



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

"التكنولوجي"

الفترة الثانية

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970 2 2983280 | فاكس +970 2 2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

التفاضل Differentiation

٤	متوسط التغير Rate of Change
٨	مفهوم المشتقة الأولى First Derivative
١٣	قواعد الاشتقاق (١) Differentiation Rules
١٨	قواعد الاشتقاق (٢) Differentiation Rules
٢٢	قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) Chain Rule
٢٦	القيم القصوى Extreme Values
٣٠	تطبيقات عملية على القيم القصوى Applications

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاشتقاق في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم متوسط التغير للاقتران وإيجاده.
٢. التعرف إلى مفهوم المشتقة الأولى للاقتران، وإيجادها باستخدام التعريف.
٣. التعرف على قواعد الاشتقاق، واستخدامها لإيجاد مشتقات بعض الاقترانات.
٤. إيجاد معادلة المماس، ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة تقع عليه.
٥. إيجاد المشتقة الأولى باستخدام قاعدة السلسلة.
٦. إيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران.

متوسط التغير (Rate of Change):

تعريف:

إذا كان $v = v(s)$ اقتراناً، وتغيرت فيه s من s_1 إلى s_2 فإن $\Delta s = s_2 - s_1$ تمثل التغير في s وتقرأ دلتا s .
وبناءً على التغير في s تتغير v ، حيث $\Delta v = v_2 - v_1 = v(s_2) - v(s_1)$ تمثل التغير في v .

مثال (١): إذا كان $v = v(s) = s^2 + 3$ جد Δs ، Δv ، عندما تتغير s من $s_1 = 1$ إلى $s_2 = 4$.
الحل: $\Delta s = s_2 - s_1 = 4 - 1 = 3$
 $\Delta v = v_2 - v_1 = v(s_2) - v(s_1) = v(4) - v(1) = 19 - 4 = 15$

يسمى المقدار $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{v(s_2) - v(s_1)}{s_2 - s_1}$ متوسط التغير للاقتران $v(s)$ عندما تتغير s من s_1 إلى s_2 .

❖ **مثال (٢):** إذا كان $v = u(s) = 2s^2 + 4$ ، $s \in \mathbb{R}$ ، وتغيرت s من $s_1 = 2$ إلى $s_2 = 5$ ، أجد متوسط التغير للاقتزان $u(s)$.

الحل: متوسط التغير =
$$\frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(5) - u(2)}{5 - 2} = \frac{12 - 54}{3} = 14$$

❖ **مثال (٣):** إذا كان $v = u(s) = 3s - 1$ ، $s \in \mathbb{R}$ ، وزادت s من $s_1 = 3$ بمقدار ٢ ، أجد متوسط التغير للاقتزان $u(s)$.

الحل: متوسط التغير =
$$\frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(5) - u(3)}{5 - 3} = \frac{14 - 8}{2} = 3$$

$\Delta s = s_2 - s_1 = 2$ ومنها $s_2 = 3 + 2 = 5$

متوسط التغير =
$$\frac{u(s_2) - u(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{u(5) - u(3)}{5 - 3} = \frac{14 - 8}{2} = 3$$

❖ **مثال (٤):** إذا كان متوسط تغير الاقتزان $v = u(s)$ عندما تتغير s من $s_1 = 2^-$ إلى $s_2 = 9$ يساوي ٦ ، أجد:

أ. التغير في v ب. $u(9)$ علماً بأن $u(2^-) = 6$

الحل: أ. التغير في $s = \Delta s$

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \\ 9 - 2^- &= \\ 11 &= \end{aligned}$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{ص}}{11} = 6^- \text{ ومنها } \Delta \text{ص} = 11 \times 6^- = 66^-$$

$$\text{ب. } \Delta \text{ص} = \text{ص}_2 - \text{ص}_1$$

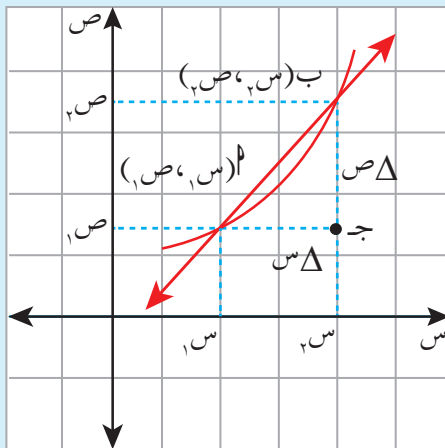
$$= (9) \text{ص} - (2^-) \text{ص}$$

$$66^- = (9) \text{ص} - 2^-$$

$$(9) \text{ص} = 66^- + 2^-$$

$$= 68^-$$

أذكر:



إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $\text{ص} = \text{ف}(س)$ ، والنقطتان $\text{أ} (س_1, \text{ص}_1)$ ، $\text{ب} (س_2, \text{ص}_2)$ واقعيتين عليه، فإن ميل

$$\text{المستقيم القاطع أ ب} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{س_2 - س_1}$$

$$\text{ومتوسط التغير للاقتران } \text{ص} = \text{ف}(س) \text{ يساوي } \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{س_2 - س_1}$$

أي أن متوسط التغير للاقتران يساوي ميل المستقيم القاطع أ ب.

مثال (٥): تقع النقطتان $\text{أ} (1^-, 3^-)$ ، $\text{ب} (9, 3)$ على منحنى الاقتران $\text{ص} = \text{ف}(س)$ ، أجد ميل المستقيم

القاطع أ ب.

$$\text{الحل: ميل المستقيم القاطع أ ب} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{س_2 - س_1}$$

$$= \frac{3^- - 3}{1^- - 9}$$

$$= 3$$



س١: إذا كان $v = u(s)$ و $s = 1$ جد Δs ، Δv عندما تتغير s :

أ. من $s_1 = 2$ إلى $s_2 = 3,8$

ب. من $s_1 = 4$ إلى $s_2 = 2$

س٢: أجد متوسط التغير للاقتزان $v = u(s)$ في الحالات الآتية:

أ. $u(s) = \sqrt{s-3}$ ، عندما تتغير s من $s_1 = 7$ إلى $s_2 = 4$

ب. $u(s) = s^2 - 1$ ، عندما $s_1 = 2$ ، $\Delta s = 4$

س٣: تقع النقطتان $A(2, 5)$ ، $B(3, 10)$ على منحنى الاقتزان $v = u(s)$ ، أجد ميل المستقيم

القاطع AB .

س٤: ليكن $v = u(s)$ اقتراناً، وكان متوسط تغير الاقتزان عندما تتغير s من $s_1 = 1$ إلى $s_2 = 4$

هو 13 ، أجد:

أ. التغير في v .

ب. $u(4)$ علماً بأن $u(1) = 6$

مفهوم المشتقة الأولى (First Derivative):

تعريف:



المشتقة الأولى للاقتان $v = v(s)$ عند النقطة $(s, v(s))$ هي:

$$\text{نهاية} \frac{v(s_1 + \Delta s) - v(s_1)}{\Delta s} \text{ ويرمز لها بالرمز } v'(s_1) \text{ أو } \frac{dv}{ds} \text{ أو } v'_s \text{ ،}$$

$$\text{وللتبسيط يمكن كتابة } \Delta s = h \text{ ، فتكون } v'(s) = \text{نهاية} \frac{v(s_1 + h) - v(s_1)}{h}$$

مثال (١): إذا كان $v(s) = 5$ ، أجد $v'(2)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

$$\text{الحل: } v'(2) = \text{نهاية} \frac{v(2) - v(2 + h)}{h}$$

$$= \text{نهاية} \frac{5 - 5}{h}$$

$$= \text{صفر.}$$

مثال (٢): إذا كان $v(s) = s^3$ ، أجد $v'(1)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

$$\text{الحل: } v'(1) = \text{نهاية} \frac{v(1) - v(1 + h)}{h}$$

$$= \text{نهاية} \frac{(1)^3 - (1 + h)^3}{h}$$

$$= \text{نهاية} \frac{1 - 1 - 3h - 3h^2 - h^3}{h}$$

$$= \text{نهاية} \frac{-3h - 3h^2 - h^3}{h}$$

$$= 3$$



إذا كان $٥ - ٢ = س$ ، أجد ٤ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

$$\frac{٤(٤) - (٤ + ٥)}{٥} = ٤ \quad \text{الحل:}$$

..... =

$$\frac{٣ + ٥ - ٨ - ٥}{٥} =$$

..... =

$$٢ =$$

مثال (٣): إذا كان $٣س + ١ = س$ ، أجد ٢ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة؟

$$\frac{٢(٢) - (٢ + ١)}{٥} = ٢ \quad \text{الحل:}$$

$$\frac{٣(٢ + ١) - ١ + ٣ \times ٢}{٥} =$$

$$\frac{٣(٤) - ١ + ٦}{٥} =$$

$$\frac{١٣ + ١٢ - ١}{٥} =$$

$$\frac{١٢ + ١٣}{٥} =$$

$$\frac{١٢ + ١٣}{٥} =$$

$$\frac{١٢ + ١٣}{٥} =$$

$$١٢ =$$

$$١٢ =$$

❖ **مثال (٤):** إذا كان $٨ = (٢)٧$ ، $٢ = (٢)٧$ ، أجد $\frac{(٢)٧ - (٢)٧}{٥٥}$ **هـ**

الحل: **هـ** $\frac{(٢)٧ - (٢)٧}{٥٥}$

$\frac{١}{٥} = \frac{(٢)٧ - (٢)٧}{٥}$ **هـ** (لماذا؟)

$\frac{١}{٥} = \frac{(٢)٧}{٥}$ (لماذا؟)

$٢ \times \frac{١}{٥} =$

$\frac{٢}{٥} =$

❖ **مثال (٥):** إذا كان متوسط تغير الاقتران $٧ = (٣)٧$ عندما تتغير في الفترة $[٣، ٣ + هـ]$ يساوي $\frac{٥٥ - ٢}{هـ}$ أجد $\frac{٥٥ - ٢}{هـ}$ **هـ**

الحل: متوسط التغير $= \frac{(٣)٧ - (٣ + هـ)٧}{هـ} = \frac{٥٥ - ٢}{هـ}$

$\frac{(٣)٧ - (٣ + هـ)٧}{هـ} = \frac{٥٥ - ٢}{هـ}$ **هـ**

$\frac{٥٥ - ٢}{هـ} =$ **هـ**

$\frac{٥٥ - ٢}{هـ} =$ **هـ**

ألاحظ أن $٧ = (٣)٧$ تساوي نهاية متوسط التغير للاقتران $٧(س)$ في الفترة $[٣، ٣ + هـ]$ عندما $هـ$ تؤول إلى الصفر.



إذا كان $u(s) = s^2 + 3$ ، أجد $u'(s)$ باستخدام تعريف المشتقة، ثم أجد $u'(2)$.

$$\text{الحل: } u'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(s+h) - u(s)}{h} = \frac{(s+h)^2 + 3 - (s^2 + 3)}{h} = \dots$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2sh + h^2 + 3 - s^2 - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2sh + h^2}{h} = \dots$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (s^2 + 2s + h) =$$

$$= s^2 + 2s$$

$$\text{ومنها } u'(2) = 2 \times 2 =$$

$$= 4$$



س١: باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، أجد $u'(s)$ عند النقطة المعطاة في كل حالة:

أ. $u(s) = s^2 - 7$ ، $s = 3$

ب. $u(s) = 3 - s$ ، $s = 2$

ج. $u(s) = s^2 + s$ ، $s = 0$

س٢: إذا كان $u'(3) = 8$ ، أجد:

أ. $\frac{u(3) - (u(3) + 3)}{h}$

ب. $\frac{u(3) - (u(3) + 3)}{h^2}$

ج. $\frac{u(3) - (u(3) + 3)}{h}$

س٣: إذا كان متوسط تغير الاقتران $v = u(s)$ في الفترة $[3, 3 + h]$ يساوي $\frac{2}{(h+1)}$ أجد $u'(3)$.

س٤: إذا كانت $\Delta v = \frac{7h^2 - h^3}{4}$ هي التغير في الاقتران $v = u(s)$ عندما تتغير s من $s_1 = 5$ إلى

$s_2 = 5 + h$ ، أجد $u'(5)$.

قواعد الاشتقاق (١): (Differentiation Rules)

نشاط (١):



حاول همّام إيجاد $u^{(2)}$ حيث $u(s) = s^2 + s^3 - s^2$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة، فبدأ بالحل بالطريقة التي تعلمها في الدرس السابق كما يأتي:

$$u^{(2)} = \frac{u(2) - u(1)}{2 - 1}$$

$$u^{(2)} = \frac{u(2) - u(1)}{2 - 1} = \frac{2^2 + 2^3 - 2^2 - (1^2 + 1^3 - 1^2)}{2 - 1} = \frac{6 - 0}{1} = 6$$

فوجد صعوبة في إيجاد هذه النهاية، كيف سيجد همّام $u^{(2)}$ ؟

قاعدة (١):



إذا كان $u(s) = f(s)$ حيث f عدد حقيقي، فإن $u'(s) = f'(s)$ صفر. $\forall s \in \mathbb{R}$.

مثال (١): إذا كان $u(s) = 3$ ، أجد $u'(s)$ ، $u'(0)$.

الحل: $u'(s) = 0$ صفر لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$

$$u'(0) = 0 \text{ صفر}$$



إذا كان $٧ (س) = س^٧$ فإن $٧ (س) = س^٧$ ، ٧ عدد حقيقي.

مثال (٢): أجد المشتقة الأولى $\frac{دس}{دس}$ في كل من الحالات الآتية:

- (أ) $ص = س^٤$
 (ب) $ص = س^٥$ ، $٥ \neq ٥$
 (ج) $ص = س^{\frac{١}{٣}}$ ، $٥ \neq ٥$
 (د) $ص = \sqrt[٣]{س}$ ، $٥ \leq ٥$

الحل: (أ) $ص = س^٤$

$$\frac{دس}{دس} = \frac{٤س^٣}{٤س^٣} = ١ ، \forall س \in \mathbb{R}$$

$$(ب) ص = س^٥ ، ٥ \neq ٥$$

$$\frac{دس}{دس} = \frac{٥س^٤}{٥س^٤} = ١$$

$$(ج) ص = س^{\frac{١}{٣}} ، ٥ \neq ٥$$

$$\frac{دس}{دس} = \frac{٣س^{-\frac{٢}{٣}}}{٣س^{-\frac{٢}{٣}}} = ١$$

$$(د) ص = \sqrt[٣]{س} ، ٥ \leq ٥$$

$$\frac{دس}{دس} = \frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{١}{٣س^{\frac{٢}{٣}}}$$



إذا كان الاقترانان $٧ (س)$ ، $٨ (س)$ قابليين للاشتقاق عند $س$ ، وكانت $٨ \neq ٧$ ، وكان $٨ (س) = ٧ (س)$ ، فإن $٨ (س) = ٧ (س)$.

مثال (٣): إذا كان $٢س = (س)٠$ ، جد $١٠(س)٠$ ، $١٠(س)٠$.

الحل: $٢س = (س)٠$

$$١٠(س)٠ = ١٠ \times ٢س = ٢٠س$$

$$١٠(س)٠ = ١٠ \times ٢ = ٢٠$$

$$١٠ = ١ \times ١٠ =$$

قاعدة (٤):



إذا كان الاقترانان $(س)٠$ ، $(س)٠$ قابليين للاشتقاق عند $س$ ، وكان $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، فإن

$$٢س = (س)٠ + (س)٠ = ٢س$$

مثال (٤): إذا كان $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ؟

الحل: $٢س = (س)٠ + (س)٠ = ٢س$

$$(٢) + (٢س) =$$

$$٢ + ٢س =$$

$$٢ = ٢ + ٠ \times ٢ = (٠)٠$$

قاعدة (٥):



إذا كان الاقترانان $(س)٠$ ، $(س)٠$ قابليين للاشتقاق عند $س$ ، وكان $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، فإن

$$٢س = (س)٠ - (س)٠ = ٢س$$

ويمكن تعميم القاعدتين السابقتين لتشمل أكثر من اقترانين.

مثال (٥): إذا كان $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ، $٢س = (س)٠$ ؟

الحل: $٢س = (س)٠ - (س)٠ = ٢س$

$$٢س = (س)٠ - (س)٠ = ٢س$$

$$٢س = (س)٠ - (س)٠ = ٢س$$

$$١ =$$

مثال (٦): إذا كان ك/ع (١) = ٣ ، ع/ع (١) = ٢ وكان ق/س = ك/س - ٢ ع/س ، جد ق/ع (١) ؟

الحل: ق/س = ك/س - ٢ ع/س

$$ق/ع (١) = ك/ع (١) - ٢ ع/ع (١)$$

$$٢ = ٣ - ٢ =$$

$$١ =$$

مثال (٧): إذا كان ق/س = $\frac{١}{س}$ ، س $\neq$ صفر ، أجد $\frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$ **هـ**

الحل: **هـ** $ق/س = \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

$$لكن ق/س = \frac{١}{س} = س^{-١}$$

$$ق/س = س^{-١}$$

$$\frac{١^{-١}}{س} =$$

$$\frac{١^{-١}}{س} = \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} \text{ ومنها **هـ** }$$



س١: أجد $\frac{٢(٢)٢ - (٢)٢(٢ + ٢)}{٢}$ علماً بأن $٢(س) = س^٣ - س$.

س٢: أجد $\frac{ص}{س}$ الاقترانات الآتية:

$$١) \frac{١}{٢١} = ص$$

$$ب) ص = ٥س + ٣س^٢$$

$$ج) ص = \frac{٤}{س} ، س < صفر$$

س٣: أجد $ص' \mid_{س=١}$ في كل حالة مما يأتي:

$$أ) ص = \frac{٣}{س} + ٥س ، س \neq ٠$$

$$ب) ص = ٧س^٢ + \sqrt[٢]{٢س}$$

س٤: إذا كان $ع(س) = ٣س^٤ + ب س^٢$ ، وكانت $ع(١) = ٢٢$ ، أجد قيمة الثابت ب.

قواعد الاشتقاق (٢): (Differentiation Rules)

سبق وأن قدمنا في البند السابق قواعد اشتقاق جمع اقترانات وطرحها، وكذلك مشتقة اقتران مضروب في عدد ثابت، وسنتناول في هذا البند مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.

قاعدة (١):



إذا كان u (س)، h (س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان l (س) = u (س) $\times$ h (س) فإن

$$l' (س) = u' (س) \times h (س) + u (س) \times h' (س) \text{ وبالكلمات}$$

$$l' (س) = \text{الاقتران الأول} \times \text{مشتقة الاقتران الثاني} + \text{الاقتران الثاني} \times \text{مشتقة الاقتران الأول}$$

❖ **مثال (١):** إذا كان $ص = (س^٢ + ٣س + ٢)(٥س + ١)$ أجد $\frac{ص}{س}$ عند $س = ٢$.

الحل: $ص = (س^٢ + ٣س + ٢)(٥س + ١)$

$$\frac{ص}{س} = \text{الاقتران الأول} \times \text{مشتقة الاقتران الثاني} + \text{الاقتران الثاني} \times \text{مشتقة الاقتران الأول}$$

$$\frac{ص}{س} = (س^٢ + ٣س + ٢) \times (٥س + ١)' + (٥س + ١) \times (س^٢ + ٣س + ٢)'$$

$$\frac{ص}{س} = (س^٢ + ٣س + ٢) \times (٥ + ١) + (٥س + ١) \times (٢س + ٣) = \left. \frac{ص}{س} \right|_{س=٢}$$

$$= ٦٠ + ٧٧ = ١٣٧$$

أفكر وأناقش: هل هناك طريقة أخرى للحل؟

❖ **مثال (٢):** إذا كان $ك = (٢)٥$ ، $ك' = (٢)٣$ ، $ع = (٢)٤$ ، $ع' = (٢)٦$ وكان $و = ك(س) \times ع(س)$ ، أجد $و' (٢)$.

الحل: $و' (س) = ك' (س) \times ع (س) + ك (س) \times ع' (س)$

$$و' (٢) = ك' (٢) \times ع (٢) + ك (٢) \times ع' (٢)$$

$$= ٣ \times ٤ + ٥ \times ٦$$

$$= ٣٠ + ١٢$$

$$= ٤٢$$



إذا كان الاقتران ل (س) = $\frac{و(س)}{هـ(س)}$ ، و (س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق هـ (س) $\neq 0$ فإن:

$$\frac{ل(س) \times هـ(س) - و(س) \times هـ'(س)}{هـ(س)^2} = ل'(س)$$

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} = \text{وبالكلمات ل'(س)}$$

❖ **مثال (٣):** إذا كان و (س) = $\frac{١ + س^٣}{٥ - س^٢}$ ، س $\neq \frac{٥}{٢}$ ، أجد و'(س).

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} = \text{الحل: و'(س)}$$

$$\frac{٢ \times (١ + س^٣) - ٣ \times (٥ - س^٢)}{(٥ - س^٢)^2} =$$

$$\frac{١٧^-}{(٥ - س^٢)^2} = \frac{(٢ + س^٦) - (١٥ - س^٦)}{(٥ - س^٢)^2} =$$

❖ **مثال (٤):** إذا كان ل (س) = $\frac{و(س)}{هـ(س)}$ ، هـ (س) $\neq 0$ ، وكان و'(٢) = ١^- ، و (٢) = ١ ، هـ(٢) = ٢

$$\text{ل'(٢)} = ٢^- \text{ جد هـ'(٢).}$$

$$\frac{ل(س) \times هـ(س) - و(س) \times هـ'(س)}{هـ(س)^2} = \text{الحل: ل'(س)}$$

$$\frac{ل(٢) \times هـ(٢) - و(٢) \times هـ'(٢)}{هـ(٢)^2} = \text{ل'(٢)}$$

$$\frac{٢^- \times ١ - ١^- \times ٢}{(٢)^2} = ٢^-$$

$$٨^- = ٢^- - هـ'(٢) ومنها هـ'(٢) = ٦$$

❖ مثال (٥): إذا كان $\frac{ه(س)}{س+١} = س - ١$ ، أجد $و(١)$ علماً بأن $ه(١) = ٢$ ، $و(١) = ٣$

$$\frac{ه(س) - (س+١) \times و(س)}{(س+١)^2} = و(س) \quad \text{الحل: } و(س)$$

$$\frac{ه(١) - (١+١) \times و(١)}{(١+١)^2} = و(١)$$

$$\frac{٢ - ٢ \times و(١)}{٤} =$$

$$\frac{٢ - ٣ \times و(١)}{٤} =$$

$$\frac{٤}{٤} =$$

$$١ =$$



س١: أجد $\frac{ص}{س}$ لكل من الاقتارات الآتية:

أ. $ص = (٥ + س٢) (٣ - س٢)$

ب. $ص = \frac{س}{س + ٣} \neq س٣$ ، عندما $س = ١$

س٢: أجد $و/ (٣)$ علماً بأن $و(س) = س٢ - س + ٥$.

س٣: إذا كان $و(س) = س٢ + ٣س$ ، وكان $ل(س) = و(س) + ٣ه(س)$ ، $ه(٢) = ٥$ ، $ه(٢) = ١$ ، أجد $ل(٢)$.

س٤: إذا كان $و(س) = \frac{س٣ + ٢}{١ + س٤}$ ، $س \neq \frac{١}{٤}$ ، جد $و(٢)؟$

س٥: إذا كان $و(س) = س٣ ل(س) + ه(س)$ ، وكان $ل(١) = ٥$ ، $ه(١) = ٧$ ، $ل(١) = ٣$ ، فما قيمة $و(١)؟$

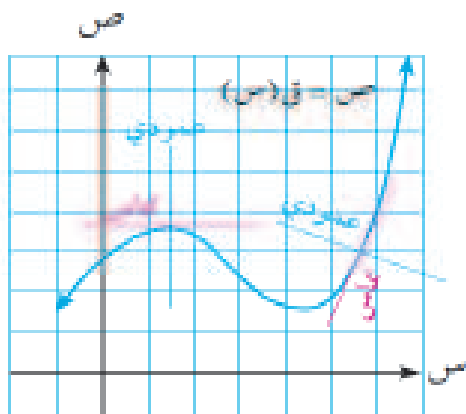
تطبيقات هندسية (المماس والعمودي): Tangent Line

تعريف:

- ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $v = v(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) الواقعة عليه يساوي $v'(s_1)$ ، ومعادلة المماس هي: $v - v_1 = v'(s_1)(s - s_1)$ ، حيث $m = v'(s_1)$ ، $v_1 = v(s_1)$.
- ميل العمودي على منحنى الاقتران $v = v(s)$ عند النقطة (s_1, v_1) الواقعة عليه يساوي $-\frac{1}{m}$ ، $m \neq 0$. ومعادلة العمودي على المنحنى هي: $v - v_1 = -\frac{1}{m}(s - s_1)$ ، حيث $m = v'(s_1)$ ، $v_1 = v(s_1)$.

ملاحظة:

عندما يكون المماس أفقياً فإن ميله يساوي صفراً، ويكون موازياً لمحور السينات.



المشتقة الأولى للاقتران $v = v(s)$ عند $s = s_1$ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة التي إحداثياتها السيني s_1 ، وبمعرفة نقطة التماس (s_1, v_1) يمكننا إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران، ومعادلة العمودي عليه.

مثال (١): أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $و(س) = س^٣ - س^٢ + ١$ عندما $س = ٣$.

الحل: ميل المماس عند $(س = ٣)$ هو $و(٣)$

$$و(س) = س^٣ - س^٢ + ١$$

$$و(٣) = ٣^٣ - ٣^٢ + ١ = ٢١$$

$$٢١ =$$

ميل المماس = ٢١

مثال (٢): أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $و(س) = \frac{س^٢}{١ + س}$ عند النقطة $(١, \frac{١}{٢})$ الواقعة عليه.

الحل: معادلة المماس هي:

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$نقطة التماس هي $(س_١, ص_١) = (١, \frac{١}{٢})$$$

$$ميل المماس عند $(س_١, ص_١) = م = و(١)$$$

$$لكن و(س) = \frac{(س^٢ \times (١ + س)) - (س^٣ \times ١)}{(١ + س)^٢}$$

$$و(١) = \frac{١ \times ٢ \times ٢ - ١ \times ٣ \times (١ + ١)}{(١ + ١)^٢}$$

$$\frac{٢ - ٣ \times ٢}{٢(٢)} =$$

$$\frac{٢ - ٦}{٤} =$$

$$١ = \frac{٤}{٤} =$$

أي أن معادلة المماس هي:

$$ص - \frac{١}{٢} = ١(س - ١)$$

$$ص - ١ = \frac{١}{٢} - ١$$

$$ص - ١ = \frac{١}{٢} - ١$$

❖ **مثال (٣):** أجد النقطة على المنحنى $ص = ق(س) = س^2 - ٤س + ٥$ ، والتي يكون عندها المماس أفقياً.

الحل: نقطة التماس هي $(س_١ ، ص_١) = (س_١ ، ق(س_١))$

بما أن المماس أفقي فإن ميل المماس = صفر

$$ق'(س_١) = صفر$$

$$ق'(س) = ٢س - ٤$$

$$ق'(س_١) = ٢س_١ - ٤ = صفر$$

$$٢ = ٢س_١$$

نقطة التماس هي $(٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ١)$ (لماذا؟)

❖ **مثال (٤):** أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = (س^2 + ١)(س + ١)$ عند النقطة $(١ ، ٤)$ الواقعة عليه.

الحل: معادلة العمودي على المماس لمنحنى عند النقطة $(١ ، ٤)$ هي:

$$ص - ص_١ = \frac{١ - ق'(س_١)}{م} (س - س_١) \text{ حيث } (س_١ ، ص_١) = (١ ، ٤) ، ق'(س_١) = م$$

$$ق'(س) = (س^2 + ١) + ٢س = ٢س^2 + ٢س + ١$$

$$٢س^2 + ٢س + ١ = ٢س^2 + ٢س + ١$$

$$١ + ٢س + ٢س^2 = ١ + ٢س + ٢س^2$$

$$١ + ١ \times ٢ + ٢(١) \times ٣ = ق'(١) = م$$

$$٦ = م$$

$$\frac{١ - م}{٦} = \frac{١ - ق'(س_١)}{٦} = \frac{١ - ٦}{٦} = -\frac{٥}{٦}$$

$$\text{معادلة العمودي هي } ص - ٤ = -\frac{٥}{٦} (س - ١)$$

$$٦ص + ٥س - ٢٥ = ٠ \text{ (لماذا؟)}$$



س١: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتان و(س) = $\frac{s^2 + 2}{s + 3}$ ، عندما $s = 2$.

س٢: أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتان و(س) = $s^3 + 2s^2 - s + 1$ عند النقطة (١،٠) الواقعة عليه.

س٣: أجد النقطة الواقعة على منحنى الاقتان و(س) = $s^3 - 3s + 5$ التي يكون المماس عندها أفقياً.

س٤: أجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتان و(س) عند النقطة (٠، ٧) الواقعة عليه، ويعامد المستقيم الذي ميله = $-\frac{1}{3}$.

س٥: إذا كان و(س) = $s^3 + 5s - 2$ ، وكان ميل المماس لمنحنى و(س) عندما (س = ١) يساوي ١١ ، أجد قيمة الثابت ٢.

قاعدة السلسلة (مشتقة الاقتران المركب) :Chain Rule

قاعدة السلسلة:



إذا كان $h(u)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند s ، وكان $u = u(s)$ قابلاً للاشتقاق عند $h(u)$ فإن الاقتران المركب $(h \circ u)(s)$ يكون قابلاً للاشتقاق عند s ، ويكون $(h \circ u)'(s) = h'(u(s)) \times u'(s)$.

❖ **مثال (١):** إذا كان $u(s) = s^2 - 1$ ، $h(u) = \ln(u)$ ، $h(u) = \ln(s^2 - 1)$ أجد $h'(u)$ ، $u'(s)$ ، $(h \circ u)'(s)$.

الحل: $(h \circ u)'(s) = h'(u(s)) \times u'(s) = \ln'(u(s)) \times u'(s)$

$$u'(s) = 2s \quad , \quad h'(u) = \frac{1}{u}$$

$$h'(u) = \frac{1}{u} \quad , \quad u'(s) = 2s$$

$$(h \circ u)'(s) = \frac{1}{u(s)} \times u'(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \times 2s$$

$$2s \times \frac{1}{s^2 - 1} =$$

$$\frac{2s}{s^2 - 1}$$

$$(h \circ u)'(s) = \frac{1}{u(s)} \times u'(s) = \frac{1}{s^2 - 1} \times 2s = \frac{2s}{s^2 - 1}$$

$$16 = 8 \times 2 =$$

❖ **مثال (٢):** إذا كان $u(s) = s^2 + s + 5$ ، $h(u) = \ln(u)$ ، $h(u) = \ln(s^2 + s + 5)$ أجد $h'(u)$ ، $u'(s)$ ، ثم أجد $(h \circ u)'(s)$.

الحل: $(h \circ u)'(s) = h'(u(s)) \times u'(s) = \ln'(u(s)) \times u'(s)$

$$u'(s) = 2s + 1 \quad , \quad h'(u) = \frac{1}{u}$$

$$(h \circ u)'(s) = \frac{1}{u(s)} \times u'(s) = \frac{1}{s^2 + s + 5} \times (2s + 1)$$

$$(h \circ u)'(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 5}$$

$$6 = 10 + 12 + 6 = 28$$

$$(h \circ u)'(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + s + 5}$$



نتيجة (١):

إذا كان $ص = ع(ع)$ ، $ع = هـ(س)$ ، اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن $ص = ع(هـ(س))$ وبالتالي

$$\frac{ص}{س} = \frac{ع}{ع} \times \frac{ع}{هـ(س)}$$

$$\frac{ص}{س} \times \frac{ع}{ع} =$$

$$\frac{ص}{س} \times \frac{ع}{ع} = \frac{ص}{س} \quad \text{أي أن}$$

❖ **مثال (٣):** إذا كانت $ص = ع^2 + ع$ ، $ع = ٣ - ٢س$ ، أجد $\frac{ص}{س}$.

الحل: $\frac{ص}{س} = \frac{ع}{ع} \times \frac{ص}{ع}$ ، $٢س + ١ = \frac{ص}{ع}$ ، $٢ = \frac{ع}{س}$

$$٢ \times (١ + ٢س) =$$

$$٢ \times (١ + (٣ - ٢س)٢) =$$

$$٢ \times (٧ - ٤س) =$$

$$١٤ - ٨س =$$

❖ **مثال (٤):** إذا كانت $ص = م^2 + ٢م$ ، $م = س^2 + س + ١$ ، أجد $\frac{ص}{س}$ عندما $س = ٠$.

الحل: $\frac{ص}{س} = \frac{م}{م} \times \frac{ص}{م}$

(لماذا؟) $(٢ + ٢م)(١ + س٢) =$

(لماذا؟) عندما $س = ٠$ تكون $م = ١$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٢}{٠} = ٤ \quad \left| \quad \frac{ص}{س} = \frac{٢}{٠} \right.$$

❖ **مثال (٥):** إذا كان $و(س)$ ، $ه(س)$ اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن: $ه(١) = ٤$ ، $و(١) = ١$ ،

$$و(٦) = ٢، ه(١) = ٦، أجد و(٥) ه(١).$$

$$\text{الحل: } و(٥) ه(١) = و(١) ه(٥) \times و(١) ه(١)$$

$$٤ \times و(٦) =$$

$$٨ = ٤ \times ٢ =$$

نتيجة (٢):



إذا كانت $ص = و(س)$ ، $و(س)$ عدد نسبي وكان $و(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{ص}{و(س)} = و(س) و(س) = و(س) و(س)$$

❖ **مثال (٦):** إذا كانت $ص = و(س)$ ، $و(س)$ عدد نسبي وكان $و(س)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{ص}{و(س)} = و(س) و(س) = و(س) و(س)$$

$$١٢ = و(٢ + ٤) و(٢)$$



س١: إذا كان $ق(س) = س^2$ ، $ه(س) = س + ١$ أجد $ق(ه(س))$.

س٢: إذا كانت $ص = (٢س - ١)^2$ ، أجد $\frac{ص}{س}$.

س٣: إذا كان $ص = ع^2 - ٥ع + ١$ ، $ع = ٢س + ٣$ ، أجد $\frac{ص}{س}$.

س٤: إذا كان $م(س) = (س^2 - س)^4$ ، أجد $م(٢)$.

س٥: إذا كان $ق(س) = ه(٣س^2 + ١)$ ، أجد $ق(١)$ ، علماً بأن $ه(١) = ٥$ ، $ه(٤) = ٢$.

س٦: إذا كان $ق(س)$ ، $ه(س)$ اقترانين قابليين للاشتقاق على ح بحيث أن: $ه'(٢) = ٣$ ، $ق'(٢) = ٥$ ،

$ق'(٤) = ٢ - ٢$ ، $ه'(٢) = ٤$ ، $ق'(٢) = ٣$ ، $ه'(٣) = ١$ ، أجد $ق(ه(٢))$ ، $ق(ه(٢))$.

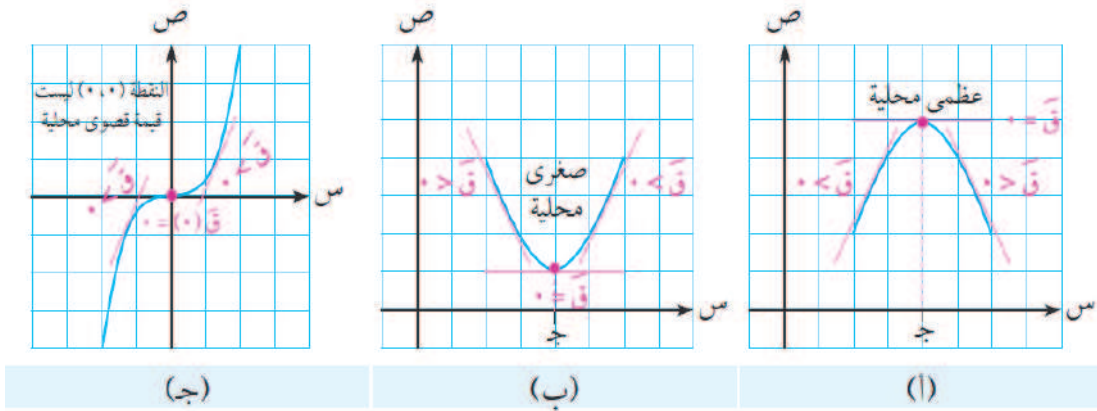
القيم القصوى (Extreme Values):

تعريف: *

- إذا كان $v = v(s)$ اقتراناً وكانت $s = ج$ في مجال الاقتران، فإنه يقال أن $v(ج)$:
 أ. قيمة عظمى محلية للاقتران، إذا كانت $v(ج) \leq v(s)$ لجميع قيم s المجاورة لـ $ج$.
 ب. قيمة صغرى محلية للاقتران، إذا كانت $v(ج) \geq v(s)$ لجميع قيم s المجاورة لـ $ج$.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية:

إن التمثيل البياني لأي اقتران على مجاله يساعد في تحديد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران، ولكن: كيف تساعدنا المشتقة الأولى لهذا الاقتران في تعيين القيم القصوى المحلية له؟
 تأمل الأشكال الآتية، وألاحظ العلاقة بين إشارة $v'(s)$ والقيم القصوى للاقتران.



في الشكل (أ): $v(ج)$ قيمة عظمى محلية للاقتران $v(s)$ ، $v'(ج) = 0$ ، إشارة $v'(s)$ تغيرت من موجبة لقيم $s < ج$ إلى سالبة لقيم $s > ج$.

في الشكل (ب): $v(ج)$ قيمة صغرى محلية للاقتران $v(s)$ ، $v'(ج) = 0$ ، إشارة $v'(s)$ تغيرت من سالبة لقيم $s < ج$ إلى موجبة لقيم $s > ج$.

في الشكل (ج): $v(ج)$ = صفر، إشارة $v'(s)$ موجبة لقيم $s < ج$ وموجبة لقيم $s > ج$. $v(ج)$ ليست قيمة قصوى محلية للاقتران $v(s)$.

ماذا تستنتج؟

* سنقتصر في دراستنا للقيم القصوى على الاقترانات كثيرة الحدود المعرفة على ح



نتيجة:

إذا كان $u(s)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، وكانت $u'(j) = 0$ صفراً، حيث $j \in \text{مجال } u(s)$ ، فإن:

أ. إذا تغيرت إشارة $u'(s)$ من موجبة لقيم $s > j$ إلى سالبة لقيم $s < j$ فإن $u(j)$ قيمة عظمى محلية للاقتزان $u(s)$.

ب. إذا تغيرت إشارة $u'(s)$ من سالبة لقيم $s > j$ إلى موجبة لقيم $s < j$ فإن $u(j)$ قيمة صغرى محلية للاقتزان $u(s)$.

يسمى هذا باختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى.

مثال (١): أعين جميع القيم القصوى للاقتزان $u(s) = \frac{1}{3} s^3 - 3s^2 + 8s + 2$.

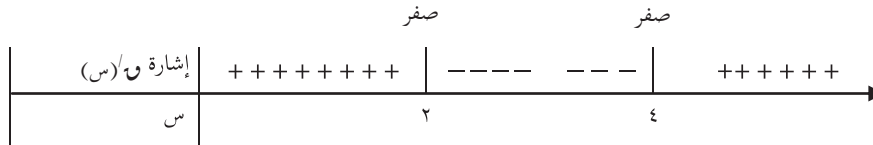
الحل: $u'(s) = 3s^2 - 6s + 8 = 0$

$0 = u'(s)$

$0 = 3s^2 - 6s + 8$

$0 = (s - 2)(s - 4)$

$s = 2, 4$



إشارة $u'(s)$ تغيرت من موجبة حيث $s > 2$ إلى سالبة حيث $s < 2 \leftarrow u(2)$ قيمة عظمى محلية للاقتزان $u(s)$.

إشارة $u'(s)$ تغيرت من سالبة حيث $s > 4$ إلى موجبة حيث $s < 4 \leftarrow u(4)$ قيمة صغرى محلية للاقتزان $u(s)$.

$$\frac{26}{3} = u(2) = \text{القيمة العظمى المحلية}$$

$$\frac{22}{3} = u(4) = \text{القيمة الصغرى المحلية}$$

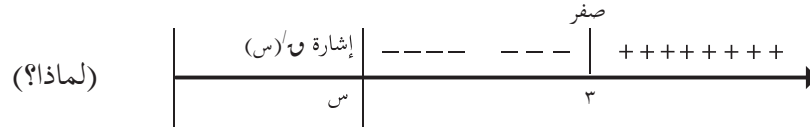
مثال (٢): أعيّن القيم القصوى للاقتران $s^2 - 6s + 9$.

الحل: $s^2 - 6s + 9 = 0$

$$0 = (s - 3)^2$$

$$0 = s^2 - 6s + 9$$

$$s = 3$$



إشارة $s^2 - 6s + 9 < 0$ تغيرت من سالبة حيث $s > 3$ إلى موجبة حيث $s < 3 \leftarrow$ $s^2 - 6s + 9 = 0$ قيمة صغرى محلية للاقتران $s^2 - 6s + 9$.
القيمة الصغرى المحلية $= (s^2 - 6s + 9) = 0 = 9 + 18 - 9 = 0$

نشاط (١):

إذا كان $s^3 - 12s^2 + 5s - 3 = 0$ ، أجد قيم s التي عندها قيم قصوى للاقتران $s^3 - 12s^2 + 5s - 3$.

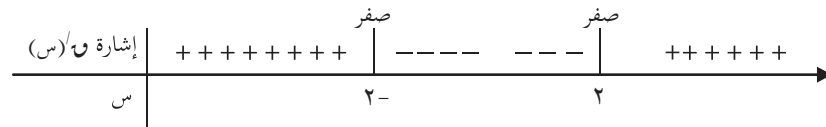
الحل: $s^3 - 12s^2 + 5s - 3 = 0$

نجعل $s^3 - 12s^2 + 5s - 3 = 0$

$$0 = s^3 - 12s^2 + 5s - 3$$

$$0 = s^3 - 12s^2 + 5s - 3$$

$$s = \dots$$



ألاحظ أن إشارة $s^3 - 12s^2 + 5s - 3 < 0$ تغيرت من موجبة حيث $s > 2$ إلى سالبة حيث $s < 2 \leftarrow$ عند $s = 2$ يوجد قيمة عظمى محلية للاقتران $s^3 - 12s^2 + 5s - 3$.

إشارة $s^3 - 12s^2 + 5s - 3 < 0$ تغيرت من سالبة حيث $s > 2$ إلى موجبة حيث $s < 2$ حول $s = 2 \leftarrow$ عند $s = 2$ يوجد قيمة صغرى محلية للاقتران $s^3 - 12s^2 + 5s - 3$.

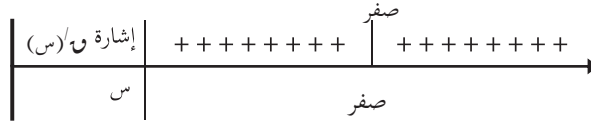
مثال (٣): أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت للاقتزان $u(s) = s^2$ ، $s \in H$.

الحل: $u(s) = s^2$

$$u'(s) = 2s$$

$$0 = 2s$$

$$s = 0$$



لم تتغير إشارة $u'(s)$ حول $(s = 0)$ ومنها لا توجد قيمة قصوى محلية للاقتزان $u(s)$.



س١: أعيّن القيمة/القيم القصوى المحلية إن وجدت لكل من الاقتارات الآتية:

أ. $و(س) = ٤س - ٢س^٢$ ، $س \in ح$

ب. $و(س) = س(س^٢ - ١٢)$ ، $س \in ح$

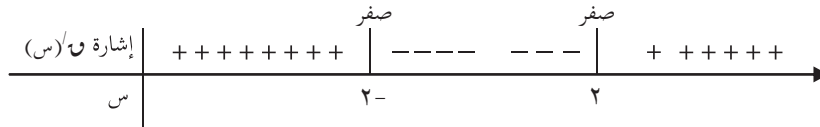
ج. $و(س) = س^٣ - ٣س + ٢$ ، $س \in ح$

د. $و(س) = -س^٢ + ١٠س + ٥$ ، $س \in ح$

س٢: إذا كان للاقتار $و(س) = -س^٢ + ب س - ٣$ ، $س \in ح$ قيمة عظمى محلية عند $س = ٢^-$ فما قيمة ب؟

س٣: إذا كان $و(س) = س^٢ - ٥$ ، $س \in ح$ ، أيّين أنه لا توجد للاقتار $و(س)$ أية قيم قصوى.

س٤: الشكل الآتي يبين إشارة $و(س)$ ، جد قيم $س$ التي عندها قيم قصوى للاقتار $و(س)$ وأيّن نوعها، علماً بأن $و(س)$ كثير حدود، معرف على $ح$.



(١) ما ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران $W(s)$ في النقطتين أ (١، ٣) ، ب (٣، ٩)؟

(٢) إذا كان متوسط التغير للاقتران $W(s) = s^2 + 3$ عندما تتغير s من ٢ إلى ٦ يساوي ٦ فما قيمة الثابت k ؟

(٣) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى $W(s) = s^2 + 5s - 3$ عند النقطة التي إحداثياتها السيني = ١.

(٤) أجد القيم القصوى للاقتران $W(s) = s^2 + 3s + 7$.

س١: أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

(١) إذا كان متوسط تغير الاقتران W (س) في الفترة $[-٤, ٢]$ يساوي ٣ ، و $W(-٤) = ٢$ ما قيمة $W(٢)$ ؟

- (أ) ٢٠ (ب) ٢٦ (ج) ١٦ (د) ١٨

(٢) إذا كان W (س) $\sqrt{s}$ ما قيمة $W(٤)$ ؟

- (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) ٢

(٣) ما ميل المماس لمنحنى الاقتران W (س) $= \frac{٥}{١ - s^2}$ عند $s = ٢$ ؟

- (أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $-\frac{20}{9}$ (ج) ١٥ (د) $\frac{5}{3}$

(٤) إذا كانت $V = (١ - s)^\circ$ ما قيمة $\frac{dV}{ds}$ عندما $s = ١^-$ ؟

- (أ) ٥ (ب) ٢٥ (ج) صفر (د) ٨٠

(٥) إذا كان W (س) $= s^2$ ، h (س) $= s - ٢$ ما قيمة $(h \circ W)(١)$ ؟

- (أ) ٢- (ب) ٢ (ج) صفر (د) ٤

(٦) إذا كانت $V = (١ - s^2)$ ما قيمة $\frac{dV}{ds}$ عندما $s = ٣$ ؟

- (أ) ٢٠- (ب) ٢٠ (ج) ١٠- (د) ١٠

س٢: إذا كان متوسط تغير الاقتران W (س) عندما تتغير s من s_1 إلى s_2 هو ١٠ ، أجد $W(٥)$ علماً بأن $W(٢) = ٦$ ؟

س٣: إذا كان W (س) $= s^2 + ١$ ، أجد $W'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

س٤: إذا كان W (س) $= (s^2 + ٢)(٣ + s)$ أجد $W'(٤)$ $\frac{d}{ds} \left(\frac{(٢ + s) - (٢ + h)}{h} \right)$

س٥: إذا كان M (س) $= s^2 \times W$ (س) $= s^2 \times (٣ + s)$ علماً بأن $W(٣) = ٢^-$ ، $W(٣) = ٥$.

س٦: أجد قيمة الثابت k التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران $V = s^2 + ٣s + ١$ مساوياً ٤ عندما $s = ١$.