين ثمانية لاعبين؟

(٢) صف مكون من ٩ طلاب، و٧ طالبات، يُراد تشكيل لجنة مكونة من ٣ طلاب، و٤ طالبات، بكم طريقة مختلفة يمكن تشكيل اللجنة؟

نظرية ذات الحدين (Binomial Theorem)

(١١)

نظرية ذات الحدين:

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^r b^{n-r} = (a+b)^n$$

$$\binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0 =$$

حيث n عدداً طبيعياً

أجد مفكوك: $(s+2)^5$

$$\sum_{r=0}^5 \binom{5}{r} s^r 2^{5-r} = (s+2)^5$$



$$= s^5 + 5s^4 \times 2 + 10s^3 \times 2^2 + 10s^2 \times 2^3 + 5s \times 2^4 + 2^5 =$$

أستنتج:

- عدد حدود مفكوك $(a+b)^n = \dots$
- مجموع أس a وأس b في أي حد من حدود المفكوك =

أتعلم:

- في مفكوك $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0$
- في الحد الأول: قيمة a تساوي ٠ ، وفي الحد الثاني: قيمة a تساوي ١ ، وهكذا ..
- أي: $\binom{n}{r} a^r b^{n-r} =$ صورة الحد العام.



في مفكوك $(س^2 + \frac{1}{2})^6$ ، أجدُ الحدَّ الثالث .

في الحد الثالث تكون قيمة $ر = 2$

$$ح = \binom{6}{2} (س^2)^4 (\frac{1}{2})^2 = 15 \times 16 \times س^8 \times \frac{1}{4} = \dots\dots\dots$$



أجدُ الحدَّ الأوسطَ في مفكوك: $(\frac{2}{3}ص + 3)^8$

بما أنَّ $ن = 8$ ، إذن: عدد الحدود يساوي $\dots\dots\dots$

رتبة الحد الأوسط هي: $\frac{8}{2} = 4$ ، $5 = 1 +$

$$ح = \binom{8}{4} (\frac{2}{3}ص)^4 (3)^4 = \dots\dots\dots = 70 \times 16 ص^4 = \dots\dots\dots$$

تمارين ومسائل

(١) أجدُ مفكوك كلِّ ممَّا يأتي:

أ ($س + 3$)^٦

ب ($\frac{س^2}{3} + \frac{3}{س}$)^٣ ج ($س - 2$)^٥

(٢) أجدُ الحدَّ السابعَ في مفكوك: $(س + \frac{1}{2})^{1٠}$

(٣) أجدُ الحدين الأوسطين في مفكوك: $(\frac{س^2}{3} + \frac{3}{س})^٧$

نموذج اختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

(١) أحد الاقترانات الآتية اقتران أسي:

أ) $(2)^x$ ب) x^2 ج) $(-3)^x$ د) $(-\frac{1}{3})^x$

(٢) منحنى الاقتران $q(s) = (2)^s$:

أ) متزايد ويمر بالنقطة $(0, 1)$ ب) متناقص ويمر بالنقطة $(0, 1)$

ج) متزايد ويمر بالنقطة $(0, -2)$ د) متناقص ويمر بالنقطة $(0, -2)$

(٣) إذا كان $n! = 24$ فإن $L(2, n, 3) =$

أ) 24 ب) 0.4 ج) 4 د) 336

(٤) الحد الأوسط في مفكوك $(2s - 1)^6$:

أ) $160s^2$ ب) $160s^3$ ج) $240s^4$ د) $240s^5$

السؤال الثاني: أوجد قيمة ما يأتي:

(١) $لو٢ + لو٥$

(٢) $[\sqrt[2]{-1} - 1]$

(٣) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4} - L(7, 1)$

السؤال الثالث: إذا كان مجموع مربعات فرق الرتب للمتغيرين (س، ص) لعينة حجمها ٦ يساوي ٢٤ احسب معامل ارتباط سبيرمان موضحاً نوع الارتباط ومدى الارتباط.

السؤال الرابع:

أ) بالاعتماد على رسم ق(س) = هـ ارسم منحنى م(س) = هـ - ٣ ، موضحاً التحويلات الهندسية .

ب) الجدول الآتي يمثل العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، بالاعتماد على الجدول أوجد .

- معامل ارتباط بيرسون

- معادلة خط انحدار ص على س

س	ص				
١-	٤				
٢-	٥				
١	٢				
٢	١				
٥	٢-				

ج) أوجد مفكوك: $(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢})$

السؤال الخامس: أ) لديك المجموعة: س { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٤ ، ٧ } ، كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ٣ منازل يمكن

تكوينه من المجموعة س إذا لم يسمح بتكرار الرقم؟

ب) إذا كان ق(س) = أس + ب، وكان منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٣) ، وكان $(\frac{أ}{ب}) = ١٥$

أوجد قيمة الثوابت أ ، ب .