12

كتاب

السائد

في الرياضيات



للصف الثاني عشر

للفرعين

الأدبي
الشرعي

حسب المنهاج الفلسطيني

الفصل الأول

2021-2020

إعداد

أ. سائد زياد الحلاق

جوال: 0599632532

إشراف

مشرفي الرياضيات بمديرية غرب غزة

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

فهرس محتويات الكتاب

الوحدة الأولى (التفاضل و التكامل)	ملخص التفاضل	٣
	متوسط التغير	٦
	المشتقة الأولى	١٩
	قواعد الاشتقاق	٢٥
	القيم القصوى للاقتران	٣٩
	اختبار التفاضل	٥٨
	ملخص التكامل	٥٩
	التكامل غير المحدود	٦١
	التكامل المحدود	٧٤
	اختبار التكامل	٩٧
	حلول تمارين عامة من الكتاب المدرسي	٩٨
	حلول ورقة العمل من كتاب الفترة الأولى	١٠٠
	حلول الاختبار الذاتي من كتاب الفترة الأولى	١٠٢
	اثراء الوحدة الأولى	١٠٤
	تفوق الوحدة الأولى	١١٠
	اختبار الوحدة الأولى	١١٣
الوحدة الثانية (المصفوفات)	ملخص الوحدة الثانية (المصفوفات)	١١٥
	المصفوفة	١١٩
	العمليات على المصفوفات	١٢٨
	ضرب المصفوفات	١٤٢
	النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية	١٥٢
	حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر	١٨١
	حلول تمارين عامة من الكتاب المدرسي	١٩٠
	حلول الاختبار الذاتي من كتاب الفترة الثانية	١٩٣
	اثراء الوحدة الثانية	١٩٥
	تفوق الوحدة الثانية	٢٠٢
	اختبار الوحدة الثانية	٢٠٤
ملحق	اختبار تجريبي لنهاية الفصل الأول	٢٠٦
	اختبار سابق موحد لنهاية الفصل الأول	٢١٠
	أساسيات عامة في الرياضيات	٢١٣

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

كلمة شكر

الحمد لله رب العالمين ، الحمد لله الذي خلقني أعمل بمهنة الأنبياء والمرسلين .....

لولا قناديل النور ما اهتدينا في الظلام ...

ولولا اكتظاظ القاع ما صعدنا للقمم ...

ولولا التحفيز والتشجيع ممن هم قامات إشراف الرياضيات ما خرج إبداع المعلم للنور ...

أتقدم بشكري الجزيل لمشرفي الرياضيات بمديرية التربية والتعليم غرب غزة

أ.باسم المدهون د.رحمة عودة

أ.إبراهيم صالحة أ. هدى الزريعي

على جهودهم في الإشراف والتوجيه على دعمهم لإصدار كتاب السائد للثانوية العامة لمبحث الرياضيات للفرعين الأدبي والشرعي.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

كما أتوجه بجزيل الشكر الخاص لزميلتي المعلمة جيهان محمود النمر على جهودها لمساعدتي بالتدقيق والمراجعة النهائية للكتاب .

والله من وراء القصد ....

المؤلف : أ.سائد زياد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

الوحدة الأولى

أولاً

التفاضل





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ملخص التفاضل

متوسط التغير:

ليكن الاقتران ص = هـ(س) اقتراناً وتغيرت س من س١ إلى س٢ فإن :

التغير في قيمة س = س٢ − س١ ، ويرمز لهُ بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .

التغير في قيمة ص = ص٢ − ص١ = هـ(س٢) − هـ(س١) ، ويرمز لهُ بالرمز Δص ويقرأ دلتا ص.

ليكن الاقتران هـ(س) اقتراناً وتغيرت س من س١ إلى س٢ فإن :

متوسط التغير للاقتران $هـ(س) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ \neq س_٢$

ميل القاطع = متوسط التغير = $م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

قواعد الاشتقاق :

إعداد المعلم: سائد الحلاق

يرمز للمشتقة الأولى بأكثر من رمز $\left(ص' ، هـ' ، \frac{د ص}{د س} \right)$

١ إذا كان ص = هـ(س) = أ ، حيث أ عدد حقيقي ، فإن $هـ' = \frac{د ص}{د س} =$ صفر (مشتقة الاقتران الثابت صفراً)

٢ إذا كان ص = أس + ب، حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، فإن $\frac{د ص}{د س} = أ$

٣ إذا كان هـ(س) = س^{ن} ، فإن $هـ' = ن س^{ن-١}$ ، حيث :ن عدد حقيقي ،ن ≠ ٠ ، س ≠ ٠

٤ إذا كان هـ(س) = م س^{ن} ، فإن $هـ' = م \times ن س^{ن-١}$ ، حيث :ن عدد حقيقي ،ن ≠ ٠ ،م ≠ ٠ ، س ≠ ٠





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٥ إذا كان قـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان أ عدداً حقيقياً ، أ ≠ ٠ ، فإن الاقتران هـ(س) = أ قـ(س) هو اقتران قابل للاشتقاق ، وتكون هـ′(س) = أ قـ′(س).

٦ قاعدة مشتقة جمع أو طرح اقترانين إذا كان قـ(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان ك(س) = قـ(س) ± هـ(س)، فإن: الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق ، ويكون ك′(س) = قـ′(س) ± هـ′(س)

٧ قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين: إذا كان قـ(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند ، س = أ فإن :

$$(قـ \times هـ)'(أ) = قـ(أ) \times هـ'(أ) + هـ(أ) \times قـ'(أ)$$

- أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

٨ قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين:

إذا كان قـ(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان هـ(س) ≠ ٠ عند ، س = أ فإن :

$$(قـ \div هـ)'(أ) = \frac{(هـ(أ) \times قـ'(أ)) - (قـ(أ) \times هـ'(أ))}{(هـ(أ))^{٢}}$$

إعداد الحلاق سائد ا الحلاق

أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = $\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$

إذا كان قـ(س) = $\frac{أ}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠ ، أ ∈ ع

فإن : قـ′(س) = $\frac{-أ هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

القيم القصوى المحلية للاقتران

نتبع الخطوات التالية لتحديد القيم القصوى للاقتران ثم بحث فترات التزايد والتناقص/

أولا : القيم القصوى للاقتران:



١ إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعطى لنحصل على ق ′(س) .

٢ نجد قيمة أو قيم س التي عندها المشتقة الأولى تساوي صفر .

٣ نرسم خط الأعداد ونعين النقطة أو النقاط على خط الأعداد ونقسم المجال إلى فترات.

٤ نبحث إشارة ق ′(س) في كل فترة ، ثم نعين الإشارة ونحدد نوع القيم القصوى (عظمى ، صغرى).

٥ نعوض بالاقتران الأصلي بقيمة أو قيم س ونجد القيم القصوى قيم ص (عظمى ، صغرى).

ثانياً : فترات التزايد والتناقص/

نتبع الخطوات السابقة حتى الخطوة الثالثة:

إعداد المعلم : سائد الحلاق

نبحث إشارة ق ′(س) حول قيمة أو قيم س السابقة في كل فترة ، ثم نُعين الإشارة ، ويصنف كما يلي:

يكون الاقتران ق(س) متزايد على مجالهُ إذا كانت إشارة ق ′(س) موجبة ، ق ′(س) > ٠ ← (++++)

ويكون الاقتران ق(س) متناقص على مجالهُ إذا كانت إشارة ق ′(س) سالبة ، ق ′(س) < ٠ ← (−−−−)

أما إذا كان ق ′(س) = ٠ ، فإن الاقتران ق(س) يكون اقتران ثابت على مجالهُ.





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ١ متوســـــــــــــــــط التغير

التفاضل والتكامل : فرع من فروع الرياضيات يدرس النهايات والاشتقاق والتكامل والمتسلسلات اللانهائية، وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الاقتراعات وتحليلها ، ويدخل علم التفاضل والتكامل في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث كثيراً ما يحتاج إليه لدراسة سلوك الاقتران والتغير فيها وحل المشاكل التي يعجز علم الجبر عن حلها بسهولة ، وعادة ما يدرس علم التفاضل والتكامل بعد دراسة أساسيات الجبر والهندسة وحساب المثلثات.

ملخص الدرس

تعريف

ليكن الاقتران ص = ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$فإن :

التغير في قيمة س = $س_٢ - س_١$ ، ويرمز لهُ بالرمز Δس ويقرأ دلتا س .

التغير في قيمة ص = $ص_٢ - ص_١ = ق(س_٢) - ق(س_١)$ ، ويرمز لهُ بالرمز Δص ويقرأ دلتا ص.

تعريف

ليكن الاقتران ق(س) اقتراناً وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$فإن :

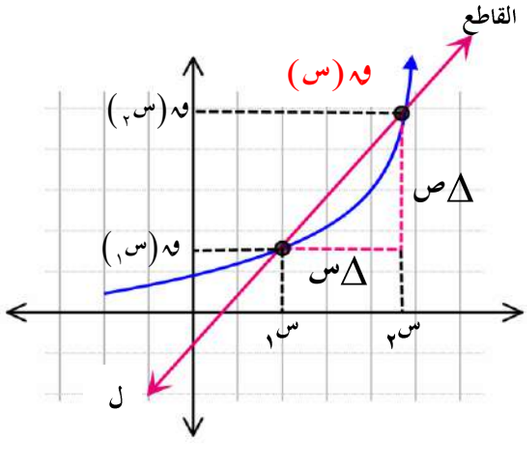
متوسط التغير للاقتران $ق(س) = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ ، $س_١ \neq س_٢$

- متوسط التغير للاقتران هو ناتج قسمة التغير في ق(س) على التغير في س.

المفهوم الهندسي لمتوسط التغير

إذا قطع مستقيم منحنى الاقتران ، فإن ميل المستقيم القاطع ل يساوي:

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) عندما تتغير س من س$_١$ = ٢ إلى س$_٢$ = ٥ يساوي ٤ ، فما مقدار التغير في ص؟

الحـــل

متوسط التغير للاقتران $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ص}{س_٢ - س_١}$

$٤ = \frac{\Delta ص}{٥-٢} \leftarrow \frac{\Delta ص}{٣} = ٤ \leftarrow \Delta ص = ٤ \times ٣ = \boxed{١٢}$

مثال ٢

احسب متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = ٣س – ١، عندما تتغير س من س$_١$ = ١ إلى س$_٢$ = ٤.

الحـــل

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤-١}$

$= \frac{(٣ \times ٤ - ١) - (٣ \times ١ - ١)}{٤-١} = \frac{١١-٢}{٣} = \frac{٩}{٣} = \boxed{٣}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٣

ما متوسط التغير في الاقتران هـ(س)، بحيث هـ(–١) = –٣ ، هـ(٢) = ٦ عندما تتغير س من –١ إلى ٢ ؟

الحـــل

متوسط التغير $= هـ(س) = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{(-١) - (٢)} = \frac{(-٣) - (٦)}{١+٢} = \frac{٩}{٣} = \boxed{٣}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤

احسب متوسط التغير في الاقتران هـ(س)، عندما تتغير س من $س_١ = ٣$ إلى $س_٢ = ٦$ ، إذا علمت : هـ(٦) – هـ(٣) = ١٢

الحـــل

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٦) - هـ(٣)}{٦ - ٣} = \frac{١٢}{٣} = \boxed{٤}$

مثال ٥

إذا كان الاقتران $ص = هـ(س) = ٢س + ١$، وتغيرت س من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٣$ ، فأجب عن الأسئلة التالية:

١ ما التغير في س ؟

$\Delta س = س_٢ - س_١ = ٣ - ٢ = \boxed{١}$

٢ ما التغير في قيمة الاقتران هـ(س) ؟

$\Delta ص = هـ(س_٢) - هـ(س_١) = هـ(٣) - هـ(٢) = (٢ \times ٣ + ١) - (٢ \times ٢ + ١) = ٧ - ٥ = \boxed{٢}$

٣ احسب متوسط التغير في الاقتران هـ(س)

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{٢}{١} = \boxed{٢}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٦

إذا كان الاقتران $هـ(س) = \sqrt[٣]{س} + \sqrt{٧}$ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) في الفترة $[١ ، ٨]$

الحـــل

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{هـ(٨) - هـ(١)}{٨ - ١}$

$= \frac{\left(\sqrt[٣]{٨} + \sqrt{٧}\right) - \left(\sqrt[٣]{١} + \sqrt{٧}\right)}{٨ - ١} = \frac{٢ + \cancel{\sqrt{٧}} - ١ - \cancel{\sqrt{٧}}}{٧} = \frac{٢ - ٣}{٧} = \boxed{\frac{١}{٧}}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٧

احسب متوسط التغير للاقتران $\text{و}(س) = \sqrt{٣س}$ ، عندما تتغير $س_٢ = ١٢$ ، $\Delta س = ٩$.

الحـــل

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{و}(س_٢) - \text{و}(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$س_١ = ١٢ - ٩ = ٣$

$= \frac{\text{و}(١٢) - \text{و}(٣)}{١٢ - ٣}$

$= \frac{(\sqrt{١٢ \times ٣}) - (\sqrt{٣ \times ٣})}{١٢ - ٣} = \frac{\sqrt{٣٦} - \sqrt{٩}}{٩} = \frac{٦ - ٣}{٩} = \frac{٣}{٩} = \boxed{\frac{١}{٣}}$

مثال ٨

إذا كان متوسط التغير في الاقتران $\text{و}(س) = ٤$، عندما تتغير س في الفترة $[-٢ ، ١]$ ، وكان $\text{و}(-٢) = -٩$ ، فجد $\text{و}(١)$.

الحـــل

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{و}(س_٢) - \text{و}(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$٤ = \frac{\text{و}(١) - \text{و}(-٢)}{(١) - (-٢)}$

$٤ = \frac{\text{و}(١) - -٩}{٣}$

$١٢ = \text{و}(١) + (٩)$

$\text{و}(١) = ١٢ - ٩ = \boxed{٣}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٩

إذا كان $ص = \text{و}(س)$ اقتراناً ، حيث : $٤\text{و}(٤) = ٨ + ٤\text{و}(٢)$ ، جد متوسط تغير الاقتران $\text{و}(س)$ في الفترة $[٢ ، ٤]$

الحـــل

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{و}(س_٢) - \text{و}(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{و}(٤) - \text{و}(٢)}{(٤) - (٢)}$

$= \frac{٢ + \text{و}(٢) - \text{و}(٢)}{٢} = \frac{٢}{٢} = \boxed{١}$

$٤\text{و}(٤) = ٨ + ٤\text{و}(٢)$

$\boxed{\text{و}(٤) = ٢ + \text{و}(٢)}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٠

إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س + ٣ ، س ∈ ح ، وتغيرت س من س١ = ٢ إلى س٢ = هـ + ٢ .

أثبت أن متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٢.

الحل

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{ق(هـ + ٢) - ق(٢)}{هـ + ٢ - ٢}$$

$$= \frac{(٢(هـ + ٢) + ٣) - (٢ \times ٢) + ٣)}{هـ}$$

$$= \frac{٤ + ٢هـ + ٣ - ٧}{هـ} = \frac{٢هـ + ٧ - ٧}{هـ} = \frac{٢هـ}{هـ} = \boxed{٢}$$

مثال ١١

إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١ ، ٣] = ٤ ، وكان : هـ(س) = ق(س) – س ،

جد متوسط تغير للاقتران هـ(س) لنفس الفترة.

الحل

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$٤ = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$$

$$٤ = \frac{ق(٣) - ق(١)}{٢}$$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن : $\boxed{ق(٣) - ق(١) = ٨}$

متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٢}$$

$$= \frac{(ق(٣) - ٣) - (ق(١) - ١)}{٢}$$

$$= \frac{ق(٣) - ق(١) + ٣ - ١}{٢} = \frac{\boxed{ق(٣) - ق(١)} - ٢}{٢} = \frac{\boxed{٨} - ٢}{٢} = \frac{٦}{٢} = \boxed{٣}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٢

إذا كان متوسط تغير الاقتران ه(س) عندما تتغير س في الفترة [١، ٥] هو ٦، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٥ ه(س) – ١ في نفس الفترة.

الحل

متوسط التغير للاقتران ه(س) = $\frac{\text{ه}(\text{س}_٢) - \text{ه}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$٦ = \frac{\text{ه}(٥) - \text{ه}(١)}{٥ - ١}$

$٦ = \frac{\text{ه}(٥) - \text{ه}(١)}{٤}$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن : $\boxed{\text{ه}(٥) - \text{ه}(١) = ٢٤}$

متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{\text{هـ}(\text{س}_٢) - \text{هـ}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$= \frac{\text{هـ}(٥) - \text{هـ}(١)}{٥ - ١}$

$= \frac{(٥\,\text{ه}(٥) - ١) - (٥\,\text{ه}(١) - ١)}{٤}$

$= \frac{٥\,\text{ه}(٥) - ١ - ٥\,\text{ه}(١) + ١}{٤} = \frac{٥\,\text{ه}(٥) - ٥\,\text{ه}(١)}{٤} = \frac{٥(\boxed{\text{ه}(٥) - \text{ه}(١)})}{٤}$

$= \frac{٥ \times \boxed{٢٤}}{٤} = \frac{١٢٠}{٤} = \boxed{٣٠}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١٣

إذا كان متوسط تغير الاقتران ه(س) = ٥ – أس للفترة [٢ ، ٥] يساوي – ٤ ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ه}(\text{س}_٢) - \text{ه}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ ، $-٤ = \frac{\text{ه}(٥) - \text{ه}(٢)}{٥ - ٢}$

$-٤ = \frac{(٥ - ١٥) - (١٢ - ٥)}{٣}$ (بالضرب التبادلي)

$-١٢ = -١٥ + ٥ + ١٢$

$-١٢ = -١٣ \leftarrow \frac{-١٢}{-٣} = \frac{-١٣}{-٣} \leftarrow \text{أ} = \boxed{٤}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٤

إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين(٣ ، ٥) ، (٦ ، -١٠) ، فما ميل القاطع ل ؟

الحـــل

ميل القاطع ل $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-١٠ - ٥}{٦ - ٣} = \frac{-١٥}{٣} = \boxed{-٥}$

مثال ١٥ وزاري : صفحة ٩

يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين(-٣، ٥) ، (-٤ ، ٢جـ) ،فإذا كان ميلهُ يساوي ٧ ،فما قيمة الثابت جـ ؟

الحـــل

ميل القاطع ل $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$٧ = \frac{٢جـ - ٥}{-٤ - -٣}$

$٧ = \frac{٢جـ - ٥}{-١}$ (بالضرب التبادلي)

$٢جـ - ٥ = -٧ \leftarrow \frac{٢}{٢}جـ = \frac{-٢}{٢} \leftarrow جـ = \boxed{-١}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١٦

يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين(-٢ ، ب) ، (٤ ، -٥) فإذا كان ميلهُ يساوي $\frac{٢}{٣}$ ،ما قيمة الثابت ب؟

الحـــل

ميل القاطع ل $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$\frac{٢}{٣} = \frac{-٥ - ب}{٢ - -٤} \leftarrow \frac{-٥ - ب}{٦} = \frac{٢}{٣}$ (بالضرب التبادلي)

$١٢ = ٣(-٥ - ب) \leftarrow ١٢ = -١٥ - ٣ب$

$١٢ + ١٥ = -٣ب \leftarrow ٢٧ = -٣ب \leftarrow \frac{٢٧}{-٣} = \frac{-٣ب}{-٣} \leftarrow \boxed{ب = -٩}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

متوسط التغير (١-١)

حلول الكتاب الوزاري صفـــ٩ـــحة

١ **أ** متوسط التغير للاقتران $و(س) = \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{و(٣) - و(٠)}{٣ - ٠}$

$= \frac{(٣ \times ٢ - ٦) - (٠ \times ٢ - ٦)}{٣} = \frac{٠ - ٦-}{٣} = \frac{٦-}{٣} =$ **-٢**

ب متوسط التغير للاقتران $هـ(س) = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٥ - ٢}$

$= \frac{(٢ + ٢^{٢}) - (٢ + ٥^{٢})}{٣} = \frac{٦ - ٢٧}{٣} = \frac{٢١}{٣} =$ **٧**

جـ متوسط التغير للاقتران $ل(س) = \frac{ل(س_٢) - ل(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ل(٦) - ل(١-)}{٦ - -١}$

$= \frac{(٢ + ٦\sqrt[٣]{}) - (٢ + ١-\sqrt[٣]{})}{٧} = \frac{٢ - ١-}{٧} =$ **$\frac{١}{٧}$**

٢ متوسط التغير = ميل القاطع $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$٣ = \frac{(٤) - (٢-)}{(ج) - (١)} \leftarrow ٣ ج - ٣ = ٦ \leftarrow \frac{٣}{٣} ج = \frac{٩}{٣} \leftarrow ج =$ **٣**

٣ متوسط التغير للاقتران $و(س) = \frac{و(س_٢) - و(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$٥ = \frac{و(٤) - و(٢)}{٢}$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن : **$و(٤) - و(٢) = ١٠$**

متوسط التغير للاقتران $هـ(س) = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٤ - ٢}$

$= \frac{(٢ - (٤)و٣) - (٢ - (٢)و٣)}{٢}$

$= \frac{٢ - (٤)و٣ - ٢ - (٢)و٣}{٢} = \frac{(٤)و٣ - (٢)و٣}{٢} = \frac{٣[و(٤) - و(٢)]}{٢}$

$= \frac{٣ \times ١٠}{٢} = \frac{٣٠}{٢} =$ **١٥**

إعداد المعلم: سائد الحلاق




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٤

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٢} = -٩$$

$$\frac{(أ \times ٣^{٢} - ٥ \times ٣) - (أ \times ١^{٢} - ٥ \times ١)}{٢} = -٩$$ (بالضرب التبادلي)

$$(٥ - أ) - (١٥ - أ٩) = -١٨$$

$$٥ + أ - ١٥ - أ٩ = -١٨$$

$$١٠ - أ٨ = -١٨$$

$$-أ٨ = -٨$$

$$أ = \frac{-٨}{٨} \leftarrow أ\frac{٨}{٨} = ١$$

$$\boxed{-١}$$

٥

متوسط التغير للاقتران هـ(س) $= \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٥ - ٣}$$

$$-٢ = \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٥ - ٣}$$

$$\pm ٢ = \frac{هـ(٥) - ٨}{٢}$$ (بالضرب التبادلي)

$$-٤ = هـ(٥) - ٨$$

$$هـ(٥) = -٤ + ٨ = \boxed{٤} \leftarrow$$

٦

متوسط التغير = ميل القاطع $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$$= \frac{هـ(٢) - هـ(-٦)}{٢ - (-٦)}$$

$$= \frac{٥ - ٠}{٨}$$

$$= \boxed{\frac{٥}{٨}}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ١ – ١ | متوسط التغير

أولاً | إختر الإجابة الصحيحة

١ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران هـ(س) في النقطتين (٣ ، -٨) ، (-١ ، ٤) ، فما متوسط التغير للاقتران هـ(س)؟

أ) ٣ ب) -٣ ج) -١ د) ٢

٢ يقطع المستقيم م منحنى الاقتران هـ(س) في النقطتين (٤ ، ٣ب) ، (٣ ، ١) ، فإذا كان ميلهُ يساوي ٢ ، فما قيمة ب ؟

أ) -١ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) -٣ د) ١

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{٣}{٤}$ وكان Δص = ٦ ، فما قيمة Δس ؟

أ) ١٤ ب) ٨ ج) ٦ د) -٨

٤ إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٦ هو ٣ ، فما قيمة Δص ؟

أ) ٤ ب) $\frac{٤}{٣}$ ج) -١٢ د) ١٢

٥ إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) للفترة [-١ ، ٣] يساوي $\frac{١}{٤}$ ، وكان هـ(٣) = ٢ ، فما قيمة هـ(-١) ؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) -١

٦ إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) للفترة [-٢ ، ٢] يساوي ٤ ، وكان هـ(-٢) = ١ ، فما قيمة هـ(٢)؟

أ) ١٧ ب) -١٥ ج) ١٥ د) ٣

٧ ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) للفترة [٢ ، ٤] ، إذا علمت أن : هـ(٤) – هـ(٢) = ٦ ؟

أ) ٣ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) -٣ د) ٢

٨ ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{١}{٢}$س – ١ عندما تتغير س من س$_١$ = -٢ إلى س$_٢$ = ٤ ؟

أ) -١ ب) ١ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ٢

٩ ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{\sqrt{س}}{٢}$ ، عندما تتغير س من س$_١$ = ١ إلى س$_٢$ = ٩ ؟

أ) ٨ ب) $\frac{١}{٨}$ ج) $-\frac{١}{٨}$ د) ١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٠ فلسطين : ٢٠٢٠

ما ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} – ٢ المار بالنقطتين (–١، ق(–١)) ، (٢، ق(٢)) ؟

أ ١٢ ب ٦ جـ ٣ د –٦

١١ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان : ق(٥) – ق(–٢) = ٢٨، فما متوسط تغير الاقتران ق(س) في [–٢، ٥] ؟

أ –٤ ب ٤ جـ $\frac{٢٨}{٣}$ د ٢٨

١٢ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

ليكن ق(س) = $\frac{١}{س}$، س ≠ ٠ ، ما قيمة متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ إلى س$_{٢}$ = ٢ ؟

أ $-\frac{٣}{٢}$ ب –٢ جـ –١ د ١

١٣ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان : ق(٣) – ق(١) = –١٦، ما متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ١ إلى س$_{٢}$ = ٣ ؟

أ –٨ ب ٢ جـ ٨ د ١٦

١٥ شرق غزة : ٢٠١٩ تجريبي

ما ميل القاطع الذي يقطع منحنى الاقتران ق(س) = ٣س^{٢} + ٢ ، عند س$_{١}$ = –١ ، س$_{٢}$ = ٢ ؟

أ ٣ ب –٦ جـ ١٢ د ٩

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٦ فلسطين : ٢٠١٨

إذا كانت النقطتان أ(–١، ٢) ، ب(٢، ٥) تقعان على منحنى الاقتران ص = ق(س) فإن متوسط تغير الاقتران

ق(س) عندما تتغير س من –١ إلى ٢ يساوي:

أ –٣ ب –١ جـ ١ د ٣

١٧ فلسطين : ٢٠١٧ إكمال

إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = أ إلى س$_{٢}$ = ٥ هو ٢ ، وكان ق(٥) = ٧، ق(أ) = ٣،

فإن قيمة أ تساوي:

أ صفر ب ١ جـ –٣ د ٣





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال	الجواب النهائي
١	أوجد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢س + ٣ للفترة [٤ ، ٤,٥]	٢
٢	احسب متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\sqrt{٢س+٢}$ ، عندما تتغير س في [$\frac{١}{٢}$ ، ٨]	$\frac{٢}{٥}$
٣	أوجد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠ عند $س_١ = \frac{١}{٢}$ ، $س_٢ = ١$	– ٤
٤	احسب متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\sqrt{٢س+٩}$ ، في الفترة [٠ ، ٨]	$-\frac{١}{٤}$
٥	إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $س^٢ + ٣$ ، للفترة [ب ، ٢] يساوي ٩ ، فما قيمة الثابت ب ؟	٧ ٢ مرفوض
٦	إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = جـس + ٦ ، للفترة هو – ٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٦ ، فما قيمة / قيمة الثابت جـ ؟	– ٢
٧	إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $٢س^٢ + ٣س - ٥$ ، للفترة [ل ، ٣ل] يساوي ١١ ، فما قيمة الثابت ل ؟	١ الصفر مرفوض
٨	إذا كان متوسط التغير للاقتران هـ(س) يساوي ٥ ، حيث تتغير س من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = أ$ ، وكان هـ(٢) = ٧ ، هـ(أ) = ٢ ، فما قيمة الثابت أ ؟	١
٩	إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) عندما تتغير س في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٨، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢هـ(س) – س في تلك الفترة.	١٥
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) على [٣،٥] يساوي ٧، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٢س + هـ(س) على [٣،٥].	٩
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $أس^٢ - ٤س$ على [١ ، ٣] يساوي ٢أ ، جد قيمة الثابت أ ؟	٢

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٢	قباطية : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) على [٢، ٤] يساوي ٥، جد متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ٣هـ(س) – ٢ في تلك الفترة.	١٥
١٣	أريحا : ٢٠٢٠تجريبي إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) على [١، ٥] يساوي ٧، جد متوسط تغير الاقتران ل(س) = $\frac{٢}{٣}$هـ(س) + ٤ في تلك الفترة.	$\frac{١٤}{٣}$
١٤	شرق خانيونس: ٢٠٢٠تجريبي إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) على [١، ٥] يساوي – ٦، وكان ك(س) = ٢سهـ(س) حيث منحنى ك(س) يمر بالنقطة (١، – ٦). جد متوسط تغير الاقتران ك(س) لتلك الفترة.	– ٦٦
١٥	قلقيلية: ٢٠٢٠ إكمال إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) على [– ٤، ٢] يساوي ٥، وكان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = أ هـ(س) + ٤ على نفس الفترة يساوي ١٥ ، أجد قيمة الثابت أ	٣
١٦	فلسطين : ٢٠١٨ إذا كان هـ(س) = $\sqrt{٥س + ١}$، و تتغير س من س$_١$ = ٠ إلى س$_٢$ = ٣ ، فجد متوسط التغير	١
١٧	فلسطين: ٢٠٠٨ إذا كان الاقتران ص = هـ(س) = س^٢ وتغيرت س من س$_١$ = ١ إلى س$_٢$ = ٣ ، فجد متوسط التغير.	٤
١٨	فلسطين : ٢٠٠٧ إذا كان الاقتران ص = هـ(س) اقتراناً وكان متوسط تغير الاقتران هـ(س) للفترة [٢ ، ٥] هو ١٠ فجد هـ(٥) علماً بأن هـ(٢) = ٦	٣٦

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ٢ المشتقة الأولى

ملخص الدرس

- يرمز للمشتقة الأولى بأكثر ص = هـ(س) = ٢س + ١ من رمز $\left(ص' ، هـ' ، \frac{د ص}{د س} \right)$
- $\frac{د ص}{د س}$ وحدة واحدة ولا تعامل معاملة كسر مكون من بسط ومقام (لا تعامل كنسبة) وتقرأ : (دال صاد دال سين).

قواعد الاشتقاق

قاعدة ١

- إذا كان ص = هـ(س) = أ ، حيث أ عدد حقيقي ، فإن هـ' = $\frac{د ص}{د س}$ = صفر
- مشتقة الاقتران الثابت يساوي صفراً.

قاعدة ٢

- إذا كان ص = أس + ب ، حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ

إعداد المعلم: سائد الحلاق

قاعدة ٣

- إذا كان هـ(س) = س^{ن} ، فإن هـ' = ن س$^{ن-١}$ ، حيث :ن عدد حقيقي ، س ≠ ٠ ، س ≠ ٠

قاعدة ٤

- إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، وكان أ عدداً حقيقياً ، أ ≠ ٠ ، فإن الاقتران هـ(س) = أ هـ(س) هو اقتران قابل للاشتقاق ، وتكون هـ'(س) = أ هـ'(س).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:



١ ص = ٧ ← ص′ = ٠

٢ ص = −٥ ← ص′ = ٠

٣ ص = π ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٠

٤ هـ(س) = ٥س ← هـ′ (س) = ٥

٥ هـ(س) = −٢س ← هـ′ (س) = −٢

٦ هـ(س) = س + ٧ ← هـ′ (س) = ١

٧ هـ(س) = ٤س − ٥ ← هـ′ (س) = ٤

٨ ٤ص = ٨س ← $\frac{٤}{٤}$ص = $\frac{٨}{٤}$س ← ص = ٢س ← $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢

٩ هـ(س) = س^{٣} ← هـ′ (س) = ٣س$^{٣-١}$ ← هـ′ (س) = ٣س^{٢}

إعداد المعلم: سائد الحلاق

١٠ هـ(س) = س$^{-٣}$ ← هـ′ (س) = −٣س$^{-٣-١}$ ← هـ′ (س) = −٣س$^{-٤}$

١١ هـ(س) = −٢س^{٥} ← هـ′ (س) = ٥ × −٢س^{٤} ← هـ′ (س) = −١٠س^{٤}

١٢ هـ(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ← هـ(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ ← هـ′ (س) = $\frac{١}{٢}$س$^{\frac{١}{٢}-١}$ ← هـ′ (س) = $\frac{١}{٢}$س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

١٣ هـ(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ ← هـ(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ ← هـ′ (س) = $\frac{١}{٣}$س$^{\frac{١}{٣}-١}$ ← هـ′ (س) = $\frac{١}{٣}$س$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

١٤ هـ(س) = $\sqrt[٥]{\text{س}^{٤}}$ ← هـ(س) = س$^{\frac{٤}{٥}}$ ← هـ′ (س) = $\frac{٤}{٥}$س$^{\frac{٤}{٥}-١}$ ← هـ′ (س) = $\frac{٤}{٥}$س$^{-\frac{١}{٥}}$ = $\frac{٤}{٥\sqrt[٥]{\text{س}}}$





الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٢

إذا كان الاقتران ق(س) = −٣س^{٣} +١، جد ق′(٢) .

الحـــل

ق′(س) = −٩س^{٢}

ق′(٢) = −٩×(٢)^{٢} = −٩ × ٤ = $\boxed{-٣٦}$

مثال ٣

إذا كان الاقتران ق(س) = أس^{٤} ، وكان ق′(٣) = ٢١٦ .جد قيمة الثابت أ .

الحـــل

ق′(س) = ٤أ س^{٣}

ق′(٣) = ٤×أ×(٣)^{٣}

٢١٦ = ٤×أ×٢٧

٢١٦ = ١٠٨ أ ← أ = $\frac{٢١٦}{١٠٨}$ = $\boxed{٢}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٤

اذا كان ٢هـ(س) = −٨ق(س)+١، وكان هـ′(٢) = ٤ ، فما قيمة ق′(٢) ؟

الحـــل

٢هـ′(س) = −٨ق′(س)

٢هـ′(٢) = −٨ق′(٢)

٢×٤ = −٨ق′(٢)

٨ = −٨ق′(٢) ← ق′(٢) = $\boxed{-١}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

المشتقة الأولى (١-٢) | حلول الكتاب الوزاري صفـــ١٣ـــحة

١

أ) $هـ'(س) = ٠ \leftarrow هـ'(١٠٠) = \boxed{٠}$

ب) $ص' = ٣ \leftarrow ص'(١٢) = \boxed{٣}$

جـ) $ك'(س) = ١ \leftarrow ك'(-٧) = \boxed{١}$

د) $هـ(س) = س^{\frac{٥}{٣}}$

$\leftarrow هـ'(س) = \frac{٥}{٣} س^{\frac{٢}{٣}} \leftarrow هـ'(١) = \frac{٥}{٣} \times (١)^{\frac{٢}{٣}} = \frac{٥}{٣} \times ١ = \boxed{\frac{٥}{٣}}$

هـ) $هـ'(س) = ٣س^{٢} \leftarrow هـ'(-١) = ٣ \times (-١)^{٢} = \boxed{٣}$

٢

أ) $هـ(س) = \frac{٦٤}{٥س^{٥}}$ ، $س \neq ٠$

$هـ(س) = \frac{٦٤}{٥} س^{-٥}$

$هـ'(س) = -٥ \times \frac{٦٤}{٥} \times س^{-٦} = ٦٤س^{-٦} = \boxed{\frac{-٦٤}{س^{٦}}}$

ب) $هـ'(س) = \boxed{٠}$

جـ) $هـ'(س) = \boxed{٢٠س^{٣}}$

٣

$\frac{د ص}{د س} = ٦ \times هـ'(س)$

$\frac{د ص}{د س}(٥) = ٦ \times هـ'(٥) = ٦ \times ٧ = \boxed{٤٢}$

٤

$هـ'(س) = ٣أس^{٢}$

$\leftarrow هـ'(٢) = ٣ \times أ \times (٢)^{٢} = ٦٠$

$\leftarrow \frac{١٢}{١٢} أ = \frac{٦٠}{١٢} \leftarrow أ = \boxed{٥}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ١ – ٢

المشتقة الأولى

فكر

إختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كان الاقتران هـ (س) $= \frac{٢}{٣}$ س^{٣} + ٣س ، فما قيمة هـ′(١)؟

أ) ١− ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٣}-$ د) ١

٢ إذا كان الاقتران ص $= ٣\pi$ ، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند س $= \sqrt{١٠٠}$ ؟

أ) ٠ ب) π جـ) ٣ د) ١٠٠

٣ إذا كان الاقتران ص $= \frac{٣}{٤}$ س^{٤} ، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند س $= -٢$ ؟

أ) ٨ ب) ٢٤− جـ) ٢٤ د) ١٢

٤ إذا كان الاقتران هـ(س) $= \sqrt{٣}$ س^{٢} ، فإن هـ′(س) هو :

أ) ٢ $\sqrt{٣}$ ب) ٢ $\sqrt{٣}$ س^{٣} جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ س^{٢} د) ٢ $\sqrt{٣}$ س

٥ إذا كان الاقتران هـ(س) $= \sqrt[٣]{س^{٢}}$ ، فما قيمة هـ′(١)؟

أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) $\frac{٢}{٣}-$ جـ) $\frac{١}{٣}-$ د) $\frac{٣}{٢}$

٦ إذا كان الاقتران هـ(س) $= \frac{١}{س^{-٣}} - ٣$ ، فما قيمة هـ′(−٢)؟

أ) ٤٨− ب) ١٢− جـ) ١٢ د) ٤٨

٧ إذا كان الاقتران هـ(س) = ب س$^{-١}$ ، وكان هـ′(−٢) = ١٦ .فما قيمة الثابت ب؟

أ) ٦٤− ب) ٤ جـ) ٦٤ د) ١٦−

٨ اذا كان هـ(س) = −٣هـ(س)، وكان هـ′(٢) = ٩ ، فما قيمة هـ′(٢) ؟

أ) ٦− ب) ٢٧ جـ) ٢٧− د) ٣−

٩ إذا كان الاقتران هـ(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = ٥س$^{-٤}$ ، فما قيمة (هـ − هـ)′(١) ؟

أ) ٢٦ ب) ٢٦− جـ) ١٤− د) ١٤

إعداد الحلاق سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٠ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان الاقتران هـ(س) = ٣وه(س) ، وكان هـ′(٢) = ٦ ، فما قيمة وه′(٢) ؟

أ ١٨ ب ٢ ج −٢ د ١٢

١١ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان هـ(س) = ٣س٢ − أس٣ ، هـ′(−١) = ٦ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ ٠ ب −٢ ج −٤ د ٤

١٢ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان وه(س) = $\frac{٨}{س^{٢}}$ ، فما قيمة وه′(−٢) ؟

أ ٠ ب −٢ ج ٢ د ٤

١٣ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان وه(س) = س٢ + ٨ ، هـ(س) = ٢ − ٢س ، فما قيمة $\frac{وه'(٣)}{هـ'(٣)}$ ؟

أ −٣ ب −٦ ج $\frac{٥}{٨}$ د $-\frac{١٧}{٤}$

١٤ فلسطين : ٢٠١٨

إذا كان : وه(س) = ٢ $\sqrt{س}$ ، فإن وه′(٤)

أ $\frac{١}{٤}$ ب $\frac{١}{٢}$ ج ١ د ٢

١٥ فلسطين : ٢٠١٣ إكمال

إعداد المعلم : سائد الحلاق

إذا كان : ل(س) = ٢وه(س) − ٤هـ(س)، وكانت وه′(٢) = ٣ ، هـ′(٢) = −٤، فإن ل′(٢) =

أ −٢٠ ب −١٠ ج ٧ د ٢٢

١٦ فلسطين : ٢٠١٢ إكمال

إذا كان : ٢وه(س) + ٣هـ(س) = −٢س، وكان هـ′(٢) = ٤ ، فإن وه′(٢) =

أ −٧ ب −٥ ج ٥ د ٧

١٧ فلسطين : ٢٠١٠

إذا كان : هـ(س) = س + وه(س)، وكان هـ′(٢) = ٤ ، فإن وه′(٢) =

أ ٢ ب ٣ ج ٤ د ٥





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ٣ قواعد الاشتقاق

ملخص الدرس

قواعد الاشتقاق

قاعدة١ الجمع والطرح

إذا كان ق(س)،هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان ك(س) = ق(س) ± هـ(س)، فإن : الاقتران ك(س) يكون قابلاً للاشتقاق ، ويكون ك′(س) = ق′(س) ± هـ′(س)

قاعدة٢ الضرب

إذا كان ق(س)،هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س = أ ، فإن :

$$(ق \times هـ)'(أ) = ق(أ) \times هـ'(أ) + هـ(أ) \times ق'(أ)$$

أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين= الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

قاعدة٣ القسمة

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، وكان هـ(س) ≠ ٠ عند س = أ ، فإن :

$$(ق \div هـ)'(أ) = \frac{(هـ(أ) \times ق'(أ)) - (ق(أ) \times هـ'(أ))}{(هـ(أ))^{٢}}$$

أي أن : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = $\frac{\text{(المقام × مشتقة البسط) – (البسط × مشتقة المقام)}}{\text{مربع المقام}}$

إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{هـ(س)}$ ، هـ(س) ≠ ٠ ، أ ∈ ع

فإن : ق′(س) = $\frac{-أ هـ'(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كان الاقتران $\text{ق}(س) = ٢س^{٥}$ ، $\text{هـ}(س) = ٣س^{-٤}$ ، أجد : $(\text{ق} + \text{هـ})'(١)$

الحـــل

$\text{ق}'(س) = ١٠س^{٤}$ ، $\text{هـ}'(س) = -١٢س^{-٥}$

$(\text{ق} + \text{هـ})'(س) = ١٠س^{٤} + ١٢س^{-٥}$

$(\text{ق} + \text{هـ})'(١) = ١٠(١)^{٤} + ١٢(١)^{-٥} = (١٠ \times ١) - (١٢ \times ١) = ١٠ - ١٢ = \boxed{-٢}$

مثال ٢

إذا كان الاقتران $\text{ق}(س) = ١٠س^{٢} + ٥$ ، $\text{هـ}(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - ٣س$ ، أجد : $(\text{ق} - \text{هـ})'(٢)$

الحـــل

$\text{ق}'(س) = ٢٠س$ ، $\text{هـ}'(س) = س^{٢} - ٣$

$(\text{ق} - \text{هـ})'(س) = (٢٠س) - (س^{٢} - ٣)$

$(\text{ق} - \text{هـ})'(٢) = (٢٠ \times ٢) - ((٢)^{٢} - ٣) = ٤٠ - ١ = \boxed{٣٩}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٣

إذا كان الاقتران $\text{ق}(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + ٥س - ٣$ ، ما قيمة / قيم س التي تجعل $\text{ق}'(س) = ١٣$ ؟

الحـــل

$\text{ق}'(س) = س^{٢} - ٢س + ٥$

$١٣ = س^{٢} - ٢س + ٥$

$س^{٢} - ٢س + ٥ - ١٣ = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$

$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$

إما $(س - ٤) = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٤}$ أو $(س + ٢) = ٠ \leftarrow \boxed{س = -٢}$





الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤

إذا كان الاقتران $هـ(س) = \sqrt{س^{٣}} + ب^{٢} س + ٧$، وكان $هـ'(٤) = ٢٨$ ، فما قيمة / قيم ب ؟

الحـــل

$$هـ(س) = س^{\frac{٣}{٢}} + ب^{٢} س + ٧$$

$$هـ'(س) = \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + ب^{٢}$$

$$هـ'(س) = \frac{٣}{٢} \sqrt{س} + ب^{٢}$$

$$هـ'(٤) = \frac{٣}{٢} \sqrt{٤} + ب^{٢}$$

$$٢٨ = \frac{٣}{٢} \times ٢ + ب^{٢}$$

$$٢٨ = \frac{٣}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢} + ب^{٢}$$

$$٢٨ = ٣ + ب^{٢}$$

$$ب^{٢} = ٢٨ - ٣$$

$$ب^{٢} = ٢٥ \leftarrow \sqrt{ب^{٢}} = \sqrt{٢٥} \leftarrow ب = \boxed{\pm ٥}$$

$$\sqrt{أ^{٢}} = أ^{\frac{٢}{٢}}$$

مثال ٥

إذا كان الاقتران $ص = ٣س^{٣} + ٥س^{٢} - ٧س + ٥$، جد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = -٢$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الحـــل

$$\frac{د ص}{د س} = ٩س^{٢} + ١٠س - ٧$$

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=-٢} = ٩ \times (-٢)^{٢} + (١٠ \times -٢) - ٧ = ٣٦ - ٢٠ - ٧ = \boxed{٩}$$

مثال ٦

إذا كان الاقتران $هـ(س) = \frac{٢}{س^{٣}} - س^{٢}$، جد $هـ'(١)$.

الحـــل

$$هـ(س) = ٢س^{-٣} - س^{٢}$$

$$هـ'(س) = -٦س^{-٤} - ٢س$$

$$هـ'(١) = -٦ \times (١)^{-٤} - ٢ \times ١ = -٦ - ٢ = \boxed{-٨}$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٧

إذا كان الاقتران $\text{ه}(س) = (س^{٢} - ٧)(٣س + ٥)$ ، جد $\text{ه}'(١)$.

الحـــل

نطبق : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$$\text{ه}'(س) = (س^{٢} - ٧) \times (٣) + (٣س + ٥)(٢س)$$

$$\text{ه}'(١) = (١^{٢} - ٧) \times (٣) + (٣ \times ١ + ٥)(٢ \times ١) = -١٨ + ١٦ = \boxed{-٢}$$

مثال ٨

إذا كان الاقتران $\text{ه}(س) = (س^{٢} + س - ١)(جـ س + ٣)$، وكان $\text{ه}'(١) = ٢١$ ، فما قيمة / قيم الثابت جـ؟

الحـــل

نطبق : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاقتران الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$$\text{ه}'(س) = (س^{٢} + س - ١)(جـ) + (جـ س + ٣)(٢س + ١)$$

$$\text{ه}'(١) = (١^{٢} + ١ - ١)(جـ) + (جـ \times ١ + ٣)(٢ \times ١ + ١)$$

$$٢١ = جـ + (جـ + ٣)(٣)$$

$$٢١ = جـ + ٣جـ + ٩$$

$$٢١ = ٤جـ + ٩ \leftarrow ٤جـ = ٢١ - ٩$$

$$١٢ = ٤جـ \leftarrow \frac{١٢}{٤} = \frac{٤جـ}{٤} \leftarrow جـ = \boxed{٣}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٩

إذا كان ص = $\text{ه}(س)$ اقتراناً ، حيث : $\text{ه}(س) = ٢س^{٢} \times ٣\text{هـ}(س)$ ، جد $\text{ه}'(١)$ علماً بأن $\text{هـ}(١) = ٢$، $\text{هـ}'(١) = ٣$

الحـــل

$$\text{ه}'(س) = ٢س^{٢} \times ٣\text{هـ}'(س) + ٣\text{هـ}(س) \times ٤س$$

$$\text{ه}'(١) = ٢ \times (١)^{٢} \times ٣\text{هـ}'(١) + ٣\text{هـ}(١) \times ١ \times ٤$$

$$\text{ه}'(١) = ٢ \times ٣ \times ٣ + ٣ \times ٢ \times ٤ = ١٨ + ٢٤ = \boxed{٤٢}$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٠

إذا كان ك(س) = ٢و(س) × هـ(س) ، جد ك′(٢) علماً بأن:

و(٢) = −١ ، و′(٢) = ٤ ، هـ(٢) = −٢ ، هـ′(٢) = −٣

الحـــل

ك′(س) = ٢و (س) × هـ′(س) + هـ(س) × ٢و′(س)

ك′(٢) = ٢و (٢) × هـ′(٢) + هـ(٢) × ٢و′(٢)

ك′(٢) = ٢ × −١ × −٣ + −٢ × ٢ × ٤ = ٦ + −١٦ = [−١٠]

مثال ١١

إذا كان (و × هـ)′ (٣) = ٣٠ ، وكان : و(٣) = −٤ ، و′(٣) = ٥ ، هـ(٣) = ١٠ ، جد هـ′(٣)

الحـــل

(و × هـ)′ (٣) = و (٣) × هـ′(٣) + هـ(٣) × و′(٣)

٣٠ = −٤ × هـ′(٣) + ١٠ × ٥

٣٠ = −٤هـ′(٣) + ٥٠

٣٠ − ٥٠ = −٤هـ′(٣)

−٤هـ′(٣) = −٢٠ ← $\frac{-٤هـ'(٣)}{-٤} = \frac{-٢٠}{-٤}$ ← هـ′(٣) = [٥]

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١٢

إذا كان (٢و × ٤هـ)′ (٥) = ٦٤ ، وكان : و(٥) = −٢ ، هـ(٥) = ٤ ، هـ′(٥) = ٦ ، جد و′(٥)

الحـــل

(٢و × ٤هـ)′ (٥) = ٢و (٥) × ٤هـ′(٥) + ٤هـ(٥) × ٢و′(٥)

٦٤ = ٢ × −٢ × ٦ × ٤ + ٤ × ٤ × ٢و′(٥)

٦٤ = −٩٦ + ٣٢ و′(٥)

٦٤ + ٩٦ = ٣٢ و′(٥) ← ١٦٠ = ٣٢ و′(٥) ← و′(٥) = [٥]





الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٣

إذا كان $\text{ه}(س) = \frac{٢س^{٢} + ٣}{٣س - ٣}$ ، جد $\text{ه}'(٢)$

الحـــل

نطبق : مشتقة حاصل ضرب اقترانين = $\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$

$$\text{ه}'(س) = \frac{(٣س - ٣) \times (٤س) - (٢س^{٢} + ٣) \times (٣)}{(٣س - ٣)^{٢}}$$

$$\text{ه}'(٢) = \frac{(٣ \times ٢ - ٣) \times (٤ \times ٢) - (٢ \times ٢^{٢} + ٣) \times (٣)}{(٣ \times ٢ - ٣)^{٢}}$$

$$\text{ه}'(٢) = \frac{٣ \times ١١ - ٨ \times ٣}{(٣)^{٢}} = \frac{٣٣ - ٢٤}{٩} = \frac{٩-}{٩} = \boxed{-١}$$

مثال ١٤

ليكن $\text{ه}(س) = \frac{٣س + ١}{\text{هـ}(س)}$ ، أجد $\text{ه}'(٣)$ ، إذا علمت أن : $\text{هـ}(٣) = -٢$ ، $\text{هـ}'(٣) = ١$

الحـــل

$$\text{ه}'(س) = \frac{(\text{هـ}(س) \times ٣) - (٣س + ١) \times \text{هـ}'(س)}{(\text{هـ}(س))^{٢}} \leftarrow \text{ه}'(٣) = \frac{(\text{هـ}(٣) \times ٣) - (٣ \times ٣ + ١) \times \text{هـ}'(٣)}{(\text{هـ}(٣))^{٢}}$$

$$\text{ه}'(٣) = \frac{٢- \times ٣ - ١٠ \times ١}{(٢-)^{٢}} = \frac{٦- + ١٠-}{٤} = \frac{١٦-}{٤} = \boxed{-٤}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ١٥

إذا كان $(\text{ه} \div \text{هـ})'(١) = ٢٠$ ، وكان : $\text{ه}(١) = ٣$ ، $\text{ه}'(١) = ١$ ، $\text{هـ}(١) = ٢$ ، جد $\text{هـ}'(١)$

الحـــل

$$(\text{ه} \div \text{هـ})'(١) = \frac{\text{هـ}(١) \times \text{ه}'(١) - \text{ه}(١) \times \text{هـ}'(١)}{(\text{هـ}(١))^{٢}} \leftarrow ٢٠ = \frac{(٢ \times ١) - ٣ \times \text{هـ}'(١)}{(٢)^{٢}}$$

$$٢٠ = \frac{(٢) - (٣\text{هـ}'(١))}{٤} \leftarrow ٨٠ = (٢) - (٣\text{هـ}'(١)) \leftarrow -٨٠ = ٢ - ٣\text{هـ}'(١) \leftarrow \text{هـ}'(١) = \frac{٧٨}{٣-} = \frac{٣-}{٣-} \leftarrow \boxed{-٢٦} = (١)'\text{هـ}$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٦

إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} × هـ(س) + ٨ $\sqrt{س}$ ، جد ق′ (١)، إذا علمت أن : هـ(١) = −١ ، هـ′ (١) = ٢

الحـــل

ق′ (س) = س^{٣} × هـ′ (س) + هـ(س) × ٣س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ × ٨س$^{-\frac{١}{٢}}$

ق′ (١) = ١^{٣} × هـ′ (١) + هـ(١) × ٣ × ١^{٢} + ٤ × ١$^{-\frac{١}{٢}}$

ق′ (١) = (١ × ٢ × ١) + (٢ × −١ × ٣ × ١) + (٤ × ١) = ٤ + ٦ − ٤ = **٢**

مثال ١٧

إذا كان : ق(س) = ٣ $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ + $\frac{س + ١}{٢هـ(س)}$ ، جد ق′ (٨) ، إذا علمت أن : هـ(٨) = $\frac{١}{٢}$ ، هـ′ (٨) = −٢

الحـــل

ق(س) = ٣س$^{\frac{٢}{٣}}$ + $\frac{س - ١}{٢هـ(س)}$

ق′ (س) = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ + $\frac{(٢هـ(س) × ١) - (س + ١) × ٢هـ′ (س))}{(٢هـ(س))^{٢}}$

ق′ (٨) = $\frac{١}{٣}$ (٨)$^{-\frac{١}{٣}}$ × ٢ + $\frac{(٢هـ(٨) × ١) - (٨ + ١) × ٢هـ′ (٨))}{(٢هـ(٨))^{٢}}$

ق′ (٨) = $\frac{١}{٣}$ (٨)$^{-\frac{١}{٣}}$ × ٢ + $\frac{(٢ × ٢ × ٩) - (١ × \frac{١}{٢} × ٢)}{(\frac{١}{٢} × ٢)^{٢}}$

ق′ (٨) = $\frac{١}{\sqrt[٣]{٨}}$ × ٢ + $\frac{(٣٦ -) - (١)}{(١)^{٢}}$

ق′ (٨) = $\frac{١}{٢}$ × ٢ + $\frac{٣٧}{١}$ = ١ + ٣٧ = **٣٨**

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

قواعد الاشتقاق (١-٢)

حلول الكتاب الوزاري صفـــــ١٩ـــــحة

١

أ $(و+٢هـ)'(٥) = و'(٥) + ٢ \times هـ'(٥) = ٢+(١-\times٢) = ٢+-٢ = \boxed{٠}$

ب $(٣و-٤هـ)'(٥) = ٣و'(٥) - ٤ \times هـ'(٥) = (١-\times٤)-(٢\times٣) = ٦+٤ = \boxed{١٠}$

جـ $\left(\frac{و}{هـ}\right)'(٥) = \frac{[و'(٥)\times هـ(٥)]-[و(٥)\times هـ'(٥)]}{(هـ(٥))^{٢}} = \frac{(١-\times٩)-(٣\times٢)}{(٣)^{٢}} = \frac{٩+٦}{٩} = \frac{١٥}{٩} = \boxed{\frac{٥}{٣}}$

د $(و\times هـ)'(٥) = و'(٥) \times هـ(٥) + و(٥) \times هـ'(٥)$

$= (٣\times٢) + (١-\times٩) = ٦ + -٩ = \boxed{-٣}$

٢

أ $و(س) = س^{٢}+٧ \leftarrow و'(س) = ٢س$ ، $هـ(س) = ٢-٣س \leftarrow هـ'(س) = -٣$

$(و+هـ)'(١) = و'(١)+هـ'(١) = (١\times٢)-٣ = ٢-٣ = \boxed{-١}$

ب $\left(\frac{و}{هـ}\right)'(س) = \frac{[هـ(س)\times و'(س)]-[و(س)\times هـ'(س)]}{(هـ(س))^{٢}}$

$= \frac{[(٢-٣س)\times٢س]-[(٧+س^{٢})\times-٣]}{(٢-٣س)^{٢}} = \frac{٤س-٦س^{٢}+٣س^{٢}+٢١}{(٢-٣س)^{٢}} = \frac{-٣س^{٢}+٤س+٢١}{(٢-٣س)^{٢}}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

جـ $\frac{و'(س)}{هـ'(س)} = \frac{٢س}{-٣} = \boxed{-\frac{٢}{٣}س}$

د $(و\times هـ)'(٢) = (و'(٢)\times هـ(٢))+(و(٢)\times هـ'(٢))$

$= (٤\times٤)+(١١\times-٣) = -١٦-٣٣ = \boxed{-٤٩}$

هـ $و'(٢) \times هـ(٢) = ٤ \times -٤ = \boxed{-١٦}$

و $(س^{٢}\times و(س))'(س) = ٢س \times و(س)+س^{٢}\times و'(س)$

$(س^{٢}\times و(س))'(-٢) = -٢\times٢\times و(-٢)+(-٢)^{٢}\times و'(-٢)$

$= (٢\times-٢\times١١)+(٤\times٤) = -٤٤+١٦ = \boxed{-٦٠}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٣ $(و \times هـ)'(٧) = و'(٧) \times هـ(٧) + و(٧) \times هـ'(٧)$

$١٢ = ٦ \times هـ(٧) + (٣ \times ٣)$

$١٢ = ٦ هـ(٧) + ٩$

$٦ هـ(٧) = ١٢ - ٩ \leftarrow \frac{٦}{٦} هـ(٧) = \frac{٣}{٦} \leftarrow هـ(٧) = \boxed{\frac{١}{٢}}$

٤ $\left(\frac{و}{هـ}\right)'(٩) = \frac{\left(هـ(٩) \times و'(٩)\right) - \left(و(٩) \times هـ'(٩)\right)}{(هـ(٩))^{٢}}$

$\frac{(-٣ \times -١٢) - \left(٥ \times هـ'(٩)\right)}{(-٣)^{٢}} = ٣$

$\frac{٣٦ - ٥ هـ'(٩)}{٩} = ٣$ (بالضرب التبادلي)

$٣٦ - ٥ هـ'(٩) = ٢٧ \leftarrow -٥ هـ'(٩) = ٢٧ - ٣٦ \leftarrow -٥ هـ'(٩) = -٩ \leftarrow هـ'(٩) = \boxed{\frac{٩}{٥}}$

٥ $و'(س) = ٢ أ س + ٦ \leftarrow ٢ أ \times ٣ + ٦ = ٠ \leftarrow ٦ أ = -٦ \leftarrow أ = \boxed{-١}$

٦ $(و \times هـ)'(س) = و(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times و'(س)$

$(و \times هـ)'(س) = \left(\left(س^{٢} - ٢ أ س + ٣\right) \times (٢ س)\right) + \left(\left(س^{٢} - ٢\right) \times (٢ س - ٢ أ)\right)$

$(و \times هـ)'(١) = \left(\left(١^{٢} - (١ \times ٢ أ) + ٣\right) \times (١ \times ٢)\right) + \left(\left(١^{٢} - ٢\right) \times (٢ \times ١ - ٢ أ)\right)$

$٨ = \left(\left(٢ \times (٤ - ٢ أ)\right) + \left(-١ \times (٢ - ٢ أ)\right)\right)$

$٨ = ٨ - ٤ أ + ٢ أ \leftarrow ٨ = ٦ - ٢ أ \leftarrow ٨ - ٦ = -٢ أ \leftarrow \frac{-٢}{-٢} = \frac{٢}{-٢} أ \leftarrow أ = \boxed{-١}$

٧ $و'(س) = \frac{\left((٦ - ٤ س) \times أ\right) - \left(-٤ \times (أ س - ٥)\right)}{(٦ - ٤ س)^{٢}}$

$و'(١) = \frac{\left((٦ - ٤ \times ١) \times أ\right) - \left(-٤ \times (أ \times ١ - ٥)\right)}{(٦ - ٤ \times ١)^{٢}} = -\frac{١}{٢}$

$\leftarrow \frac{١٢ أ + ٢٠ - ١٤ أ}{٤} = -\frac{١}{٢}$

$١٢ أ - ١٤ أ + ٢٠ = -٤ \leftarrow \frac{١٢}{١٢} أ = \frac{٣٦}{١٢} \leftarrow أ = \boxed{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ١ – ٣

قواعد الاشتقاق

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) إذا كان الاقتران $\text{قا}(س) = \frac{٣}{س}$ ، فما قيمة $\text{قا}'(١)$ ؟

أ) $-\frac{١}{٣}$ ب) ٣ جـ) ١ د) -٣

٢) إذا كان الاقتران $\text{قا}(س) = ٢س^{٣}$ ، $\text{هـ}(س) = ٢س^{-٢}$ ، فما قيمة $(\text{قا} - \text{هـ})'(١)$ ؟

أ) ١٠ ب) ٨ جـ) ٢ د) -١٠

٣) إذا كان $\text{ك}(س) = ٢\text{قا}(س) \times \text{هـ}(س)$، جد $\text{ك}'(٢)$ علماً بأن: $\text{قا}(٢) = -١$ ، $\text{قا}'(٢) = ٤$ ، $\text{هـ}(٢) = -٢$ ، $\text{هـ}'(٢) = -٣$

أ) -٢٢ ب) ٢٢ جـ) ١٠ د) -١٠

٤) إذا كان $\text{ك}(س) = \text{قا}(س) \div \text{هـ}(س)$، جد $\text{ك}'(١)$ علماً بأن: $\text{قا}(١) = ١$ ، $\text{قا}'(١) = ٢$ ، $\text{هـ}(١) = -٢$ ، $\text{هـ}'(١) = -١$

أ) $-\frac{٣}{٤}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ جـ) $-\frac{٣}{٢}$ د) $-\frac{٥}{٤}$

٥) إذا كان $\text{قا}(س) = (س^{٢} + ١)(٣س - ٢)$ ، فما قيمة $\text{قا}'(٢)$ ؟

أ) ٣٣ ب) ٣١ جـ) ٢٢ د) -٢٢

٦) إذا كان $\text{قا}(س) = ٣س - أس^{٢}$ ، وكان $\text{قا}'(٥) = ٢٣$ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٢ ب) -٢ جـ) $-\frac{١٣}{٥}$ د) $-\frac{٢٦}{١٠}$

٧) إذا كان $\text{قا}(س) = \frac{-٢ب}{س - ١}$ ، وكان $\text{قا}'(٢) = ٦$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) ٣ ب) -٢ جـ) ٣ د) ٢

٨) إذا كان الاقتران $\text{قا}(س) = \text{هـ}(س) \times س$ ، وكان $\text{قا}'(٢) = -١$، $\text{قا}(٢) = ٦$ فما قيمة $\text{هـ}'(٢)$؟

أ) -١ ب) ١ جـ) -٢ د) ٢

٩) إذا كان $\text{قا}(س) = \frac{-٢س}{\text{هـ}(س)}$ ، وكان $\text{هـ}(٢) = ٢$ ، $\text{هـ}'(٢) = -١$ ، فما قيمة $\text{قا}'(٢)$؟

أ) ٢ ب) -٢ جـ) -٤ د) ٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٠ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان هـ(س) = ٣و(س) ، وكان هـ′(٢) = ٦ ، فما قيمة و′(٢) ؟

أ ١٨ ب ٢ جـ ٢− د ١٢

١١ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان و(س) = (٣س + ١)(س − ٢) ، فما قيمة و′(١) ؟

أ ٤− ب ٧ جـ ٣ د ١

١٢ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان $و(س) = \frac{س + ١}{٣س - ٧}$ ، $س \neq \frac{٧}{٣}$ ، فما قيمة و′(١) ؟

أ $-\frac{٥}{٨}$ ب $-\frac{١}{٤}$ جـ $\frac{١}{٣}$ د $-\frac{١}{٢}$

١٣ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان (و × هـ)′(٤) = ١٢ ، وكان و′(٤) = ٦ ، و(٤) = ٣ ، هـ(٤) = ٣ ، فما قيمة هـ′(٤) ؟

أ ١٠− ب ١٠ جـ ٢ د ٢−

١٤ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان و(س) = س^{٢} × ل(س) ، وكان ل′(٣) = ٢ ، ل(٣) = $-\frac{١}{٦}$ ، فما قيمة و′(٣) ؟

أ ١− ب ١٢ جـ ١٩ د ١٧

١٥ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان و(س) = س + ١ ، هـ(س) = س^{٢} ، فما قيمة (و × هـ)′(−٢) ؟

أ ١٦ ب ١٢ جـ ٨ د ٨−

١٦ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان و(٧) = −٥ ، هـ(٧) = ٢ ، و′(٧) = ٣ ، هـ′(٧) = −١ ، فما قيمة (٢و − ٣هـ)′(٧) ؟

أ ٦٦ ب ٦ جـ ٦− د ١٨−

١٧ رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي

بالاعتماد على البيانات الموجودة داخل الجدول المجاور فإن (س و − ٣هـ)′(٢) =

و(٢)	و′(٢)	هـ(٢)	هـ′(٢)
١−	٣	٠	٤−

أ ١٥ ب ١٧ جـ ١٦ د ١٨

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال	الجواب النهائي
١	إذا كان $\text{ق}(س) = \frac{٢}{س^{٢}} + ٤\sqrt{س}$ ، فما قيمة $\text{ق}'(١)$ ؟	-٢
٢	إذا كان $\text{ق}(س) = ٢\sqrt{س} + [\text{هـ}(س) \times س^{٢}]$ ، فما قيمة $\text{ق}'(١)$ علماً بأن : $\text{هـ}(١) = ٢$ ، $\text{هـ}'(١) = -٣$	٢
٣	إذا كان $\text{ق}(س) = (س+١)(ب س - ١)$ ، ما قيمة الثابت ب علماً بأن $\text{ق}'(١) = ٥$	$ب = ٢$
٤	إذا كان $س^{٢} = \text{هـ}(س) \times ٢\text{ق}(س)$، وكان $\text{ق}(٢) = ١$ ، $\text{ق}'(٢) = -١$ احسب قيمة $\text{هـ}'(٢)$	٤
٥	إذا كان $\text{هـ}(س) = \frac{١}{٣ + ب س} - \frac{١}{٣ب}$ ، $\text{هـ}'(١) = ٢$ ، احسب قيمة / قيم الثابت ب.	$-٢ ، -\frac{٩}{٢}$
٦	إذا كان $\text{ق}(س) = \frac{\text{هـ}(س)}{٢س - ٢}$ ، أجد قيمة $\text{ق}'(٣)$علماً بأن : $\text{هـ}'(٣) = -١$ ، $٢\text{هـ}(٣) = ٤$	$-\frac{١}{٢}$
٧	إذا كان $\text{ق}(س) = ٤\sqrt{س} + \frac{س - ١}{\text{هـ}(س)}$ ، احسب قيمة $\text{ق}'(٤)$علماً بأن : $\text{هـ}(٤) = ١$ ، $\text{هـ}'(٤) = -٢$	٨
٨	إذا كان $(\text{ق} \times ٤\text{هـ})'(٣) = ٢٤$ ، وكان : $\text{ق}'(٣) = ٢$ ، $\text{هـ}(٣) = -٢$ ، $\text{هـ}'(٣) = ٥$ ، جد $\text{ق}(٣)$	٢
٩	إذا كان: $\text{ق}(س) = ٣\text{هـ}(س) \times س^{٢} - س$ ، وكان : $\frac{١}{٢}\text{هـ}'(٢) = -٢$ ، $٣\text{هـ}(٢) = ٦$ جد $\text{ق}'(٢)$	-٢٥
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان $\text{ق}(س) = س^{٣} \times \text{هـ}(س)$، جد $\text{ق}'(٢)$علماً بأن : $\text{ق}(٢) = ٨$ ، $\text{هـ}'(٢) = -١$	٤
١١	غرب غزة : ٢٠٢٠تجريبي إذا كان $\text{ق}(س) = \text{هـ}(س) \times (س^{٢} - ٢)$، أجد قيمة $\text{ق}'(١)$علماً بأن : $\text{هـ}(١) = ٣$ ، $\text{هـ}'(١) = -٢$	٨

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٢	قباطية : ٢٠٢٠تجريبي إذا كان ق(س) = $\frac{أس - ٥}{٦ - ٤س}$ ، وكان ق′(١) = $-\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة الثابت أ؟	أ = ٣
١٣	بيت لحم ورام الله : ٢٠٢٠تجريبي إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٢أس + ٣ ، هـ(س) = س^{٢} − ٢ ، وكان (ق × هـ)′(١) = ٨ فما قيمة الثابت أ؟	أ = −١
١٤	أريحا : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان: ق(س) = (س + ١)(٢س + ٣) + أس^{٢} ، وكان : ق′(٢) = −٧ ، فما قيمة الثابت أ ؟	أ = −٥
١٥	الوسطى : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان ق(س) = $\frac{أس + ٤}{٣س^{٢} + ٢}$ ، وكان ق′(١) = ١ ، فما قيمة الثابت أ؟	أ = −٤٩
١٦	شرق خانيونس: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان: ق(س) = ٣س − (٢س − ٩س^{٢}) × هـ(س) ، وكان : ق(١) = ١٧ ، ق′(١) = −٣ ، فما قيمة هـ′(١)؟	$-\frac{٢٦٦}{٤٩} = -\frac{٣٨}{٧}$
١٧	رفح: ٢٠١٩ تجريبي إذا كان: ق(س) = (٢س^{٢} + ١) × ٢هـ(س) + ٤س ، وكان : هـ(٢) = ٣، هـ′(٢) = ٢ ، فجد ق′(٢)	٨٨
١٨	قباطية : ٢٠١٩ تجريبي إذا كان: $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ = ٢س ، هـ(س) ≠ ٠ ، أوجد ق′(٢) علماً بأن : هـ′(٢) = ٢ ، هـ(٢) = ٣	١٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٩	فلسطين : ٢٠١٨ إذا كان: $\text{ق}(س) = (أ + س)^{٢}$ ، وكان : $\text{ق}'(٢) = \text{ق}(١)$ ، فما قيمة / قيم أ؟	$أ = \pm\sqrt{٣}$
٢٠	فلسطين : ٢٠١٦ إذا كان: $\text{ق}(س) = س^{٣}\text{ل}(س) + \text{هـ}(س)$ ، وكان : $\text{ل}(٢) = ٥$ ، $\text{هـ}'(٢) = ٧$ ، $\text{ل}'(٢) = -٣$ ، فما قيمة $\text{ق}'(٢)$ ؟	٤٣
٢١	فلسطين : ٢٠١٥ إذا كان الاقتران: $\text{ق}(س) = أس^{٣} + ٢س + ب$ ، وكان : $\text{ق}'(١) = ٥$ ، ويمر منحنى الاقتران ق(س) بالنقطة $(٢، -٣)$ ، فما قيم الثابتين أ ، ب	$ب = -١٥$ $أ = ١$
٢٢	فلسطين : ٢٠١٢ إذا كان: $\text{ق}(س) = ٦س + \frac{س^{٢}}{\text{هـ}(س)}$ ، جد $\text{ق}'(١)$ علماً بأن : $\text{هـ}'(١) = -١$ ، $\text{هـ}(١) = ٢$	$\frac{٢٩}{٤}$
٢٣	فلسطين : ٢٠١٠ جد المشتقة الاقتران $\text{ق}(س) = \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤}$ ، $س = ٠$	$\frac{١}{٢}$
٢٤	فلسطين : ٢٠٠٩إكمال جد المشتقة الأولى للاقتران $\text{ق}(س) = (س + ١) \times (س + ٢)$ ، عندما $س = ١$	٥
٢٥	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا كان: $\text{ق}(س) = ٢\sqrt{س} - س^{٢} \times \text{هـ}(س)$ ، فجد $\text{ق}'(١)$ علماً بأن : $\text{هـ}'(١) = -٣$ ، $\text{هـ}(١) = ٢$	صفر
٢٦	فلسطين : ٢٠٠٧إكمال إذا كان: $\text{ق}(٢) = ٣$ ، $\text{ق}'(٢) = ٤$ ، $\text{هـ}(س) = س^{٢} + ٢$ ، فجد $(\text{ق} \times \text{هـ})'(٢)$	٣٦

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ٤ القيم القصوى للإقتران

ملخص الدرس

ستستخدم المشتقة الأولى للاقتران لتحديد فترات التزايد والتناقص وإيجاد القيم القصوى المحلية:

أولاً: فترات التزايد والتناقص

تعريف

يكون الاقتران ق(س) متزايداً على الفترة [أ،ب] ، إذا كان : لكل س٢ > س١ فإن:

ق(س٢) > ق(س١) لأي عددين س١ ، س٢ ∈ [أ ، ب]

ويكون الاقتران ق(س) متناقصاً على الفترة [أ،ب] ، إذا كان : لكل س٢ > س١ فإن:

ق(س٢) < ق(س١) لأي عددين س١ ، س٢ ∈ [أ ، ب]

قـــــاعدة

إذا كان ق(س) معرفاً على الفترة [أ،ب] ، فإن ق(س) يكون :

١ متزايداً في الفترة [أ،ب] ، إذا كانت ق′(س) > ٠ لكل س في الفترة] أ ، ب [.

٢ متناقصاً في الفترة [أ،ب] ، إذا كانت ق′(س) < ٠ لكل س في الفترة] أ ، ب [.

٣ ثابتاً في الفترة [أ،ب] ، إذا كانت ق′(س) = ٠ لكل س في الفترة] أ ، ب [.

خطوات بحث فترات التزايد والتناقص

إذا كان الاقتران ق(س) اقتراناً ، نتبع الخطوات الآتية لإيجاد فترات التزايد والتناقص:

١ إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعطى لنحصل على ق′(س) .

٢ نجد قيمة أو قيم س التي عندها المشتقة الأولى تساوي صفر .

٣ نرسم خط الأعداد ونعين النقطة أو النقاط على خط الأعداد ونقسم المجال إلى فترات.

٤ نبحث إشارة ق′(س) حول قيمة أو قيم س السابقة في كل فترة ، ثم نُعين الإشارة ، ويصنف كما يلي:

⇦ يكون الاقتران ق(س) متزايد على مجالهُ إذا كانت إشارة ق′(س) موجبة ، ق′(س) > ٠ ← (+ + + +)

⇦ ويكون الاقتران ق(س) متناقص على مجالهُ إذا كانت إشارة ق′(س) سالبة ، ق′(س) < ٠ ← (– – – –)

⇦ أما إذا كان ق′(س) = ٠ ، فإن الاقتران ق(س) يكون اقتران ثابت على مجالهُ.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ﻫ(س) = ٢س^{٢} + ٨س + ٦ ، س ∈ ع

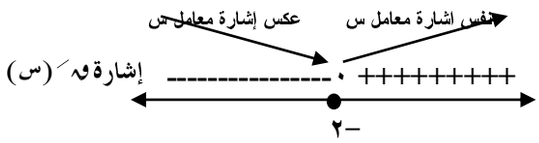
الحـــل

١) نشتق الاقتران ﻫ(س) = ٢س^{٢} + ٨س + ٦ ← ﻫ′(س) = ٤س + ٨

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← ٤س + ٨ = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : ٤س + ٨ = ٠ ← $\frac{٤}{٤}$س = $\frac{-٨}{٤}$ ← س = −٢

٤) نضع −٢ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ﻫ′(س) في جوار س = −٢



الاقتران ﻫ(س) متزايد على الفترة [−٢ ، ∞[

الاقتران ﻫ(س) متناقص على الفترة]−∞ ، −٢]

مثال ٢

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ﻫ(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١ ، س ∈ ع

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

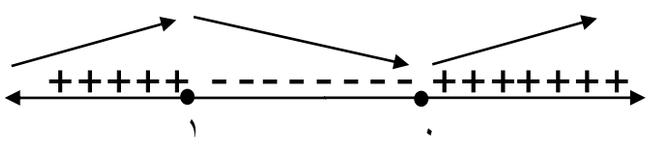
١) نشتق الاقتران ﻫ(س) = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} − ١ ← ﻫ′(س) = ٦س^{٢} − ٦س

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← ٦س^{٢} − ٦س = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : ٦س^{٢} − ٦س = ٠ ← ٦س(س − ١) = ٠

إما : ٦س = ٠ ← س = ٠ أو س − ١ = ٠ ← س = ١

٤) نضع ٠ ، ١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ﻫ′(س)



الاقتران ﻫ(س) متناقص على الفترة [٠ ، ١]

الاقتران ﻫ(س) متزايد على الفترة]−∞ ، ٠] ∪ [١ ، ∞[





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٣

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ه(س) = –س^{٣} + ٣س + ٢ ، س ∈ ع

الحـــل

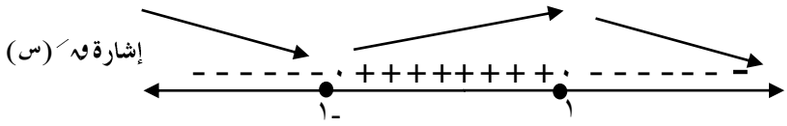
١) نشتق الاقتران ه(س) = –س^{٣} + ٣س + ٢ ← ه′(س) = –٣س^{٢} + ٣

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← –٣س^{٢} + ٣ = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : – ٣س^{٢} + ٣ = ٠ ← $\frac{-٣}{-٣}$ س^{٢} = $\frac{-٣}{-٣}$ ← س^{٢} = ١ (نأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

إما : س = ١ أو س = –١

٤) نضع ١ ، –١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ه′(س)



الاقتران ه(س) متزايد على الفترة [–١ ، ١]

الاقتران ه(س) متناقص على الفترة]–∞ ، –١[∪ [١ ، ∞ [

مثال ٤

أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ه(س) = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – ١٢س + ١٠ ، س ∈ ع

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

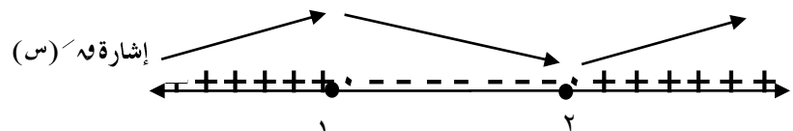
١) نشتق الاقتران ه(س) = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} – ١٢س + ١٠ ← ه′(س) = ٦س^{٢} – ٦س – ١٢

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← ٦س^{٢} – ٦س – ١٢ = ٠ (نقسم طرفي المعادلة على العدد ٦)

٣) نحل المعادلة الناتجة : س^{٢} – س – ٢ = ٠ ← (س – ٢)(س + ١) = ٠ (نحلل المقدر الثلاثي)

إما : (س – ٢) = ٠ ← س = ٢ أو (س + ١) = ٠ ← س = –١

٤) نضع ٢، –١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ه′(س)



الاقتران ه(س) متناقص على الفترة [–١ ، ٢]

الاقتران ه(س) متزايد على الفترة]–∞ ، –١[∪]٢ ، ∞[





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: القيم القصوى للإقتران

أتعلم

يكون للاقتران ق(س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س = أ ، إذا كان:

١ ق′(أ) = ٠

٢ يغير ق(س) من سلوكه حول س = أ من التزايد إلى التناقص أو العكس.

خطوات إيجاد القيم القصوى للاقتران

لإيجاد القيم القصوى للاقتران ق(س) ، نتبع الخطوات التالية :

١ إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعطى لنحصل على ق′(س) .

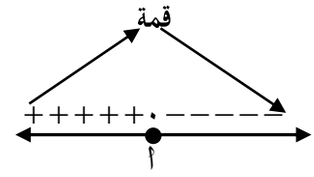
٢ نجد قيمة أو قيم س التي عندها المشتقة الأولى تساوي صفر .

٣ نرسم خط الأعداد ونعين النقطة أو النقاط على خط الأعداد ونقسم المجال إلى فترات.

٤ نبحث إشارة ق′(س) في كل فترة ، ثم نُعين الإشارة ونحدد نوع القيم القصوى (عظمى ، صغرى).

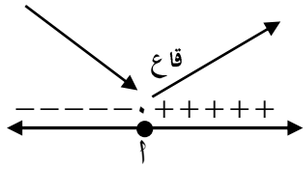
٥ نعوض بالاقتران الأصلي بقيمة أو قيم س ونجد القيم القصوى قيم ص (عظمى ، صغرى).

قيمة عظمى محلية



إذا كان ق′(س) > ٠ على اليسار ، ق′(س) < ٠ على اليمين ، يوجد قيمة عظمى محلية

قيمة صغرى محلية



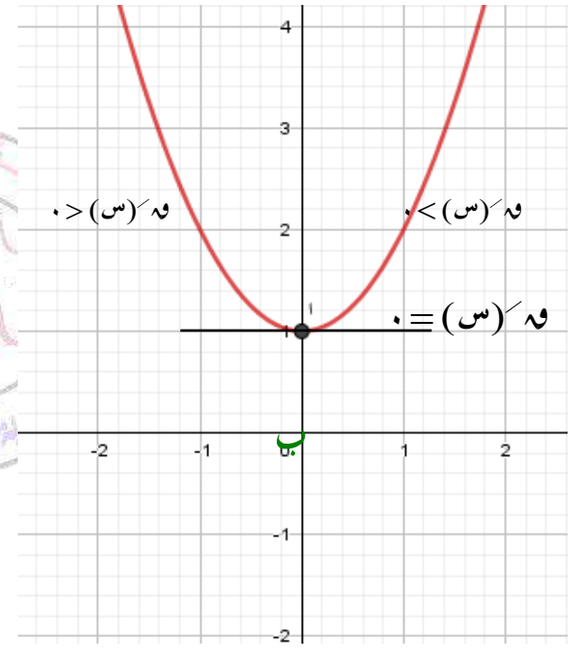
إذا كان ق′(س) < ٠ على اليسار ، ق′(س) > ٠ على اليمين ، يوجد قيمة صغرى محلية.





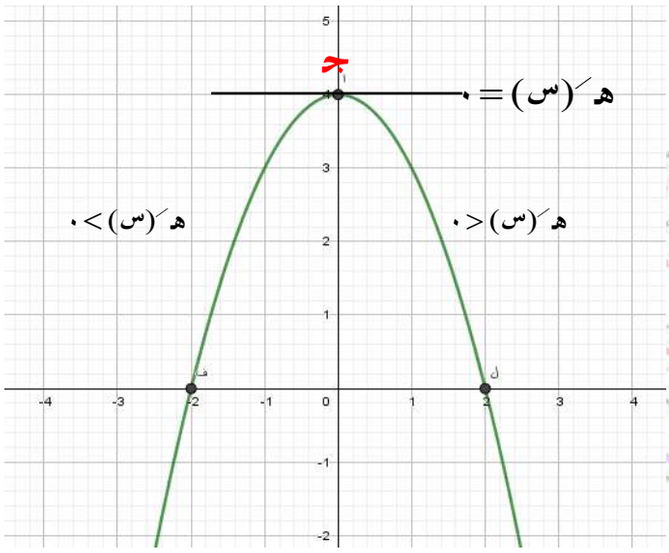
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

● تأمل الشكلين المرسومين التاليين ، لتلاحظ العلاقة بين إشارة المشتقة والقيم القصوى للاقتران:



هـ(ب) قيمة صغرى محلية للاقتران هـ(س)

لأن : إشارة هـ´(س) تغيرت من سالبة إلى موجبة.

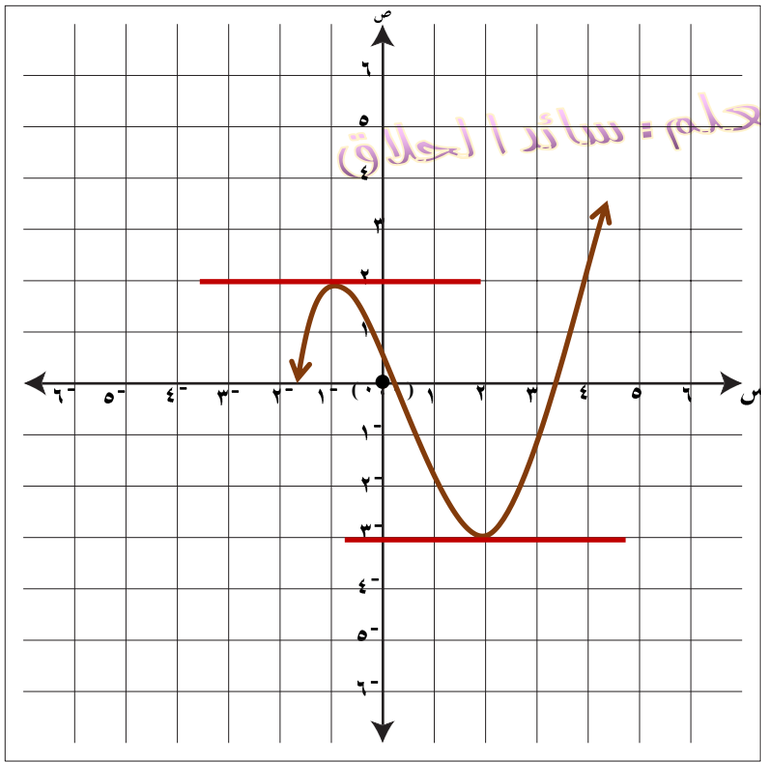


الشكل (٢)

هـ(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران هـ(س)

لأن : إشارة هـ´(س) تغيرت من موجبة لسالبة.

تأمل الشكل المرسوم:



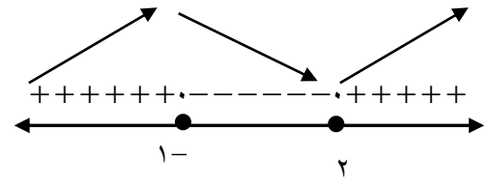
نلاحظ من التمثيل البياني أن :

عند س = –١ يوجد قيمة عظمى محلية وهي:

هـ(–١) = ٢

عند س = ٢ يوجد قيمة صغرى محلية وهي:

هـ(٢) = –٣



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١

أجد القيم القصوى للاقتران $هـ(س) = ٣س^{٢} - ١٢س - ١$ ، $س \in ح$ ، إن وجدت ، وأحدد نوعها.

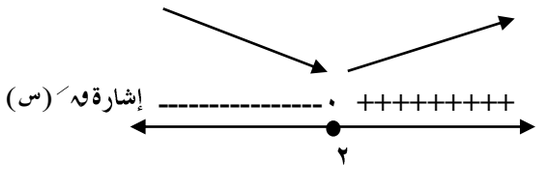
الحـــل

١) نشتق الاقتران $هـ(س) = ٣س^{٢} - ١٢س - ١$ ← $هـ'(س) = ٦س - ١٢$

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← $٦س - ١٢ = ٠$

٣) نحل المعادلة الناتجة : $٦س - ١٢ = ٠$ ← $\frac{٦}{٦}س = \frac{١٢}{٦}$ ← $\boxed{س = ٢}$

٤) نضع ٢ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة $هـ'(س)$ حول $س = ٢$



من إشارة $هـ'(س)$ يتضح تغير سلوك الاقتران من التناقص للتزايد

وجود قيمة صغرى محلية عند $س = ٢$

٥) نعوض بالاقتران الأصلي لإيجاد قيمتها :

$هـ(٢) = ٣ \times (٢)^{٢} - ١٢ \times ٢ - ١ = (٤ \times ٣) - ٢٤ - ١ = -١٢ - ١ = \boxed{-١٣}$

مثال ٢

عين القيم القصوى للاقتران $هـ(س) = -س^{٢} - ٦س + ١$ ، $س \in ح$ ، إن وجدت ، وأحدد نوعها.

الحـــل

إعداد المعلم: سائد الحلاق

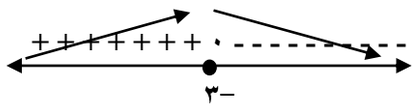
١) نشتق الاقتران $هـ(س) = -س^{٢} - ٦س + ١$ ← $هـ'(س) = -٢س - ٦$

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← $-٢س - ٦ = ٠$

٣) نحل المعادلة الناتجة : $-٢س - ٦ = ٠$ ← $-٢س = ٦$ ← $\frac{-٢}{-٢}س = \frac{٦}{-٢}$ ← $\boxed{س = -٣}$

٤) نضع -٣ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة $هـ'(س)$ حول $س = -٣$

من إشارة $هـ'(س)$ يتضح تغير سلوك الاقتران من التزايد للتناقص



وجود قيمة عظمى محلية عند $س = -٣$

٥) نعوض بالاقتران الأصلي لإيجاد قيمتها: $هـ(-٣) = -(-٣)^{٢} + (-٦ \times -٣) + ١ = -٩ + ١٨ + ١ = \boxed{١٠}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٣

عين القيم القصوى للاقتران ه(س) = – س^{٣} + ٢٧س ، س ∈ ح ، إن وجدت ، وحدد نوعها.

الحـــل

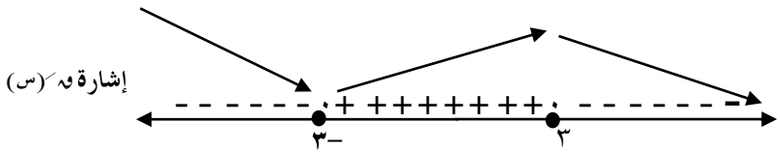
١) نشتق الاقتران ه(س) = – س^{٣} + ٢٧س ← ه′(س) = – ٣س^{٢} + ٢٧

٢) نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← – ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠

٣) نحل المعادلة الناتجة : – ٣س^{٢} + ٢٧ = ٠ ← – ٣س^{٢} = – ٢٧ ← س^{٢} = $\frac{-٢٧}{-٣}$ ← س^{٢} = ٩

← س = $\sqrt{٩}$ ← إما : س = ٣ أو س = – ٣

٤) نضع ٣ ، – ٣ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ه′(س)



من إشارة ه′(س) يتضح وجود قيمة عظمى محلية عند س = ٣

وقيمتها : ه(٣) = – (٣)^{٣} + (٣ × ٢٧) = – ٨١ + ٢٧ = – ٥٤

ووجود قيمة صغرى محلية عند س = – ٣ وقيمتها :

ه(– ٣) = – (– ٣)^{٣} + (– ٣ × ٢٧) = + ٨١ – ٢٧ = – ٥٤

إعداد المعلم سائد الحلاق

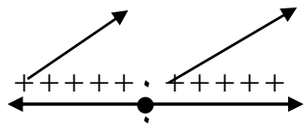
مثال ٤

أثبت أنهُ لا يوجد للاقتران ه(س) = س^{٣} + ٢٧ ، س ∈ ح . أي قيم قصوى محلية.

الحـــل

ه′(س) = ٣س^{٢}

٣س^{٢} = ٠ ← س = ٠



∵ ه (س) لم يغير من سلوكهُ حول س = ٠ واشارة المشتقة لم تتغير.

∴ لا يوجد قيم قصوى محلية في مجالهُ.





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٥

إذا كان الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} – $\frac{٥}{٢}$س^{٢} – ٦س + $\frac{١٧}{٦}$ ، س ∈ ح ، جد:

١ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)، وما نوعها؟

٢ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

الحـــل

ق(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} – $\frac{٥}{٢}$س^{٢} – ٦س + $\frac{١٧}{٦}$

← ق′(س) = ٣ × $\frac{١}{٣}$س^{٢} – ٢ × $\frac{٥}{٢}$س – ٦ ← س^{٢} – ٥س – ٦

نساوي المشتقة الأولى بالصفر ← س^{٢} – ٥س – ٦ = ٠

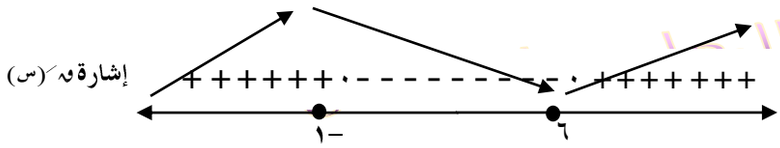
نحل المعادلة الناتجة : س^{٢} – ٥س – ٦ = ٠

(س – ٦)(س + ١) = ٠

إما : س – ٦ = ٠ ← **س = ٦**

أو س + ١ = ٠ ← **س = –١**

نضع ٦ ، –١ على خط الأعداد ثم نبحث إشارة ق′(س)



من إشارة ق′(س) يتضح وجود قيمة عظمى محلية عند س = –١ وقيمتها :

ق(–١) = $\frac{١}{٣}$ × (–١)^{٣} – $\frac{٥}{٢}$ × (–١)^{٢} – ٦ × (–١) + $\frac{١٧}{٦}$ = **٦**

ووجود قيمة صغرى محلية عند س = ٦

وقيمتها : ق(٦) = $\frac{١}{٣}$(٦)^{٣} – $\frac{٥}{٢}$ × (٦)^{٢} – ٦ × ٦ + $\frac{١٧}{٦}$ = **–٥١$\frac{١}{٦}$**

الاقتران ق(س) متناقص على الفترة [–١ ، ٦]

الاقتران ق(س) متزايد على الفترة]–∞ ، –١[∪]٦ ، ∞[

ملاحظة

إذا تحول الاقتران من متزايد إلى متناقص فإنه يمر بقيمة عظمى ، و إذا تحول من متناقص إلى متزايد فإنه يمر بقيمة صغرى.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٦

إذا كان الاقتران ق(س) = ق(س) = –س^{٣} + ٦س^{٢} + ١ ، س ∈ ح ، جد:

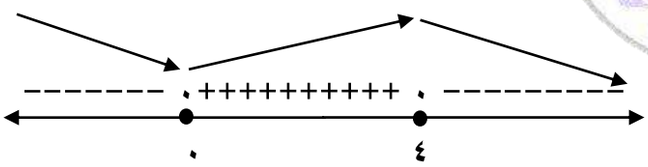
١ فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س)

٢ القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س)، وما نوعها؟

الحـــل

ق′(س) = –٣س^{٢} + ١٢س ← –٣س^{٢} + ١٢س = ٠ ← –٣س(س – ٤) = ٠

أما: س = ٠ أو س – ٤ = ٠ ← س = ٤



الاقتران ق(س) متناقص على الفترة :]–∞ ، ٠] ∪ [٤ ، ∞[

الاقتران ق(س)متزايد على الفترة : [٠ ، ٤] .

← يوجد قيمة عظمى محلية عند س = ٤

قيمتها : ق(٤) = –(٤)^{٣} + ٦ × (٤)^{٢} + ١ = –٦٤ + ٩٦ + ١ = ٣٣

← يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٠ ، قيمتها ق(٠) = –(٠)^{٣} + ٦ × (٠)^{٢} + ١ = ١

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٧

إذا كان الاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + بس – ٧ ، س ∈ ح ، يأخذ قيمة صغرى محلية عند س = –١ ، فما قيمة الثابت ب؟

الحـــل

ق′(س) = ٤س + ب

∵ الاقتران ق(س) لهُ قيمة صغرى عند س = –١ ∴ ق′(–١) = ٠

ق′(–١) = ٤ × –١ + ب = ٠

–٤ + ب = ٠ ← ب = ٤

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٨

إذا كان الاقتران هـ(س) = $-س^{٢} + \frac{س}{جـ} - ٣$، س ∈ ح ، جـ ≠ ٠ ، يأخذ قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٤}$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

الحـــل

هـ′(س) = $-٢س + \frac{١}{جـ}$

∵ الاقتران هـ(س) يأخذ قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{١}{٤}$ ← ∴ هـ′$\left(\frac{١}{٤}\right)$ = ٠

$-٢ \times \left(\frac{١}{٤}\right) + \frac{١}{جـ} = ٠$

$-\frac{١}{٢} + \frac{١}{جـ} = ٠$

$\frac{١}{جـ} = \frac{١}{٢}$ ← $\boxed{جـ = ٢}$

مثال ٩

ما قيمة الثابت أ الذي يجعل للاقتران وه(س) = $\frac{١}{٣}س^{٣} + أس^{٢} + ١٦س$ ، س ∈ ح ، قيمة صغرى محلية عند س = ٨ ؟

الحـــل

وه′(س) = $س^{٢} + ٢أس + ١٦$

∵ وه(٨) يأخذ قيمة صغرى محلية. ← وه′(٨) = ٠

وه′(٨) = $٨^{٢} + ٢ \times أ \times ٨ + ١٦ = ٠$

$٦٤ + ١٦أ + ١٦ = ٠$

$١٦أ + ٨٠ = ٠$

$١٦أ = -٨٠$ ←

$\frac{١٦أ}{١٦} = \frac{-٨٠}{١٦}$ ←

$\boxed{أ = -٥}$ ←

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٠

ما قيمة الثابتين أ ، ب للاقتران هـ(س) = س^{٣} – ب س + أ ، س ∈ ع ، والتي يجعل للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، علماً بأنهُ يمر بالنقطة (٢ ، ٣) .

الحـــل

∵ الاقتران هـ(س) يمر بالنقطة (٢ ، ٣)

∴ هـ(٢) = ٢^{٣} – ب × ٢ + أ = ٣ ← $\boxed{٨ - ٢ب + أ = ٣}$ ← $\boxed{١}$

∵ الاقتران هـ(س) يأخذ قيمة صغرى محلية عند س = ١ ← ∴ هـ$'$(١) = ٠

هـ$'$(س) = ٣س^{٢} – ب

٠ = ٣(١)^{٢} – ب

٠ = ٣ – ب ← $\boxed{ب = ٣}$

⇐ نعوض عن قيمة ب = ٣ في المعادلة رقم (١) لإيجاد قيمة أ :

٨ – (٣ × ٢) + أ = ٣

٨ – ٦ + أ = ٣

٢ + أ = ٣

أ = ٣ – ٢ ← $\boxed{أ = ١}$ ⇐ قيمة الثابتين: أ = $\boxed{١}$ ، ب = $\boxed{٣}$

مثال ١١

إذا كان للاقتران هـ(س) = ٢س^{٣} – أ س قيمة صغرى محلية عندس = ١ جد قيمة س التي يكون عندها قيمة عظمى للاقتران.

الحـــل

هـ$'$(س) = ٦س^{٢} – أ

٠ = ٦(١)^{٢} – أ

٠ = ٦ – أ ← $\boxed{أ = ٦}$

لإيجاد قيمة س ، نعوض عن قيمة أ ، ثم نساوي المشتقة الأولى بالصفر : هـ(س) = ٢س^{٣} – ٦ س

⇐ هـ$'$(س) = ٦س^{٢} – ٦ ← ٠ = ٦س^{٢} – ٦ ← ٦ = ٦س^{٢} ← ١ = س^{٢}

⇐ س = ± ١

ومنها يوجد للاقتران هـ(س) قيمة عظمى محلية عند $\boxed{س = -١}$

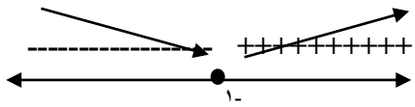
إعداد المعلم : سائد احلاق
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

القيم القصوى (١-٤) | حلول الكتاب الوزاري صفحة ٢٤

١ يوجد للاقتران هـ (س) قيمة عظمى محلية عند النقطة $(-٢ ، ٦)$ وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(٠ ، ١)$

٢ هـ (س) $= ٣س^{٢} + ٦س - ١$ ← هـ′(س) $= ٦س + ٦$ ← $٦س + ٦ = ٠$

$٦س + ٦ = ٠ \leftarrow س = \frac{-٦}{٦} \leftarrow \boxed{س = -١}$



الاقتران هـ (س) متزايد على الفترة $[-١ ، \infty[$

الاقتران هـ (س) متناقص على الفترة $]-\infty ، -١]$

يوجد للاقتران هـ (س) قيمة صغرى محلية عند س $= -١$ ،

وقيمتها : هـ $(-١) = ٣ \times (-١)^{٢} + ٦ \times (-١) - ١ = ٣ - ٦ - ١ = \boxed{-٤}$

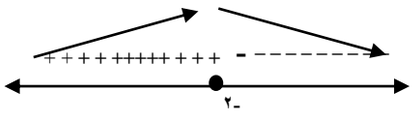
٣ ∵ الاقتران له قيمة عظمى محلية عندما س $= ٢$ ، ∴ هـ′ $(٢) = ٠$ ← هـ′(س) $= -$ جـ $- ٢س$

هـ′ $(٢) = ٠ \leftarrow -$ جـ $- ٢ \times ٢ = ٠ \leftarrow -$ جـ $- ٤ = ٠ \leftarrow$ جـ $= \boxed{-٤}$

٤ هـ (س) $= (س + ٢) \times (-٢س - ٤)$

هـ′(س) $= (س + ٢)(-٢) + (-٢س - ٤)(١) = -٢س - ٤ - ٢س - ٤ = -٤س - ٨$

هـ′(س) $= -٤س - ٨ \leftarrow$ هـ′(س) $= ٠ \iff -٤س - ٨ = ٠ \iff -٤س = ٨ \iff س = \frac{٨}{-٤} = \boxed{-٢}$

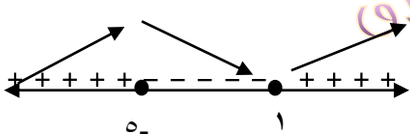


الاقتران متزايد على الفترة $]-\infty ، -٢]$ ، لأن المشتقة موجبة .

الاقتران متناقص على الفترة $[-٢ ، \infty[$ ، لأن المشتقة سالبة .

٥ ك′(س) $= س^{٢} + ٤س - ٥$

$س^{٢} + ٤س - ٥ = ٠ \leftarrow (س + ٥)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = \boxed{-٥} ، س = \boxed{١}$



الاقتران متزايد على الفترة $]-\infty ، -٥] \cup [١ ، \infty[$

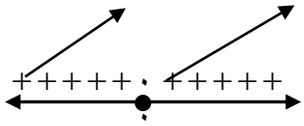
الاقتران متناقص على الفترة $[-٥ ، ١]$.

من إشارة هـ′ (س) يتضح وجود قيمة عظمى محلية عند س $= -٥$ وقيمتها :

هـ $(-٥) = \frac{١}{٣}(-٥)^{٣} + ٢(-٥)^{٢} - ٥(-٥) - ٥ = \boxed{٢٨\frac{١}{٣}}$

ووجود قيمة صغرى محلية عند س $= ١$ وقيمتها : هـ $(١) = \frac{١}{٣}(١)^{٣} + ٢(١)^{٢} - ٥(١) - ٥ = \boxed{-٧\frac{٢}{٣}}$

٦ هـ′(س) $= ٣س^{٢} \leftarrow ٣س^{٢} = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٠}$



∵ هـ (س) لم يغير من سلوكهُ حول س $= ٠$ واشارة المشتقة لم تتغير.

∴ لا يوجد قيم قصوى محلية في مجالهُ.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٤ – ١ : القيم القصوى للاقتران

أولاً : إختر الإجابة الصحيحة

١) ما عدد القيم القصوى للاقتران هـ(س) = س – ٥ ؟

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) لا يوجد

٢) ما عدد القيم القصوى للاقتران هـ(س) = س^{٢} – ٤س ؟

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) لا يوجد

٣) ما عدد القيم القصوى للاقتران ل(س) = س^{٣} + ٧ ؟

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

٤) ما عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣} – ٣س^{٢} + ٥س – ١ ؟

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) لا يوجد

٥) ليكن و(س) = ٣س^{٢} – ٦س + ٧ ، س ∈ ح ، فما قيمة س التي يكون للاقتران و(س) عندها قيمة صغرى محلية؟

أ) ٦ ب) ٠ جـ) ١ د) – ١

٦) ليكن ك(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} – ١٠س + ٤ ، فما قيمة س التي يكون للاقتران ك(س) عندها قيمة عظمى محلية؟

أ) – ٢ ب) ٢ جـ) – ٣ د) ٥

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٧) إذا كان للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند النقطة (٣ ، ٩) ، فما قيمة هـ(٣)؟

أ) ٣ ب) ٩ جـ) ٠ د) ١

٨) إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (– ٢ ، ٤) ، فما قيمة ق′(– ٢)؟

أ) – ٢ ب) ١ جـ) ٤ د) ٠

٩) إذا كان الاقتران و(س) = أس^{٢} + ٤س – ٥ ، لهُ قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) – ١ ب) – ٢ جـ) ٢ د) – ٤

١٠) إذا كان للاقتران هـ(س) = – س^{٢} – بس + ١٠ ، قيمة عظمى محلية عند س = ٢ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) ٤ ب) – ٢ جـ) – ١ د) – ٤





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١١ إذا كان هـ′(س) = ٦ – ٣س ، فما الفترة التي يكون فيها الاقتران هـ(س) متناقصاً ؟

أ]– ∞ ، ٢[ب]٢ ، ∞[جـ]٢ ، ∞–[د]∞ ، ٢–[

١٢ ما فترة التناقص للاقتران هـ(س) = ٢س^{٢} – ٤س + ٣ ، س ∈ ح ؟

أ]١ ، ∞[ب]١– ، ∞[جـ]١ ، ∞–[د]١٠ ، ∞–[

١٣ ما فترة التزايد للاقتران م(س) = –٣س^{٢} + ١٢س – ٥ ، س ∈ ح ؟

أ]٢ ، ∞[ب]٢ ، ∞–[جـ]٢ ، ∞–[د]٢– ، ∞–[

١٤ ما فترة التناقص للاقتران هـ(س) = س^{٣} – ٢٧س ، س ∈ ح ؟

أ]٣ ، ∞[∪]∞ ، ٣–[ب]٣ ، ∞[جـ]∞ ، ٣–[د]٣ ، ٣–[

١٥ ما فترة التناقص للاقتران ل(س) = –س^{٣} + ٣س + ٥ ، س ∈ ح ؟

أ]١ ، ∞[∪]∞ ، ١–[ب]١ ، ∞[جـ]∞ ، ١–[د]١ ، ١–[

١٦ ما فترة التزايد للاقتران ك(س) = $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} – ٨س – ٣ ، س ∈ ح ؟

أ]٢ ، ∞[∪]∞ ، ٢–[ب]٢ ، ∞[جـ]∞ ، ٢–[د]٢ ، ٢–[

١٧ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان للاقتران هـ(س) ،قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢ ، ٣) ، فما قيمة هـ′(٢) ؟

أ صفر ب $\frac{٣}{٢}$ جـ ٢ د ٣

١٨ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان هـ′(س) = ٨ – ٢س ، فما الفترة التي يكون فيها الاقتران هـ(س) متزايداً ؟

أ]– ∞ ، ٤[ب]٤ ، ∞[جـ]٤ ، ∞–[د]٤ ، ∞–[

١٩ فلسطين : ٢٠١٩

ما عدد القيم القصوى للاقتران ع(س) = ٢س^{٣} + ٢ ، س ∈ ح ؟

أ ٢ ب ١ جـ ٣ د صفر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٠ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كان للاقتران ﻫ(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (–١٠، ٥) ، فما قيمة ﻫ`(١٠)؟

أ ٥ ب –١٠ ج صفر د ٣

٢١ طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان للاقتران ﻫ(س) = ب س^{٢} – ٤س + ٥ ، س ∈ ح قيمة صغرى محلية س = ١ ، فإن قيمة ب = ...

أ ٤ ب ١ ج –٢ د ٢

٢٢ الوسطى : ٢٠١٩ تجريبي

الاقتران ﻫ(س) = س^{٢} + ٤س لهُ قيمة قصوى عند س =

أ ٤ ب ٢ ج –٤ د –٢

٢٣ شرق غزة: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كان للاقتران ﻫ(س) = س^{٢} – أس + ٤، س ∈ ح قيمة صغرى محلية س = ٣ ، فإن قيمة أ = ...

أ ٦ ب –٦ ج ٤ د –٤

٢٤ فلسطين : ٢٠١٨ إكمال ديسمبر

إذا كان ﻫ(س) = ٨س – ٢س^{٢} ، فإن قيمة س التي تجعل للاقتران ﻫ(س) عندها قيمة عظمى محلية هي:

أ ٨ ب ٤ ج ٢ د –٢

٢٥ فلسطين : ٢٠١٧

إذا كان ﻫ(س) = أس^{٢} + ٨س + ٩ لهُ قيمة صغرى محلية عند س = –٢ فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ ٣ ب ٢ ج ١ د ٤

٢٦ فلسطين : ٢٠١٦

الاقتران ﻫ(س) = ٦س – س^{٢} لهُ قيمة عظمى محلية تساوي:

أ ٣ ب ٦ ج ٩ د ١٢

٢٧ فلسطين : ٢٠١٦ إكمال

إذا كان ﻫ(س) = س^{٢} – ٤س + ٥ ، فإن القيمة الصغرى المحلية للاقتران ﻫ(س) هي:

أ ٥ ب ٢ ج ١ د صفر

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	عين القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل من الاقترانات التالية:	أ	قيمة صغرى محلية عند س = ٢
	أ) هـ(س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١ ، س ∈ ع	ب	قيمة عظمى محلية عند س = ٤
	ب) هـ(س) = − س^{٢} + ٨ س − ٤ ، س ∈ ع	ج	لا يوجد
	جـ) ق(س) = س^{٣} + ١٢٥ ، س ∈ ع	د	قيمة عظمى محلية س = ٢ قيمة صغرى محلية س = ٠
	د) ك(س) = − س^{٣} + ٣س^{٢} + ١، س ∈ ع	هـ −	قيمة صغرى محلية عند س = ١
	هـ) ل(س) = (س − ٣)(٢س + ٢)، س ∈ ع	و	لا يوجد
	و) ن(س) = س^{٤} $\left(\frac{١}{س}\right)$ + ٢٧، س ∈ ع	ز	قيمة صغرى محلية س = ٠ قيمة عظمى محلية س = −٢
	ز) ل(س) = س(٣س + س^{٢})، س ∈ ع		
٢	ابحث تزايد وتناقص الاقتران هـ(س) حيث: هـ(س) = ٥س^{٢} − ٥س + ٥ ، س ∈ ع		متزايد $\left[\frac{١}{٢}، \infty\right[$ متناقص $\left]-\infty، \frac{١}{٢}\right]$
٣	ابحث تزايد وتناقص الاقتران هـ(س) حيث : هـ(س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩س + ٥ ، س ∈ ع		متناقص [١، ٣] متزايد $]-\infty، ١] \cup [٣، \infty[$
٤	أبين أنهُ لا يوجد للاقتران هـ(س) = ٦س^{٣} − ٦ ، س ∈ ع قيم قصوى محلية في مجالهُ.		يترك للطالب
٥	إذا كان الاقتران هـ(س) = ٤س^{٢} − ١٦س + ١ ، س ∈ ع ، جد	أ	متزايد [٢ ، ∞ [متناقص]− ∞ ، ٢]
	أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) على ع	ب	قيمة صغرى محلية س = ٢ هـ(٢) = −١٥
	ب) القيم القصوى للاقتران هـ(س) ، ثم حدد نوعها		
٦	إذا كان الاقتران هـ(س) = − ٢س^{٣} + ٩س^{٢} − ١٢س − ١ ، س ∈ ع ، جد	أ	متناقص $]-\infty، ١] \cup [٢، \infty[$ متزايد [١، ٢]
	أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) على ع	ب	قيمة صغرى محلية س = ١ قيمة عظمى محلية س = ٢
	ب) القيم القصوى للاقتران هـ(س) ، ثم حدد نوعها		

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٧	إذا كان الاقتران قا(س) = س^{٣} – ب س^{٢} + ٥ ، س ∈ ح ، قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، جد قيمة الثابت ب .	ب = ٣
٨	ما قيمة الثابت جـ للاقتران ق(س) = جـ س^{٣} – ٣س^{٢} + ٣س – ٢ ، س ∈ ح ، والتي تجعل لهُ قيمة قصوى محلية عند س = ١ ؟	جـ = ١
٩	ليكن الاقتران هـ(س) = س^{٣} – أ س^{٢} – ٣ ، س ∈ ح ، ما قيمة الثابت أ التي تجعل هـ$'$(٢) = ٠؟	أ = ٣
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان الاقتران قا(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} – ٩س ، س ∈ ح ، جد أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران قا(س) على مجاله ب) القيم القصوى للاقتران قا(س) ، وأحدد نوعها	متزايد]–∞ ، –٣[∪]١ ، ∞[متناقص [–٣ ، ١] قيمة عظمى محلية س = –٣ قا(–٣) = ٢٧– قيمة صغرى محلية س = ١ قا(١) = ٥–
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان الاقتران قا(س) = س^{٣} – ٤٨س ، س ∈ ح ، جد: أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران قا(س) على ح ب) القيم القصوى للاقتران قا(س) ، ثم حدد نوعها	متزايد]–∞ ، –٤[∪]٤ ، ∞[متناقص [–٤ ، ٤] قيمة عظمى محلية س = –٤ قا(–٤) = ١٢٨ قيمة صغرى محلية س = ٤ قا(٤) = ١٢٨
١٢	نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان للاقتران قا(س) = س^{٣} – جـ س – ٦ قيمة صغرى محلية عند س = ٢ أوجد قيمة س التي تجعل للاقتران عندها قيمة عظمى محلية.	س = –٢
١٣	فلسطين : ٢٠١٩ إذا كان الاقتران قا(س) = س^{٢} (س – ٣) ، س ∈ ح ، جد أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران قا(س) على ح ب) القيم القصوى للاقتران قا(س) ، ثم حدد نوعها	أ) متزايد]–∞ ، ٠[∪]٢ ، ∞[متناقص [٠ ، ٢] ب) قيمة عظمى محلية س = ٠ قا(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية س = ٢ قا(٢) = ٤–

إعداد للعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٤	فلسطين: ٢٠١٩ إكمال إذا كان الاقتران $\text{ه}(س)=\frac{١}{٣}س^{٣}-٤س+٥$، $س\in ع$ ، جد أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران $\text{ه}(س)$ على ع ب) القيم القصوى للاقتران $\text{ه}(س)$ ، ثم حدد نوعها	أ	متزايد $]-\infty،-٢[\cup]٢،\infty[$ متناقص $[-٢،٢]$
		ب	قيمة عظمى محلية س $=-٢$ $\text{ه}(-٢)=\frac{٣١}{٣}$ قيمة صغرى محلية س $=٢$ $\text{ه}(٢)=-\frac{١}{٣}$
١٥	طوباس : ٢٠١٩ تجريبي أجد القيم القصوى للاقتران $\text{ه}(س)=(س+٣)(س-٢)^{٢}$ ، $س\in ع$ ،وحدد نوعها		قيمة صغرى محلية س $=-\frac{١}{٢}$ $\text{ه}\left(-\frac{١}{٢}\right)=-٦,٢٥$
١٦	شرق غزة : ٢٠١٩ تجريبي عين فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للاقتران $\text{ه}(س)=س^{٣}-٣س^{٢}$،$س\in ع$		متزايد $]-\infty،٠[\cup]٢،\infty[$ متناقص $[٠،٢]$
١٧	جنين : ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كان الاقتران $\text{ه}(س)=أس^{٣}+٢س+ب$ ، $س\in ع$ ، وكان $\text{ه}'(١)=٥$ ، ومنحنى الاقتران $\text{ه}(س)$ يمر بالنقطة $(٢،-٣)$ ، فما قيمة الثابتين أ،ب ؟		أ $=١$ ب $=-١٥$
١٨	رفح : ٢٠١٩ تجريبي ف١ فلسطين : ٢٠١٦ إذا كان الاقتران $\text{ه}(س)=أس^{٢}-٤س+ب$ ، $س\in ع$ ، قيمة صغرى محلية عند س $=٢$ وكان $\text{ه}(٢)=٠$ ،جد قيمة أ،ب		أ $=١$ ب $=٤$
١٩	يطا (١): ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كان الاقتران $\text{ه}(س)=أس^{٢}-بس$ ، $س\in ع$ ،قيمة صغرى محلية مقدارها (-٤) عندما س $=٢$ ،جد قيمة كل من أ،ب.		أ $=١$ ب $=٤$
٢٠	يطا (٢): ٢٠١٩ تجريبي ف١ إذا كان الاقتران $\text{ه}(س)=أس^{٢}+بس$ ، $س\in ع$ ،قيمة صغرى محلية عند النقطة $(-١،-١)$ ، أوجد قيمة كل من أ،ب.		أ $=١$ ب $=٢$

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢١	فلسطين: ٢٠١٨ إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٢} – ب س + ٢ ، س ∈ ح ، وكانت إشارة ق$'$(س) كما في الشكل المجاور ، أوجد قيمة ب، جـ علماً بأن ق(١) = –٤ – – – – – – – – – ٠ + + + + + + + + جـ	ب = ٧ جـ = $\frac{٧}{٢}$
٢٢	فلسطين : ٢٠١٤إكمال بين أنهُ لا يوجد للاقتران ق(س) = ٨ – س^{٣} ، س ∈ ح ، أي قيم قصوى محلية.	أجب بنفسك
٢٣	فلسطين : ٢٠١٤ إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} + أ س^{٢} – ٩س + ب ،قيمة صغرى محلية عند س = ١ تساوي ٣ ، أوجد الثابتين أ،ب .	أ = ٣ ب = ٨
٢٤	فلسطين : ٢٠١٣ إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} – ب س^{٢} ،قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، جد قيمة الثابت ب ، ثم احسب ق$'$(٣) إعداد المعلم : سائد الحلاق	ب = ٣ ق$'$(٣) = ٩
٢٥	فلسطين : ٢٠١٢ فلسطين : ٢٠٠٨ جد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣} – ٣س^{٢} ، وحدد نوعها	قيمة عظمى محلية س = ٠ ق(٠) = ٠ قيمة صغرى محلية س = ٢ ق(٢) = –٤
٢٦	فلسطين : ٢٠٠٩ عين القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٢} – ٦س + ٥	قيمة صغرى محلية عند س = ٣ ق(٣) = –٤
٢٦	فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال عين القيم القصوى للاقتران ق(س) = – س^{٢} + ١٠ س + ٥	قيمة عظمى محلية عند س = ٥ ق(٥) = ٣٠





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ــ غرب غزة	اختبار التفاضل		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفحات	١	المدرسة:	العلامة
	التاريخ:		الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن:	ستون دقيقة ٣٠

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة: (٩) علامات

١) ما متوسط التغير للاقتران هـ(س) = $\frac{٢}{س}$ + س ، عندما تتغير س من س$_١$ = ٢ إلى س$_٢$ = ٤؟

أ) $٢\frac{١}{٢}$ ب) $٧\frac{١}{٢}$ جـ) $-١\frac{١}{٢}$ د) $١\frac{١}{٢}$

٢) إذا كان الاقتران ص = $\frac{٢س}{س^{-٣}}$ ، فإن $\frac{ص}{س}$ يساوي :

أ) $-٤س^{-٣}$ ب) $-٤س^{-١}$ جـ) $٨س^{٣}$ د) $٦س^{٢}$

٣) إذا كان الاقتران هـ(س) = $\frac{أ^{٢}}{س^{٤}}$ ، وكان هـ′(١) = −٧٢ . فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ∓٣ ب) −٣ جـ) $\sqrt{٩}$ د) ٧٢

٤) إذا كان (هـ × هـ)′(٢) = −١٢ ، هـ(٢) = ٦ ، هـ′(٢) = −٤ ، ٥ هـ(٢) = −١٠ ، فما قيمة هـ′(٣)؟

أ) −٢ ب) ٢ جـ) ٦ د) −٦

٥) إذا كان الاقتران هـ(س) = $\frac{٢ - س}{-٢س}$ ، فما قيمة هـ′(١)؟

أ) صفر ب) ٤ جـ) −١ د) ١

٦) إذا كان الاقتران هـ(س) = ٤س + س^{٢} ، فإن قيمة س التي تجعل للاقتران هـ(س) عندها قيمة صغرى محلية هي:

أ) ٢ ب) −٢ جـ) −٤ د) ٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال الثاني: (٦) علامات

إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) عندما تتغير س في الفترة [٢ ، ٤] هو ١٥ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢س هـ(س) − ١ في نفس الفترة ، علماً بأن هـ (٤) = ٢ .

السؤال الثالث : (٥) علامات

إذا كان : هـ(س) = $\frac{١ - ٢س}{هـ(س)}$ ، جد هـ′(١) ، إذا علمت أن : هـ(١) = ٣ ، هـ′(١) = ٣

السؤال الرابع : (١٠) علامات

إذا كان الاقتران هـ(س) = ٢س^{٣} − ٦س + ١ ، س ∈ ح ، جد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) على ح ب) القيم القصوى للاقتران هـ(س) ، ثم حدد نوعها.

إنتهى





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ملخص التكامل

إذا كان ه(س) اقتراناً مشتقتهُ الأولى ه′(س) ، فإن التكامل غير المحدود للاقتران ه′(س) بالنسبة لـــ س يساوي ه(س)+ جـ ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز $\int$

، وبصورة عامة فإن : $\int$ ه′(س) ءس = ه(س) + جـ ، حيث جـ ∈ ع

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة ١ $\int$ أ .ءس = أ س + جـ ، حيث أ ، جـ عددان حقيقيان.

قاعدة ٢ $\int$ س^{ن} .ءس = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، حيث ن ، جـ عددان حقيقيان ، ن ≠ −١

قاعدة ٣ إذا كان ه(س)، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل

فإن: $\int$ (ه ± هـ)(س).ءس = $\int$ ه(س).ءس ± $\int$ هـ(س).ءس

قاعدة ٤ إذا كان ه(س) اقتراناً قابلاً للتكامل وكان ع(س) = ك.ه(س) حيث ك عدد حقيقي ، ك ≠ −١ ،

فإن: $\int$ (ع(س)) .ءس = ك $\int$ ه(س) .ءس = ك. $\int$ ه(س) .ءس

التكامل المحدود

تعريف

التكامل المحدود : إذا كان ه(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن :

$$\int_{أ}^{ب} \text{ه}'(\text{س}).ءس = \text{ه}(\text{س}) \Big|_{أ}^{ب} = \text{ه}(ب) - \text{ه}(أ)$$

حيث أ : الحد الأدنى ، ب : الحد الأعلى ، ب ، أ ∈ ع

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ملاحـــظات هامة

١ مشتقة التكامل غير المحدود تساوي نفسهُ.

٢ ثابت التكامل جـ لا يكتب في التكامل المحدود .

٣ مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر دائماً .

٤ تكامل العدد الثابت المحدود $\int_{أ}^{ب} (جـ) .دس = جـ (أ-ب)$: جـ ، أ ، ب أعداد حقيقية

مديرية التربية والتعليم لمنطقة غرب غزة
أ. سائد الحلاق

خصائص التكامل غير المحدود

حيث أ ، ب عددان حقيقيان.

قاعدة ١ $\int_{أ}^{أ} ه(س) .دس = صفر$

إعداد المعلم : سائد احلاق

قاعدة ٢ $\int_{أ}^{ب} ه(س) .دس = -\int_{ب}^{أ} ه(س) .دس$ (خاصية العكس)

قاعدة ٣ $\int_{أ}^{جـ} ه(س) .دس = \int_{أ}^{ب} ه(س) .دس + \int_{ب}^{جـ} ه(س) .دس$ (خاصية الإضافة)

قاعدة ٤ $\int_{أ}^{ب} (جـ ه(س)) .دس = جـ \int_{أ}^{ب} (ه(س)) .دس$: جـ ، أ ، ب أعداد حقيقية




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ٥ التكامل غير المحدود

مقدمة : التكامل وبكل بساطة هو عملية عكسية للتفاضل وبالتالي أصعب من التفاضل ، وكما هو متعارف عليه بأن العمليات العكسية أصعب كالقسمة والضرب والتربيع وإيجاد الجذر التربيعي، ومن المفيد أيضاً معرفتنا المسبقة بكل قواعد من القوانين التي سيكون لها الأثر الفعال في التكامل.

إذا كان هـ(س) اقتراناً مشتقتهُ الأولى هـ′(س) ، فإن التكامل غير المحدود للاقتران هـ′(س) بالنسبة لـ س يساوي هـ(س)+ جـ ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز $\int$ ، بصورة عامة فإن $\int$ هـ′(س) ×س = هـ(س) + جـ ، حيث جـ عدد حقيقي .

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة ١

$\int$ أ .×س = أ س + جـ ، حيث أ ، جـ عداندان حقيقيان.

مثال $\int$ ٧ .×س = ٧س + جـ

قاعدة ٢

$\int$ س^{ن} .×س = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ ، حيث ن ، جـ عداندان حقيقيان ، ن ≠ –١

مثال $\int$ س^{٤} .×س = $\frac{\text{س}^{٤+١}}{٤+١}$ + جـ = $\frac{\text{س}^{٥}}{٥}$ + جـ = $\frac{١}{٥}$س + جـ

قاعدة ٣

إذا كان هـ(س)،هـ(س)اقترانين قابلين للتكامل فإن: $\int$ (هـ ± هـ)(س).×س = $\int$ هـ(س).×س ± $\int$ هـ(س).×س

مثال $\int$ (س^{٢} + س) .×س = $\int$ (س^{٢}) .×س + $\int$ (س) .×س = $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

قاعدة ٤

إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للتكامل وكان ع(س)= ك.هـ(س) حيث ك عد حقيقي ، ك≠ –١ ، فإن:

$\int$ (ع(س)) .×س = $\int$ ك.هـ(س) .×س = ك. $\int$ هـ(س) .×س

مثال $\int$ ٣(س^{٢}) .×س = $\int$ ٣ (س^{٢}) .×س = ٣×$\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + جـ = س^{٣} + جـ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ملاحظات هامة

١ لا توجد قاعدة عامة لتكامل حاصل ضرب اقترانيين أو خارج قسمة اقترانين.

$$\int (\text{ق}(س) \times \text{هـ}(س)) \, ءس \neq \int \text{ق}(س) \, ءس \times \int \text{هـ}(س) \, ءس \quad ، \quad \int \left(\frac{\text{ق}(س)}{\text{هـ}(س)}\right) ءس \neq \int \text{ق}(س) \, ءس \cdot \frac{\int \text{ق}(س)}{\int \text{هـ}(س)}$$

٢ التكامل يوزع على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب أو القسمة .

٣ مشتقة التكامل غير المحدود تساوي نفسهُ. $\quad ص = \int س^{٢} + س \, ءس \Leftarrow ص' = س^{٢} + س$

أمثلة محلولة

مثال ١ احسب كلاً من التكاملات التالية:

١ $\int ٨ \, ءس = ٨س + جـ$

٢ $\int ٢س \, ءس = \frac{٢س^{٢}}{٢} + جـ = س^{٢} + جـ$

٣ $\int س^{-٤} \, ءس = \frac{س^{-٣}}{-٣} + جـ$

٤ $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, ءس = \frac{س^{١+\frac{٢}{٣}}}{١+\frac{٢}{٣}} + جـ = \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

٥ $\int \sqrt{س} \, ءس = \int س^{\frac{١}{٢}} \, ءس = \frac{س^{١+\frac{١}{٢}}}{١+\frac{١}{٢}} + جـ = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٦ $\int \sqrt[٣]{س} \, ءس = \int س^{\frac{١}{٣}} \, ءس = \frac{س^{١+\frac{١}{٣}}}{١+\frac{١}{٣}} + جـ = \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

٧ $\int ٤س^{٣} + س \, ءس = \frac{٤}{٤}س^{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} + جـ = س^{٤} + \frac{١}{٢}س^{٢} + جـ$

٨ $\int (٢س^{-٥} + ٦س^{٢}) \, ءس = \frac{٢}{-٤}س^{-٤} + \frac{٦س^{٣}}{٣} + جـ = -\frac{١}{٢}س^{-٤} + ٢س^{٣} + جـ$

٩ $\int \left(٨س^{٣} - \frac{١}{٢س^{٢}}\right) ءس = \int \left(٨س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{-٢}\right) ءس = \frac{٨}{٤}س^{٤} - \frac{١}{-١ \times ٢}س^{-١} + جـ = ٢س^{٤} + \frac{١}{٢س} + جـ$

إعداد المحلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٢ احسب كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \left(\frac{٨}{٥}س^{\frac{٣}{٥}} + ٣\sqrt{س}\right) . ؤس$

$$= \frac{٨}{٥}س^{\frac{٣}{٥}} + ٣س^{\frac{١}{٢}} . ؤس = \frac{\frac{٨}{٥}س^{١+\frac{٣}{٥}}}{١+\frac{٣}{٥}} + \frac{٣س^{١+\frac{١}{٢}}}{١+\frac{١}{٢}} + جـ = \frac{\frac{٨}{٥}س^{\frac{٨}{٥}}}{\frac{٨}{٥}} + \frac{٣س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٨}{٥}س^{\frac{٨}{٥}} + \frac{٢}{٣} \times ٣س^{\frac{٣}{٢}} + جـ = س^{\frac{٨}{٥}} + ٢س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

٢) $\int \frac{١}{٢\sqrt{س}} . ؤس = \int \frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}} . ؤس = \int \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} . ؤس = س^{\frac{١}{٢}} + جـ = \sqrt{س} + جـ$

٣) $\int (س+١)(س-١) . ؤس = \int (س^{٢} - س + س - ١) . ؤس = \int (س^{٢} - ١) . ؤس = \frac{س^{٣}}{٣} - س + جـ$

٤) $\int \frac{س^{٢} + ٨س}{س + ٨} . ؤس$ (نحاول التبسيط) $= \int \frac{س(س+٨)}{س+٨} . ؤس = \int س . ؤس = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

٥) $\int \pi . ؤس = \pi س + جـ$

٦) $\int هـ^{س} . ؤس = هـ^{س} + جـ$

٧) $\int هـ^{ص} . ؤص = هـ^{ص} + جـ$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٣

أجد قاعدة الاقتران $و(س)$ الذي مشتقتهُ $و'(س) = ٣س^{٢} + ٤س + ٣$ ،علماً بأن $و(-١) = ٣$

الحـــل

$$و(س) = \int و'(س) . ؤس$$

$$و(س) = \int (٣س^{٢} + ٤س + ٣) . ؤس = \frac{٣}{٣}س^{٣} + \frac{٤}{٢}س^{٢} + ٣س + جـ = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + جـ$$

$$و(-١) = (-١)^{٣} + ٢(-١)^{٢} + ٣(-١) + جـ$$

$$٣ = -١ + ٢ + ٣ - جـ \leftarrow ٣ = -٢ + جـ \leftarrow \boxed{جـ = ٥}$$

$$\leftarrow \text{قاعدة الاقتران } \boxed{و(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣س + ٥}$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤

أجد قاعدة الاقتران ق(س) الذي مشتقتهُ ق′(س) = ٣ √س − ٥ ،علماً بأن ق(١) = ١٥

الحـــل

ق(س) = ∫ ق′(س) .ىس

ق(س) = ∫ (٣ √س − ٥) .ىس = ∫ (٣س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٥) .ىس = $\frac{٢}{٣}$ × ٣س$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٥ س + جـ = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٥ س + جـ

ق(١) = ٢(١)$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٥(١) + جـ

١٥ = ٢ + ٥ + جـ ← جـ = ١٥ − ٣ ← جـ = ١٨

← قاعدة الاقتران ق(س) = ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٥ س + ١٨ = ٢ √س^{٣} − ٥ س + ١٨

مثال ٥

إذا كان ق(س) = ∫ (٣س^{٣} − ٢س + ٥) .ىس ، جد ق′(٢)

الحـــل

ق(س) = ∫ (٣س^{٣} − ٢س + ٥) .ىس

إعداد المعلم : سائد الحلاق

ق′(س) = ٣س^{٣} − ٢س + ٥

ق′(٢) = ٣(٢)^{٣} − ٢(٢) + ٥ = ٢٥

مثال ٦

إذا كان ق′(س) = ٤س^{٣} − ٢س^{٢} + جـ ، جد ق′(س)

الحـــل

ق(س) = ∫ ق′(س)

ق(س) = ٤س^{٣} − ٢س^{٢} + جـ

ق′(س) = ١٢ س^{٢} − ٤س





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٧

إذا كان ف(س) = ٤√س + ∫(٢ √س) د س ، جد ف′(١)

الحل

ف(س) = ٤ √س + ∫(٢ √س) د س

ف′(س) = ٤/(٢√س) + (٢ √س)

ف′(١) = ٤/(٢√١) + (٢ √١)

= ٢ + ٢ = ٤



مثال ٨

احسب : ∫ س^٢ / (٣√س^٢) د س

الحل

∫ س^٢ / (٣√س^٢) د س = ∫ س^٢ / س^(٢/٣) د س = ∫ س^٢ × س^(-٢/٣) د س = ∫ س^(٤/٣) د س

(٣/٧) س^(٧/٣) + جـ = ٣/(٣√س^٧) + جـ

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٩

إذا كان ∫ ف′(س) = أ س^٣ + ١٨ س + جـ ، وكان ف′(١) = ١٢ ، فما قيمة الثابت أ ؟

الحل

ف(س) = ∫ ف′(س)

ف(س) = أ س^٣ + ١٨ س + جـ

ف′(س) = ٣ أ س^٢ + ١٨

ف′(١) = ٣ أ (١)^٢ + ١٨

١٢ = ٣ أ + ١٨ ← ١٢ − ١٨ = ٣ أ ← ٣ أ = −٦ ← أ = −٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

التكامل غير المحدود(١-٥) | حلول الكتاب الوزاري صفـــ ٣٠ ـــحة

١ أ) $\int (٣س^{٢} + ٤س - ٥)\,د س = \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{٤س^{٢}}{٢} - ٥س + جـ$ $= \boxed{س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س + جـ}$

ب) $\int س^{\frac{٢}{٥}}\,د س = \boxed{\frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + جـ}$

جـ) $\int \sqrt[٧]{س}\,د س = \int س^{\frac{١}{٧}}\,د س = \boxed{\frac{٧}{٨} س^{\frac{٨}{٧}} + جـ}$

د) $\int \left(٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥س^{٢}}\right) د س = \int \left(٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥} س^{-٢}\right) د س$

$= \frac{٦س^{-٣}}{-٣} + \frac{٢س^{-١}}{-١ \times ٥} + جـ = \boxed{\frac{-٢}{س^{٣}} - \frac{٢}{٥س} + جـ}$

هـ) $\int (٦٥س^{٣} + ٧س^{٢} + ٣س)\,د س$

$= \frac{٦٥س^{١٤}}{٤} + \frac{٧س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ$

$= \boxed{٤ س^{١٤} + \frac{٧س^{٣}}{٣} + \frac{٣س^{٢}}{٢} + جـ}$

و) $\int (٥)^{٤٠٠٢}\,د س = \boxed{(٥)^{٤٠٠٢}\, س + جـ}$

٢ $و'(س) = س^{٥} - ٤س^{٣} + ٨$

$و'(١) = (١)^{٥} - ٤(١)^{٣} + ٨ = \boxed{٥}$

٣ $و(س) = ٣س^{٢} + ٢س + جـ$

$و'(س) = \boxed{٦س + ٢}$

٤ $ص = \int (س^{٢} + ٣)\,د س \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \boxed{س^{٢} + ٣}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٥ – ١

التكامل غير المحدود

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) $\int 8\sqrt{س^3}\ .د س =$

أ) $8\sqrt{س^3}+ج$ ب) $2+ج$ جـ) $2س+ج$ د) $8س+ج$

٢) $\int س^{-3}\ .د س =$

أ) $س^{-3}+ج$ ب) $-\frac{1}{4}س^{-4}+ج$ جـ) $-\frac{1}{2}س^{-2}+ج$ د) $س^{-2}+ج$

٣) أي من الاقترانات التالية يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة $ه'(س)=3س^2$ ؟

أ) $ه(س)=س^3$ ب) $ه(س)=2س^4$ جـ) $ه(س)=6س+ج$ د) $ه(س)=س^3$

٤) إذا كان $ه(س)=\int(3س^2-2س+ج)د س$ ، وكان $ه'(1)=7$ ، فما قيمة الثابت ج ؟

أ) ٦ ب) ٨ جـ) ٢ د) -6

٥) إذا كان $ص=\int 5س^2\ .د س$ ، فإن $\frac{د ص}{د س}=$

أ) $\frac{5}{3}س^3$ ب) $10س$ جـ) $5س^2+ج$ د) $5س^2$

٦) إذا كان $ه(س)=س+\int \sqrt{س}\ .د س$ ، فما قيمة $ه'(4)$؟

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ٣ د) ٨

٧) إذا كان $ه(س)=\int(3س^2).د س$ ، فما قيمة $ه'(-2)$؟

أ) -8 ب) -24 جـ) ١٢ د) -12

٨) إذا كان $ه'(س)=\frac{1}{3}س^3+ج$ ، فإن $ه'(س)=$

أ) $\frac{1}{12}س^4$ ب) $س^2+ج$ جـ) $س^2$ د) $\frac{1}{3}س^3+ج$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٩ إذا كان $\int$ وه′(س) = ٢س^{٢} – س + جـ ، فما قيمة وه′(–٢) ؟

أ ٧ | ب ٦ | جـ ٩ | د –٩

١٠ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int$ وه′(س) = س^{٢} – ٧س + جـ ، فما قيمة وه′(٢) ؟

أ $\frac{٧}{٢}$ | ب ١ | جـ –٦ | د –٣

١١ فلسطين : ٢٠١٩إكمال ديسمبر

إذا كان $\int$ وه′(س) = ٣س^{٢} – ٤س + جـ ، فما قيمة وه′(٢) ؟

أ ٤ | ب –٢ | جـ ١٢ | د ٨

١٢ فلسطين: ٢٠١٩إكمال أغسطس

إذا كان ك(س) = $\int$(٢س^{٣} + جـ)دس ، وكان ك′(–١) = ٥ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

أ ٣ | ب ٥ | جـ ٧ | د –١

١٣ فلسطين : ٢٠١٩

إعداد المعلم : سائد الحلاق

إذا كان ص = س^{٣} + $\int$(٦س^{٢} + ٤)دس ، فإن $\frac{دص}{دس}$ =

أ ٩س^{٢} + ٤ | ب س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤ | جـ ٣س^{٢} + ١٢س | د ٣س^{٢} + ٢س^{٣} + ٤س + جـ

١٤ بيت لحم : ٢٠٢٠ تجريبي

$\int \frac{٥}{س^{٢}}$ دس =

أ $\frac{٥}{س}$ + جـ | ب $\frac{-٥}{س}$ + جـ | جـ $\frac{١٥}{س^{٣}}$ + جـ | د $\frac{٥}{س^{٣}}$ + جـ

١٥ نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان ص = $\int$(٢س^{٢} – ٣س)دس ، فإن $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٢ تساوي:

أ ٢ | ب ٥ | جـ صفر | د ٨





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٦ رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي

جد قاعدة الاقتران ه(س) علماً بأن ه′(س) = ٢س + ٥ ومنحناهُ يمر بنقطة الأصل.

أ ه(س) = ٢س^{٢} + ٥س ب ه(س) = س^{٢} + ٥ جـ ه(س) = ٢س^{٢} + ٥ د ه(س) = س^{٢} + ٥س

١٧ قلقيلية : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان ه(س) = س^{٢} + ٢س + جـ ، فما قيمة $\frac{ه′(٢)}{٢}$ ؟

أ ٤ ب ٢ جـ −٢ د ١

١٨ خانيونس : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان ه(س) = ∫(٢س − ٣) دس ، فإن ه′(٥) =

أ ٠ ب ١٠ جـ ٨ د ٧

١٩ فلسطين : ٢٠١٦

إذا كان منحنى الاقتران ه(س) يمر بالنقطة (١، ٤) وكان ه′(س) = ٢س + ٥ ، فإن قاعدة الاقتران ه(س) هي:

أ ه(س) = س^{٢} + ٥س − ٢ ب ه(س) = س^{٢} + ٥س + ٢ جـ ه(س) = س^{٢} + ٥ د ه(س) = س^{٢} − س

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢٠ فلسطين : ٢٠١٢

∫(س √س) دس =

أ $س^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ ب $\frac{٣}{٢}س^{\frac{١}{٢}}$ + جـ جـ س √س + جـ د $\frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

٢١ فلسطين : ٢٠١٠ إكمال

أحد الاقترانات التالية يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة ه′(س) = ٣س^{٢} − ٤س

أ ه(س) = س^{٣} − ٢س^{٢}

ب ه(س) = ٦س − ٤

جـ ه(س) = ٣س^{٣} − ٢س^{٢}

د ه(س) = ٣س^{٢} − ٤س + جـ





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	احسب كلاً من التكاملات التالية:	أ	$س^{٣}+س^{٢}+جـ$
	أ $\int (س(٣س+٢))\,د س$	ب	$\frac{٣}{٧}س^{\frac{٧}{٣}}+جـ$
	ب $\int (س\sqrt[٣]{س})\,د س$	ج	$\frac{-٣}{س}+\frac{١}{٢س}+جـ$
	جـ $\int \left(\frac{٣}{س^{٢}}-٢س^{-٣}\right)د س$	د	$\frac{١}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}+س^{\frac{٥}{٣}}+جـ$
	د $\int \left(\frac{١}{٢}\sqrt{س}+\frac{٥}{٣}س^{\frac{٢}{٣}}\right)د س$	هـ	$س^{-٤}+٢س^{٣}-\frac{س^{٢}}{٢}+جـ$
	هـ $\int (-٤س^{-٥}+٦س^{٢}-س)\,د س$	و	$٥س^{\frac{٧}{٥}}+٣س^{\frac{٥}{٣}}+س+جـ$
	و $\int \left(٧س^{\frac{٢}{٥}}+٥\sqrt[٣]{س^{٢}}+١\right)د س$	ز	$\frac{١}{٢}س^{٢}+جـ$
	ز $\int \frac{س^{٣}+س}{س^{٢}+١}\,د س$		
٢	إذا كان $هـ(س)=\int (س^{٢}+٣س-٢)\,د س$ ، فما قيمة $هـ'(١)$ ؟		٢
٣	إذا كان $هـ'(س)=٣س^{٢}+س+٢+جـ$ ، فما قيمة $هـ'(-٣)$ ؟		١٧-
٤	إذا كان $هـ(س)=\int (٤س^{٢}-٢س+جـ)\,د س$ ، وكان $هـ'(-١)=٧$ ، فما قيمة جـ ؟		١
٥	إذا كان $ص=٣س^{٢}+\int \frac{س^{٢}-١}{س-١}\,د س$ ، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س=٢$؟		١٥

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٦	أجد قاعدة الاقتران ه(س) الذي مشتقتهُ ه′(س) = ٦س^{٢} – ٢س ،علماً بأن ه(٢) = –١	ه(س) = ٢س^{٣} – س^{٢} – ١٣
٧	إذا كان $\int$ ه′(س).دس = س^{٣} + جـ ، فما قيمة ه′(–١)	٧
٨	إذا كان $\int$ ه′(س).دس = س^{٣} + ٤ب س + جـ ، وكان ه′(١) = ١٩ ، ما قيمة ب ؟	٤
٩	إذا كان $\int$ ه′(س) = ٣س^{٢} + ٦س + جـ ، جد $\int$ ه(س).دس ، علماً بأن ه(١) = ٥	س^{٣} + ٣س^{٢} – ٤س + جـ
١٠	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال جد $\int \left(\frac{٢}{س^{٢}} + \sqrt{س} \right)$.دس	$-\frac{٢}{س} + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ جد $\int \left(٤س^{٣} - \frac{٢}{٥س^{٢}} \right)$.دس	س^{٤} + $\frac{٢}{٥}$س + جـ
١٢	فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر جد : $\int \left(\sqrt{س} + ٢س - \frac{٢}{س^{٤}} \right)$.دس	$\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + س^{٢} + \frac{٢}{٣س^{٣}} + جـ$
١٣	شرق غزة: ٢٠٢٠ تجريبي جد : $\int \left(\frac{١}{س^{٢}} - س^{\frac{٣}{٢}} \right)$.دس	$-\frac{١}{س} - \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٤	غرب غزة : ٢٠١٩ تجريبي ف١ جد : $\int \left(\sqrt{س} + \frac{٢}{س^{٢}} \right) د س$	$\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣س} + ج$
١٥	أريحا : ٢٠٢٠ تجريبي جد : $\int (س^{٢} + ٤س - ٣) د س$	$\frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢} - ٣س + ج$
١٦	نابلس : ٢٠٢٠جريبي أجد التكامل الآتي : $\int \left(\frac{٦}{س^{٣}} + \sqrt[٣]{س} \right) د س$	$-٣س^{-٢} + \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٤}} + ج$
١٧	قباطية: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $\int$ ه′(س) د س = أ س^{٢} + ب س + ٣ ، جد قيمة الثابتين أ، ب علماً بأن : ه′(١) = ٠ ، ه(١) = ١	أ = ٢ ب = −٤
١٨	رام الله: ٢٠٢٠ تجريبي إذا كان $\int$ ه′(س) د س = ٢س^{٣} + ب س + جـ ، ه′(٢) = ٢٦ ، جد قيمة الثابتين جـ، ب علماً بأن : منحنى الاقتران ه(س) يمر بالنقطة (١، −١)	ب = ٢ جـ = −٥
١٩	رفح : ٢٠٢٠ تجريبي أجد قاعدة الاقتران ه(س) الذي مشتقتهُ ه′(س) = $\sqrt{س}$ ، المار بالنقطة (١، ٠)	ه(س) = $\frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} - \frac{٢}{٣}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٠	رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي جد $\int \left(\sqrt{س} + ٤س - \frac{١}{س^{٣}} \right) ؛س$	$\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{٢} + \frac{١}{٢س^{٢}} + ج$
٢١	فلسطين : ٢٠١٦ جد $\int \left(س^{\frac{٣}{٢}} \sqrt{س} \right) ؛س$	$\frac{١}{٣} س^{٣} + ج$
٢٢	فلسطين: ٢٠١٥ إكمال إذا كان $\int$ هـ′ (س) ؛س = $س^{٤} - ٦س^{٢} + ٨$ ، فأوجد هـ′ (٢)	٨
٢٣	فلسطين: ٢٠١٤ إكمال جد $\int \left(س^{٣} + \frac{٦}{س^{٤}} \right) ؛س$	$\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٢}{س^{٣}} + ج$
٢٤	فلسطين: ٢٠١٣ إذا كان $\int$ هـ′ (س) ؛س = $٢ س^{٢} + ٢ب س + ج$ ، وكان هـ′ (٢) = ٢٦ جد قيمة ب	ب = ٩
٢٥	فلسطين: ٢٠١٢ إكمال جد قاعدة الاقتران هـ(س) علماً بأن هـ′(س) = ٣ – ٢س ،وأن هـ(١) = ٤	$- س^{٢} + ٣س + ٢$
٢٦	فلسطين : ٢٠١٠ أجد قاعدة الاقتران هـ(س) ، المار بالنقطة (٤ ، ٠) علماً بأن هـ′(س) = $\frac{١}{\sqrt{س}}$	هـ(س) = $٢\sqrt{س} - ٤$
٢٧	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كان $\int$ هـ′ (س) ؛س = $س^{٣} + ٢س + ج$ ، جد هـ′ (٢)	١٤

مديرية التربية والتعليم لمنطقة غرب غزة
المشرف التربوي
أ. سائد الحلاق
إعداد المعلم : سائد احلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ٦ التكامل المحدود

ملخص الدرس

أولاً	التكامل المحدود

يتميز التكامل المحدود عن التكامل غير المحدود بوجود حد علوي وحد سفلي ليتم حساب قيمتهُ.

تعريف

التكامل المحدود : إذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، فإن :

$$\int_{أ}^{ب} هـ'(س)\,د س = هـ(س)\Big|_{أ}^{ب} = هـ(ب) - هـ(أ)$$

حيث أ : الحد الأدنى ، ب : الحد الأعلى ، ب ، أ ∈ ع

ملاحظات هامة

١ تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود.

٢ ثابت التكامل جـ لا يكتب في التكامل المحدود .

٣ مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر دائماً .

٤ تكامل العدد الثابت المحدود $\int_{أ}^{ب} (جـ)\,د س = جـ\,(ب - أ)$: جـ ، أ ، ب أعداد حقيقية

$\int_{١}^{٣} (٤)\,د س$ لهُ طريقتين هما :

١ $\int_{١}^{٣} (٤)\,د س = ٤س\Big|_{١}^{٣} = ٤(٣) - ٤(١) = ١٢ - ٤ = ٨$

٢ $\int_{١}^{٣} (٤)\,د س = ٤س\Big|_{١}^{٣} = (٤ \times ٣) - (٤ \times ١) = ١٢ - ٤ = ٨$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١ احسب كلاً من التكاملات التالية:

١ $\int_{1}^{2} (٢س - ١) .دس$

$= \frac{٢}{٢} س^{٢} - س \Big|_{1}^{2} = (٢^{٢} - ٢) - (١^{٢} - ١) = ٠ - ٢ = \boxed{٢}$

٢ $\int_{-١}^{١} (٣س^{٢} + ٤) .دس$

$س^{٣} + ٤س \Big|_{-١}^{١} = (١^{٣} + ١ \times ٤) - (-١^{٣} + ١- \times ٤) = ٥ - -٥ = \boxed{١٠}$

٣ $\int_{٠}^{٣} \left(\sqrt{س} \times س^{\frac{٣}{٢}} \right) .دس$

$\int_{٠}^{٣} \left(س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{٣}{٢}} \right) .دس = \int_{٠}^{٣} \left(س^{٤} \right) .دس = \frac{س^{٥}}{٥} \Big|_{٠}^{٣} = \left(\frac{٣^{٥}}{٥} \right) - \left(\frac{٠^{٥}}{٥} \right) = \frac{٢٧}{٣} - ٠ = \boxed{٩}$

٤ $\int_{١}^{٤} \left(\frac{١}{٤\sqrt{س}} + ٦س^{٢} \right) .دس = \int_{١}^{٤} \left(\frac{س^{-\frac{١}{٢}}}{٤} + ٦س^{٢} \right) .دس = ٢ \times \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \frac{٦س^{٣}}{٣} \Big|_{١}^{٤} = ٤\sqrt{س} + ٢س^{٣} \Big|_{١}^{٤}$

$= \left(٤\sqrt{٤} + ٢ \times ٤^{٣} \right) - \left(٤\sqrt{١} + ٢ \times ١^{٣} \right) = \boxed{١٢٦\frac{١}{٢}}$

مثال ٢

إذا كان $ه'(س)$ مشتقة الاقتران $ه(س)$ ، أجد قيمة $\int_{-٢}^{٣} ٤ه'(س) .دس$ ، إذا علمت أن : $ه(٣) = ٦ ، ه(-٢) = -٤$

الحـــل

$\int_{-٢}^{٣} ٤ه'(س) .دس$

$= ٤ه(س) \Big|_{-٢}^{٣} = ٤(ه(٣) - ه(-٢)) = ٤(٦ - -٤) = ٤ \times ١٠ = \boxed{٤٠}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٣

إذا كان $\text{ه}'(\text{س})$ مشتقة الاقتران $\text{ه}(\text{س})$، وكان $\int_{-١}^{٣} ٢\text{ه}'(\text{س}).\text{د}\text{س} = ١٢$ ، وكان $\text{ه}(٣) = ٤$ ، ما قيمة $\text{ه}(-١)$؟

الحـــل

$$\int_{-١}^{٣} ٢\text{ه}'(\text{س}).\text{د}\text{س} = ١٢$$

$$٢\,\text{ه}(\text{س})\Big|_{-١}^{٣} = ١٢$$

$$\text{ه}(٣) - \text{ه}(-١) = ٦$$

$$(٤ - \text{ه}(-١)) = ٦ \leftarrow -\text{ه}(-١) = ٦ - ٤ \leftarrow -\text{ه}(-١) = ٢ \leftarrow \text{ه}(-١) = \boxed{-٢}$$

مثال ٤

إذا كان $\int_{٢}^{٤} (٤\text{س} + \text{ب}).\text{د}\text{س} = ١٤$ ، فما قيمة الثابت ب؟

الحـــل

$$\left(\frac{٤}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س}\right)\Big|_{٢}^{٤} = ١٤$$

$$(٤)(٢)^{٢} + \text{ب} \times ٤) - (٢)(٢)^{٢} + \text{ب} \times ٢) = ١٤$$

$$(٣٢ + ٤\text{ب}) - (٨ + ٢\text{ب}) = ١٤ \leftarrow ٣٢ + ٤\text{ب} - ٨ - ٢\text{ب} = ١٤$$

$$٢٤ + ٢\text{ب} = ١٤ \leftarrow ٢\text{ب} = ١٤ - ٢٤ \leftarrow ٢\text{ب} = -١٠ \leftarrow \text{ب} = \boxed{-٥}$$

مثال ٥

إذا كان $\text{ص} = \int_{-٤}^{٠} (\text{س}^{٤} + ٤\text{س} - ٢).\text{د}\text{س}$ ، جد $\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}}$

الحـــل

$$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = \text{صفر}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً | خصائص التكامل المحدود

تكمن أهمية معرفة خصائص التكامل المحدود في أنـــها تساعدنا على حساب التكامل بشكل أسهل .

خـــــــاصية ١

$\int_{ب}^{ب} هـ(س).د س$ = صفر ، حيث ب عدد حقيقي

(إذا تساوى الحد الأعلى مع الحد الأدنى بالتكامل المحدود تكون قيمة التكامل صفر)

مثال

$\int_{٣}^{٣} (٥س).د س$ = صفر

خـــــــاصية ٢

$\int_{أ}^{ب} هـ(س).د س = -\int_{ب}^{أ} هـ(س).د س$

(خاصية العكس) حيث أ ، ب عددان حقيقيان.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

خـــــــاصية ٣

إذا كان هـ(س) معرفاً على الفترة $[أ،ب]$ حيث وكان جـ عدد حقيقي بحيث أ < ب < جـ ، فإن :

$\int_{أ}^{جـ} هـ(س).د س = \int_{أ}^{ب} هـ(س).د س + \int_{ب}^{جـ} هـ(س).د س$ وتسمى هذه الخاصية (خاصية الإضافة)

خـــــــاصية ٤

$\int_{أ}^{ب} (جـ هـ(س)).د س$ = $جـ \int_{أ}^{ب} (هـ(س)).د س$: جـ ، أ ، ب أعداد حقيقية





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كان $\int_{٢}^{٣} (هـ(س))\,د س = ٨$ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٢} (٣هـ(س))\,د س$ ؟

الحـــل

$$\int_{٣}^{٢} (٣هـ(س))\,د س = ٣ \times -٨ = \boxed{-٢٤}$$

مثال ٢

إذا كان $\int_{١}^{٣} (هـ(س))\,د س = -٥$، ما قيمة $\int_{٣}^{١} (٣هـ(س) + ٢س)\,د س$؟

الحـــل

$$\int_{٣}^{١} (٣هـ(س) + ٢س)\,د س = \int_{٣}^{١} ٣هـ(س)\,د س + \int_{٣}^{١} ٢س\,د س$$

$$= ٣ \times ٥ + \frac{٢}{٢} س^{٢} \Big|_{٣}^{١} = ١٥ + (١^{٢} - ٣^{٢}) = ١٥ - ٨ = \boxed{٧}$$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

مثال ٣

إذا كان $\int_{-٢}^{١} (٣هـ(س))\,د س = ١٢$، ما قيمة $\int_{-٢}^{١} ٢(هـ(س) + ٤س + ١)\,د س$؟

الحـــل

$$\int_{-٢}^{١} (٣هـ(س))\,د س = ١٢ \leftarrow \int_{-٢}^{١} (هـ(س))\,د س = ٤$$

$$\int_{-٢}^{١} ٢(هـ(س) + ٤س + ١)\,د س = \int_{-٢}^{١} ٢هـ(س)\,د س + \int_{-٢}^{١} ٤س\,د س + \int_{-٢}^{١} ٢\,د س$$

$$= ٤ \times ٢ + \frac{٤}{٢} س^{٢} \Big|_{-٢}^{١} + ٢س \Big|_{-٢}^{١} = ٨ + ٤(١)^{٢} - ٤(-٢)^{٢} + ٢(١ - -٢)$$

$$= ٨ + ٤ - ١٦ + ٦ = ٣ \times ٢ = \boxed{٢}$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤

إذا كان $\int_{-١}^{٤} (هـ(س)).دس = ١٢$، $\int_{٤}^{-١} \left(\frac{١}{٢}هـ(س) + جـ\right).دس = ٤$ ما قيمة الثابت جـ؟

الحـــل

$$\int_{٤}^{-١} \frac{١}{٢}هـ(س) + \int_{٤}^{-١} جـ.دس = ٤$$

$$= \frac{١}{٢} \times ١٢ - جـس\Big|_{٤}^{-١} = ٤ \leftarrow -٦ + جـ(-١-٤) = ٤$$

$$= -٦ + جـ \times -٥ = ٤ \leftarrow -٦ + ٥جـ = ٤ \leftarrow \frac{-٥}{-٥} جـ = \frac{١٠}{-٥} \leftarrow جـ = \boxed{-٢}$$

مثال ٥

إذا كان $\int_{٣}^{٠} \left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right).دس = ٦$ ، $\int_{٠}^{٣} (٢هـ(س)).دس = -٦$ ، ما قيمة $\int_{٣}^{٠} (٤هـ(س) + ٣هـ(س)).دس$؟

الحـــل

إعداد المعلم: سائد الحلاق

$\int_{٣}^{٠} \left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right).دس = ٦ \leftarrow \int_{٣}^{٠} (هـ(س)).دس = ١٢$ (نضرب الطرفين في العدد ٢)

$\int_{٠}^{٣} (٢هـ(س)).دس = -٦ = \int_{٠}^{٣} (هـ(س)).دس = -٣$ (نقسم الطرفين على العدد ٢)

$$\int_{٣}^{٠} (٤هـ(س) + ٣هـ(س)).دس = \int_{٣}^{٠} (٤هـ(س)).دس + \int_{٣}^{٠} (٣هـ(س)).دس$$

$$= (١٢ \times ٤) + (٣ \times ٣) = ٤٨ + ٩ = \boxed{٥٧}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٦

إذا كان $\int_{١}^{٢} (٣هـ(س)) \, د س = ١٥$ ، $\int_{٢}^{١} (-٤هـ(س)) \, د س = ٢٠$ ، أوجد $\int_{١}^{٢} ٤(٢هـ(س) + ٣هـ(س) - ٣) \, د س$

الحـــل

$\int_{١}^{٢} (هـ(س)) \, د س = ٥$ ← $\int_{١}^{٢} (هـ(س)) \, د س = \frac{١٥}{٣}$ (نقسم الطرفين على العدد ٣)

$\int_{٢}^{١} (هـ(س)) \, د س = -٥$ ← $\int_{٢}^{١} (-٤هـ(س)) \, د س = \frac{٢٠}{-٤}$ (نقسم الطرفين على العدد –٤)

$\int_{١}^{٢} ٤(٢هـ(س) + ٣هـ(س) - ٣) \, د س = \int_{١}^{٢} ٤(٢هـ(س)) \, د س + \int_{١}^{٢} ٤(٣هـ(س)) \, د س - \int_{١}^{٢} ٤(٣) \, د س$

$= (٤ \times ٢ \times ٥) + (٤ \times ٣ \times ٥) - (٤ \times ٣س |_{١}^{٢})$

$= ٤٠ + ٦٠ - ٤(٣)(١-٢) = ١٠٠ - ١٢ = ٨٨$

مثال ٧

إذا كان هـ′(س) مشتقة الاقتران هـ(س) ، وكان : $\int_{٣}^{٢} (-٣هـ(س)) \, د س = ٦$ ، هـ(٢) = ٤ ، ٢هـ(٣) = –٦،

، أوجد قيمة المقدار : $\int_{٢}^{٣} (هـ′(س) + ٥هـ(س) + ٤س) \, د س$

الحـــل

$\int_{٣}^{٢} (هـ(س)) \, د س = -٢$ ← $\int_{٣}^{٢} (هـ(س)) \, د س = \frac{٦}{-٣}$ (نقسم الطرفين على العدد –٣)

$\frac{٢}{٢}هـ(٣) = \frac{-٦}{٢}$ ← هـ(٣) = –٣ (تجهيز)

$\int_{٢}^{٣} (هـ′(س) + ٥هـ(س) + ٤س) \, د س = \int_{٢}^{٣} (هـ′(س)) \, د س + \int_{٢}^{٣} (٥هـ(س)) \, د س + \int_{٢}^{٣} (٤س) \, د س$

$= هـ(س) |_{٢}^{٣} + ٥ \int_{٢}^{٣} (هـ(س)) \, د س + (\frac{٤}{٢}س^{٢}) |_{٢}^{٣}$

$= (هـ(٣) - هـ(٢)) + (٥ \times ٢) + (٢(٣)^{٢} - ٢(٢)^{٢}) = (-٣ - ٤) + ١٠ + (١٨ - ٨) = -٧ + ١٠ + ١٠ = ١٣$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٨

إذا كان هـ′(س) مشتقة الاقتران هـ(س) ، وكان : هـ(−١) = −٤ ، هـ(٢) = ٥ ، أوجد قيمة المقدار:

$$\int_{-١}^{٢} \left(هـ'(س) + ٢س - ١ \right) .دس$$

الحـــل

$$\int_{-١}^{٢} \left(هـ'(س) + ٢س - ١ \right) .دس = \int_{-١}^{٢} \left(هـ'(س) \right) .دس + \int_{-١}^{٢} (٢س) .دس - \int_{-١}^{٢} (١) .دس$$

$$= هـ(س) \Big|_{-١}^{٢} + \frac{٢}{٢} س^{٢} \Big|_{-١}^{٢} - س \Big|_{-١}^{٢}$$

$$= هـ(٢) - هـ(-١) + (٢^{٢}) - (-١^{٢}) - (٢ - -١)$$

$$= ٥ - - ٤ + ٤ - ١ - ٣ = \boxed{٩}$$

مثال ٩

إذا كان $\int_{-٢}^{١} (وهـ(س)) .دس = ٨$ ، $\int_{١}^{٣} (وهـ(س)) .دس = -٤$ ، ما قيمة $\int_{-٢}^{٣} (٢وهـ(س)) .دس$ ؟

الحـــل

$$\int_{-٢}^{٣} (٢وهـ(س)) .دس = ٢ \int_{-٢}^{١} (وهـ(س)) .دس + ٢ \int_{١}^{٣} (وهـ(س)) .دس = (٢ \times ٨) + (٢ \times -٤) = ١٦ - ٨ = \boxed{٨}$$

مثال ١٠

إذا كان $\int_{-٣}^{٢} (وهـ(س)) .دس = -٣$ ، $\int_{٢}^{٤} (وهـ(س)) .دس = -٥$ ، ما قيمة $\int_{-٣}^{٤} (وهـ(س) + ٢) .دس$ ؟

الحـــل

$$\int_{-٣}^{٤} (وهـ(س) + ٢) .دس = \int_{-٣}^{٢} (وهـ(س)) .دس + \int_{٢}^{٤} (وهـ(س)) .دس + \int_{-٣}^{٤} (٢) .دس$$

$$= -٣ + ٥ + (٢س) \Big|_{-٣}^{٤}$$

$$= ٢ + ((٤ \times ٢) - (٣ - \times ٢)) = ٢ + (٨ + ٦) = \boxed{١٦}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١١

إذا كان $\int_{٢}^{١} \left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right) .ىس = ٣$ ، $\int_{٢}^{٤} (-٥هـ(س)) .ىس = ٥$ ، أوجد قيمة $\int_{١}^{٤} \left(٢هـ(س) + ٣\sqrt{س}\right)$

الحـــل

$\frac{١}{٢} \times ٢ \int_{٢}^{١} (هـ(س)) .ىس = ٣ \times ٢ \leftarrow \int_{٢}^{١} (هـ(س)) .ىس = \boxed{٦}$

$-٥ \int_{٢}^{٤} (هـ(س)) .ىس = ٥ \leftarrow \int_{٢}^{٤} (هـ(س)) .ىس = \boxed{-١}$

$\int_{١}^{٤} \left(٢هـ(س) + ٣\sqrt{س}\right) = ٢ \left(\int_{١}^{٢} (هـ(س)) .ىس + \int_{٢}^{٤} (هـ(س)) .ىس\right) + \int_{١}^{٤} \left(٣س^{\frac{١}{٢}}\right) .ىس$

$= ٢(-٦ + -١) + \frac{٢}{٣} \times ٣س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{٤} = (٢ \times -٧) + ٢\sqrt[٣]{س^{٣}} \Big|_{١}^{٤}$

$= -١٤ + ٢\left(\sqrt[٣]{٤^{٣}} - \sqrt[٣]{١^{٣}}\right) = -١٤ + ٢(٨ - ١) = -١٤ + ٢ \times ٧ = -١٤ + ١٤ = \boxed{٠}$

مثال ١٣

إذا كان $\int_{١}^{٤} (هـ(س)) .ىس = -٣$ ، $\int_{٥}^{٤} (هـ(س)) .ىس = ٤$ ، أوجد قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

$\int_{١}^{٥} (هـ(س) + (ب)) .ىس = ١٧$

الحـــل

$\int_{١}^{٤} هـ(س) .ىس + \int_{٤}^{٥} هـ(س) .ىس + \int_{١}^{٥} (ب) .ىس = ١٧$

$-٣ + -٤ + ب س \Big|_{١}^{٥} = ١٧$

$-٧ + ب(٥ - ١) = ١٧$

$-٧ + ٤ب = ١٧$

$\frac{٤}{٤} ب = \frac{٢٤}{٤} \leftarrow ب = \boxed{٦}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٤

إذا كان $\int (٣س + هـ(س)) د س = ٣س^{٢} + ٥س + ٤$ ، فما قيمة $\int_{١}^{٠} (٢هـ(س)) د س$ ؟

الحـــل

$\int (٣س) د س + \int هـ(س) د س = ٣س^{٢} + ٥س + ٤$

$\int هـ(س) د س = ٣س^{٢} + ٥س + ٤ - \int (٣س) د س$

$\int هـ(س) د س = ٣س^{٢} + ٥س + ٤ - \frac{٣}{٢} س^{٢} + جـ$

$$\int هـ(س) د س = \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٥س + ٤ + جـ$$

$$\int_{١}^{٠} (٢هـ(س)) د س = ٢\left[\frac{٣}{٢} س^{٢} + ٥س + ٤ + جـ\right]_{١}^{٠}$$

$$= \left[٣س^{٢} + ١٠س + ٨ + ٢جـ\right]_{١}^{٠}$$

$$= \left(٣(١)^{٢} + ١٠ \times ١ + ٨ + ٢جـ\right) - \left(٣(٠)^{٢} + ١٠ \times ٠ + ٨ + ٢جـ\right)$$

$$= (٣ + ١٠ + ٨ + ٢جـ) - (٨ + ٢جـ)$$

$$= ٢١ + ٢جـ - ٨ - ٢جـ = \boxed{١٣}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

حل آخر :

$\int (٣س + هـ(س)) د س = ٣س^{٢} + ٥س + ٤$ (نشتق الطرفين)

$٣س + هـ(س) = ٦س + ٥$

$هـ(س) = ٦س + ٥ - ٣س$

$هـ(س) = ٣س + ٥$

$$\therefore \int_{١}^{٠} (٢هـ(س)) د س = \int_{١}^{٠} ٢(٣س + ٥) د س$$

$$= \not{٢} \times \frac{٣}{\not{٢}} س^{٢} + ٢ \times ٥س \Big|_{١}^{٠} = ٣س^{٢} + ١٠س \Big|_{١}^{٠}$$

$$٣(١)^{٢} + ١٠ \times ١ - ٠ = ٣ + ١٠ = \boxed{١٣}$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١٥

إذا كان : $\int_{-١}^{-٢}$ (ﻫ (س)).دس = −٢ ، $\int_{-١}^{٢}$ (ﻫ (س)+١).دس = ٤ ، أوجد $\int_{-٢}^{٢}$ ﻫ (س).دس

الحـــل

$$\int_{-١}^{٢} (\text{ﻫ}(س)+١).دس = \int_{-١}^{٢} (\text{ﻫ}(س)).دس + \int_{-١}^{٢} (١).دس$$

$$٤ = \int_{-١}^{٢} (\text{ﻫ}(س)).دس + س \Big|_{-١}^{٢}$$

$$٤ = \int_{-١}^{٢} (\text{ﻫ}(س)).دس + (٢-(-١)) \leftarrow \int_{-١}^{٢} (\text{ﻫ}(س)).دس = ٤ - ٣ = \boxed{١}$$

$$\int_{-٢}^{٢} \text{ﻫ}(س).دس = \int_{-٢}^{-١} \text{ﻫ}(س).دس + \int_{-١}^{٢} \text{ﻫ}(س).دس = ٢ + ١ = \boxed{٣}$$

مثال ١٦

إذا كان $\int_{ب}^{١}$ (٢س − ٤ب).دس = $\int_{٠}^{١}$ (٥ ب + ١).دس ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$\int_{ب}^{١} (٢س - ٤ب).دس = \int_{٠}^{١} (٥ ب + ١).دس$$

$$\frac{٢}{٢}س^{٢} - ٤ب س \Big|_{ب}^{١} = ٥ب س + س \Big|_{٠}^{١}$$

$$(١^{٢} - ٤ب \times ١) - (ب^{٢} - ٤ب \times ب) = (٥ب \times ١ + ١) - (٥ب \times ٠ + ٠)$$

$$(١ - ٤ب) - (ب^{٢} - ٤ب^{٢}) = (٥ب + ١) - (٠ + ٠)$$

$$١ - ٤ب - ب^{٢} + ٤ب^{٢} = ٥ب + ١$$

$$١ - ٤ب + ٣ب^{٢} - ٥ب - ١ = ٠$$

$$٣ب^{٢} - ٩ب = ٠$$

$$٣ب(ب - ٣) = ٠$$

إما ٣ب = ٠ ← $\boxed{ب = ٠}$ أو ب − ٣ = ٠ ← $\boxed{ب = ٣}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

التكامل المحدود (١-٥)

حلول الكتاب الوزاري صفـــ٣٧ـــحة

١ **أ**

$$\int_{-٢}^{١} (٣س+١)\,ءس = \left(\frac{٣س^{٢}}{٢}+س\right)\Big|_{-٢}^{١} = \left(١+\frac{٣(١)^{٢}}{٢}\right)-\left((٢-)+\frac{٣(٢-)^{٢}}{٢}\right) = \boxed{\frac{٣}{٢}-}$$

ب

$$\int_{٢}^{٥} (٧-٢س)\,ءس = (٧س-س^{٢})\Big|_{٢}^{٥} = (٧\times٥-٥^{٢})-(٧\times٢-٢^{٢})$$

$$= (٣٥-٢٥) - (١٤-٤) = ١٠-١٠ = \boxed{٠}$$

جـ

$$\int_{١}^{٤} (\sqrt{س}+٣)\,ءس = \int_{١}^{٤}\left(س^{\frac{١}{٢}}+٣\right)ءس = \left(\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}+٣س\right)\Big|_{١}^{٤} = \left(\frac{٢\sqrt{س^{٣}}}{٣}+٣س\right)\Big|_{١}^{٤}$$

$$= \left(\frac{٢\sqrt{٤^{٣}}}{٣}+٣\times٤\right)-\left(\frac{٢\sqrt{١^{٣}}}{٣}+٣\times١\right) = \left(١٢+\frac{١٦}{٣}\right)-\left(٣+\frac{٢}{٣}\right) = \boxed{\frac{٤١}{٣}}$$

٢

$$\int_{-٢}^{٢} ٢ع(س).ءس = ٢\int_{-٢}^{٢} ع(س).ءس = ٢\left[(٣س^{٢}-٢س)\Big|_{-٢}^{٢}\right]$$

$$= ٢\left[(٣(٢)^{٢}-٢(٢))-(٣(-٢)^{٢}-٢(-٢))\right] = ٢[(١٦)-(٨)] = ٢\times٨ = ١٦-$$

٣

$$\int_{١}^{٤} ٣هـ(س)\,ءس = ٣\sqrt{٤^{٣}} \leftarrow \int_{١}^{٤} هـ(س)\,ءس = ٤$$

$$\int_{١}^{٥} (هـ(س)+٢س-١)\,ءس = \int_{١}^{٥} هـ(س)\,ءس + \int_{١}^{٥} (٢س-١)\,ءس = -٤+(س^{٢}-س)\Big|_{١}^{٥}$$

$$= -٤+\left[(٥^{٢}-٥)-(١^{٢}-١)\right] = -٤+٢٠-٠ = \boxed{-٢٤}$$

٤

$$\int_{٣}^{٥} (٢س+ب)\,ءس = ١٢ \leftarrow (س^{٢}+بس)\Big|_{٣}^{٥} = ١٢$$

$$(٢٥+٥ب)-(٩+٣ب) = ١٢$$

$$١٦+٢ب = ١٢ \leftarrow ٢ب = ١٢-١٦$$

$$\frac{٢}{٢}ب = \frac{٤-}{٢} \leftarrow ب = \boxed{-٢}$$

إعداد المعلم سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٥ $\int_{-١}^{جـ} ٦س\,د س = ٠ \leftarrow (٣س^{٢})\Big|_{-١}^{جـ} = ٠$

$٣جـ^{٢} - ٣ = ٠$

$\frac{٣}{٣} جـ^{٢} = \frac{٣}{٣}$

$جـ^{٢} = ١$ (أخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$\leftarrow \quad جـ = \boxed{\pm ١}$

٦ $\int_{-١}^{٠} (٢هـ(س) - هـ(س))\,د س$

$= ٢\int_{-١}^{٠} هـ(س)\,د س - \int_{-١}^{٠} هـ(س)\,د س$

$= ٢ \times ١٣ - (-٧)$

$= ٢٦ + ٧ = \boxed{٣٣}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٧ $\int_{٣}^{٧} ٣هـ(س)\,د س = ٩^{-٣} \leftarrow \int_{٣}^{٧} هـ(س)\,د س = -٣$

$\int_{٢}^{٣} ٤هـ(س)\,د س$

$= ٤\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,د س = ٤ \left[\int_{٢}^{٧} هـ(س)\,د س + \int_{٧}^{٣} هـ(س)\,د س \right]$

$= ٤ \times (٣ + ٣)$

$= ٤ \times ٦ = \boxed{٢٤}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٦ – ١ التكامل المحدود

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١) $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} (٢س + \sqrt{٢٧}) .دس =$

أ) $س^{٢} + ٣س + جـ$ ب) $٢س + ٣ + جـ$ جـ) $٢س + ٣$ د) صفر

٢) اذا كان $ه(س) = \int_{٢}^{٦} (س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥) .دس$ ، فما قيمة $ه'(-٣)$ ؟

أ) $س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥$ ب) $٤س^{٣} + ٦س$ جـ) ١٠ د) صفر

٣) اذا كان $ه(س) = ٢س^{٢} - \int_{٢}^{٦} (س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥) .دس$ ، فما قيمة $ه'(-٤)$ ؟

أ) -١٦ ب) ٨ جـ) ١٦ د) صفر

٤) اذا كان $ه(س) = س^{٢} + \int_{١}^{٢} (٢س) .دس + \int_{١}^{٢} (س^{٤} + ٣س^{٢} + ٥) .دس$ ، فما $ه'(س)$ ؟

أ) $س^{٢} + ٢س$ ب) $٤س$ جـ) $س^{٢}$ د) $٢س$

٥) إذا كان $ه'(س)$ مشتقة $ه(س)$ وكان: $ه(-٢) = ٤$ ، $ه(٣) = -٣$ ، فما قيمة $\int_{-٢}^{٣} (٤ه'(س)) .دس$ ؟

أ) ١٤ ب) -٧ جـ) -٢٨ د) -١٤

٦) إذا كان $ه(٦) = ٣$ $ه(٣)$ ، وكان $\int_{٣}^{٦} (ه'(س)) .دس = ١٦$ ، فما قيمة $ه(٣)$ ؟

أ) ٨ ب) ١٦ جـ) -١٦ د) -٨

٧) ما قيمة : $\int_{١}^{٠} (\frac{٣}{٢} \sqrt{س}) .دس$ ؟

أ) ٠ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) ١ د) -١

٨) $\int_{١}^{٤} (٦ \sqrt{س}) .دس =$ .....

أ) ٢٨ ب) ٣ جـ) ١٢ د) ٤

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٩ إذا كان $\int_{٢}^{٣} (-٢و(س)).د س = -٨$ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٢} (و(س)+٢).د س$؟

أ -٦ ب ٦ ج ٩ د -٩

١٠ إذا كان $\int_{١}^{٢-} و(س).د س = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} و(س).د س = -٤$ ما قيمة $\int_{٢-}^{٣} (٤و(س)).د س$؟

أ ٠ ب -٨ ج ٣٢ د -٣٢

١١ إذا كان $\int_{٧}^{٧} (ج).د س = ٨$ ، فما قيمة / قيم الثابت ج ؟

أ ١٠٨ ب -١٠٨ ج $١-،٨$ د $-١،٨-$

١٢ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

ما قيمة $\int_{١-}^{٢} و'(س).د س$ ، علماً بأن $و(٢) = ٧$ ، $و'(-١) = ٢$ ، $و'(٢) = ٣$ ، $و(-١) = ١$ ؟

أ ٤ ب ٢ ج ٦ د ٩

١٣ فلسطين : ٢٠٢٠إكمال

إذا كان $\int_{٢}^{٣} (و(س)).د س = ٨$ ، فما قيمة $\int_{٢}^{٣} (٢و(س)+٥).د س$ ؟

أ -١١ ب ٢١ ج ١٣ د -٣

١٤ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int_{٢}^{٤} س.د س = ٢٤$ ، فما قيمة/قيم الثابت ب ؟

أ $-٢-،٤$ ب $١-،٤$ ج $-٤،٤$ د $-١،٤$

١٥ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int_{٥}^{٧} (٣و(س)).د س = ١٥$ ، فما قيمة $\int_{٧}^{٥} (و(س)).د س$ ؟

أ ١٥ ب ٥ ج -٥ د -١٥

إعداد وتصميم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٦ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كان $\int_{-١}^{٣} (٣س^{٢} + ب)\,د س = ١٦$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ -٣ ب ٣ جـ ٦ د -٦

١٧ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

إذا كان $ص = ٢س^{٣} + \int_{-١}^{١} (٥س)\,د س$ ، فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ ؟

أ $٦س^{٢}$ ب $٦س^{٢} + ٥س$ جـ $٦س^{٢} + ١٠$ د $٦س^{٢} + ٥$

١٨ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

ما قيمة $\int_{٢}^{٨} (هـ(س))\,د س + \int_{٨}^{٢} (هـ(س) - ٣)\,د س$ ؟

أ ١٨ ب -٣ جـ -١٨ د ٣

١٩ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

إذا كان $\int_{٢}^{٧} (و(س))\,د س = ٣$ ، $\int_{٣}^{٧} (٢و(س))\,د س = -٦$ ما قيمة $\int_{٢}^{٣} (٢و(س))\,د س$؟

أ ١٢ ب ٤٨ جـ ٢٤ د ٦

٢٠ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان $\int_{١}^{٤} (٢و(س))\,د س = ١٠$ ، فما قيمة $\int_{٤}^{١} \left(\frac{١}{٢} و(س)\right) د س$ ؟

أ $\frac{٥}{٢}$ ب -٥ جـ -١٠ د $-\frac{٥}{٢}$

٢١ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان $و(٧) = ٨$ ، $و(٥) = -٢$ ، فما قيمة $\int_{٥}^{٧} \left(٢و'(س)\right) د س$ ، فما قيمة $و(٣)$ ؟

أ -١٠ ب ١٠ جـ ٢٠ د -٢٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٢ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كان $\int_{-١}^{٠} (٣هـ(س)) ؤس = ٦$ ، فما قيمة $\int_{-١}^{٠} (٢ - هـ(س)) ؤس$ ؟

أ ١٠ ب ٦٠ جـ ٠ د ١٢

٢٣ قباطية : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $هـ(س) = \frac{س + ١}{س^{٢}}$ ، فإن $\int_{-١}^{١} هـ'(س) ؤس$ ؟

أ -١ ب -٢ جـ ٢ د ٠

٢٤ نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{٢}^{٤} (٣هـ(س)) . ؤس = ٦$ ، $\int_{٧}^{٤} (هـ(س)) . ؤس = ٥$ ما قيمة $\int_{٢}^{٧} (٢هـ(س)) . ؤس$ ؟

أ -١ ب ١١ جـ -٣ د ١

٢٥ بيت لحم : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{ب}^{ب} (٢س - ١) . ؤس = ٢$ ، فما قيمة/قيم الثابت ب؟

أ ١،٢ ب $-١،٢$ جـ $١-،٢$ د $-٢ ، ١-$

٢٦ رام الله : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{-ب}^{ب} (ب) . ؤس = ٣٢$ ، فما قيمة ب الموجبة؟

أ ٤ ب ٨ جـ ١٦ د ٣٢

٢٧ الوسطى : ٢٠٢٠ تجريبي

إذا كان $\int_{ب}^{١} ٢ب س . ؤس = ٨$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ ٢ ب ٠ جـ ٤ د ٨

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	احسب قيمة كلاً من التكاملات التالية:		
	أ $\int_{1}^{3}\left(س^{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{س}\right)د س$	أ	٩
	ب $\int_{1}^{4}(٥س\sqrt{س})د س$	ب	٦٢
	جـ $\int_{-1}^{1}\sqrt{س}\left(\sqrt{س}+\frac{٢}{\sqrt{س}}\right)د س$	ج	٤
	د $\int_{1}^{1}(\sqrt[3]{س}+٧)د س$	د	$\frac{٣١}{٤}$
٢	إذا كان $\int_{3}^{٥}(و(س))د س=١٠$ ، $\int_{٥}^{3}\left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right)د س=-٢$ ، فما قيمة $\int_{3}^{٥}٢(و(س)+هـ(س))د س$؟		٢٨
٣	إذا كان $\int_{1}^{-2}(و(س))د س=٤$ ، $\int_{1}^{3}(٢و(س))د س=-٤$ ما قيمة $\int_{-2}^{3}(٣و(س))د س$؟		١٨-
٤	إذا كان $\int_{-3}^{-2}(و(س))د س=-٣$ ، $\int_{-2}^{3}(و(س))د س=-١$ ما قيمة $\int_{-3}^{3}\left(\frac{١}{٢}و(س)\right)د س$؟		٢-
٥	إذا كان : $\int_{2}^{٤}(٢س+جـ)د س=١٦$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟		٢
٦	إذا كان : $\int_{جـ}^{2}(٢س+٥)د س=٢٠$ ، فما قيمة / قيم الثابت جـ ؟		٣، ٢-
٧	إذا كان : $\int_{3}^{ب}(٢س-١)د س=\int_{1}^{3}(-٣ب)د س$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟		١، ٦-

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨	إذا كان : $\int_{٢}^{٤}(٤س+ب).دس = ١٤$ ، فما قيمة الثابت ب ؟	٥–
٩	إذا كان : $\int_{ب}^{آ}(س+ب).دس = \int_{ب}^{٣}(ب).دس$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟	٢،٠
١٠	إذا كان $\int_{١}^{٢}(٢هـ(س)).دس = -٦$ ، $\int_{٢}^{٣}(٤هـ(س)).دس = -٨$ ، أوجد $\int_{١}^{٣}(٤هـ(س)).دس$	٢٠–
١١	إذا كان $\int_{-٢}^{٣}(\frac{١}{٢}هـ(س)).دس = ٤$ ، $\int_{٣}^{٤}(-٢هـ(س)).دس = ١٠$ ، أوجد $\int_{-٢}^{٤}(٢هـ(س)+٢س).دس$	١٨
١٢	إذا كان $\int_{١}^{٣}(٢هـ(س)).دس = ١٤$ ، $\int_{٣}^{١}(٤هـ(س)).دس = -١٦$ ، أوجد $\int_{٣}^{١}٣(٢هـ(س)-٥هـ(س)+٢).دس$	٦
١٣	إذا كان $\int_{٣}^{٢}(-٢هـ(س)).دس = ٦$ ، أوجد $\int_{٣}^{٢}(٢هـ'(س)+٥هـ(س)+١).دس$ علماً بأن : هـ(٢) = ٤ ، ٢هـ(٣) = -٧	١
١٤	إذا كان : $\int_{٢}^{١}(٢هـ(س)).دس = -٦$ ، $\int_{٢}^{٣}(هـ(س)+٢).دس = -٨$ ، أوجد $\int_{١}^{٣}٣(هـ(س)+١).دس$	١٥–
١٥	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان $\int_{٥}^{٧}٢هـ(س).دس = ٦$ ، وكان $\int_{١}^{٧}(٣هـ(س)+٢).دس = ٢٤$ ، جد $\int_{١}^{٥}هـ(س).دس$	١

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٦	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان $\int_{-١}^{٠} (هـ(س))\,د س = ٣$ ، وكان $\int_{٢}^{٠} (هـ(س)+٢)\,د س = ١٣$ ، جد $\int_{٢}^{-١} (٤هـ(س))\,د س$	١٦
١٧	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كان $\int_{١}^{٣} (هـ(س)-٢)\,د س = \int_{٣}^{١} (ب س - هـ(س))\,د س$ ، فما قيمة الثابت ب؟	١
١٨	نابلس : ٢٠ ٢٠ تجريبي إذا كان $\int_{١}^{٨} (٣هـ(س)+٢)\,د س = ١٤$ ، $\int_{٨}^{٠} (هـ(س))\,د س = ٥$ ، فأوجد $\int_{١}^{٨} (هـ(س)+٢س)\,د س$.	٦٠
١٩	بيت لحم: ٢٠ ٢٠ تجريبي إذا كان $\int_{١}^{٠} (هـ(س))\,د س = -٢$ ، $\int_{٣}^{٠} (٣هـ(س))\,د س = -١٢$ ، فأوجد $\int_{١}^{٣} (هـ(س)-٢س)\,د س$.	٥
٢٠	غرب غزة: ٢٠ ٢٠ تجريبي أجد قيمة : $\int_{-٢}^{١} (س+٣)^{٢}\,د س$	٢١
٢١	القدس الشريف : ٢٠٢٠ تجريبي كان $\int_{٢}^{٣} (٢هـ(س))\,د س = ٦$ فأوجد $\int_{٣}^{٢} (٢هـ'(س)-هـ(س))\,د س$. علماً بأن : هـ(٢) = ٣ ، ٢هـ(٣) = ٨	١

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٢	القدس الشريف: ٢٠٢٠ تجريبي أجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{١}\left(٣س^{٢}-\frac{٤}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}+\frac{٢}{س^{٢}}\right)د س$	٢٦ –
٢٣	فلسطين: ٢٠١٩ إكمال ديسمبر أجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{٢}(٤س^{٢}+٨س)د س$	$٢٦\frac{٢}{٣}$
٢٤	فلسطين : ٢٠١٩ إكمال أغسطس إذا كان $\int_{-١}^{١} هـ(س)د س = ١٣$ ، $\int_{١}^{-١} هـ(س)د س = ٧$ فما قيمة $\int_{-١}^{١}(٢هـ(س)-هـ(س)+٢س^{٣})د س$ ؟	٣٣
٢٥	فلسطين : ٢٠١٩ أجد قيمة $\int_{١}^{٤}\left(١-\frac{٢}{\sqrt{س}}\right)د س$	١ –
٢٦	فلسطين : ٢٠١٩ إذا كان $\int_{٢}^{٧}(هـ(س))د س = ٣$ ، $\int_{٣}^{٧}(٣هـ(س))د س = -٩$ ، جد $\int_{٢}^{٣}(٤هـ(س))د س$	٢٤
٢٧	فلسطين: ٢٠١٨ إكمال ديسمبر إذا كان: $\int(هـ(س))د س = \frac{٨}{س^{٢}}+ب س+جـ$ ، وكان $\int_{-٢}^{١} هـ(س)د س = ١٨$ فما قيمة الثابت ب ؟	٤
٢٨	فلسطين : ٢٠١٨ إكمال أغسطس إذا كان $\int_{٢}^{٤} هـ(س)د س = ٦$ ، $\int_{٢}^{٤}(٢هـ(س)+ب س)د س = ١٨$ فما قيمة الثابت ب ؟	١
٢٩	فلسطين : ٢٠١٨ جد قيم جـ التي تجعل $\int_{٩}^{٤}\frac{جـ}{\sqrt{س}}د س = -٤$.	٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٣٠	فلسطين: ٢٠١٧ إذا كان $\int_{١}^{٤}(\text{ه}(س)+٣س^{٢})\,\text{د}س = ٧٣$ ، $\int_{١}^{٢}(\text{ه}(س))\,\text{د}س = ١٠$، فأوجد $\int_{٤}^{٢}(\text{ه}(س))\,\text{د}س$.	صفر
٣٢	فلسطين: ٢٠١٧ إكمال إذا كان $\int_{١}^{٧}(\text{ه}(س)-١)\,\text{د}س = ٨$ ، $\int_{٧}^{٣}(\text{ه}(س))\,\text{د}س = -٦$، فأوجد $\int_{١}^{٣}(\text{ه}(س))\,\text{د}س$.	٨
٣٣	فلسطين: ٢٠١٧ إكمال إذا كان: $\int_{١}^{أ}(٢س+١)\,\text{د}س = \int_{١}^{٣}(٣س^{٢}-أ)\,\text{د}س$، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟	$-٤،٧$
٣٤	فلسطين: ٢٠١٦ جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{١}^{٣}٣س(س+٦)\,\text{د}س$	٩٨
٣٥	فلسطين: ٢٠١٥ إكمال جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{١}^{٢}(س-٢)(س+٢)\,\text{د}س$	$-\frac{٥}{٣}$
٣٦	فلسطين: ٢٠١٤ إكمال جد قيمة ب التي تجعل $\int_{-١}^{١}(٣ب س^{٢}+١)\,\text{د}س = ٨$	٣
٣٧	فلسطين: ٢٠١٣ إكمال جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{١}(س\sqrt{س})\,\text{د}س$	$\frac{٢}{٥}$
٣٨	فلسطين: ٢٠١٢ إذا كان $\int_{١}^{٤}\text{ه}(س)\,\text{د}س = ٣$ ، وجد قيمة $\int_{١}^{٤}\left(س^{-\frac{١}{٢}}+\text{ه}(س)\right)\text{د}س$	-١

إعداد المعلم : سائد الحلاق




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٣٩	فلسطين: ٢٠١٢ إذا كان $\int_{١}^{٢} هـ'(س)\,د س = \frac{٤}{س} + س^{٢} + جـ$ ، جد $\int_{١}^{٢} هـ'(س)\,د س$	١
٤٠	فلسطين: ٢٠١١ إذا كان $\int_{ب}^{أ} (س + ١)\,د س = \int_{١}^{٣} (١)\,د س$ ، فما قيمة الثابت أ ؟	٠، $\frac{٤}{٣}$
٤١	فلسطين: ٢٠١٠ إذا كان $\int_{٢}^{هـ} (س)\,د س = ٥$ ، $\int_{٧}^{هـ} (س)\,د س = -٣$ ، فجد: [١] $\int_{٢}^{٧} هـ(س)\,د س$ [٢] $\int_{٢}^{هـ} (هـ(س) + ٢س)\,د س$	[١] ٨ [٢] ٢٦
٤٢	فلسطين : ٢٠٠٩ إذا كان $\int_{١}^{٢} (٢س + ١)\,د س + \int_{٢}^{ب} (٢س + ١)\,د س = ٠$ ، فما قيمة/قيم الثابت ب؟	١، ٢-
٤٣	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا كان $\int_{-١}^{٢} ع'(س)\,د س = ٣س^{٢} - ٨س + جـ$ ، فأوجد [١] $\int_{-١}^{٢} ع'(س)\,د س$ [٢] $\int_{-١}^{٢} ع(س)\,د س$ ، علماً بأن ع(٣) = ١	[١] ١٥- [٢] $س^{٣} - ٤س^{٢} - ٢س + جـ$
٤٤	فلسطين : ٢٠٠٨ جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{١} (٣س^{٢} + ٢س + ٤)\,د س$	١٠
٤٥	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا علمت أن : $\int_{١}^{أ} (٢س - ٥)\,د س = ١٨$ ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟	٧، ٢-
٤٦	فلسطين : ٢٠٠٧ جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{١}^{-١} (س + ١)^{٢}\,د س$	$-\frac{٨}{٣}$
٤٧	فلسطين : ٢٠٠٧إكمال إذا كان $\int_{١}^{هـ} (هـ(س))\,د س = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} (٢هـ(س))\,د س = ١٢$ ، فما قيمة $\int_{هـ}^{٣} هـ(س)\,د س$	٢

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ــ غرب غزة	اختبار التكامل		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفحات	١	المدرسة:	العلامة
	التاريخ:		الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن:	ستون دقيقة ٢٠

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة : (٦) علامات

١) إذا كان $هـ(س)=\frac{٢}{س^{-٢}}+\int ٢س\,د س$ ، فما قيمة $هـ'(٢)$ ؟

أ) ٦ ب) ٢ جـ) ١٢ د) ١٦

٢) إذا كان $هـ(س)=\int_{٢}^{٣}(٤س+١)^{٢}\,د س$ ، فإن $هـ'(س)$ يساوي

أ) صفر ب) $(٤س+١)^{٢}$ جـ) $١٦س+٨$ د) ١

٣) $\int \frac{٧}{٣}\sqrt[٣]{س^{٤}}\,د س=$

أ) $\frac{٧}{٤\sqrt[٣]{س}}+ج$ ب) $\sqrt[٣]{س^{٧}}+ج$ جـ) $س^{\frac{٧}{٣}}$ د) $\frac{٣}{٧}\sqrt[٣]{س^{٤}}$

٤) إذا كان $\int_{١}^{٤}-٣(هـ(س).)\,د س=٦$ ، فما قيمة $\int_{٤}^{١}\frac{١}{٢}(هـ(س)+٤).\,د س$ ؟

أ) صفر ب) ٧ جـ) ٥− د) ٧−

٥) ما قيمة: $\int_{-٢}^{٢}(٢هـ'(س)+٢)\,د س$ ، إذا علمت $هـ(٢)=٢$ ، $٢هـ(-٢)=٢$ ؟

أ) ١٠ ب) ١٤ جـ) ٨ د) ٢

٦) إذا كان $\int_{ج}^{١}(٦س)\,د س=-٢٤$ ، فما قيمة الثابت ج ؟

أ) ٣ ب) ٣− جـ) ± ٣ د) ٢٧

السؤال الثاني: (٦) علامات

١) جد : $\int\left(\frac{٢\sqrt[٣]{س}}{٣}+\frac{٣}{س^{-٢}}+٢\right)\,د س$

٢) احسب قيمة : $\int_{٤}^{٨}\left(\frac{٤س}{س^{-٢}}+\frac{س}{٢}-١\right)\,د س$

السؤال الثالث : (٨) علامات

١) أجد قاعدة الاقتران $هـ(س)$ الذي مشتقتهُ $هـ'(س)=٣\sqrt[٣]{س}$ ،علماً بأن $هـ(١)=-٦$

٢) إذا كان $\int_{١}^{٤}(٣هـ(س))\,د س+٣=-٣$ ، وكان $\int_{٣}^{٤}(هـ(س)-٣)\,د س=١٢$ ، جد قيمة $\int_{١}^{٣}(٣هـ(س)+٢س)\,د س$

إنتهى

إعداد المعلم: سائد الحلاق
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

تمارين عامة

تمارين ومسائل (١-٧)

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الحل	د	أ	أ	جـ	جـ	أ	جـ	د	جـ	ب

٢) $هـ(س) = س^{٣} - جـ س - ٦$

$هـ'(س) = ٣س^{٢} - جـ$

$هـ'(٢) = ٣(٢)^{٢} - جـ$

$٠ = ١٢ - جـ \leftarrow جـ = \boxed{١٢}$

٣) موسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{هـ(١٨) - هـ(١١)}{١٨ - ١١}$

$= \frac{\sqrt{٢ - ١٨} - \sqrt{٢ - ١١}}{٧}$

$= \frac{\sqrt{١٦} - \sqrt{٩}}{٧} = \frac{٤ - ٣}{٧} = \boxed{\frac{١}{٧}}$

٤) $هـ(س) = س^{٣} - ١٢ س - ٣$

$هـ'(س) = ٣س^{٢} - ١٢$

$٠ = ٣س^{٢} - ١٢$

$\frac{٣}{٣} س^{٢} = \frac{١٢}{٣}$

$س^{٢} = ٤$ (نأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

$س = \boxed{\pm ٢}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٥ هـ (س) $= \int_{ب}^{٥} (٢س+١)\,د س = ٢٤$

$\left(س^{٢}+س\right)\Big|_{ب}^{٥} = ٢٤$

$\left(٥^{٢}+٥\right)-\left(ب^{٢}+ب\right)=٢٤$

$٢٥+٥-ب^{٢}-ب=٢٤$

$٣٠-ب^{٢}-ب=٢٤$

$-٣٠+ب^{٢}+ب+٢٤=٠$

$ب^{٢}+ب-٦=٠$

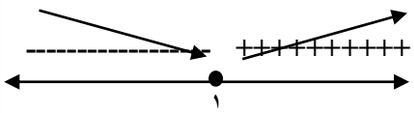
$(ب+٣)(ب-٢)=٠$

إما ب $=$ [-٣] أو ب $=$ [٢]

مديرية التربية والتعليم لمنطقة غرب غزة
أ. سائد الحلاق

٦ هـ (س) $= ٤س^{٢}-٨س+١$

هـ $'$(س) $= ٨س-٨$



$٨س-٨=٠ \leftarrow \frac{٨}{٨}س=\frac{٨}{٨} \leftarrow$ س $=$ [١]

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الاقتران متزايد على الفترة $[١ ، \infty[$

الاقتران متناقص على الفترة $]-\infty ، ١]$

من إشارة هـ $'$(س) يتضح وجود قيمة صغرى محلية عند س $= ١$ وقيمتها :

هـ (١) $= ٤(١)^{٢}-٨\times١+١=$ [-٣]

أو تكتب :

(١، هـ(١)) صغرى محلية $\leftarrow$ $(١ ، -٣)$ صغرى محلية .





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

حلول | ورقة العمل من كتاب الفترة الأولى

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان $\text{ه}(س) = ٥\sqrt[٣]{٩س^{٣}}$ ، أجد $\text{ه}'(١)$

$\text{ه}(س) = ٥ \times \sqrt[٣]{٩} \times س^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{ه}(س) = ٥ \times ٣ \times س^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{ه}(س) = ١٥ \times س^{\frac{٣}{٢}}$

$\text{ه}'(س) = ١٥ \times \frac{٣}{٢} \times س^{\frac{٣}{٢}-١}$

$\text{ه}'(١) = ١٥ \times \frac{٣}{٢} \times (١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٤٥}{٢} = \boxed{٢٢,٥}$ (الخيار غير موجود ضمن السؤال)

٢ إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ه (س) على فترة ما ، يساوي $\frac{٣}{٤}$ وكانت $\Delta ص = ٩$ ، فما قيمة $\Delta ص - \Delta س$؟

متوسط التغير $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} \leftarrow \frac{٣}{٤} = \frac{٩}{\Delta س}$ (بالضرب التبادلي)

$٣ \Delta س = ٣٦ \leftarrow \Delta س = ١٢$

$\Delta ص - \Delta س = ٩ - ١٢ = \boxed{-٣}$ الخيار د

٣ إذا كان $\text{ه}'(٤) = ٧$ ، $\text{ه}(٤) = ٢$ ، $\text{هـ}'(٤) = -٨ = ٢\text{هـ}(٤)$ ، فما قيمة $\left(\frac{\text{ه}}{\text{هـ}}\right)'(٤)$

$\text{هـ}'(٤) = -٨ = ٢\text{هـ}(٤) \leftarrow \text{هـ}'(٤) = \boxed{-٨}$ ، $\text{هـ}(٤) = \boxed{-٤}$

$$\left(\frac{\text{ه}}{\text{هـ}}\right)'(٤) = \frac{\left(\text{هـ}(٤) \times \text{ه}'(٤)\right) - \left(\text{ه}(٤) \times \text{هـ}'(٤)\right)}{(\text{هـ}(٤))^{٢}}$$

$$\left(\frac{\text{ه}}{\text{هـ}}\right)'(٤) = \frac{(-٤ \times ٧) - (٢ \times -٨)}{(-٤)^{٢}} = \frac{-١٢}{١٦} = \boxed{\frac{-٣}{٤}}$$ الخيار أ

٤ إذا كان $\text{ه}'(٢) = ٠$ ، $\text{ه}(٢) = -٧$ ، وكان للاقتران ه (س) قيمة صغرى محلية وحيدة على مجالهُ ، فما أصغر قيمة للاقتران ه (س) ؟

$\text{ه}(٢) = -٧ \leftarrow \text{ه}'(٢) = ٠$

أصغر قيمة للاقتران ه (س) هي $\boxed{-٧}$ الخيار د

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢ أجد هـ′ (س) فيما يأتي :

١ هـ (س) = (٣س^{٢} − ٢)(٧س^{٢} − ٣س + ١) عند س = ١

هـ′ (س) = (٣س^{٢} − ٢)(١٤س − ٣) + (٧س^{٢} − ٣س + ١)(٦س)

هـ′ (١) = (٣(١)^{٢} − ٢)(١٤×١ − ٣) + (٧(١)^{٢} − ٣×١ + ١)(٦×١)

هـ′ (١) = (٣ − ٢)(١٤ − ٣) + (٧ − ٣ + ١)(٦)

هـ′ (١) = ١×١١ + ٥×٦

هـ′ (١) = ١١ + ٣٠ = $\boxed{٤١}$

٢ هـ (س) = $\sqrt[٣]{س^{٥}} - \frac{٢}{س^{٣} - ٧} + ٥$ عند س = −١

هـ (س) = $س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٢}{س^{٣} - ٧} + ٥$

هـ′ (س) = $\frac{٥}{٣} س^{\frac{٢}{٣}} - \frac{-٢(٣س^{٢})}{(س^{٣} - ٧)^{٢}}$

هـ′ (س) = $\frac{٥}{٣} \sqrt[٣]{س^{٢}} - \frac{-٢(٣س^{٢})}{(س^{٣} - ٧)^{٢}}$

هـ′ (−١) = $\frac{٥}{٣} \sqrt[٣]{(-١)^{٢}} - \frac{-٢(٣(-١)^{٢})}{(-١^{٣} - ٧)^{٢}}$

هـ′ (−١) = $\frac{٥}{٣} - \left(١ \times \frac{٥}{٣}\right) - \frac{٢ \times ٣}{(-٨)^{٢}}$

هـ′ (−١) = $\frac{٥}{٣} - \frac{٦}{٦٤} = \frac{-٦}{٦٤} + \frac{٥}{٣} = \boxed{\frac{٤٤}{٢٥}}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

حلول | الاختبار الذاتي من كتاب الفترة الأولى

١

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الحل	$\frac{٥}{٢٥}$	أ	ء	ب	أ	جـ	ب	أ	ب

٢ إذا كان $\int_{٠}^{٢}(٢س - هـ(س))\,دس = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٧س - ٣$ ، فما قيمة $\int_{٠}^{٢}(٣هـ(س))\,دس$ ؟

$$\int(٢س)\,دس - \int هـ(س)\,دس = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٧س - ٣$$

$$-\int هـ(س)\,دس = س^{٣} - ٢س^{٢} + ٧س - ٣ - \int(٢س)\,دس$$ (ضرب الطرفين في −١)

$$\int هـ(س)\,دس = -س^{٣} + ٢س^{٢} - ٧س + ٣ + \int(٢س)\,دس$$

$$\int هـ(س)\,دس = -س^{٣} + ٢س^{٢} - ٧س + ٣ + \frac{٢س^{٢}}{٢} + جـ$$

$$\boxed{\int هـ(س)\,دس = -س^{٣} + ٣س^{٢} - ٧س + ٣ + جـ}$$

$$\int_{٠}^{٢}(٣هـ(س))\,دس = ٣\left[-س^{٣} + ٣س^{٢} - ٧س + ٣ + جـ\right]_{٠}^{٢}$$

$$= ٣\left(\left(-٢^{٣} + ٣(٢)^{٢} - ٧\times٢ + ٣ + جـ\right) - \left(-٠^{٣} + ٣(٠)^{٢} - ٧\times٠ + ٣ + جـ\right)\right)$$

$$= ٣\left(\left(-٨ + ١٢ - ١٤ + ٣ + جـ\right) - (٣ + جـ)\right)$$

$$= ٣(-٧ - جـ - ٣ + جـ) = ٣\times-١٠ = \boxed{-٣٠}$$ (يوجد حل آخر وهو باشتقاق الطرفين)

٣ إذا كان $\int_{-١}^{٤} هـ(س)\,دس = ٩$، $\int_{-١}^{٤} ٢هـ(س)\,دس = -٨$، فما قيمة $\int_{-١}^{٤}(٢هـ(س) + هـ(س))\,دس$ ؟

$$\int_{-١}^{٤} ٢هـ(س)\,دس = -٨ \leftarrow \int_{-١}^{٤} هـ(س)\,دس = \boxed{-٤}$$

$$\int_{-١}^{٤}(٢هـ(س) + هـ(س))\,دس = \int_{-١}^{٤} ٢هـ(س)\,دس + \int_{-١}^{٤} هـ(س)\,دس$$

$$= (٢\times-٩) + (-٤) = -١٨ + (-٤) = \boxed{-٢٢}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٤ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٧ ، ٩] يساوي – ٥ ، فما قيمة متوسط تغير الاقتران ك(س) = س ق(س) + ٢ على [٧ ، ٩] ، علماً بأن ق(٧) = ٤٠ .

متوسط التغير للاقتران ق(س) = $\frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= -٥ \quad \frac{ق(٩) - ق(٧)}{٩ - ٧}$

$= -٥ \quad \frac{ق(٩) - ق(٧)}{٢}$ (بالضرب التبادلي) ← ينتج أن :

ق(٩) – ق(٧) = – ١٠

ق(٩) – ٤٠ = – ١٠

← ق(٩) = ٣٠

متوسط التغير للاقتران ك(س) = $\frac{ك(س_٢) - ك(س_١)}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{ك(٩) - ك(٧)}{٩ - ٧}$

$= \frac{(٢ + (٩) ق ٩) - (٢ + (٧) ق ٧)}{٢}$

$= \frac{(٢ + ٣٠ \times ٩) - (٢ + ٤٠ \times ٧)}{٢}$

$= \frac{-١٠}{٢} = -٥$

٥

أ) الاقتران متزايد على الفترة [٩ ، ∞ [

ب) عند س = ٩

جـ) لا ، لأن الاقتران ق (س) لم يغير من سلوكهُ حول س = ٣ (متناقص قبل ٣ ومتناقص بعد ٣)

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ٧ أسئلة اثراء الوحدة الأولى (التفاضل و التكامل)

القسم الأول: أسئلة اختيار من المتعدد :

السؤال الأول / ضع دائرة رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

١ إذا قطع المستقيم ل منحنى الاقتران هـ(س) في النقطتين (-٢ ، -٦) ، (٤ ، -٣) ، فما متوسط التغير للاقتران هـ(س)؟

أ) -٢ ب) ٢ جـ) -٠,٥ د) ٠,٥

٢ يقطع المستقيم م منحنى الاقتران هـ(س) في النقطتين (-٣ ، ٢أ) ، (٣ ، ٢) ، فإذا كان ميلهُ يساوي ٤ ، فما قيمة أ ؟

أ) ١١ ب) -١١ جـ) -٢٢ د) -١٣

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) للفترة [-١ ، ٣] يساوي $\frac{١}{٤}$ ، وكان هـ(٣) = ٢، فما قيمة هـ(-١)؟

أ) ٤ ب) ٢ جـ) ١ د) -١

٤ ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) للفترة [-٢ ، ٣] ، إذا علمت أن هـ(٣) – هـ(-٢) = -١٠ ؟

أ) -٢ ب) $-\frac{١}{٢}$ جـ) -٥ د) -١٠

٥ ما متوسط تغير الاقتران هـ(س) = $\frac{١}{٢}$س + ٢ عندما تتغير س من س$_{١}$ = -٢ إلى س$_{١}$ = ٢ ؟

أ) -١ ب) ١ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ٢

٦ إذا علمت أن متوسط تغير الاقتران هـ(س) = أس + ٣ في الفترة [-٤ ، ٥] هو ٥ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٧ ب) ٤٥ جـ) ٥ د) -٥

٧ إذا كان الاقتران هـ(س) = $\frac{٣}{٥}$ $\sqrt[٣]{س^{٥}}$ + س ، فما قيمة هـ′(٨)؟

أ) ٤ ب) ٥١٣ جـ) ٥ د) ٦٥

٩ إذا كان الاقتران هـ(س) = أ س$^{-٢}$ ، وكان هـ′(-١) = ١٠.فما قيمة الثابت أ؟

أ) ٥ ب) -٥ جـ) -١٠ د) ١٠

١٠ اذا كان هـ(س) = ٢هـ(س) – ٣س ، وكان ٢هـ′(٢) = ١٠ ، فما قيمة هـ′(٢) ؟

أ) -٤ ب) ٨ جـ) ١ د) ٤

١١ إذا كان الاقتران هـ(س) = ٢س^{٣} + ١، هـ(س) = ٤س$^{-١}$ – ٢س ، فما قيمة (هـ – هـ)′(٢) ؟

أ) ٢٧ ب) ٢١ جـ) -٢٧ د) ٢٤

إعداد الحلاق سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٢ إذا كان ك(س) = ٢و(س) × هـ(س)، جد ك′(٢) علماً بأن: و(٢) = −١، و′(٢) = ٤، هـ(٢) = −٢، هـ′(٢) = −٣

أ ٢٢ ب −١٠ جـ −٢٢ د ١٠

١٣ إذا كان ك(س) = و(س) ÷ هـ(س)، جد ك′(١) علماً بأن: و(١) = ١، و′(١) = ٢، هـ(١) = −٢، هـ′(١) = −١

أ $-\frac{٣}{٤}$ ب $\frac{٣}{٤}$ جـ $-\frac{٣}{٢}$ د $-\frac{٥}{٤}$

١٤ إذا كان الاقتران و(س) = أس^{٢} + ٤س − ٥ ، لهُ قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ −١ ب −٢ جـ ٢ د −٤

١٥ ليكن الاقتران ك(س) = ٣س^{٢} − ١٢س + ١ ، فإن الاقتران ك(س) يكون متزايد للفترة:

أ]−∞، −٢[ب]−∞، ٢[جـ]−٢، ∞[د]٢، ∞[

١٦ إذا كانت و′(س) = س^{٢} − ٦س + ٥، فما قيمة س التي يكون عندها قيمة صغرى محلية؟

أ −٥ ب ٥ جـ ١ د −١

١٧ $\int \left(\frac{٧}{٣}س \sqrt[٣]{س}\right)$.دس = ...

أ $س^{\frac{٧}{٣}} + ج$ ب $س^{\frac{٣}{٧}} + ج$ جـ $\sqrt[٣]{س^{٧}} + ج$ د $\frac{٤٩}{٩}س^{\frac{٧}{٣}} + ج$

١٨ اذا كان و(س) = $\int_{-٣}^{٤} \left(س^{٥} - ٦س^{٢} + ٢س\right)$.دس ، فما قيمة و′(−٣) ؟

أ ٥س^{٤} − ٦س + ٢ ب س^{٥} − ٦س^{٢} + ٢س جـ ٠ د ١

١٩ إذا كان و(س) = $\int \left(٨س^{٧} + ٢س\right)$.دس ، فإن و′(س) تساوي

أ ٦ ٥س^{٦} + ٢ ب س^{٨} + ٢س جـ ٠ د ٨س^{٧} + ٢س

٢٠ ما قيمة $\int_{١}^{٤} \left(٥س \sqrt{س}\right)$.دس ؟

أ −٦٦ ب ٦٦ جـ ٦٤ د ٦٢

٢١ إذا كان الاقتران و(س) = س^{٣} + $\int \left(٣س^{٢}\right)$.دس ، فما قيمة و′(٢) ؟

أ ٦٤ ب ٣٢ جـ ٤٨ د ٢٤

٢٢ إذا كان الاقتران و(س) = $\int \left(٣س^{٢} + ج\right)$.دس ، وكان و′(٢) = ١٦ ، ما قيمة الثابت ج ؟

أ ٤ ب ٢٨ جـ ٨ د −٤

إعداد الحلول : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٣ إذا كان $\int$ هـ′(س) = (٣س^{٣} + ٢س + جـ) ، فما قيمة هـ′(٢)؟

أ) ٢٢−　ب) ٣٨　جـ) ٢٨　د) ١٤

٢٤ ما قيمة $\int_{١}^{٣}$ (س$^{\frac{١}{٢}}$ $\sqrt{س^{٣}}$) .دس ؟

أ) ٩　ب) ٩−　جـ) ٢٧　د) ٢٧−

٢٥ إذا كان $\int_{٣-}^{ب}$ (ب) .دس = ١٠ ، فما قيمة / قيم ب ؟

أ) ٢،٥　ب) ٢،٥−　جـ) ٢−،٥　د) ٢−،٥−

٢٦ إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ (٢هـ(س)) .دس = −٨ ، ما قيمة $\int_{٣}^{٢}$ (٣هـ(س) + ٢س) .دس؟

أ) ٢−　ب) ٧　جـ) ١٧　د) ٢٥

٢٧ إذا كان $\int_{١}^{٢-}$ (هـ(س)) .دس = ٤ ، $\int_{١}^{٣}$ (٢هـ(س)) .دس = −٤ ما قيمة $\int_{٢-}^{٣}$ (٣هـ(س)) .دس؟

أ) ٢٤−　ب) ٦−　جـ) ١٨−　د) ١٨

٢٨ إذا كان $\int_{٣-}^{٢-}$ (هـ(س)) .دس = ٣ ، $\int_{٢-}^{٣}$ (هـ(س)) .دس = −١ ما قيمة $\int_{٣-}^{٣}$ $\left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right)$.دس؟

أ) ٢−　ب) ٤−　جـ) ٨−　د) ١

٢٩ إذا كان هـ(−٢) = ٤ ، هـ(٣) = −٣ ، فما قيمة $\int_{٢-}^{٣}$ (٣هـ′(س)) .دس؟

أ) ١٤−　ب) ٧−　جـ) ٣　د) ٢١−

٣٠ إذا كان هـ(٤) = ٣ هـ(٢) ، وكان $\int_{٢}^{٤}$ (هـ′(س)) .دس = ١٠ ، فما قيمة هـ(٢) ؟

أ) ١٠　ب) ٢٠　جـ) ٥　د) ١٦−

٣١ إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ (هـ(س)) .دس = ١٠ ، $\int_{٣}^{٥}$ $\left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right)$.دس = −٢ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٥}$ ٢(هـ(س) + هـ(س)) .دس؟

أ) ٢٤　ب) ٢٨　جـ) ٢٢　د) ١٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

القسم الثاني: الأسئلة المقالية :

أجب عن الأسئلة التالية: (أولاً : التفاضل)

١) أجد متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{س} - ١$ عندما تتغير س في الفترة [٥ ، ١٠]

٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [٢ ، ب] هو ٥، حيث ق(٢) = ٢ ، ق(ب) = ٧، أجد قيمة الثابت ب

٣) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في الفترة [١ ، ٤] هو ١٠، جد متوسط التغيرل لاقتران هـ(س) = ٣س + ٢ق(س) في نفس الفترة.

٤) يقطع المستقيم ل منحنى الاقتران ق(س) في النقطتين (٤ ، -٦) ، (-٢ ، جـ) فإذا كان ميلهُ يساوي $\frac{٢}{٣}$ ، ما قيمة الثابت جـ ؟

٥) إذا كان: ٢هـ(س) = ٧ق(س) − ٤$\sqrt{س}$ ، جد (ق)′ (٤) إذا علمت أن : هـ′ (٤) = ١٠

٦) إذا كان: ص = (٢س^{٢} + ٣س) (٥ − ٣س) ، جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٢

٧) إذا كان: ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٣س + ٢ ، جد (٢ق × هـ)′ (−١)

٨) إذا كان: ٢ق(س) = هـ(س) × س^{٢} ، وكان : ق′ (٢) = −١ ، ق(٢) = ١ جد هـ′ (٢)

٩) ليكن ق(س) = س^{٣} هـ(س) − ٢$\sqrt{س}$ ، وكان ق (١) = ٢ ، ٢ق′ (١) = −٦ فما هـ′ (١)؟

١٠) إذا كان (ق × ٤هـ)′ (٣) = ٢٤ ، وكان ق′ (٣) = ٢ ، هـ(٣) = −٢ ، هـ′ (٣) = ٥ ، جد ق(٣)

١١) ليكن هـ (س) = ٢$\sqrt{س}$ + (ق(س) × س^{٢}) ، أجد هـ′ (١) ، إذا علمت أن: ق(١) = ٢ ، ق′ (١) = −٣

١٢) ليكن ق (س) = $\frac{٣س - ١}{٢هـ(س)}$ + ٢س^{٣} ، أجد ق′ (٢) ،إذا علمت أن: هـ(٢) = −٢ ، هـ′ (٢) = ٢

١٣) ليكن الاقتران ق(س) = ٢ب س^{٣} + $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + ٦٠ وكان ق′ (٢) = ٦٠ ، فما قيمة الثابت ب؟

١٤) إذا كان للاقتران ق(س) = ٢س^{٣} + ب س^{٢} لهُ قيمة صغرى محلية عند النقطة س = ١ أجد قيمة ب ، ثم أجد ق′ (−٢)

١٥) ليكن ق(س) = س^{٣} − ١٢س + ٣ ، س ∈ ح ، جد:

أ) القيم القصوى للاقتران ق(س) وحدد نوعها . ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على مجالهُ

١٦) ليكن ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} − ١ ، س ∈ ح ، جد:

أ) القيم القصوى للاقتران ق(س) وحدد نوعها . ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على مجالهُ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٧ ليكن: هـ(س) = −٢س^{٣} + ٩س^{٢} − ١٢س ، جد:

أ) القيم القصوى للاقتران هـ(س) وحدد نوعها . ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) على مجالهُ

١٨ إذا كان للاقتران هـ(س) = أس^{٣} − ٣س^{٢} − ١٢س + ب قيمة عظمى محلية عند س = −١ وكان هـ(٢) = ١٠

أجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

١٩ إذا كان للاقتران هـ(س) = س^{٣} + أس^{٢} − ب لهُ قيمة قصوى محلية عند النقطة (١ ، ٠٢) أجد قيمة أ ، ب

٢٠ إذا كان للاقتران هـ(س) = س^{٣} − جـس + ٤ قيمة عظمى محلية عند النقطة س = −١ أجد قيمة س التي تجعل للاقتران عندها قيمة صغرى محلية.

أجب عن الأسئلة التالية : (ثانياً: التكامل)

١ جد : $\int (س^{٤} - ٤س^{-٣} - ٣س^{٢} + ٨)\,د س$

٢ جد : $\int \left(٨س^{٣} - \frac{١}{٢س^{٢}}\right) د س$

٣ جد : $\int \left(\sqrt[٣]{س^{٣}} + ٢س\right) د س$

٤ جد : $\int \left(\frac{٨}{٥}س^{\frac{٣}{٥}} + \sqrt{س}\right) د س$

٥ جد قيمة : $\int_{-١}^{٣} (٦س^{٢} + ٤س)\,د س$

٦ جد قيمة : $\int_{٠}^{١} \left(\sqrt[٣]{س} + ٧\right) د س$

٧ جد قيمة : $\int_{١}^{٤} \left(٢\sqrt{س} - ٢س - \frac{٢}{س^{٣}}\right) د س$

٨ جد قيمة : $\int_{-٣}^{-١} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٣س\right) د س$

٩ أوجد قاعدة الاقتران هـ(س) الذي مشتقتهُ تعطى بالقاعدة : هـ′(س) = ٣س^{٢} − ٤س + ٤ ، هـ(٢) = ٨

١٠ أوجد قاعدة الاقتران هـ(س) الذي مشتقتهُ تعطى بالقاعدة : هـ′(س) = ٤س^{٣} − ٢س − ٣ ، وأن هـ(٣) = ١٠

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١١ إذا كان : $\int_{١}^{-٢}(-٢و(س))\,د س = ١٠$ ، $\int_{١}^{٣}(٣و(س))\,د س = ٢١$ ، ما قيمة $\int_{-٢}^{٣}(٢و(س))\,د س$ ؟

١٢ إذا كان : $\int_{٠}^{٣}(هـ(س)+٤س)\,د س = ٣س^{٢}+٢س+٥$ ، فما قيمة $\int_{٠}^{٣}(هـ(س))\,د س$ ؟

١٣ إذا كان $\int_{-٣}^{-٢}(و(س))\,د س = ٨$ ، $\int_{-٣}^{٣}(٢و(س))\,د س = -٢$ ، ما قيمة $\int_{-٣}^{٣}٣(و(س)+١)\,د س$ ؟

١٤ إذا كان : $\int_{١}^{-٢}٢و(س)\,د س = ١٠$ ، $\int_{١}^{٣}و(س)\,د س = -٨$ ، جد $\int_{-٢}^{٣}(٣و(س)+٢س)\,د س$

١٥ إذا كان $\int_{٣}^{-٢}\left(\frac{١}{٣}و(س)\right)\,د س = -٢$ ، $\int_{٣}^{٠}(-٣و(س)+٢س)\,د س = ٣$ ، أوجد $\int_{-٢}^{٠}(٣و(س)+٣س^{٢})\,د س$

١٦ إذا كان $\int_{٣}^{٠}(٣و(س))\,د س = -٩$ ، $\int_{٥}^{٣}\left(\frac{١}{٢}هـ(س)\right)\,د س = -١$ ، فما قيمة $\int_{٥}^{٣}(٢و(س)-٣هـ(س))\,د س$ ؟

١٧ إذا كان $\int_{٢}^{٤}(-٢و(س))\,د س = ٨$ ، $\int_{٤}^{٢}(٣هـ(س))\,د س = ١٢$ ، أوجد $\int_{٢}^{٤}٢(و(س)+٢هـ(س)+٤س)\,د س$

١٨ إذا كان $\int_{-١}^{١}(٥و(س))\,د س = ١٥$، أوجد $\int_{-١}^{-١}(٣هـ'(س)+٢و(س)+٣س)\,د س$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

علماً بأن: $\frac{هـ(١)}{٢} = -١$ ، $٤هـ(-١) = -٨$

١٩ إذا كان : $\int و(س)\,د س = ٣س^{٢}+٣س+جـ$ ، فما قيمة $\int_{-١}^{١}٣و(س)\,د س$ ؟

٢٠ إذا كان : $\int_{٢}^{٤}(٤س+ب)\,د س = ١٤$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢١ إذا كان : $\int_{١}^{ب}(ب+١)\,د س = ٢٤$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢٢ إذا كان $\int_{٧}^{ب}(ب)\,د س = ٨$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢٣ إذا كان : $\int_{ب}^{٢}(٤س-٣)\,د س = ٢٠$ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



١ – ٨ أسئلة تفوق الوحدة الأولى (التفاضل و التكامل)

حاول أن تحل الأسئلة التالية :

١ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{١+س}$ + ٣ ، هو $\frac{١}{٣}$ في الفترة [ب ، ٣] ، فما قيمة الثابت ب

٢ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [−٢ ، ٢] هو ٦ ، وكان متوسط تغير الاقتران هـ(س) = ب ق(س) − ٢ لنفس الفترة يساوي ١٢ ، فما قيمة الثابت ب ؟

٣ ليكن الاقتران ق(س) = ٢ب س^{٣} + $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} − $\sqrt{س}$ ، وكان ق$'$(٢) = ٥٥ ، فما قيمة الثابت ب ؟

٤ إذا كان الاقتران ق(س) = (س^{٢} − ٧)(٥ + أس) ، وكان ق$'$(١) = −٢ فما قيمة الثابت أ ؟

٥ ليكن الاقتران ق(س) = أس^{٢} + ب س + ٣ ، وكان ق$'$(١) = −٢ ، ق (١) = ٤ فما قيمة الثابتين أ ، ب ؟

٦ إذا كان ق(٢) = ٣ ، ق$'$(٢) = ٤ ، هـ(س) = س^{٢} + ب ، جد قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

(ق × هـ)$'$(٢) = ٣٢

٧ إذا كان (ق × هـ)$'$(١) = ٨ ، وكان ٣ق(١) = ٦ ، $\frac{ق'(١)}{٢}$ = −٢ فما قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

هـ (١) = ٤س + ب

٨ إذا كان هـ(س) = (ق(س) + أس^{٢}) ، وكان − ق(٢) = −٧ ، ق$'$(٢) = −٣ ، هـ$'$(٢) = ٢٤

فما قيمة الثابت أ؟

٩ ليكن ق(س) = س^{٣} هـ(س) − ٢$\sqrt{س}$ ، وكان ق (١) = ٢ ، ٢ق$'$(١) = −٦ فما هـ$'$(١)؟

١٠ ليكن الاقتران ق(س) = $\frac{ب س^{٢} - ٤}{س + ١}$ ، س ≠ −١ ، وكان ق$'$(٢) = ٤ فما قيمة الثابت ب ؟

١١ إذا كان الاقتران ق(س) = − $\frac{٣ب}{س}$ − س^{٣} ، س ≠ ٠ ، يأخذ قيمة قصوى محلية عند س = ١ ، فما قيمة الثابت ب؟

إعداد المعلم سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٢ إذا كان الاقتران هـ(س) = س^{٣} – ب س + أ ، س ∈ ع ، فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب والذي يجعل للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ١ .

١٣ إذا كان الاقتران هـ(س) = –أس^{٣} + ١٢ س – ب ، س ∈ ع ، فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب والذي يجعل للاقتران قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ١٢) .

١٤ ما قيمة : $\int_{٣}^{٦} \left(\sqrt{س} + \sqrt{س^{٣}} \right)$ د س ؟

١٥ إذا كان $\int \left(هـ'(س) \right)$ د س = أ س^{٢} – ب س + ٧ ، أجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب إذا علمت أن:

هـ'(٢) = ٦ ، $-\frac{١}{٢}$ هـ(١) = –١ ، هـ'(٢) = –٢

١٦ إذا كان $\int \left(ل'(س) \right)$ د س = ٦ س^{٢} + ٤ س + جـ ، أجد قيمة $\int_{-١}^{١}$ ل(س) د س

إذا علمت أن: ل(٢) = ٢٥

١٧ إذا كان $\int_{١}^{٤} \frac{١}{٣}$ هـ(س) د س = –١ ، $\int_{٥}^{٤}$ (٢هـ(س)) د س = ٨ ، فما قيمة الثابت ب إذا علمت أن :

$\int_{١}^{٢}$ (هـ(س) + ب) د س = ١٨

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٨ إذا كان $\int_{٣}^{٤} \frac{٢}{٣}$ هـ(س) د س = ١٠ ، $\int_{٤}^{٣}$ (هـ(س) – ب) د س = –٥ ، فما قيمة الثابت ب ؟

١٩ إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ –٢ هـ(س) د س = ٦ ، أجد $\int_{٣}^{٢} \left(٢هـ'(س) + هـ(س) \right)$ د س ، علماً بأن: هـ(٢) = ٣ ، ٢هـ(٣) = ٥

٢٠ إذا كان $\int_{٤}^{-١}$ ٣ هـ(س) د س = –١٢ ، $\int_{-١}^{٤} \left(\frac{١}{٢} هـ(س) + جـ \right)$ د س = ٧ ، فما قيمة / قيم الثابت جـ ؟

٢١ إذا كان $\int_{٦}^{جـ}$ (٢س) د س = $\int_{جـ}^{٤} \left(٤س + \sqrt[٤]{س^{٤}} + ٤ \right)$ د س ، ما قيمة / قيم الثابت جـ ؟





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٢ إذا كان $\int_{1}^{2}\left(هـ'(س)\right)دس = \int_{1}^{أ}\left(هـ'(س)-١\right)دس$ ، وكان $\int_{1}^{2}\left(هـ'(س)\right)دس = ٣$.

ما قيمة / قيم الثابت أ ؟

٢٣ إذا كان $\int_{ب}^{1}(٢(س-٢ب))دس = \int_{ب}^{1}(٥ ب+١)دس$ ، ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢٤ إذا كان $\int_{1}^{3}(٥هـ(س))دس = -٥$ ، $\int_{3}^{1}(هـ(س)+٢جـس)دس = -٧$ ، ما قيمة / قيم الثابت جـ ؟

٢٥ إذا كان $\int_{2}^{0}\left(٢هـ'(س)+هـ'(س)+٢س\right)دس = ٢٥$ وكان

هـ(٥) = ٣ ، هـ(٢) = −٣ ، ٢(هـ(٥) − هـ(٢)) = ٤ب − ٢ ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢٦ إذا كان $\int_{-1}^{2}\left(هـ'(س)+٣هـ(س)-٣\right)دس = ١٩$ وكان $\int_{2}^{-1}(-٤هـ(س))دس = ٨$ ،

وكان هـ (٢) − هـ (−١) = ٣ب + ١ ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

٢٧ إذا كان $\int_{2}^{1}(٢هـ(س))دس = ١٠$ ، $\int_{-1}^{3}(٣هـ(س))دس = ٢١$ وكان $\int_{2}^{3}(هـ(س)+٢س)دس = ١٥$ ،

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أجد قيمة $\int_{3}^{-1}(هـ(س)+هـ(س))دس$ ؟

٢٨ إذا كان هـ(س) = أس^{٢} + ٢ب وكان $\frac{هـ'(٢)}{-٢} = -٤$ ، $\int_{ب}^{1}(هـ(س))دس = \frac{٢٠}{٣}$ ،

فما قيمة كل من الثابتين أ، ب ؟

٢٩ أوجد قيمة $\int_{ب}^{1}\left(\overline{|أس|}\right)دس$

٣٠ أوجد قيمة $\int_{ب}^{1}\left(\overline{|أس|}\right)دس$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ــ غرب غزة	اختبار نهاية الوحدة الأولى		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفحات	٢	المدرسة:	العلامة
	التاريخ:		الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن:	تسعون دقيقة ٥٠

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة: (١٥) علامة

١) ما متوسط التغير للاقتران قا(س) = $\sqrt{٣س + ٩}$ ، علماً بأن $\Delta س = ٩$ ، $س_١ = ٣$ ؟

أ) $-\frac{٣}{٩}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) ٣ د) $\frac{١٥}{٩}$

٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران قا(س) = $\frac{١}{س^{-٢}} - ١$ ، للفترة $[جـ، ٢]$ هو -٤ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

أ) $٢، -٦$ ب) ٦ جـ) -٦ د) ٢

٣) إذا كان الاقتران قا(س) = $أ س^{٣} + \sqrt{أ}$ ، وكان قا$'(-١) = ١٢$. فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) -٤ جـ) $\sqrt{٤}$ د) ١٢

٤) إذا كان $\frac{١}{٢}$(قا × هـ)$'(٣) = ٣٠$ ، قا$٢(٣) = -٨$ ، قا$'(٣) = ٥$ ، $\frac{١}{٢}$ هـ$(٣) = ٥$ ، فما قيمة هـ$'(٣)$؟

أ) ١ ب) ٥ جـ) -٥ د) -٢٠

٥) ما إذا كان الاقتران قا(س) = $\frac{جـ}{٢س + ١}$ ، وكان قا$'(٣) = ٢$. فما قيمة الثابت جـ ؟

أ) -٩٨ ب) ٩٨ جـ) ١٦٨ د) -٤٩

٦) إذا كان للاقتران هـ(س) = $ب س^{٢} + ٨س + ٥$ ، س $\in ع$ ، قيمة صغرى محلية عند س = ١ ، فما قيمة الثابت ب ؟

أ) ٤ ب) -٤ جـ) -٨ د) ٨

٧) إذا كان الاقتران قا(س) = $٣س^{٢} + \int_{٢}^{٣} (٦س).ءس - (٤س^{٥}).ءس$ ، فما قيمة قا$'(-٣)$ ؟

أ) -١٨ ب) ١٨ جـ) -٣٦ د) ٣٦

٨) إذا كان $\int$ قا$'(س) = (٢س^{٢} - ٤س + جـ)$ ، فما قيمة قا$'(٣)$؟

أ) ٦ ب) ٨ جـ) ١٢ د) ٠

٩) ما قيمة $\int_{ب}^{ب} ٤\pi^{٣}.ءس$ ؟

أ) $٤\pi^{٣}$ ب) $\pi^{٤}$ جـ) صفر د) ١

١٠) إذا كان $\int_{١}^{٠} (٣قا(س)).ءس = ٦$ ، فما قيمة $\int_{٥}^{١} ٢(قا(س) + ١).ءس$؟

أ) -١٢ ب) ٨ جـ) ٢ د) ٤

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

السؤال الثاني: (١٠) علامات

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س في الفترة [١ ، ٥] هو ١٢ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = ٢س + ٣ق(س) في نفس الفترة.

٢) إذا كان : $ق(س) = \frac{٣س + ٢}{٢هـ(س)} + ٥س$ ، جد $ق'(١)$ ، إذا علمت أن : هـ(١) = ٢ ، $هـ'(١) = -٣$

السؤال الثالث : (١٠) علامات

١) إذا كان : $\int_{٢}^{١} -٤ق(س).ىس - ١ = ٧$ ، $\frac{١}{٤}\int_{١}^{٣} ق(س).ىس = -١$ ، جد قيمة $\int_{٢}^{٣} (ق(س) + ٢س).ىس$

٢) إذا كان $\int_{٤}^{-١} ٣ق(س).ىس = -١٢$ ، $\int_{-١}^{٤} \left(\frac{١}{٢}ق(س) + ب\right).ىس = ٧$ ، فما قيمة الثابت قيمة ب .

السؤال الرابع : (١٥) علامة

١) أوجد قاعدة الاقتران ق(س) الذي مشتقتهُ $ق'(س) = ٣\sqrt{س} - ٣$ ، إذا علمت أن : ق(١) = ١٠

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢) إذا كان الاقتران ق(س) = $٢س^{٣} - ٩س^{٢} + ١٢س + ٧$ ، س ∈ ع ، جد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ع

ب) القيم القصوى للاقتران ق(س) ، ثم حدد نوعها.

إنتهى





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



الوحدة الثانية

الصفوفات

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ملخص المصفوفات

المصفوفة : عبارة عن مجموعة من الأعداد الحقيقية منظمة على هيئة مستطيل لينتج عدداً من الصفوف (م) وعدداً من الأعمدة(ن) محصورة بين قوسين من النوع [ ] ، وتكون المصفوفة من الرتبة(م×ن).

المدخلة : أي عدد حقيقي داخل قوسين المصفوفة يسمى مدخلة ،وتتحدد أي مدخلة في المصفوفة حسب الصف والعمود الواقعة فيهما ، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود هـ هي المدخلة أ ي هـ .

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها م × عدد أعمدتها ن .

رتبة المصفوفة: يقصد برتبة المصفوفة الصفة العددية التي تدل على عدد صفوف المصفوفة وعدد أعمدتها.

أنواع خاصة من المصفوفات:

١ **المصفوفة المربعة** : هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد صفوفها مع عدد أعمدتها وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة النونية(ن) فمثلاً: ← ا = $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ المصفوفة ا مصفوفة مربعة لأن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

٢ **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة مربعة يكون كل مدخلة من مدخلاتها التي تشكل القطر الرئيسي من أعلى اليمين إلى أسفل تساوي واحد صحيح ، وباقي المدخلات أصفار، وتكون شكلها على النحو التالي:

فمثلاً ← م$_{٢}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، م$_{٣}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وهكذا .....

٣ **المصفوفة الصفرية** :هي مصفوفة جميع مدخلاتها أصفار ورمزها (و) فمثلاً:← و$_{٢\times٢}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، و$_{٢\times٣}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤ **مصفوفة الصف** (السطرية) : هي التي تتكون من صف واحد فقط ، فمثلاً : ← ب$_{١\times٣}$ = [٢ ١ ٥]

٥ **مصفوفة العمود** (الرأسية) : تتكون من عمود واحد فمثلاً: ← جـ$_{٣\times١}$ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين : تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة م×ن ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

العمليات على المصفوفات

١ **جمع مصفوفتين** : إذا كانت أ،ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن فإن مجموع المصفوفتين أ + ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ،ب أي أن : $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$

٢ **طرح مصفوفتين** : إذا كانت أ،ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن فإن ناتج طرح المصفوفتين أ – ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من طرح المدخلات المتناظرة في كل من المصفوفتين أ،ب أي أن : $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} - ب_{ي هـ}$

٣ **ضرب المصفوفة بعدد حقيقي** : إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ×أ مصفوفة من الرتبة م×ن وتكون مدخلاتها على النحو : $جـ(أ_{ي هـ}) = (جـ أ_{ي هـ})$ لجميع قيم ي ، هـ .

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي:

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ومصفوفات من نفس الرتبة ، ك ∋ ع فإن :

١ أ + ب = ب + أ ..... { الخاصية التبديلية }

٢ (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ..... { الخاصية التجميعية }

٣ أ + و = و + أ = أ ..... { المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية الجمع }

٤ أ + (−أ) = (−أ) + أ = و ..... { خاصية النظير الجمعي }

٥ ك(أ + ب) = ك أ + ك ب ..... { توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات }

إعداد المعلم : سائد احلاق

ملاحظات مهمة

- المصفوفة الصفرية هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.
- عملية جمع المصفوفات عملية تبديلية.
- عملية طرح المصفوفات عملية ليست تبديلية.
- تسمى المصفوفة (−١)أ النظير الجمعي للمصفوفة أ
- نحصل على النظير الجمعي للمصفوفة بتغير إشارة كل مدخلة من مدخلات المصفوفة
- عند ضرب المصفوفة بعدد حقيقي لا ننظر لرتبة المصفوفة





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٤ **ضرب مصفوفتين** : إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن×ل فإن حاصل الضرب على النحو التالي : أ [م×ن] × ب [ن×ل] = جـ [م×ل]

إذا أمكن إجراء ضرب مصفوفتين ،فإن المصفوفة الناتجة تكوون رتبتها عدد صفوف المصفوفة الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثاني

عملية ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية.

المصفوفة م$_{٢}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية ، وتسمى أيضاً مصفوفة الوحدة.

المحددات

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن محدد المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقي ويرمز لهُ بالرمز | أ |

حيث : | أ | = (أ$_{١١}$ × أ$_{٢٢}$) − (أ$_{١٢}$ × أ$_{٢١}$).

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر المصفوفة المنفردة

إذا تساوت المدخلات المتناظرة في أي صفين أو عمودين في محدد فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ك عدد حقيقي ، فإن | ك أ | = ك^{٢} | أ |

إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير منفردة من الرتبة الثانية ، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة أ

إذا كان أ.ب = ب.أ = م$_{٢}$ ، حيث م$_{٢}$ المصفوفة المحايدة.

إعداد المعلم : سائد الحلاق

ويرمز للنظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز أ$^{-١}$. أي أن : أ . أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$. أ = م$_{٢}$

- المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

| أ | = صفر ← لا يوجد نظير ضربي. (منفردة)

| أ | ≠ صفر ← يوجد نظير ضربي. (ليست منفردة)

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ حيث | أ | ≠ ٠ ، مصفوفة غير منفردة ، فإن أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{bmatrix}$

أي أن : أ$^{-١}$ تنتج من ضرب مقلوب محدد المصفوفة أ بالمصفوفة أبعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي للمصفوفة أوتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

(نقلب مدخلات القطر الرئيسي ، ونعكس إشارات القطر الفرعي (الآخر) مقسوماً على محدد المصفوفة)





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

خطوات حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربي:

- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة أ × ع = جـ
- نجد النظير الضربي (أ $^{-1}$) لمصفوفة المعاملات (أ)
- نضرب طرفي المعادلة دائماً من اليمين بالمصفوفة أ $^{-1}$
- نستخدم تساوي مصفوفتين فنحصل على قيمتي س ، ص.

الرموز

- أ : مصفوفة المعاملات.
- أ $^{-1}$: النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.
- ع: مصفوفة المتغيرات

قاعدة كريمر :

تستخدم طريقة كريمر لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، والذي يمكن كتابتهُ بالصورة المصفوفية كالآتي : أ . ع = جـ ،

أ : مصفوفة المعاملات ع: مصفوفة المتغيرات جـ: مصفوفة الثوابت. $|أ| \neq 0$ ، فيكون:

- $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|}$ ، $أ_{س}$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.
- $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$ ، $أ_{ص}$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

إعداد المعلم : سائد أحلاق

خطوات حل أنظمة المعادلات الخطية بطريقة كريمر:

- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة أ س + ب ص = جـ
- نكتب نظام المعادلات على الصورة أ . ع = جـ
- نجد $|أ|$
- نجد $|أ_{س}|$ ثم $|أ_{ص}|$ حسب القانون أعلاه.
- لإيجاد قيمة س نستخدم : $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|}$
- لإيجاد قيمة ص نستخدم : $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$

علاقات

- $|أ_{س}| = س \times |أ|$
- $|أ| = \frac{|أ_{س}|}{س}$
- $|أ_{ص}| = ص \times |أ|$
- $|أ| = \frac{|أ_{ص}|}{ص}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١ – ٢ المصفـــوفـــــــــــــة

تستخدم المصفوفات في العلوم الإحصائية والإقتصادية والهندسية والفيزيائية ، كما أن كثيراً من الحسابات التي تجريها الأدمغة الالكترونية تُستخدم فيها المصفوفات ، وكان أول رائد في هذا المجال هو العالم كيلي Cayley الذي أبرز نظرية المصفوفات عام ١٨٥٨م.

وتلعب المصفوفات دوراً هاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى وضع الحلول لهذه العلاقات ،ونحتاج في حياتنا تبويب وعرض بيانات معينة على هيئة جداول مستطيلة الشكل مكونة من عدد من الصفوف ومن الأعمدة.

ملخص الدرس

أولاً : المـ صفوفة

تعريف المصفوفة

١ عبارة عن مجموعة من الأعداد الحقيقية منظمة على هيئة مستطيل لينتج عدداً من الصفوف (م) وعدداً من الأعمدة(ن) محصورة بين قوسين من النوع [ ] ، وتكون المصفوفة من الرتبة(م×ن) .

٢ تسمية المصفوفة : نرمز للمصفوفة بأي حرف كبير من الحروف الهجائية مثل أ ، ب ، جـ ، .....

٣ الصورة العامة للمصفوفة من الرتبة(م×ن)، تكون $أ_{م\times ن} = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} & .. & أ_{21} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{32} & .. & أ_{ن2} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ أ_{م1} & أ_{م2} & أ_{م3} & .. & أ_{مـن} \end{bmatrix}$ ← إعداد المعلم : سائد أحلاق

٤ المدخلة : أي عدد حقيقي داخل قوسين المصفوفة يسمى مدخلة ،وتتحدد أي مدخلة في المصفوفة حسب الصف والعمود الواقعة فيهما ، فالمدخلة التي تقع في تقاطع الصف ي مع العمود ه هي المدخلة $أ_{ي\,ه}$.

عدد مدخلات المصفوفة = عدد صفوفها م × عدد أعمدتها ن .

٥ رتبة المصفوفة : يقصد برتبة المصفوفة الصفة العددية التي تدل على عدد صفوف المصفوفة وعدد أعمدتها.

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$ ← يقال أنها من الرتبة ٢×٣ وتقرأ (اثنان ضرب ثلاثة).

$أ_{٣٢}$ هو العنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الثالث وقيمتهُ ٦

$أ_{٢١}$ هو العنصر الواقع في الصف الأول والعمود الثاني وقيمتهُ –١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

أنواع خاصة من المصفوفات

١ **المصفوفة المربعة :**

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد صفوفها مع عدد أعمدتها وتسمى عندئذ مصفوفة مربعة من الرتبة النونية (ن) .

فمثلاً: $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ← المصفوفة أ مصفوفة مربعة لأن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

٢ **مصفوفة الوحدة :** هي مصفوفة مربعة يكون كل مدخلة من مدخلاتها التي تشكل القطر الرئيسي من أعلى اليمين إلى أسفل تساوي واحد صحيح ، وبافي المدخلات أصفار، وتكون شكلها على النحو التالي:

فمثلاً $م_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ← $م_٢$ ، $م_٣ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ وهكذا .....

٣ **المصفوفة الصفرية :** هي مصفوفة جميع مدخلاتها أصفار ورمزها (و) فمثلاً: $و_{٢×٢} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ← و ، $و_{٢×٣} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٤ **مصفوفة الصف (السطرية) :** هي التي تتكون من صف واحد فقط ، فمثلاً : $ب_{١×٣} = [٢ \quad ١ \quad ٥]$ ← ب

٥ **مصفوفة العمود (الرأسية) :** تتكون من عمود واحد فمثلاً: $جـ_{٣×١} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ← جـ

ملاحظة

المصفوفة المكونة من عنصر واحد فقط [٥] يمكن تسميتها :

مصفوفة الصف ، مصفوفة العمود ، أو مربعة من الدرجة الأولى

ثانياً : تساوي مصفوفتين

تعريف

تتساوى المصفوفتان أ ، ب إذا كان لهما نفس الرتبة م×ن ، وكانت مدخلاتهما المتناظرة متساوية .

فمثلاً : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ نقول بالرموز ← أ = ب





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} ٦ & ٨ & ٤ \\ ٩ & -٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فأجب عن الأسئلة التالية:

١ ما رتبة المصفوفة ب ؟ $\boxed{٢ \times ٣}$

٢ ما العدد الموجود في الصف الأول والعمود الثالث ؟ $\boxed{٤}$

٣ ما اسم المدخلة التي قيمتها ٥ في المصفوفة ب ؟ $\boxed{ب_{٣٢}}$

٤ ما قيمة المدخلة $ب_{١٢}$ ؟ $\boxed{٩}$

مثال ٢

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ -٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ص + س \\ -٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ جد قيمة كل من الثابتين س ، ص

الحـــل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$\sqrt{س} = ٢ \leftarrow (\sqrt{س})^{٢} = (٢)^{٢} \leftarrow س = \boxed{٤}$

$ص + س = ٦ \leftarrow ص + ٤ = ٦ \leftarrow ص = ٦ - ٤ \leftarrow ص = \boxed{٢}$

مثال ٣ فلسطين : ٢٠١٩

إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص + ٢ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ س + ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ما قيمة س ، ص على الترتيب؟

الحـــل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن : $س + ٢ = ٤ \leftarrow س = \boxed{٢}$

$ص + ٢ = ٣ \leftarrow ص = ٣ - ٢ \leftarrow \boxed{ص = ١}$

قيمة س ، ص على الترتيب : ٢ ، ١

إعداد المعلم : سائد احلاق
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤

إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص^{٢} \\ ٥ & -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ٥ & -٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثابتين س ، ص ؟

الحـــل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$ص^{٢} = ٤ \leftarrow ص = \boxed{\pm ٢}$

$س^{٢} = س \leftarrow س^{٢} - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠$

$س = ٠ \ ، \ س = ١$



مثال ٥

إذا كانت $\begin{bmatrix} ص + ٢ & س + ص \\ ٢س + ٢ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ ٨ & ع + ص \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثوابت س ، ص ، ع ؟

الحـــل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$٢س + ٢ = ٨$ ، $ص + ٢ = -٢$ ، $ع + ص = ١٠$

$٢س = ٦$ ، $ص = -٢ - ٢$ ، $ع + ٣ = ١٠$

$س = \boxed{٣}$ ، $ص = \boxed{-٤}$ ، $ع = \boxed{٧}$

إعداد المحلل : سائد الحلاق

مثال ٦

أوجد قيم س ، ص ، ع ، ل التي تحقق المعادلة المصفوفة $\begin{bmatrix} س + ص & -٧ & س - ص \\ ٢س + ص & ٨ & -١١ - \frac{ع}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & -٧ & ٢ \\ ع & ٨ & ل \end{bmatrix}$.

الحـــل

من تساوي مصفوفتين ينتج أن :

$س + ص = ١٠$

$س - ص = ٢$

$٢س = ١٢$

$\boxed{س = ٦}$

$٦ + ص = ١٠$

$\boxed{ص = ٤}$

$٢س + ص = ع$

$ع = ٤ + ٦ \times ٢$

$\boxed{ع = ١٦}$

$ل = -١١ - \frac{ع}{٢}$

$ل = -١١ - \frac{١٦}{٢}$

$ل = ١١ - ٨ = \boxed{-٣}$

$\therefore س = \boxed{٦}$ ، $ص = \boxed{٤}$ ، $ع = \boxed{١٦}$ ، $ل = \boxed{-٣}$





الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

المصفوفة | حلول تمارين ومسائل (٢-١)

١

$$\begin{bmatrix} ٥٠٠ & ٤٧٠ & ٢٣٠ \\ ٤٠٠ & ٢٥٠ & ١٨٠ \end{bmatrix}$$

٢

أ رتبة المصفوفة أ ٢×٣ ، رتبة المصفوفة ب ٣×٣ ، رتبة المصفوفة جـ ١×٣

ب نوع المصفوفة أ مصفوفة صفرية أو مستطيلة ، نوع المصفوفة ب مصفوفة مربعة ، نوع المصفوفة جـ مصفوفة الصف

جـ جـ$_{٢١}$ $=$ [٣] ، أ$_{١٢}$ $=$ [٠] ، ب$_{٣١}$ $=$ [-٨]

٣

أ

$$\begin{bmatrix} ٤-ب & ٥ \\ ٧ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ جـ+١ & ٧ \end{bmatrix}$$

$٤-ب=٧ \leftarrow ٤-٧=ب \leftarrow ب=$ [-٣]

$ب=جـ+١ \leftarrow -٣=جـ+١ \leftarrow -٣-١=جـ \leftarrow جـ=$ [-٤]

ب

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢-٣ب \\ جـ+ب \end{bmatrix}$$

$٢-٣ب=٨ \leftarrow$ إعداد المعلم: سائد زياد الحلاق $\leftarrow -٣ب=٨-٢ \leftarrow \frac{-٦}{-٣}=\frac{٣ب}{٣} \leftarrow ب=$ [-٢]

$جـ+ب=٧ \leftarrow جـ-٢=٧ \leftarrow جـ=٧+٢ \leftarrow جـ=$ [٩]

جـ

$$\begin{bmatrix} ١ & ٦ & جـ^{٢} \\ ٨ & ٥ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ & ٩ \\ ٨ & ٥ & ب^{٢} \end{bmatrix}$$

$جـ^{٢}=٩ \leftarrow جـ=$ [±٣]

$ب^{٢}=ب \leftarrow ب^{٢}-ب=٠ \leftarrow ب(ب-١)=٠$

ب $=$ [٠] ، ب $=$ [١]

٤

$$\begin{array}{r} س + ص = ٤ \\ \pm س \mp ٢ص = \pm ١ \\ \hline ٣ص = ٣ \end{array}$$

(حل المعادلتين بطريقة الحذف)

ص $=$ [١]

نعوض عن قيمة ص في أحد المعادلتين لإيجاد قيمة س $\quad س+ص=٤ \leftarrow س+١=٤ \leftarrow س=$ [٣]

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٢ – ١ المصفوفة

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١ ما رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣- & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ؟

أ) ٦ ب) ٢×٣ ج) ٣×٢ د) $٣+٢$

٢ ما قيمة المدخلة $ب_{١٢}$ في المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ ١- & ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ؟

أ) $١-$ ب) ٥ ج) ٠ د) ٧

٣ إذا كانت $س = [٣ \quad ٥ \quad ٢]$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٣- \\ ٥ \\ ٢- \end{bmatrix}$ ، فما قيمة : $س_{٢١} + ٣ص_{١٢}$ ؟

أ) ١٥ ب) ١٠ ج) ٤٠ د) ٢٠

٤ إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ ١- & ٢ & ٣ \\ ١١ & ٧ & ٥ \end{bmatrix}$ فما قيمة : $٢(جـ_{٣١} - ٢ب_{٢٢})$ ؟

أ) $٨-$ ب) ٨ ج) ٢٤ د) ٤

٥ أي من المصفوفات التالية مصفوفة الوحدة؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٦ إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣\sqrt{ص} & ٥ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ص؟

أ) $٢\sqrt{٣}$ ب) ٨ ج) -٨ د) $٨\sqrt{٣}$

٧ إذا كانت $\begin{bmatrix} ص+س & س \\ ص & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٦ & ٤- \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $\frac{١}{٢}(س)$ ؟

أ) ٢ ب) $١-$ ج) ١ د) ٤

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

لتكن س $= \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $س_{٢٢} - ٣ص_{٢١}$ ؟

أ) ٢− ب) ١− جـ) ١١− د) ١٠−

٩ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٥- & ٤ & ٢- \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة: $أ_{١٣} \times أ_{٣٢}$ ؟

أ) ١٢ ب) ١٠− جـ) ٦− د) ١٥−

١٠ الخليل : ٢٠٢٠ تجريبي ف١

إذا كان $\begin{bmatrix} س+ص & ٧ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٧ \\ ٣- & ٢س+١ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمتي س × ص =

أ) ١، ٢ ب) ٢، ١− جـ) ٢− د) ٢

١١ بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٢-٣س \\ س+ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة س − ص =

أ) ١٣− ب) ٩ جـ) ٥− د) ١١−

١٢ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ١- & ٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ_{١١} + أ_{١٢}$ ؟

أ) ٣ ب) ٣− جـ) ٢ د) ٤−

١٣ فلسطين: ٢٠٢٠

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٠ & ١- & ٥ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ_{٣٢} - ٢أ_{٢١}$؟

أ) ٧ ب) ٦ جـ) ٢ د) ١

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & ١١ & ٧ \\ -٥ & ٤ & -٢ \\ -١ & ٦ & ١٠ \end{bmatrix}$ ، فأجب عن الأسئلة التالية:	أ	٣×٣
		ب	-٢
		جـ	س١٢
		د	٧
	أ ما رتبة المصفوفة س ؟		
	ب ما العدد الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث ؟		
	جـ ما اسم المدخلة التي قيمتها -٥ في المصفوفة س ؟		
	د ما قيمة المدخلة س٣١ ؟		
٢	إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ١٠ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٦ & س+ص \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثابتين س ، ص ؟		س = ٧ ص = -٤
٣	إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢}-٣ & ٦ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ص^{٢}-٥ص & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة س ، ص ؟		س = ∓٣ ص = ٦، -١
٤	إذا كانت $\begin{bmatrix} س^{٢}-٣ & ٩ \\ -٦ & -٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ س^{٢}-٥س & -٨ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س ؟		س = ٣
٥	إذا كانت $\begin{bmatrix} س-١ & ٠ \\ ٢س+١ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣+ص \\ ٢ع-١ & ٣ل+١ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة س، ص ،ع ، ل ؟		س = ٥ ، ص = -٣ ع = ٦ ، ل = ٣
٦	إذا كان $\begin{bmatrix} س+٣ص \\ س+٢ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة س ، ص ؟		س = ٣ ص = ٢
٧	أوجد قيم : س ، ص ، ع ، ل التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} \frac{س}{٢} & ٤ص \\ ٨ & -١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٨ \\ س+٤ع & ٢ص-ل \end{bmatrix}$		س = ٤ ، ص = -٢ ع = ٢ ، ل = ٨

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨	أوجد قيم : س ، ص ، ع ، ل التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} س+ص & س-ص \\ ٢س+ص & ٢ع+٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ ل٢ & ع \end{bmatrix}$	س = ٦ ، ص = ٤ ع = ١٦ ، ل = ١٨
٩	أوجد قيم : أ ، ب ، جـ ، ء التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} أ^{٣} & \sqrt{ب٣} \\ ء^{٢} & \sqrt{جـ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢٧ \\ ٥ & ١٦ \end{bmatrix}$	أ = −٣ ، ب = ٦٤ جـ = ٢٥ ، ء = ±٤
١٠	إذا كان $\begin{bmatrix} س^{٣}-٤س & س^{٢} \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢س \\ -٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فما قيم س ؟	س = ٠ ، ٢
١١	إذا كانت : $س = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ -١ & ١١ & -٢ \\ ٧ & ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$ فما قيمة : $\frac{١}{٢} \times (٣س_{٣٢} + ٢ص_{١٢})$ ؟	٣
١٢	الوسطى: ٢٠١٩ تجريبي ف١ إعداد المعلم : سائد احلاق إذا كانت : $\begin{bmatrix} ص^{٢} & ١٠ \\ س & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ص+٧ \\ \sqrt{١٦} & ٥ \end{bmatrix}$ جد قيمة $(س+ص)^{٢}$.	٤٩
١٣	سلفيت: ٢٠٢٠ تجريبي ف١ أوجد قيمة كل من س ، ص في المعادلة المصفوفة التالية: $\begin{bmatrix} س-١ & ١٠ \\ س+٧ & ص^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ١٣ & ٩ \end{bmatrix}$	س = ٦ ص = ±٣

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢ – ٢ العمليات على المصفوفات

ملخص الدرس

أولاً : جمع المصفوفات

تعريف

إذا كانت أ،ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن فإن مجموع المصفوفتين أ + ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من جمع المدخلات المتناظرة في كل من أ،ب أي أن : $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} + ب_{ي هـ}$

ثانياً : ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ.أ مصفوفة من الرتبة م×ن وتكون مدخلاتها على النحو :

$جـ(أ_{ي هـ}) = (جـ أ_{ي هـ})$ لجميع قيم ي ، هـ .

ثالثاً : طرح المصفوفات

تعريف

إعداد المعلم : سائد احلاق

إذا كانت أ،ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن فإن ناتج طرح المصفوفتين أ – ب = جـ هي مصفوفة من الرتبة م×ن مدخلاتها ناتجة من طرح المدخلات المتناظرة في كل من المصفوفتين أ،ب أي أن : $جـ_{ي هـ} = أ_{ي هـ} - ب_{ي هـ}$

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، و ، مصفوفات من نفس الرتبة ، ك ∈ ح فإن :

١) أ + ب = ب + أ ..... { الخاصية التبديلية }

٢) (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) ..... { الخاصية التجميعية }

٣) أ + و = و + أ = أ ..... { المصفوفة الصفرية المحايدة لعملية الجمع }

٤) أ + (–أ) = (–أ) + أ = و ..... { خاصية النظير الجمعي }

٥) ك(أ + ب) = ك أ + ك ب ..... { توزيع الضرب بعدد حقيقي على جمع المصفوفات }





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٦ \\ ١- & ٤ & ٧- \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤- & ٧ \end{bmatrix}$ ، جد :

نستطيع إجراء عملية الجمع لتساوي الرتب

١) س + ص $= \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٦ \\ ١- & ٤ & ٧- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤- & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢+٥ & ٣+٢ & ٦+٦ \\ ٠+١- & ٤-+٤ & ٧+٧- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ١٢ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) ص + س $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤- & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٦ \\ ١- & ٤ & ٧- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ١٢ \\ ١- & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٣) ماذا تلاحظ من الناتجين؟ نلاحظ أن عملية جمع المصفوفات عملية تبديلية.

٤) س + و $= \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٦ \\ ١- & ٤ & ٧- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٦ \\ ١- & ٤ & ٧- \end{bmatrix}$

٥) و + ص $= \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤- & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٤- & ٧ \end{bmatrix}$

ملاحظة

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

مثال ٢

إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} ٨ & ١- \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ، جد :

نستطيع إجراء عملية الطرح لتساوي الرتب

١) ب – جـ $= \begin{bmatrix} ٨ & ١- \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨-٣ & ١-٥- \\ ٤-١ & ٦--٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦- \\ ٣ & ٨ \end{bmatrix}$

٢) جـ – ب $= \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ١- \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٦ \\ ٣- & ٨- \end{bmatrix}$

ملاحظة

عملية طرح المصفوفات عملية ليست تبديلية.





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٣

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٥- & ٤- \end{bmatrix}$ ، جد (-١)أ

الحـــل

$$(-١)\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٤- & ٢- \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} + (-١)\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٤- & ٥- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٤- & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \text{و}_٢$$

ملاحظة

تسمى المصفوفة (-١)أ النظير الجمعي للمصفوفة أ

مثال ٤

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٦ \\ ٠ & ٥- & ٨ \\ ٥ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد :

عند ضرب المصفوفة بعدد حقيقي
لا ننظر لرتبة المصفوفة

إعداد المعلم سائد ا حلاق

١) ٢أ $= \begin{bmatrix} ٣\times٢ & ٢\times٢ & ٦\times٢ \\ ٠\times٢ & ٥-\times٢ & ٨\times٢ \\ ٥\times٢ & ٤\times٢ & ١\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ١٢ \\ ٠ & ١٠- & ١٦ \\ ١٠ & ٨ & ٢ \end{bmatrix}$

ضرب العدد ٢ في جميع المدخلات

٢) ٣أ $= \begin{bmatrix} ٣\times٣ & ٢\times٣ & ٦\times٣ \\ ٠\times٣ & ٥-\times٣ & ٨\times٣ \\ ٥\times٣ & ٤\times٣ & ١\times٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٦ & ١٨ \\ ٠ & ١٥- & ٢٤ \\ ١٥ & ١٢ & ٣ \end{bmatrix}$

ضرب العدد ٣ في جميع المدخلات

مثال ٥

إذا كانت س $= [٨ \quad ٤- \quad ٢]$، جد $\frac{١}{٢}$س

نُقسم جميع المدخلات على ٢

الحـــل

$$\frac{١}{٢}\text{س} = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٢} & \frac{٤-}{٢} & \frac{٢}{٢} \end{bmatrix} = [٤ \quad ٢- \quad ١]$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٦

إذا علمت أن: $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت المصفوفة $س = أ + ب$ ، فما قيمة $٢س_{٢٢} + س_{١٢}$ ؟

الحـــل

أولاً : نجد $أ + ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٦ \\ ٥ & ١٠ \\ ٤ & \end{bmatrix}$

ثانياً نجد قيمة : $٢س_{٢٢} + س_{١٢} = (٤ \times ٢) + ١٠ = ٨ + ١٠ = \boxed{١٨}$

مثال ٧

إذا علمت أن : $أ = \begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ ٧ & ٤ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٧ & ٠ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$ فما قيمة $١١أ - ١٠(أ + ب) + ٩ب$؟

الحـــل

$١١أ - ١٠(أ + ب) + ٩ب = ١١أ - ١٠أ - ١٠ب + ٩ب = أ - ب$

$أ - ب = \begin{bmatrix} ٦ & -١ \\ ٧ & ٤ \\ -٥ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٧ & ٠ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١٤ & ٤ \\ -٧ & ١١ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم سائد احلاق

مثال ٨

إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} ٤ \\ -٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، $٢ب = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \\ -٨ \end{bmatrix}$ ، حل المعادلة المصفوفية : $٢س = ٣(ب - ٢أ)$

أولاً: نجد: $٢ب = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٨ \\ -٨ \end{bmatrix} \leftarrow ب = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ -٤ \end{bmatrix}$ ، ثانياً : نجد $٢أ = \begin{bmatrix} ٤ \\ -٥ \\ ٦ \end{bmatrix} \leftarrow ٢أ = \begin{bmatrix} ٨ \\ -١٠ \\ ١٢ \end{bmatrix}$

ثالثاً : $٣(ب - ٢أ) = ٣\left(\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ -٤ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ \\ -١٠ \\ ١٢ \end{bmatrix} \right) = ٣ \begin{bmatrix} -٦ \\ ١٤ \\ -١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٨ \\ ٤٢ \\ -٤٨ \end{bmatrix}$

$٢س = ٣(ب - ٢أ) \leftarrow ٢س = \begin{bmatrix} -١٨ \\ ٤٢ \\ -٤٨ \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{-١٨}{٢} \\ \frac{٤٢}{٢} \\ \frac{-٤٨}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ \\ ٢١ \\ -٢٤ \end{bmatrix}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٩

حل المعادلة المصفوفة: $٢س + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} = س + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$.

الحـــل

$$٢س + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

إضافة النظير الجمعي للمصفوفة التي تحتها خط للطرفين

$$٢س + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٣ & -٥ \\ -٦ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٢س + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$٢س - س = \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

نحصل على النظير الجمعي للمصفوفة بتغير إشارة كل مدخلة من مدخلات المصفوفة

$$س = \begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

مثال ١٠

إعداد المعلم : سائد احلاق

حل المعادلة المصفوفية : $٢س + أ = ٢ب$ ، حيث : $أ = [٤ \quad ٢ \quad -٦]$ ، $ب = [١ \quad -١ \quad ٣]$

الحـــل

$٢س + أ = ٢ب$

$٢س + [٤ \quad ٢ \quad -٦] = ٢[١ \quad -١ \quad ٣]$

$٢س + [٤ \quad ٢ \quad -٦] = [٢ \quad -٢ \quad ٦]$

$٢س = [٢ \quad -٢ \quad ٦] - [٤ \quad ٢ \quad -٦]$

$٢س = [-٢ \quad -٤ \quad ١٢]$

$س = \left[\frac{-٢}{٢} \quad \frac{-٤}{٢} \quad \frac{١٢}{٢}\right]$

$س = [-١ \quad -٢ \quad ٦]$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ١١

حل المعادلة المصفوفية : $٣\left(٢س + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}\right) = ٢\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix} + ٥س$

الحـــل

$$٦س + \begin{bmatrix} ٩ & ١٥ \\ ١٢ & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} + ٥س$$

$$٦س - ٥س = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٩ & ١٥ \\ ١٢ & ٦- \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٣- & ١٣- \\ ٨- & ٤ \end{bmatrix}$$

مديرية التربية والتعليم لشرق غزة
أ. سائد الحلاق

مثال ١٢

حل المعادلة المصفوفية: $٣س + ٢و_٣ = ٣\left(\frac{س}{٣} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢- & ٦ \\ ٤ & ٥- & ٨ \\ ٠ & ٨- & ٩ \end{bmatrix}\right) - و_٣$

الحـــل

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$٣س + \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \left(\frac{س}{٣} \times ٣ + \begin{bmatrix} ٩ & ٦- & ١٨ \\ ١٢ & ١٥- & ٢٤ \\ ٠ & ٢٤- & ٢٧ \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$٣س - س = \begin{bmatrix} ٩ & ٦- & ١٨ \\ ١٢ & ١٥- & ٢٤ \\ ٠ & ٢٤- & ٢٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$٢س = \begin{bmatrix} ٨ & ٦- & ١٨ \\ ١٢ & ١٦- & ٢٤ \\ ٠ & ٢٤- & ٢٦ \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٢} & \frac{٦-}{٢} & \frac{١٨}{٢} \\ \frac{١٢}{٢} & \frac{١٦-}{٢} & \frac{٢٤}{٢} \\ \frac{٠}{٢} & \frac{٢٤-}{٢} & \frac{٢٦}{٢} \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} ٤ & ٣- & ٩ \\ ٦ & ٨- & ١٢ \\ ٠ & ١٢- & ١٣ \end{bmatrix}$$




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

العمليات على المصفوفات | حلول تمارين ومسائل (٢-٢)

١ أ) مصفوفة الطالبات $\begin{bmatrix}٣٢\\٢٥\\٢٢\end{bmatrix}$ ، مصفوفة الطلاب $\begin{bmatrix}٣٠\\٢٠\\١٦\end{bmatrix}$

ب) مجموع طلبة الفرع الزراعي في كلا المدرستين $٢٢+١٦=$ **٣٨** الطالبات – الطلاب

جـ) $= \begin{bmatrix}٣٢\\٢٥\\٢٢\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٣٠\\٢٠\\١٦\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٢\\٥\\٦\end{bmatrix}$

٢ $جـ_{٢٥} = ٢أ_{٢٥} + ب_{٢٥} = ٢\times٩ + (-٨) = ١٨ - ٨ =$ **١٠**

٣ أ) $س + ص = \begin{bmatrix}٨ & ٣ & ٢ & ٦\\٦ & ٥ & ١ & ٣\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}٧ & ٥ & ٣ & ١\\٢ & ٤ & ٦ & ٨\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١٥ & ٨ & ٥ & ٧\\٨ & ٩ & ٧ & ١١\end{bmatrix}$

ب) $٣س - ٤ص = ٣\begin{bmatrix}٨ & ٣ & ٢ & ٦\\٦ & ٥ & ١ & ٣\end{bmatrix} - ٤\begin{bmatrix}٧ & ٥ & ٣ & ١\\٢ & ٤ & ٦ & ٨\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}٢٤ & ٩ & ٦ & ١٨\\١٨ & ١٥ & ٣ & ٩\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٢٨ & ٢٠ & ١٢ & ٤\\٨ & ١٦ & ٢٤ & ٣٢\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-٤ & ١١ & -٦ & ١٤\\١٠ & -١ & -٢١ & -٢٣\end{bmatrix}$

جـ) $٥ص - س = ٥\begin{bmatrix}٧ & ٥ & ٣ & ١\\٢ & ٤ & ٦ & ٨\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}٨ & ٣ & ٢ & ٦\\٦ & ٥ & ١ & ٣\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٢٧ & ٢٢ & ١٣ & -١\\٤ & ١٥ & ٢٩ & ٣٧\end{bmatrix}$

د) لا يمكن لاختلاف رتب المصفوفتين.

هـ) $٢ص - ٣$ و $_{٤\times٢} = ٢ص = ٢\begin{bmatrix}٧ & ٥ & ٣ & ١\\٨ & ٤ & ٦ & ٢\end{bmatrix} - ٣\begin{bmatrix}٠ & ٠ & ٠ & ٠\\٠ & ٠ & ٠ & ٠\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}١٤ & ١٠ & ٦ & ٢\\٤ & ٨ & ١٢ & ١٦\end{bmatrix}$

٤ $٣\begin{bmatrix}٥ & ٢ & ٣\\١ & ٦ & ٥\end{bmatrix} - ٤\begin{bmatrix}١ & ٢ & ٣\\-٣ & ٣ & ٠\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}١٥ & ٦ & ٩\\٣ & ١٨ & ١٥\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}٤ & ٨ & ١٢\\-١٢ & ١٢ & ٠\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}١١ & -٢ & -٣\\١٥ & ٦ & ١٥\end{bmatrix}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٥

$$٢س = أ - ٣ب$$

$$٢س = \begin{bmatrix} ٢ & ٧- \\ ٤ & ١ \\ ٢- & ١- \end{bmatrix} ٣ - \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٨ & ١ \\ ٢- & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧- \\ ٤ & ١ \\ ٢- & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٢- & ٠ \\ ٢٤- & ٣- \\ ٦ & ٢١- \end{bmatrix}$$

$$٢س = \begin{bmatrix} ١٠- & ٧- \\ ٢٠- & ٢- \\ ٤ & ٢٢- \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{١٠-}{٢} & \frac{٧-}{٢} \\ \frac{٢٠-}{٢} & \frac{٢-}{٢} \\ \frac{٤}{٢} & \frac{٢٢-}{٢} \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} ٥- & \frac{٧-}{٢} \\ ١٠- & ١- \\ ٢ & ١١- \end{bmatrix}$$

٦

أ

$$س + ٣ \begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$$

$$س + \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ١٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧- & ٦ \\ ٢- & ١٦- \end{bmatrix}$$

ب

$$٢\left(س + \begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \right) = س - ٢ \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$٢س + \begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ٠ & ١٠- \end{bmatrix}$$

$$٢س - س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٠ & ١٠- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٦- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} ١٠ & ٦- \\ ١٤- & ٢- \end{bmatrix}$$

جـ

$$-٢س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٢- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد احلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٢ – ٢ العمليات على المصفوفات

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ب + و$_{٢}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٩ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٨ \\ ٤ & -٦ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$

٢ إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة جـ – م$_{٢}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ ٦ & -٩ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ ٦ & -٧ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٦ & ٢ \\ -٨ & ٥ \end{bmatrix}$

٣ إذا كانت المصفوفة س$_{٣\times٢}$ ، فإن رتبة المصفوفة : ٤س$_{٣\times٢}$ هي :

أ ٢×٣ ب ٣×٢ ج ١٢×٨ د ١٢×٢

٤ إذا كانت المصفوفة س من الرتبة ٢×٣ ، فإن رتبة المصفوفة ص بحيث ص + س$_{٣\times٢}$ = ع$_{٣\times٢}$

أ ٣×٢ ب ٢×٢ ج ٣×٢ د ٣×٢

٥ إذا كانت جـ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن (–جـ) + جـ =

أ م$_{٢}$ ب و$_{٢}$ ج صفر د $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٦ إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ١ & -٣ & ٠ \\ -٨ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن ٣ ص =

أ $\begin{bmatrix} ٣ & -٩ & ٠ \\ -٢٤ & ١٥ & ١٢ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٨ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٢ & -٦ & ٠ \\ -١٦ & ١٠ & ٨ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٣ & ٩ & ٠ \\ ٢٤ & -١٥ & -١٢ \end{bmatrix}$

٧ إذا كانت ٢س = $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$ ، فإن س =

أ $\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٤ & -١٦ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨ إذا كانت $\frac{١}{٣}س = \begin{bmatrix} -٣ & -٦ \\ ٣ & -٩ \end{bmatrix}$ ، فإن س =

أ $\begin{bmatrix} -٣ & -٦ \\ ٣ & -٩ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -١ & -٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٣ & -٦ \\ ٣ & -٩ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٩ & -١٨ \\ ٩ & -٢٧ \end{bmatrix}$

٩ إذا كانت $٣ع = \begin{bmatrix} ١٢ & -٣ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فإن $٢ع =$

أ $\begin{bmatrix} ١٢ & -٣ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٨ & -٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢٤ & -٦ \\ ١٨ & ١٢ \end{bmatrix}$

١٠ إذا كان $س = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٧ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} -٤ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت $ع = س + ص$ ، فما قيمة $٢(ع_{١٢} - ٣ع_{٢١})$ ؟

أ -١٦ ب ٨ ج ١٠ د ١٦

١١ إذا كانت $\begin{bmatrix} س & ٥ \\ س & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ص \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ع & ٥ \\ ٣ & ص \end{bmatrix}$ ، فإن قيمة ع ؟

أ ٣ ب ٥ ج ٢ د ٤

١٢ إذا كانت $ب = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $ج = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فإن $٣ب - ج - ٤\left(ب - \frac{١}{٢}ج\right)$ تساوي:

أ $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٦ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

١٣ ما حل المعادلة المصفوفة $٢س + أ = ب$ ، إذا علمت أن : $أ = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \\ -٦ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} -١ \\ -١ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \\ -٧ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -٢ \\ -٢ \\ ١٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٢ \\ -١٤ \end{bmatrix}$

١٤ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

ما المصفوفة س بحيث: $٣\left(س - \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} - ٢س$؟

أ $\begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$

إعداد الحلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٥ قباطية: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: ٢س – ٢$\begin{bmatrix}١ & ٠\\ -٢ & ٥\end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix}٠ & -٤\\ ٤ & ٢\end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة (– س) هي:

أ $\begin{bmatrix}١ & -٤\\ ٢ & ٦\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}٢ & -٨\\ ٤ & ١٢\end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix}١ & ٣\\ -١ & ٠\end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix}-١ & ٤\\ -٢ & -٦\end{bmatrix}$

١٦ خانيونس: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix}٢ & ٤\\ ٠ & -٦\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}-٢ & ٢\\ ٤ & ٠\end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة $\frac{١}{٢}$أ – ب = هي:

أ $\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ -٤ & -٣\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ ٤ & -٣\end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix}-٣ & ٠\\ -٤ & -٣\end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ -٤ & -٣\end{bmatrix}$

١٧ فلسطين: ٢٠١٨

إذا كانت: $\begin{bmatrix}٥ & ٣\\ ٤ & ٠\end{bmatrix}$ + س = $\begin{bmatrix}٦ & ٣\\ ٣ & ٢\end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة س تساوي:

أ $\begin{bmatrix}١ & ٠\\ -٢ & ١\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}-١ & ٠\\ ١ & -٢\end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix}١ & ٠\\ ٢ & -١\end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix}-١ & ٠\\ ٢ & ١\end{bmatrix}$

١٨ فلسطين: ٢٠٢٠ إكمال

لتكن أ = $\begin{bmatrix}١ & ٠\\ ٤ & -١\end{bmatrix}$ ، فما قيمة ٢أ + م$_{٢\times٢}$ ؟

أ $\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ -٨ & ٣\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}٣ & ٠\\ ٨ & -١\end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix}٢ & ١\\ -٧ & -٢\end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix}٢ & ٠\\ -٨ & -٢\end{bmatrix}$

١٩ فلسطين: ٢٠٢٠

لتكن ٢أ = $\begin{bmatrix}٠ & -٤\\ ٨ & ١\end{bmatrix}$ ، فما هي المصفوف – أ ؟

أ $\begin{bmatrix}٢ & ٠\\ -٤ & -٠,٥\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}٠ & -٨\\ ١٦ & ٢\end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix}٨ & ٠\\ -١٦ & -٢\end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix}-٢ & ٠\\ ٤ & -٠,٥\end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٥ & ٧ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٨ & -٨ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ، جد : أ) س + ص ب) ص – س جـ) ٣(ص – س) د) ٢س – ص	أ	$\begin{bmatrix} ١٣ & -١ \\ ١٠ & ٧ \end{bmatrix}$
		ب	$\begin{bmatrix} ٣ & -١٥ \\ ٢ & ١١ \end{bmatrix}$
		جـ	$\begin{bmatrix} ٩ & -٤٥ \\ ٦ & ٣٣ \end{bmatrix}$
		د	$\begin{bmatrix} ٢ & ٢٢ \\ ٢ & -١٣ \end{bmatrix}$
٢	إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ -٧ & -٣ \end{bmatrix}$ ، جد : أ) ٤ب + م^{٢} ب) -٢جـ + و^{٢}	أ	$\begin{bmatrix} ٩ & -٨ \\ ٢٠ & ١٣ \end{bmatrix}$
		ب	$\begin{bmatrix} -٢ & -٨ \\ ١٤ & ٦ \end{bmatrix}$
٣	حل المعادلة المصفوفة: ٢س + $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix}$ = س + ٢ $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$
٤	حل المعادلة المصفوفة: ٤س + ٢ $\begin{bmatrix} ٥ & \frac{١}{٢} \\ ٤ & -٣ \end{bmatrix}$ = ٣س – ٣ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -١٣ & -٧ \\ -٨ & ٩ \end{bmatrix}$
٥	حل المعادلة المصفوفة: ٣ – $\left(\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} ٢ + س \right)$ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ + ٥س		$\begin{bmatrix} ١١ & ٧ \\ -٤ & ١٢ \end{bmatrix}$
٦	إذا كان أ $= \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٣ \\ -٥ \end{bmatrix}$ ، جد قيمة : ١٢أ – ٣ب – ١٣ + ٤ب		$\begin{bmatrix} -٥ \\ -٦ \end{bmatrix}$
٧	إذا كان : $\begin{bmatrix} ٥ & ٢س \\ ٨ & ص \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ع & -٦ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ جد قيمة كل من : س ، ص ، ع		س = ٢ ص = ٤ ع = -٩

مديرية التربية والتعليم للتعليم الثانوي بمديرية غرب غزة
أ. سائد الحلاق
إعداد المعلم: سائد احلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨	إذا كانت: س $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة ص حيث : $\frac{١}{٢}$ ص $+ ٢$ س $= \begin{bmatrix} ١٢ & ١٦ \\ ٢٠ & ١٠ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ١٦ & ٢٠ \\ ٢٤ & ٢٨ \end{bmatrix}$
٩	حل المعادلة المصفوفية : ٢س $-$ و$_{٢}$ $= ٢ \left(\frac{١}{٢} س + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} \right) +$ م$_{٢}$	$\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$
١٠	إذا كانت ٢ أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٨ \\ ٢- & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\frac{١}{٣}$ ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ١- & ٦ & ٢- \end{bmatrix}$ جد المصفوفة س حيث : س $= ٢ (ب + أ)$	$\begin{bmatrix} ١٠ & ١٨ & ٢٦ \\ ٨- & ٣٨ & ١٢- \end{bmatrix}$
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال حل المعادلة المصفوفية : س $- ٣ \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = ٢ \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٠ & ٦ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix} -$ ٢س	$\begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ ٣ & ٨ \\ ٥ & ١٤ \end{bmatrix}$
١٢	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كانت : أ $= \begin{bmatrix} ٩ & ٣- \\ ١٢ & ٦- \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ٦- \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix}$ أثبت أن : $\frac{١}{٣}$ أ $-$ ب $= ٢$ جـ	أثبت بنفسك
١٣	فلسطين : ٢٠٢٠ جد حل المعادلة المصفوفية: ٢ $\left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + س \right) = س - ٣ \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ١٢ & ٧- \\ ١٩- & ٢- \end{bmatrix}$
١٤	فلسطين : ٢٠١٩ إكمال إذا كان : أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٠ & ٦- \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد س بحيث : أ $-$ ٢س $=$ ب	$\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢- & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$
١٥	طولكرم : ٢٠١٩ تجريبي حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ م$_{٢}$ ٣ $+$ س $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٦	فلسطين : ٢٠١٧ إكمال ديسمبر حل المعادلة المصفوفة : $٣\left(س+\begin{bmatrix}١ & ٢\\ ٠ & ١-\end{bmatrix}\right)=س+\begin{bmatrix}٢- & ٢\\ ١ & ٣\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{١}{٢}- & ٤-\\ \frac{٣-}{٢} & ٢\end{bmatrix}$
١٧	فلسطين : ٢٠١٦ حل المعادلة المصفوفة : $٢س+\begin{bmatrix}٣ & ٣-\\ ٥ & ٤\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٣ & ٦\\ ١ & ٤-\end{bmatrix}-س$	$\begin{bmatrix}١ & ٢\\ ٣- & ١-\end{bmatrix}$
١٨	فلسطين : ٢٠١٤ إذا كانت المصفوفة : أ $=\begin{bmatrix}٨\\ ٢-\end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة ب بحيث $٣أ+٢ب=\begin{bmatrix}٠\\ ٠\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}١٢-\\ ٣\end{bmatrix}$
١٩	فلسطين : ٢٠١٣ إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٢س-\begin{bmatrix}٣ & ٣\\ ٥ & ٢\end{bmatrix}=٣\left(\begin{bmatrix}١- & ٠\\ ١ & ١\end{bmatrix}-س\right)$	$\begin{bmatrix}٠ & \frac{٢}{٥}\\ \frac{٨}{٥} & \frac{٤}{٥}\end{bmatrix}$
٢٠	فلسطين : ٢٠١١ إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٣\left(٢س+\begin{bmatrix}١ & ٣\\ ٢ & ٠\end{bmatrix}\right)=م^{٢}$	$\begin{bmatrix}\frac{١}{٣}- & \frac{٣}{٢}-\\ ١- & \frac{١}{٦}\end{bmatrix}$
٢١	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كانت : أ $=\begin{bmatrix}٣ & ٤\\ ٢ & ٦-\end{bmatrix}$ ، وكانت $٢أ+س=م^{٢}$ ، أوجد المصفوفة س.	$\begin{bmatrix}٥- & ٨-\\ ٤- & ١٣\end{bmatrix}$
٢٢	فلسطين : ٢٠٠٩ إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٢\left(س+\begin{bmatrix}٢ & ٤\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}٨ & ٢\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}٢ & ٣-\end{bmatrix}$
٢٣	فلسطين : ٢٠٠٨ إذا كان $\begin{bmatrix}س & ٢\\ ص & س\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}١ & ٠\\ ٢ & ١-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}م & ٧\\ ص & ٣\end{bmatrix}$ ، فجد قيم كل من: س ، ص ، م س ، ص ، م التي تجعل المعادلة المصفوفية صحيحة	س $=٧$ ص $=٩$ م $=٨$
٢٤	فلسطين : ٢٠٠٧ حل المعادلة المصفوفية : $٢س+\begin{bmatrix}١ & ٢-\\ ٤- & ٣-\end{bmatrix}=$ صفر	$\begin{bmatrix}١ & ٠,٥-\\ ١,٥ & ٢\end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢ – ٣ ضـــــــرب المصفوفات

ملخص الدرس

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن ، ب مصفوفة من الرتبة ن×ل فإن حاصل الضرب أ . ب = جـ حيث جـ مصفوفة مـــن الرتبـــة م×ل وتكون مدخلات المصفوفة جـ على النحو : $[أ]_{م\times ن} \times [ب]_{ن\times ل} = [جـ]_{م\times ل}$

ملاحظة

١ ليمكننا إجراء عملية ضرب مصفوفتين ، يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية.

٢ إذا أمكن إجراء ضرب مصفوفتين ،فإن المصفوفة الناتجة تكوون رتبتها عدد صفوف المصفوفة الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية

ملاحظة

قد يكون حاصل ضرب مصفوفتين غير صفريتين هو مصفوفة صفرية.

ملاحظة هامة جداً

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات ، وكان أ . ب = أ . جـ

لا يسمح باختزال أ من الطرفين والقول أن : ب = جـ

خصائص عملية الضرب على المصفوفات

إذا كانت أ ، ب ، جـ بحيث عمليتي الجمع والضرب معرفتان ، م المصفوفة المحايدة ، ك ∈ ح فإن :

١ (أ ب) جـ = أ (ب جـ) ..... { الخاصية التجميعية }

٢ أ . (ب + جـ) = أ . ب + أ . جـ ..... { توزيع الضرب على الجمع من اليمين }

٣ (أ + ب) جـ = أ . جـ + ب . جـ ..... { توزيع الضرب على الجمع من اليسار }

٤ أ . م = م . أ = أ ..... { المصفوفة المحايدة }

٥ ك(أ ب) = (ك أ) ب + أ(ك ب) .....

ملاحظة

١ عملية ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية.

٢ المصفوفة $م_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية ، وتسمى أيضاً مصفوفة الوحدة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، جد (إن أمكن) ناتج ضرب كل مما يلي: ١ س ص ٢ ص س

الحـــل

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى س يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ص (يمكن إجراء عملية الضرب س ص)

١ س ص $= \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}_{٢\times٢} \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}_{٢\times١} = \begin{bmatrix} ٣\times٥+١\times٤ \\ ١\times١+-٦\times٤ \end{bmatrix}_{٢\times١} = \begin{bmatrix} ٣+٢٠ \\ -١+٢٤ \end{bmatrix}_{٢\times١} = \begin{bmatrix} ٢٣ \\ -٢٣ \end{bmatrix}_{٢\times١}$

لاحظنا أن المصفوفة الناتجة رتبتها (٢ × ١) تساوي عدد صفوف المصفوفة الأولى ضرب عدد أعمدة المصفوفة الثانية.

٢ ص س $= \begin{bmatrix} ١ \\ ٤ \end{bmatrix}_{٢\times١} \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٦ \end{bmatrix}_{٢\times٢}$ (لا يمكن إجراء عملية الضرب)

لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى س لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ص

إعداد المعلم : سائد احلاق

مثال ٢

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \\ -٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، جد (إن أمكن) ناتج ضرب كل مما يلي: ١ أ ب ٢ ب أ

الحـــل

١ (لا يمكن إجراء عملية الضرب أ ب)لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى أ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ب

٢ ب أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -٣ \\ -٥ & ٦ \end{bmatrix}_{٣\times٢} \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}_{٢\times٢}$ (يمكن إجراء عملية الضرب)

$= \begin{bmatrix} ١\times٤+٢\times٢ & ١\times٢+٤\times-١ \\ ٢\times٤+-٣\times٢ & ٢\times٢+-٣\times-١ \\ -٥\times٤+٦\times٢ & -٥\times٢+٦\times-١ \end{bmatrix}_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ٤+٤ & ٢-٤ \\ ٨+-٦ & ٤+٣ \\ -٢٠+١٢ & -١٠+-٦ \end{bmatrix}_{٣\times٢} = \begin{bmatrix} ٨ & -٢ \\ ٢ & ٧ \\ -٨ & -١٦ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٣

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد ١ أ.ب ، ٢ ب أ إن أمكن .

الحـــل

١ أ.ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$ ، ٢ ب.أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

مصفوفة الوحدة $(م_٢)$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية.

مثال ٤

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ ، جد :

الحـــل

١ ٣ (أ.ب) $= ٣ \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix} = ٣ \begin{bmatrix} ٧- & ٥ \\ ١٠- & ٦ \\ ٣٠- & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢١- & ١٥ \\ ٣٠- & ١٨ \end{bmatrix}$

٢ ٣ أ.٢ب $= \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ١٢ & ٦ \\ ٤٢- & ٣٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤- & ٢ \\ ٢- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٢- & ٣٠ \\ ٦٠- & ٣٦ \end{bmatrix}$

٣ أ $\times -$ ٢ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ١٠- \\ ٢٠ & ١٢- \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد ا حلاق

مثال ٥

إذا كانت رتبة المصفوفة س هي ٢×٤ ، ورتبة المصفوفة ص هي ٤×٣ ، وكان ع = س × ص . ما رتبة المصفوفة ع؟

الحـــل

ع = س $_{[٢ \times ٤]}$ × ص $_{[٤ \times ٣]}$

رتبة المصفوفة ع تكون عدد صفوف المصفوفة س في عدد أعمدة المصفوفة ص ، ومنها رتبة ع = ٢×٣





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ضرب المصفوفات | حلول تمارين ومسائل (٢-٣)

١ **أ**

$$\begin{bmatrix}٧ & ٤ & ٣\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}١ & ٣ & ٠\\ ٥- & ٤ & ٢-\\ ١ & ٥ & ١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٠- & ٥٢ & ٥-\end{bmatrix}$$

ب

$$\begin{bmatrix}٣ & ٥ & ١\\ ٥ & ٤- & ٢\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}٤ & ٣\\ ٥ & ١-\\ ٢ & ٧\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٣٩ & ١١\\ ٤ & ٣٣\end{bmatrix}$$

٢

$$\begin{bmatrix}١٠ & ١٧ & ١٥ & ١٢\\ ٢٠ & ١٠ & ٢٠ & ١٦\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}٤٥٠\\ ٣٠٠\\ ٥٠٠\\ ٤٠٠\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٤٥٠\times١٠+٣٠٠\times١٧+٥٠٠\times١٥+٤٠٠\times١٢\\ ٤٥٠\times٢٠+٣٠٠\times١٠+٥٠٠\times٢٠+٤٠٠\times١٦\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٢١٩٠٠\\ ٢٨٤٠٠\end{bmatrix}$$

٣ **أ**

$$أ\times ب=\begin{bmatrix}٧- & ٥\\ ٤ & ٢\\ ٣ & ١-\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}٢\\ ٦\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٧-\times٥+٢\times٦\\ ٤\times٢+٢\times٦\\ ٣\times١-+٢\times٦\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٦\\ ٢٠\\ ٠\end{bmatrix}$$

$$٥(أ\times ب)=٥\times\begin{bmatrix}١٦\\ ٢٠\\ ٠\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٨٠\\ ١٠٠\\ ٠\end{bmatrix}$$

ب

$$٥أ=٥\times\begin{bmatrix}٧- & ٥\\ ٤ & ٢\\ ٣ & ١-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٣٥- & ٢٥\\ ٢٠ & ١٠\\ ١٥ & ٥-\end{bmatrix}$$

$$(٥أ)\times ب=\begin{bmatrix}٢٥ & ٣٥-\\ ١٠ & ٢٠\\ ٥- & ١٥\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}٢\\ ٦\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٦\times٢٥+٢\times٣٥-\\ ٦\times١٠+٢\times٢٠\\ ٦\times٥-+٢\times١٥\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٨٠\\ ١٠٠\\ ٠\end{bmatrix}$$

ج

$$أ\times٥ب=٥\times\begin{bmatrix}٧- & ٥\\ ٤ & ٢\\ ٣ & ١-\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}٢\\ ٦\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٧- & ٥\\ ٤ & ٢\\ ٣ & ١-\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}١٠\\ ٣٠\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٨٠\\ ١٠٠\\ ٠\end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٤

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} أ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$$ (نجري عملية الضرب)

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \times أ + ٣ \times ١ \\ ١ \times ٣ + ٣ \times ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ + ٣أ \\ ٣ + ٦ \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \boxed{٤} \\ \boxed{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{١ + ٣أ} \\ ٩ \end{bmatrix}$$

من تساوي المصفوفتين ينتج أن:

$$ب = \boxed{٩}$$

$$٣أ + ١ = ٤ \leftarrow \frac{٣}{٣}أ = \frac{٣}{٣} \leftarrow أ = \boxed{١}$$

٥ سؤال من كتاب الفترة الثانية :

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٩ & ٥ \\ ٤ & ٧ & ٣- \\ ٣- & ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١- \\ ٤ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ وكانت: $٢أ + س = ٣ ب$ ، أجد المصفوفة س س

$$٢ \begin{bmatrix} ٤ & ٩ & ٥ \\ ٣- & ٧ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣- \end{bmatrix} + س = ٣ \begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ١- \\ ٤ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٨ & ١٨ & ١٠ \\ ٦- & ١٤ & ٤ \\ ٨ & ٢ & ٦- \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ & ٣- \\ ١٢ & ٣ & ٩ \\ ٦ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ٦ & ١٥ & ٣- \\ ١٢ & ٣ & ٩ \\ ٦ & ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ١٨ & ١٠ \\ ٦- & ١٤ & ٤ \\ ٨ & ٢ & ٦- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٣- & ١٣- \\ ١٨ & ١١- & ٥ \\ ٢- & ١ & ٦ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٢ – ٣ : ضـــــــرب المصفوفات

أولاً : إختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كانت: ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن ب . جـ =

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٤ & -٥ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} -٢ & -٨ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & -٥ \end{bmatrix}$

٢ إذا كانت: س $= \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن س ×ص =

أ $\begin{bmatrix} -١١ & ٦ \\ ١١ & ٧ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} -١١ & ٢ \\ ١١ & ٧ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ١١ & -٢ \\ ١١ & -٧ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -١١ & -٢ \\ ١١ & ٧ \end{bmatrix}$

٣ إذا علمت أن : جـ $= \begin{bmatrix} ١ & -٤ & ١ \\ -٣ & ٠ & ٥ \\ ٦ & -٢ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$ ، فإن جـ$_{١٣}$ – ٢جـ$_{١٢}$ =

أ صفر ب -٨ جـ -٢٤ د ٢٤

٤ إذا كانت: س ، ص ، ع مصفوفات بحيث : س = ص× ع ، وكانت رتبة ص = ٣×٣ ، ورتبة ع = ٣×٤

فإن رتبة المصفوفة ٢ س هي :

أ ٦×٤ ب ٣×٤ جـ ٤×٣ د ٦×٨

٥ إذا كانت: س ، ص ، ع مصفوفات بحيث : ص×ع = س ، وكانت رتبة ، ورتبة ع = ٣×٣

فإن رتبة المصفوفة ص هي :

أ ٢×٣ ب ٣×٢ جـ ٣×٣ د ١×٣

٦ إذا كان: ناتج ضرب $\begin{bmatrix} ٦ \\ -١ \end{bmatrix} \times [-١ \quad ٦]$ ينتج المصفوفة س ، فما نوع المصفوفة س؟

أ مربعة ب صفية جـ سطرية د صفرية

٧ إذا كانت: أ$_{٤\times١}$ ، ب$_{٤\times١}$ ، جـ$_{١\times١}$ ، فأي من العمليات التالية يمكننا إجراؤها ؟

أ أ × ب + جـ ب أ × ب – جـ جـ ب × جـ + أ د ب × أ + جـ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨ إذا كانت: $[س \quad -٣] \times \begin{bmatrix} س \\ ١ \end{bmatrix} = [س + ٣]$ ، فما قيمة / قيم س التي تحقق صحة المعادلة المصفوفة؟

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٢، −٣ د) ٢، −٣

٩ إذا كان: ع مصفوفة حيث : $ع \times \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة ع تساوي:

أ) $و_{٢}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ د) $م_{٣}$

١٠ إذا كان: $س = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$ ، وكانت $ع = س \times ص$ ، فما قيمة : $٣(٢ع_{١٢} + ع_{٢١})$ ؟

أ) ٣ ب) −٣ ج) ٩ د) ١

١١ إذا كانت: $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ١٤ \\ ٣ & ٢٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س؟

أ) ٦ ب) −٦ ج) ١٠ د) −١٠

١٢ ما مجموعة قيمة / قيم س التي تجعل : $[-٣ \quad س] \times \begin{bmatrix} ٤ \\ س \end{bmatrix} = [٤]$؟

أ) $\{-٤، ٤\}$ ب) $\{-٤\}$ ج) $\{٤\}$ د) $\{١٦\}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

١٣ إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن رتبة $٢(أ \times ب)$ هي:

أ) ٣×١ ب) ٢×٣ ج) ٣×٣ د) ٣×٢

١٤ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات، بحيث $أ_{٣×٢}$ ، $ب_{٢×٣}$ ، $جـ_{٢×٢}$ ، فما العملية المعرفة من الآتية ؟

أ) جـ×أ + ب ب) ب×أ + جـ ج) ب ×جـ + أ د) أ× ب + جـ

١٥ شرق خانيونس: ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب مصفوفة من الرتبة ٢×٣ وكانت ب = أ×جـ ، فإن رتبة المصفوفة جـ هي :

أ) ٢×٢ ب) ٣×٢ ج) ٢×٣ د) لا يمكن تحديدها





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٦ طوباس : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: جـ = $\begin{bmatrix} ٤ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، بحيث أن : أ$_{ن \times ٣}$ × ب$_{ي \times ١}$ = جـ ، فإن ن + ي =

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٥

١٧ رام الله : ٢٠١٩ تجريبي

إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & -٥ \\ ٤ & ١ & ٦ \end{bmatrix}$ ،وكان أ × ب$_{٢ \times ن}$ = جـ$_{٢ \times ٥}$ ، فإن قيمة ٢ =

أ ٢ ب ٣ جـ ٥ د ٦

١٨ فلسطين : ٢٠١٥ إكمال

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣ ، ب من الرتبة ٣ × ٤ ، جـ من الرتبة ٢ × ٤ ،

فأي العمليات التالية معرفة على المصفوفات؟

أ ب أ + جـ ب أجـ + ب جـ جـ أ + ب د أ ب + جـ

١٨ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كانت: أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات بحيث أ$_{٣ \times ٢}$ ، ب$_{ن \times ٢}$ ، جـ$_{٤ \times ٢}$ ،وكان أ × ب = جـ ، فما قيمة كل ٢ ، ن على الترتيب؟

أ ٢ ، ٣ ب ٢ ، ٤ جـ ٣ ، ٤ د ٤ ، ٣

١٨ فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

إذا كان $\begin{bmatrix} س & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س ؟

أ صفر ب ٤ جـ ٢ د ١

١٨ فلسطين : ٢٠١٨إكمال

إذا كان المصفوفتان أ ، ب من الرتبة ٢ × ٣ ، فإن العملية غير الممكنة عليها من الآتية هي :

أ أ٤ ب أ + ب جـ أ – ب د أ × ب

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كان س $= \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ١ \\ ٤ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ع $= \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٠ & ٢- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد الناتج إن أمكن :	أ	$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٠ & ١٢- & ٦- \end{bmatrix}$
	أ س × ص	ب	$\begin{bmatrix} ١٥ & ٧- \\ ٢ & ٢- \\ ١٧ & ٧- \end{bmatrix}$
	ب ع × س	جـ	$\begin{bmatrix} ١١ & ١٣ \\ ١٩ & ٤١ \end{bmatrix}$
	جـ ص × ع	د	لا يمكن (لاختلاف الرتب)
	د س × ع		
٢	إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١- \\ ٦- & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ ، جد الناتج إن أمكن :	أ	$\begin{bmatrix} ١٤ & ٦- \\ ٦- & ٤ \\ ٦ & ٣٢- \end{bmatrix}$
	أ ب . ٢جـ ب ٢(−٣ب . جـ)	ب	$\begin{bmatrix} ٤٨- & ١٨ \\ ١٨ & ١٢- \\ ١٨- & ٩٦ \end{bmatrix}$
٣	إذا كانت : س × ص $= \begin{bmatrix} ٥ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، س × ع $= \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢- \end{bmatrix}$ ، أجد ناتج : س × (ص − ع)		$\begin{bmatrix} ٣- \\ ٩ \end{bmatrix}$
٤	إذا كان: $\begin{bmatrix} ب & ٠ \\ ٠ & جـ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة كل من الثابتين: ب ، جـ ؟		ب = ٥ جـ = ٢
٥	إذا كان: $\begin{bmatrix} ٢ & س \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣- & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٢- \\ ص & ٤- \end{bmatrix} - و_٢$ ، ما قيمة كل من الثابتين : س ، ص ؟		س = −١ ص = ١١
٦	إذا كان: $\begin{bmatrix} ٣ & س & ١- \\ ٤ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٧ \\ ٠ & ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ما قيمة كل من الثابتين: س ، ص ؟		س = −١ ص = −٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٧	إذا كان : $[س \quad -١] \times \begin{bmatrix} س \\ ٤ \end{bmatrix} = [-٢س - ١]$ أوجد قيمة / قيم س.	س = −٣ س = +١
٨	**أريحا : ٢٠٢٠ تجريبي** إذا كان : أ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة : س إذا علمت أن : ٢س + أ × ب $= \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٩ & ١ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{١٩}{٢} & -١ \\ ٠ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$
٩	**الوسطى: ٢٠١٩ تجريبي ف٢** إذا كان : أ $= \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٥ & -٦ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد : ٢ أ × ب	$\begin{bmatrix} -٣٠ & ٣٦ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$
١٠	**الخليل: ٢٠١٩ تجريبي ف١** إذا كانت : أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد: [١] أ − ٢ ب [٢] ب × أ	[١] $\begin{bmatrix} ٧ & -٨ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ [٢] $\begin{bmatrix} -٦ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$
١١	**فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال** إذا كان : أ $= \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، فجد المصفوفة أ ب	$\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٤ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$
١٢	**فلسطين : ٢٠١١ إكمال** إذا كان : أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٤ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد ب × أ	$\begin{bmatrix} ١ & -١٠ \\ ١٥ & ٦ \end{bmatrix}$
١٣	**فلسطين : ٢٠١٥ إكمال** إذا كان : أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد أ × ب	$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ١١ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢ – ٤ النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً : المحـــــــــــددات

ملخص الدرس

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن محدد المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقي ويرمز لهُ بالرمز $|أ|$

حيث : $|أ| = (أ_{11} \times أ_{22}) - (أ_{12} \times أ_{21})$

إذا كانت س $= \begin{bmatrix} س_{11} & س_{21} \\ س_{12} & س_{22} \end{bmatrix}$ ، فإن $|س| = \begin{vmatrix} س_{11} & س_{21} \\ س_{12} & س_{22} \end{vmatrix} = (س_{11} \times س_{22}) - (س_{12} \times س_{21})$

أمثلة محلولة

مثال ١

إذا كانت : المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$. جد $|أ|$

الحـــل

$|أ| = (٥ \times ٣) - (٦ \times ٤) = ١٥ - ٢٤ = \boxed{-٩}$

مثال ٢

إذا كانت : المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$. جد $|أ|$

الحـــل

$|أ| = (٩ \times ٢) - (٦ \times ٣) = ١٨ - ١٨ = \boxed{٠}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

تعريف

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر المصفوفة المنفردة

مثال ٣

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} -٤ & ٢+س \\ -٨ & ٦ \end{bmatrix}$ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة منفردة ؟

الحـــل

∵ أ مصفوفة منفردة

∴ $|$ أ $| = \boxed{٠}$

← $(-٤ \times ٦) - (-٨ \times (٢+س)) = ٠$

← $-٢٤ - (-١٦ - ٨س) = ٠$

← $-٢٤ + ١٦ + ٨س = ٠$

← $-٨ + ٨س = ٠$

← $٨س = ٨$ (نقسم الطرفين على العدد ٨)

← $س = \boxed{١}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

مثال ٤

إذا كانت ب $= \begin{bmatrix} ٣ص-٢ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ما قيمة ص التي تجعل المصفوفة منفردة ؟

الحـــل

∵ ب مصفوفة منفردة

∴ $|$ ب $| = \boxed{٠}$

← $(٢)(٣ص-٢) - (١ \times ٢) = ٠$

← $(٦ص-٤) - (٢) = ٠$

← $٦ص - ٦ = ٠$

← $٦ص = ٦$ (نقسم الطرفين على العدد ٨)

← $ص = \boxed{١}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٥

ما قيمة س الموجبة التي تجعل المصفوفة جـ $= \begin{bmatrix} س & ٢٠ \\ ١ & س-١ \end{bmatrix}$ منفردة؟

الحـــل

∵ جـ مصفوفة منفردة ← ∴ $|$ جـ $| = \boxed{٠}$

← $(س(س-١)) - (١ \times ٢٠) = ٠$

← $س^{٢} - س - ٢٠ = ٠$

← $(س+٤)(س-٥) = ٠$

إما : $س + ٤ = ٠$ ← $س = -٤$ مرفوض

أو : $س - ٥ = ٠$ ← $\boxed{س = +٥}$ مقبول (السبب : المطلوب قيمة س الموجبة)

مثال ٦

ما قيمة س السالبة التي تجعل المصفوفة ع $= \begin{bmatrix} س & -٤ \\ -٤ & س \end{bmatrix}$ منفردة؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الحـــل

∵ ع مصفوفة منفردة

∴ $|$ ع $| = \boxed{٠}$

← $(س \times س) - (-٤ \times -٤) = ٠$

← $س^{٢} - ١٦ = ٠$

← $س^{٢} = ١٦$ (نأخذ الجذر التربيعي للطرفين)

← $س = \pm ٤$

← $\boxed{س = -٤}$ مقبول (السبب : المطلوب قيمة س السالبة) ، $+٤$ مرفوض.

ملاحظة

إذا تساوت المدخلات المتناظرة في أي صفين أو عمودين في محدد فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

أتعلم:

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، ك عدد حقيقي ، فإن $|ك أ| = ك^{٢} |أ|$

مثال ٧

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = ٥$ ، جد قيمة كل مما يأتي :

١) $|٣أ|$ ٢) $|أ٣|$ ٣) $|٤أ٢|$

الحل

١) $|٣أ| = ٣ \times ٥ = \boxed{١٥}$

٢) $|أ٣| = ٣^{٢} |أ| = ٩ \times ٥ = \boxed{٤٥}$

٣) $|٤أ٢| = ٤ \times ٢^{٢} |أ| = ١٦ |أ| = ١٦ \times ٥ = \boxed{٨٠}$

مثال ٨

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $|٢أ| = ١٢$ ، جد قيمة كل مما يأتي :

١) $|أ|$ ٢) $|٥أ|$ ٣) $|أ٤|$

الحل

١) $|٢أ| = ١٢ \leftarrow ٢^{٢} |أ| = ١٢ \leftarrow ٤ |أ| = ١٢ \leftarrow |أ| = \boxed{٣}$

٢) $|٥أ| = ٣ \times ٥ = \boxed{١٥}$

٣) $|أ٤| = ٤^{٢} |أ| = ١٦ |أ| = ٣ \times ١٦ = \boxed{٤٨}$

مثال ٩

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان $|أ \times ب| = ٤٠$ ، $|٢أ| = ٨$ ، جد قيمة $|أ| + |ب|$.

الحل

$|٢أ| = ٨ \leftarrow ٢^{٢} |أ| = ٨ \leftarrow ٤ |أ| = ٨ \leftarrow |أ| = \boxed{٢}$

$|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$

$٤٠ = ٢ \times |ب|$

$|ب| = \frac{٤٠}{٢} = \boxed{٢٠}$

$|أ| + |ب| = ٢ + ٢٠ = \boxed{٢٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً : النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

ملخص الدرس

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة مربعة غير منفردة من الرتبة الثانية ، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة أ إذا كان

أ.ب = ب.أ = $م_{٢}$ ، حيث $م_{٢}$ المصفوفة المحايدة.

ويرمز للنظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$. أي أن : $أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = م_{٢}$

تعريف :

المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

| أ | = صفر ← لا يوجد نظير ضربي. (منفردة)

| أ | ≠ صفر ← يوجد نظير ضربي. (ليست منفردة)

أمثلة محلولة

مثال ١

أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي؟

١) $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ٢) $ب = \begin{bmatrix} ٢ & -١٠ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

الحـــل

١) $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٢ = ٠$

∴ المصفوفة أ مصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربي.

٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٢ & -١٠ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = ٢ \times ٥ - ١ \times -١٠ = ١٠ + ١٠ = ٢٠$

∴ المصفوفة أ مصفوفة ليست منفردة ويوجد لها نظير ضربي.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

تعريف :

إيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$ حيث $|أ| \neq 0$ ، مصفوفة غير منفردة ، فإن $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix}$

أي أن : $أ^{-1}$ تنتج من ضرب مقلوب محدد المصفوفة أ بالمصفوفة أبعد تبديل أماكن مدخلات القطر الرئيسي للمصفوفة أوتغيير إشارة مدخلات القطر الآخر من المصفوفة أ .

مثال ٢

جد النظير الضربي للمصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ١٠ & ٨ \end{bmatrix}$ إن أمكن .

الحـــل

أولاً نحسب محدد المصفوفة

$|أ| = (٦ \times ٨) - (١٠ \times ٥) = ٤٨ - ٥٠ = -٢ \neq ٠$ ، $\therefore$ يوجد للمصفوفة نظير ضربي.

$$أ^{-1} = \frac{1}{-٢} \begin{bmatrix} ٨ & -٥ \\ -١٠ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ & ٢,٥ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أتعلم:

$$(أ^{-1})^{-1} = أ$$

مثال ٣

أوجد النظير الضربي إن وجد للمصفوفة أ $= \begin{bmatrix} -٢ & -٢ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً نحسب محدد المصفوفة/

$|أ| = (-٢ \times ٧) - (-٢ \times ٦) = -١٤ + ١٢ = -٢ \neq ٠ \leftarrow \therefore أ^{-1}$ موجود.

$$أ^{-1} = \frac{1}{-٢} \begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ -٢ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣,٥ & ١ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤

أوجد النظير الضربي إن وجد للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ -٣ & -٩ \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً نحسب محدد المصفوفة

$|أ| = (٢ \times -٩) - (-٣ \times ٦) = -١٨ + ١٨ = ٠$ ، $\therefore أ^{-١}$ غيرموجود.

مثال ٥

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ ٣ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$: جد ما يلي:

١) $٦أ^{-١}$ ٢) $(٢ب)^{-١}$

الحـــل

١) أولاً نحسب محدد المصفوفة أ

$|أ| = (٤ \times ٣) - (-٣ \times -٣) = ١٢ - ٩ = ٣ \neq ٠$ ، $\therefore أ^{-١}$ موجود.

إعداد المعلم : سائد احلاق

$$أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{٤}{٣} & ١ \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow ٦أ^{-١} = ٦ \times \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{٤}{٣} & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٦ \\ ٨ & ٦ \end{bmatrix}$$

٢) أولاً نحسب $\leftarrow ٢ب = ٢ \times \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ١٠ & ٦ \end{bmatrix}$

$|٢ب| = (٤ \times ٦) - (١٠ \times ٢) = ٢٤ - ٢٠ = ٤ \neq ٠$ ، $\therefore (٢ب)^{-١}$ موجود.

ثم نحسب : $(٢ب^{-١}) = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -١٠ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١,٥ & -٠,٥ \\ -٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

أتعلم:

$(أب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

مثال ٦

إذا كانت : $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جد : $٢(أ \times ب)^{-١}$

الحـــل

$$٢(أ \times ب)^{-١} = ٢(ب^{-١} أ^{-١})$$

$$= ٢\left(\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\right) = ٢\begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٦ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٦ \\ ١٢ & ٤- \end{bmatrix}$$

مثال ٧ فلسطين : ٢٠١٥

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جد : $(أ \times ب)^{-١}$

الحـــل

يوجد حلان للسؤال :

١) إيجاد ناتج ضرب $(أ \times ب)$ ثم إيجاد $(أ \times ب)^{-١}$

٢) إيجاب $(ب)^{-١}$ ثم إيجاد $(أ)^{-١}$ ، ثم إيجاد $(أ \times ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$ (سنستخدم هذه الطريقة)

$|أ| = (٣ \times ٢) - (١ \times ٤) = ٦ - ٢ = ٤ \neq ٠$ ، $\therefore أ^{-١}$ موجود.

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$$

$|ب| = (١ \times ٥) - (٠ \times ٣) = ٥ - ٠ = ٥ \neq ٠$ ، $\therefore ب^{-١}$ موجود.

$$ب^{-١} = \frac{١}{٥}\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$(أ \times ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١} = \frac{١}{٥}\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{١٠}\begin{bmatrix} ٢٢ & ١٤- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢٢}{١٠} & \frac{١٤-}{١٠} \\ \frac{٤-}{١٠} & \frac{٣}{١٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١١}{٥} & \frac{٧-}{٥} \\ \frac{٢-}{٥} & \frac{٣}{١٠} \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد زياد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

أتعلم للمميزين:

$$(ك أ)^{-١} = \frac{١}{ك}(أ)^{-١}$$

مثال ٨

إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جد:

١ $(أ \times ب)^{-١}$ ٢ $(٢ب)^{-١}$ ٣ $\left(\frac{١}{٣}أ\right)^{-١}$

الحـــل

١ $(أب)^{-١} = ب^{-١}أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٨ & -٤ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

٢ $(٢ب)^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٦ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٨}{٢} & \frac{٤}{٢} \\ \frac{٦}{٢} & \frac{-٢}{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

٣ $\left(\frac{١}{٣}أ\right)^{-١} = \frac{١}{\frac{١}{٣}} \times \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

$= ٣ \times \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد احلاق

مثال ٩

إذا كان : $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $(أ \times ب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد $ب^{-١}$

الحـــل

$\because ب^{-١}أ^{-١} = (أب)^{-١} \therefore ب^{-١}أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

بضرب الطرفين في أ من جهة اليسار

$ب^{-١} = \boxed{أ^{-١} \times أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times أ$

$ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \times أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثالثاً : حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربي

خطوات حل أنظمة المعادلات بطريقة النظير الضربي

- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة أ × ع = جـ
- نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات (أ)
- نضرب طرفي المعادلة من اليمين بالمصفوفة أ$^{-1}$

أ$^{-1}$. أ . ع = أ$^{-1}$. جـ

- نستخدم خاصية التجميع في ضرب المصفوفات فينتج:

(أ$^{-1}$. أ) . ع = أ$^{-1}$. جـ

- نستخدم خاصيتي النظير الضربي والمصفوفة المحايدة فينتج:

م$_{2}$. ع = أ$^{-1}$. جـ ← ع = أ$^{-1}$. جـ

- نستخدم تساوي مصفوفتين فنحصل على قيمتي س ، ص.



الرموز

- أ : مصفوفة المعاملات.
- أ$^{-1}$: النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.
- ع : مصفوفة المتغيرات
- جـ : مصفوفة الثوابت.

حلاق

أمثلة محلولة

مثال ١

اكتب النظام الخطي المجاور على صورة معادلات مصفوفة:

٢س + ص = ٣
س – ٣ص = –٥

الحل

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ -٥ \end{bmatrix}$$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٢

حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي:

$$٣س - ص = ٥$$

$$س = -٢ص - ٣$$

الحـــل

١) نرتب المعادلات : $٣س - ص = ٥$ ، $س + ٢ص = -٣$

٢) نكتب المعادلات على الصورة : $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٣ \end{bmatrix}$

٣) نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات:

$$|أ| = (٣ \times ٢) - (-١ \times ١) = ٦ + ١ = ٧$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٧} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$$

٤) نستخدم ← $\boxed{ع = أ^{-١} . ج}$ ، الحل = النظير الضربي × مصفوفة الثوابت

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٧} \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ -٣ \end{bmatrix}$$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٧} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ -١٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{٧} \\ \frac{-١٤}{٧} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$$ (من تساوي مصفوفتين) ← $\boxed{س = ١}$ ، $\boxed{ص = -٢}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٣

استخدم طريقة النظير الضربي لحل النظام الآتي من المعادلات:

$$س + ٢ص = ٣$$

$$٢ص = -٢س + ٢$$

الحـــل

١) نرتب المعادلات : $س + ٢ص = ٣$ ، $٢س + ٢ص = ٢$ (ممكن قسمة المعادلة الثانية على العدد ٢)

٢) نكتب المعادلات على الصورة : $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٣) نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات:

$$|أ| = (١ \times ٢) - (٢ \times ٢) = ٤ - ٢ = -٢$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٤) نستخدم ← $\boxed{ع = أ^{-١} . ج}$ ، الحل = النظير الضربي × مصفوفة الثوابت

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ -٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{-٢} \\ \frac{-٤}{-٢} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |-١| \\ |٢| \end{bmatrix}$$ (من تساوي مصفوفتين) ← $\boxed{س = -١}$ ، $\boxed{ص = ٢}$




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤ **غرب غزة : ٢٠١٩ تجريبي**

استخدم طريقة النظير الضربي لحل النظام الآتي من المعادلات:

س – ص = –١

٣س + ٣ص = ٦

الحـــل

١) نختصر المعادلة الثانية وذلك بقسمة الطرفين على العدد ٣فينتج أن : $\frac{٣}{٣}$س + $\frac{٣}{٣}$ص = $\frac{٦}{٣}$ ← س + ص = ٢

٢) نكتب المعادلات على الصورة : $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٣) نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات:

$|أ| = (١ \times ١) - (١- \times ١) = ١ + ١ = ٢$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٤) نستخدم ← $\boxed{ع = أ^{-١} . ج}$ ، الحل = النظير الضربي × مصفوفة الثوابت

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$

(من تساوي مصفوفتين) ← $\boxed{س = \frac{١}{٢}}$ ، $\boxed{ص = \frac{٣}{٢} = ١,٥}$




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٥

حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً : نفرض $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

فتصبح المعادلة ← $أ \times س = \begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$



ثانياً : نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب $أ^{-١}$

$|أ| = (٣ \times ٢) - (٤ \times ١) = ٦ - ٤ = \boxed{٢}$

$أ^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

ثالثاً : نستخدم ← $\boxed{س = أ^{-١} . \begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}}$ (نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليمين)

$س = \frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢- & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$س = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ١٦- & ١٢- \\ ١١ & ١١ \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} \frac{١٦-}{٢} & \frac{١٢-}{٢} \\ \frac{١١}{٢} & \frac{١١}{٢} \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} ٨- & ٦- \\ ٥,٥ & ٥,٥ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٦ وزاري : س٥ فرع ب

حل المعادلة المصفوفية : $\text{٢س} \times \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ -٦ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$

الحـــل

أولاً : نفرض $\text{أ} = \begin{bmatrix} -٦ & ٥ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$

فتصبح المعادلة ← $\text{٢س} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

ثانياً : نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب $\text{أ}^{-١}$

$|\text{أ}| = (٥ \times -٤) - (٣ \times -٦) = -٢٠ + ١٨ = \boxed{-٢}$

$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

ثالثاً : نستخدم ← $\boxed{\text{٢س} = \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \text{أ}^{-١}}$ (نضرب $\text{أ}^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليسار)

$\text{٢س} = \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$ (نجري عملية ضرب مصفوفتين)

$\text{٢س} = \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$ (ممكن وضع الكسر بعد المساواة سواء كان ضرب $\text{أ}^{-١}$ من اليمين أو اليسار)

$\text{س} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{-٢} \times \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{١}{-٤} \times \begin{bmatrix} ٧ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٦ & -٤ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{١}{-٤} \times \begin{bmatrix} ٢٩ & -١٧ \\ ١٢ & -٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢٩}{-٤} & \frac{-١٧}{-٤} \\ \frac{١٢}{-٤} & \frac{-٨}{-٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{٢٩}{٤} & \frac{١٧}{٤} \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٧

حل المعادلة المصفوفية : $٣س \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٢- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

الحـــل

نفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$ ← $|أ| = (٣ \times ١) - (٢- \times ٢-) = ٣ - ٤ = \boxed{١-}$

← $أ^{-١} = \frac{١}{١-} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix}$

$٣س = \begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ (نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليسار)

$٣س = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥- & ٩- \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{٤}{٣} \\ \frac{٥}{٣}- & ٣- \end{bmatrix}$

مثال ٨ فلسطين : ٢٠٠٨

إذا كانت $س = \begin{bmatrix} ٢ & ٧- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، بين أن : $س \times ص = ٢ع^{-١}$

الحـــل

أولاً: نجد الطرف الأيمن : $س \times ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٧- \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$

ثانياً: نجد الطرف الأيسر : نجد $ع^{-١}$ ثم نضربه بالعدد ٢

← $|ع| = (١ \times ٤) - (٢ \times ١) = ٤ - ٢ = \boxed{٢}$

$(ع)^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١- \\ \frac{١}{٢} & ١- \end{bmatrix}$ ← $٢(ع)^{-١} = ٢ \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١- \\ \frac{١}{٢} & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$

ثالثاً : نقارن بين الطرفين:

∵ $س \times ص = \begin{bmatrix} ٤ & ٤- \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ، $(ع)^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ∴ (الطرفان متساويان)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

النظير الضربي | حلول تمارين ومسائل (٢-٤)

١ $\begin{vmatrix} ١٢- & ٥ \\ ٣س & ٣- \end{vmatrix} = ٦$ ← $(-١٢\times-٣)-(٣س\times٥)=٦$

$٣٦-١٥س=٦$ ← $\frac{-١٥}{-١٥}س=\frac{-٣٠}{-١٥}$ ← $س=\boxed{٢}$

٢ $|٤ب|=-٣٢$ ← $٤^{٢}\times|ب|=-٣٢$

$\frac{١٦}{١٦}|ب|=\frac{-٣٢}{١٦}$ ← $|ب|=\boxed{-٢}$

$|ب|+|٣ب|=|ب|+٣^{٢}\times|ب|$

$=|ب|+٩|ب|=١٠|ب|=١٠\times-٢=\boxed{-٢٠}$

٣ $أ=\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢- & ٣- \end{bmatrix}$ ← $|أ|=(٣-\times٣)-(١\times-٢)=-٩+٢=\boxed{-٧}$

← $أ^{-١}=\frac{١}{-٧}\begin{bmatrix} ٣- & ٣- \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-٣}{-٧} & \frac{-٣}{-٧} \\ \frac{-٢}{-٧} & \frac{-٣}{-٧} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{٣}{٧} & \frac{٣}{٧} \\ \frac{٢}{٧} & \frac{٣}{٧} \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$ب=\begin{bmatrix} ٥ & ٠ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ ← $|ب|=(٥\times-٢)-(٤\times٠)=-١٠-٠=\boxed{-١٠}$

← $ب^{-١}=\frac{١}{-١٠}\begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ٤- & ٥ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-٢}{-١٠} & ٠ \\ \frac{-٤}{-١٠} & \frac{٥}{-١٠} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & ٠ \\ \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٢}- \end{bmatrix}$

$جـ=\begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ← $|جـ|=(٣\times٤)-(٢\times٦)=١٢-١٢=\boxed{٠}$

∵ المصفوفة منفردة ، ∴ ليس لها نظير ضربي

٤ أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ١- \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥- \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٢ \\ ١٢ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٥

أ

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \times س = \begin{bmatrix} ١٣- & ٢٦ \\ ٣٩ & ١٣ \end{bmatrix}$$

نفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} \leftarrow |أ| = (٣ \times ١) - (٢- \times ٥) = ١٣$

$$أ^{-١} = \frac{١}{١٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٥- & ٣ \end{bmatrix}$$

(نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليمين)

$$س = \frac{١}{١٣} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٥- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٣- & ٢٦ \\ ٣٩ & ١٣ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{١٣} \begin{bmatrix} ٦٥ & ٥٢ \\ ١٨٢ & ٩١- \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{٦٥}{١٣} & \frac{٥٢}{١٣} \\ \frac{١٨٢}{١٣} & \frac{٩١-}{١٣} \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١٤ & ٧- \end{bmatrix}$$

ب

$$٢س \times \begin{bmatrix} ٥ & ٦- \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

نفرض أن $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦- \\ ٣ & ٤- \end{bmatrix} \leftarrow |أ| = (٥ \times ٤-) - (٣ \times ٦-) = ٢-$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢-} \begin{bmatrix} ٤- & ٦ \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix}$$

(نضرب $أ^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليسار)

$$٢س = \frac{١}{٢-} \begin{bmatrix} ٤- & ٦ \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٧ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$س = \frac{١}{٤-} \begin{bmatrix} ١٧- & ٢٩ \\ ٨- & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{١٧-}{٤-} & \frac{٢٩}{٤-} \\ \frac{٨-}{٤-} & \frac{١٢}{٤-} \end{bmatrix} \leftarrow س = \begin{bmatrix} \frac{١٧}{٤} & \frac{٢٩}{٤} - \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٦

أ

$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ -١ \end{bmatrix}$ ، نفرض أن أ $= \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

$|أ| = (٢\times٢) - (١\times-١) = \boxed{٥}$

نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب أ$^{-١}$

$أ^{-١} = \frac{١}{٥}\times\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$

(نضرب أ$^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليمين) $\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥}\times\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٧ \\ -١ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥}\begin{bmatrix} -١٥ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ ١ \end{bmatrix}$

س $= \boxed{-٣}$ ، ص $= \boxed{١}$

ب

$\begin{matrix} ٢س - ٣ص = ١٣ \\ -س + ص = -٦ \end{matrix} \leftarrow \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣ \\ -٦ \end{bmatrix}$

نفرض أن أ $= \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \leftarrow |أ| = (٢\times١) - (-١\times-٣) = ٢ - ٣ = \boxed{-١}$

$أ^{-١} = \frac{١}{-١}\times\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد احلاق

(نضرب أ$^{-١}$ في المعادلة من ناحية اليمين) $\leftarrow \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١٣ \\ -٦ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -١ \end{bmatrix}$

س $= \boxed{٥}$ ، ص $= \boxed{-١}$

٧

ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٥ & ٢س+١ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة؟ (سؤال من كتاب الفترة الثانية)

$\begin{vmatrix} ٥ & ٢س+١ \\ ٩ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$ $\quad$ $٢٠ - (١٨س + ٩) = ٠$

$٢٠ - ١٨س - ٩ = ٠ \leftarrow \frac{-١٨}{-١٨}س = \frac{-١١}{-١٨} \leftarrow$ س $= \boxed{\frac{١١}{١٨}}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٢ – ٤ | النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً | إختر رمز الإجابة الصحيحة

١ إذا كانت: س $= \begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن $|س| =$ .....

أ ١٨ ب ١ جـ -٢ د ٢

٢ إذا كانت: ص $= \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن: $٢|ص| =$ .....

أ ٥ ب -٥ جـ ١٠ د -١٠

٣ إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فإن $|٢أ| =$ .....

أ ١ ب -٤ جـ ٤ د ٢

٤ إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} -٤ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فإن $\frac{١}{٣}|أ + ب| =$ .....

أ ٦ ب -٦ جـ ٢ د -٢

٥ إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٤ & -٦ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن $|أ| + |ب| =$ .....

أ ٣ ب -٢ جـ -٣ د -٢٤

٦ إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن $|أ| \times |ب| =$ .....

أ ٢ ب -٢ جـ -٣ د -٢٤

٧ إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فإن $|أ \times ب| =$ .....

أ ٤ ب -٤ جـ -٣ د ٣

إعداد المعلم : سائد احلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨ إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١١ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فإن فإن $\frac{١}{٢}$|أ| − |٢ب| = ...

أ) ٥−　ب) ٥　ج) ٣−　د) ٣

٩ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان |أ| = ٤، فإن |٣أ| = ...

أ) ١٢　ب) ٣٦　ج) ٢٤　د) ٣٦−

١٠ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان |٢أ| = ١٢، فإن |أ| = ...

أ) ٣−　ب) ٤　ج) ٦　د) ٣

١١ إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان |٣− أ| = ١٨، فإن |٢أ| = ...

أ) ٨　ب) ٤　ج) ٤−　د) ٨−

١٢ أي من المصفوفات التالية مصفوفة منفردة؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٥ \end{bmatrix}$　ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix}$　ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٤ & ٨- \end{bmatrix}$　د) $\begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ٣- & ٤- \end{bmatrix}$

١٣ أي من المصفوفات التالية ليست مصفوفة منفردة؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ١٠- \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$　ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٣- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix}$　ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ١٠- \\ ٢ & ٥- \end{bmatrix}$　د) $\begin{bmatrix} ٦- & ٢- \\ ١٥ & ٥- \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد احلاق

١٤ أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي؟

أ) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$　ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$　ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{bmatrix}$　د) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٦- \\ ٨- & ٤ \end{bmatrix}$

١٥ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & س \end{bmatrix}$ منفردة ؟

أ) ٢−　ب) ٢　ج) ١٢　د) ١٢−

١٦ إذا كانت أ مصفوفة ثنائية من الرتبة الثانية ، فأي من العبارات التالية صحيحة ؟

أ) $|\frac{١}{٢}أ| = ٤أ$　ب) $|\frac{١}{٢}-|أ = \frac{١}{٤}أ$　ج) $\frac{١}{٤}أ = |\frac{١}{٢}أ|$　د) $|\frac{١}{٤}-|أ = -\frac{١}{١٦}أ$

١٧ إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فإن س$^{-١}$ × س = ...

أ) م$_{٣}$　ب) م$_{٢}$　ج) و$_{٢}$　د) واحد صحيح





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٨ إذا كانت $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٣س+٢ \end{vmatrix} = ١$ ، فما قيمة س ؟

أ ٢ ب ٤ جـ -٢ د ١٢

١٩ إذا كانت : س $= \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ ٥ & -٦ \end{bmatrix}$ ، فإن س$^{-١}$ =

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ \frac{٥}{٣} & ١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ \frac{٣}{٣} & ٢ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ \frac{٥}{٣} & -٢ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ \frac{٥}{٣} & -١ \end{bmatrix}$

٢٠ إذا كانت : س $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن ٢(س$^{-١}$) =

أ $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ -١٠ & ٤ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -١٠ & ٦ \end{bmatrix}$

٢١ إذا كانت ص $= \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ٣|٢ص| ؟

أ -٦ ب -١٢ جـ -٢٤ د ٢٤

٢٢ إذا كانت ص $= \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ما المصفوفة س حيث ص × س $= ص^{٢}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ -٥ & -٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

٢٣ إذا كان $|أ| = -٢$ ، فما قيمة $|أ \times أ^{-١}|$ ؟

أ ١ ب ص جـ ٢ د $\frac{١}{٢}$

٢٤ إذا كان $|أ| = ٤$ ، $|ب| = -٤$ ، فما قيمة $|أ \times ب|$ ؟

أ ص ب ١٦ جـ -١٦ د ١

٢٥ إذا كان $|أب| = ٢٠$ ، $|ب| = ٥$ ، فما قيمة $|٢أ|$ ؟

أ ٤ ب ٨ جـ ١٢ د ١٦

٢٦ إذا كان : أ، ب مصفوفتان ثنائيتان بحيث : $|أ| - |ب| = ١٠$ ، $|-١٣أ| = ٩$ ، فما قيمة $|ب|$ ؟

أ -٨ ب ٨ جـ -٩ د -٧

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٧ إذا كان : س ، ص مصفوفتان ثنائيتان ، فأي من العبارات التالية ليست خاطئة ؟

أ) $س^{-١} + ص^{-١} = (س + ص)^{-١}$

ب) $(س ص)^{-١} = س^{-١} ص^{-١}$

ج) $|س \times ص| = |ص \times س|$

د) $|س \times ص| = |س| \times |ص|$

فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

٢٨ إذا كان : أ مصفوفة مربعة من الرتبة ، وكانت $|أ| = ٨$ ، فما قيمة $\left|\frac{١}{٢} أ\right|$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$

ب) ١

ج) ٢

د) ٤

فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

٢٩ ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٣ - س & ١ \\ س & ٢ \end{bmatrix}$ منفردة؟

أ) صفر

ب) -٢

ج) ٢

د) ٦

فلسطين : ٢٠١٩ إكمال

٣٠ إذا كانت $أ \times \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix} = م_٢$ ، حيث $م_٢$ المصفوفة المحايدة ، فما هي المصفوفة أ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ) $\begin{bmatrix} ٧ & ٤- \\ ٩- & ٥ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٧- & ٤ \\ ٩ & ٥- \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ٧- & ٤- \\ ٩- & ٥- \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} ٥ & ٤- \\ ٩- & ٧ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠١٩

٣١ إذا كان : أ مصفوفة مربعة من الرتبة ، وكانت $|-أ| = -١٢$ ، فما قيمة $\left|\frac{١}{٢} أ\right|$ ؟

أ) ٦

ب) -٣

ج) -٦

د) ٣

فلسطين : ٢٠١٩

٣٢ إذا كانت $\begin{vmatrix} ١٢- & ٣ \\ ٢س & ٣- \end{vmatrix} = ٦$ ، فما قيمة س ؟

أ) ٥

ب) ٦

ج) ٧

د) -٥





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

فلسطين : ٢٠١٩

٣٣ إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فما هي المصفوفة أ؟

أ $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٣ & ٤- \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ ب $٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤- \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ جـ $\frac{١}{٢}\begin{bmatrix} ٢ & ٤- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$ د $٢-\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠١٨ إكمال ديسمبر

٣٤ إذا كان: أ مصفوفة غير منفردة ، بحيث: $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} \times أ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة أ =

أ $\begin{bmatrix} ٢- & ٣- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ١- & ٢- \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٢- & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠١٧ إكمال ديسمبر

٣٥ المصفوفات التي لا يمكن إيجاد النظير الضربي لها من المصفوفات الآتية هي:

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٦- \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٦- & ٣- \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

شرق خانيونس : ٢٠١٩ تجريبي

٣٦ إذا كان: ٢س $\times \begin{bmatrix} ٧- \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧- \\ ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة س تساوي:

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب $[١]$ جـ $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & ٠ \end{bmatrix}$

شرق خانيونس : ٢٠١٩ تجريبي

٣٧ إذا كان: $أ = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة $(أ^{-١})^{-١}$ = تساوي:

أ $\begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ٧ & ٥- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ جـ $\begin{bmatrix} ٧- & ٣ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

غرب خانيونس : ٢٠١٩ تجريبي

٣٨ إذا كان: س $= \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $|ك س| = -٤$ ، فإن قيمة الثابت ك تساوي:

أ ١ ب ٢ ج -٢ د ± ٢

رام الله : ٢٠١٩ تجريبي

٣٩ إذا كانت ب $= ٣$أ$^{-١}$ ، فما هي المصفوفة التي تمثل أ × ب؟

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠٢٠

٤٠ إذا كانت : $\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٣ & (س - ١) \end{vmatrix} = -١١$ ، فما قيمة س ؟

أ ٨ ب ٣٠ ج ٢ د ١

فلسطين : ٢٠٢٠

٤١ إذا كانت : ب = أ$^{-١}$ ، فما هي المصفوفة التي تمثل أ × ب ؟

أ $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

٤٢ إذا كانت : ص $= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، وكانت ص$^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -١ & جـ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

أ -٥ ب ٥ ج -١ د ١

فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال

٤١ إذا كانت : أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $|٢أ|$ ؟

أ ١٢ ب ٢٦ ج ٦ د -١٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال		الجواب النهائي
١	إذا كان أ $= \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي إن أمكن :	أ	$\begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$
	أ $٣(أ^{-١})$	ب	$\begin{bmatrix} ١,٥ & -٠,٥ \\ -٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$
	ب $(٢ب)^{-١}$	جـ	$\begin{bmatrix} ٢ & \frac{٥}{٣} \\ -٣ & -\frac{٧}{٣} \end{bmatrix}$
	جـ $(أب)^{-١}$		
٢	إذا كانت $\|أب\| = ٢٤$ ، كان $\|٣ب\| = ٥٤$ ، جد ما يلي :	أ	$\|أ\| = ٤$
	أ $\|أ\|$ ب $\|٢أ\| + \|أ\|$	ب	٢٤
	جـ $\frac{١}{٢}\|-٢أ ب\|$ د $\|-٣أ\| \times \left\|\frac{١}{٢}ب\right\|$	جـ	٤٨
		د	٥٤
٣	إذا كان أ $= \begin{bmatrix} -٤ & -١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٥ & -٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، جد ما يلي إن أمكن :	أ	$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -٥ \end{bmatrix}$
	أ ب$^{-١}$ ب $(أ - ب)^{-١}$	ب	$\begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$
٤	إذا كان ٤س $= \begin{bmatrix} -٤ & ٤ \\ ٤ & -١٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $\|٢ص\| = -١٢$ حيث ص مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية . جد $\|س ص\|$		$\|ص\| = -٣$ $\|س\| = -١$ $\|س ص\| = ٣$
٥	إذا كان ص $= \begin{bmatrix} س & -٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $\|٢ص\| = ٢٤$ ، جد قيمة/قيم س.		س $= -١$
٦	إذا كانت : س $= \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن : $\|س\| = ٤\|س^{-١}\|$		أثبت بنفسك
٧	إذا كان: أ $= \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن : ب × أ $= ٢$جـ$^{-١}$		أثبت بنفسك
٨	إذا كان: $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ -١ & (١ - س) \end{vmatrix} = ١$ ، جد قيمة / قيم س.		س $= ٢$ س $= -١$

مديرية التربية والتعليم للتربية الأستاذ سائد الحلاق

إعداد المعلم : سائد زياد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٩	إذا كان: $\begin{vmatrix} ٣ & ٩- \\ ٦ & (٣-س) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & س^{٢} \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، جد قيمة / قيم س.	س = ٩ س = −٦
١٠	حل المعادلة المصفوفية التالية: $٣س \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{٤}{٣} \\ \frac{٥}{٣}- & ٣- \end{bmatrix}$
١١	حل المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times ٢س = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{١١}{٤} & ٣- \\ \frac{١١}{٤} & ٤- \end{bmatrix}$
١٢	إذا كان $(أب)^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ ، وكان $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد $ب^{-١}$	$\begin{bmatrix} ٧ & ٢٨ \\ ٤- & ١٦- \end{bmatrix}$
١٣	إذا كان : $أ \times ب = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ، $أ \times جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ٣- \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أجد $أ(جـ - ب)$	$\begin{bmatrix} ٦- & ١- \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$
١٤	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال إذا كان $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{bmatrix}$ ، $ص \times س - \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = م_{٢}$ جد المصفوفة ص .	$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١٤ & ٢- \end{bmatrix}$
١٥	فلسطين : ٢٠٢٠ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١- & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٢- & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، جد $\lvert أ \times ب \rvert$	٣٢
١٦	فلسطين : ٢٠٢٠ استخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات: $٢س + ص = ١$ ، $س + ٧ = ٢ص$	س = −١ ص = ٣
١٧	فلسطين : ٢٠١٩ إكمال حل المعادلة المصفوفية : $٢س \times \begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{٣}{٢}- & ١ \\ ٤- & \frac{٥}{٢}- \end{bmatrix}$
١٨	فلسطين : ٢٠١٩ جد المصفوفة ص التي تحقق المعادلة: $\begin{bmatrix} ٤- & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} - ٣م_{٢} = ص \times \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ٦- & \frac{١}{٢}- \\ ٦ & \frac{١}{٢}- \end{bmatrix}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٩	**بيت لحم : ٢٠١٩ تجريبي** إذا كانت: أ $^{-١}$ $= \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ حل المعادلة المصفوفية : أ $^{-١} \times (م_{٢} + أس) = ب$	$\begin{bmatrix} ٩ & -٣ \\ ٠ & -٧ \end{bmatrix}$
٢٠	**رام الله : ٢٠١٩ تجريبي** حل المعادلة المصفوفية : $\begin{bmatrix} ٤ & -٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times ٢س = \begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٠ & ١٠ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٦} \\ ١ & -\frac{١}{١٢} \end{bmatrix}$
٢١	**رفح : ٢٠١٩ تجريبي** ما هي قيمة/قيم س التي تحقق المعادلة: $٣\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + س^{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$ ؟	س = ٣ ، ١
٢٢	**فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر** أوجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة : $٥ \times \begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = ٢س + م_{٢}$	$\begin{bmatrix} ١٥ & -٨ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$
٢٣	**فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر** استخدم طريقة النظير الضربي لحل نظام المعادلات : $٢س + ص = ٤$ ، $٥س - ٢ص = ١$	س = ١ ص = ٢
٢٤	**فلسطين : ٢٠١٦** إذا كانت : أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، فجد ب أ $^{-١}$	$\begin{bmatrix} -\frac{٢}{٣} & ٤ \\ -\frac{١}{٣} & -٤ \end{bmatrix}$
٢٥	**فلسطين : ٢٠١٤** إذا كانت : أ $= \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، فجد [١] $\lvert ٢أ \times ب \rvert$ [٢] $\lvert أ + ٢ب \rvert$	[١] -٢٠ [٢] -١٩

إعداد المعلم : سائد أ حلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٦	فلسطين : ٢٠١٤ إذا كانت : $س^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $س ع^{-١} = ص$ ، فجد ع	$\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$
٢٧	فلسطين : ٢٠١٤ إكمال إذا كانت : $س ع^{-١} = ص$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ع = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ ، فجد $س^{-١}$	$\begin{bmatrix} \frac{١}{٢}- & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{١٢} & \frac{١}{١٢}- \end{bmatrix}$
٢٨	فلسطين : ٢٠١٢ إذا كانت : $أ = \begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ وكانت $\lvert ٢أ \rvert - = ١٢$ ، جد قيمة س	$س = ٠,٥$
٢٩	فلسطين : ٢٠١١ إذا كانت: $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكان $ب \times أ - = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = و_٢$ ، جد المصفوفة أ	$\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ٥- & ١٢- \end{bmatrix}$
٣٠	فلسطين : ٢٠١٠ إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد: [١] أ [٢] $\lvert أ \times ب \rvert^{-١}$	[١] $\begin{bmatrix} \frac{١}{٨} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{٢}{٨} & \frac{٢}{٨}- \end{bmatrix}$ [٢] ١٦
٣١	فلسطين : ٢٠٠٩ إذا كانت: $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix}$ جد: $(٢أ)^{-١}$	$\begin{bmatrix} \frac{١}{١٤} & \frac{٣}{١٤} \\ \frac{١}{٧} & \frac{١}{١٤}- \end{bmatrix}$
٣٢	فلسطين : ٢٠٠٧ حل النظام التالي باستخدام النظير الضربي: $س = ص + ١$ ، $٢س + ص = ٢$	$س = ١$ ، $ص = ٠$
٣٣	فلسطين: ٢٠٠٧ إكمال إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ٣ & س-١ \end{vmatrix} = ١٠-$ ، فما قيمة/قيم س؟	$٢ ، ١-$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢ – ٥ حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر

ملخص الدرس

قاعدة كريمر

تستخدم طريقة كريمر لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، والذي يمكن كتابتهُ بالصورة المصفوفية كالآتي : أ . ع = جـ ، حيث:

- أ : مصفوفة المعاملات.
- ع: مصفوفة المتغيرات
- جـ: مصفوفة الثوابت. $|أ| \neq ٠$ ، فيكون:

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \quad و \quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$

$أ_س$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

$أ_ص$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

خطوات حل أنظمة المعادلات الخطية بطريقة كريمر



- نرتب المعادلات إن لزم ذلك.
- نكتبها على الصورة أ س + ب ص = جـ
- نكتب نظام المعادلات على الصورة أ.ع = جـ
- نجد $|أ|$
- نجد $|أ_س|$ ثم $|أ_ص|$
- لإيجاد قيمة س نستخدم : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|}$
- لإيجاد قيمة ص نستخدم : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$

علاقات

- $|أ_س| = س \times |أ|$
- $|أ| = \frac{|أ_س|}{س}$
- $|أ_ص| = ص \times |أ|$
- $|أ| = \frac{|أ_ص|}{ص}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أمثلة محلولة

مثال ١

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{matrix} ص + ٢س = ٢ \\ س - ٣ص - ١٥ = ٠ \end{matrix}$$

الحـــل

١) نرتب المعادلات : $\begin{matrix} ٢س + ص = ٢ \\ س - ٣ص = ١٥ \end{matrix}$

٢) نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = جـ) : $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١٥ \end{bmatrix}$

٣) نفرض أ مصفوفة المعاملات $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$

٤) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = (٢ \times -٣) - (١ \times ١) = -٦ - ١ = \boxed{-٧}$

٥) نجد : $|أ_س|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١٥ & -٣ \end{vmatrix} = (٢ \times -٣) - (١٥ \times ١) = -٦ - ١٥ = \boxed{-٢١}$$

٦) نجد : $|أ_ص|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١٥ & ١ \end{vmatrix} = (٢ \times ١) - (١٥ \times ٢) = ٢ - ٣٠ = \boxed{٢٨}$$

٧) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-٢١}{-٧} = \boxed{٣}$

٨) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{٢٨}{-٧} = \boxed{-٤}$

الحل : $(س ، ص) = (٣ ، -٤)$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٢

جد حل المعادلة المصفوفية التالية بطريقة كريمر: $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ -٦ \end{bmatrix}$

الحـــل

١) نفرض أن : $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix}$ مصفوفة أ

٢) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix} = (١ \times -٢) - (٢ \times ٣) = -٢ - ٦ = \boxed{-٨}$

٣) $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ -٦ & -٢ \end{vmatrix} = (٥ \times -٢) - (-٦ \times ٣) = -١٠ + ١٨ = \boxed{٨}$

٤) $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & -٦ \end{vmatrix} = (١ \times -٦) - (٥ \times ٢) = -٦ - ١٠ = \boxed{-١٦}$

٥) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٨}{-٨} = \boxed{-١}$

٦) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١٦}{-٨} = \boxed{٢}$ ، الحل : $(س ، ص) = (-١ ، ٢)$

إعداد أ. سائد زياد الحلاق

مثال ٣ فلسطين : ٢٠١٩ إكمال ديسمبر

عند حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين وجد أن : $ص = ٣$ ، $|أ_{س}| = ٣$ ، $|أ_{ص}| = -٦$ ، جد قيمة س

الحـــل

$ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|}$

$٣ = \frac{-٦}{|أ|} \leftarrow -٦ = ٣|أ| \leftarrow |أ| = \boxed{-٢}$

$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٣}{-٢} = \boxed{-\frac{٣}{٢}}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

مثال ٤

إذا ا كانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ١٢ & ٢ \\ -٧ & -١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} -٣ & ١٢ \\ ٢ & -٧ \end{vmatrix}$

ما قيمة كل من س ، ص ؟

الحـــل

١) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = (-٣ \times -١) - (٢ \times ٢) = ٣ - ٤ = \boxed{-١}$

٢) نجد : $|أ_س| = \begin{vmatrix} ١٢ & ٢ \\ -٧ & -١ \end{vmatrix} = (١٢ \times -١) - (-٧ \times ٢) = -١٢ + ١٤ = \boxed{٢}$

٣) نجد : $|أ_ص| = \begin{vmatrix} -٣ & ١٢ \\ ٢ & -٧ \end{vmatrix} = (-٣ \times -٧) - (٢ \times ١٢) = ٢١ - ٢٤ = \boxed{-٣}$

٤) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٢}{-١} = \boxed{-٢}$

٥) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-٣}{-١} = \boxed{٣}$ الحل : (س ، ص) = (-٢ ، ٣)

مثال ٥

إذا كان: $أ_س = \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ،

احسب قيمة كل من : |أ| ، س ، ص . حيث أن : أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، $|أ| \neq ٠$

إعداد المعلم : سائد احلاق

الحـــل

$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = (٣ \times -١) - (٢ \times ٤) = -٣ - ٨ = \boxed{-١١}$ (تم أخذ مدخلات المحدد من المعطيات)

$|أ_س| = \begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{vmatrix} = (-٢ \times -١) - (٦ \times ٤) = ٢ - ٢٤ = \boxed{-٢٢}$

$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-٢٢}{-١١} = \boxed{٢}$

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} = (-٣ \times ٢) - (٦ \times ٢) = -٦ - ١٨ = \boxed{-٢٤}$

$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-٢٤}{-١١} = \boxed{٢}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

قاعدة كريمر | حلول تمارين ومسائل (٢-٥)

١

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = (١\times١) - (٤\times٢) = ١ - ٨ = \boxed{٧}$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٤ & ٩ \end{vmatrix} = (١\times٩) - (٤\times٤) = ٩ - ١٦ = \boxed{٧}$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٩ & ١ \end{vmatrix} = (١\times٤) - (٩\times٢) = ٤ - ١٨ = \boxed{١٤}$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٧}{٧} = \boxed{١} \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = \boxed{٢}$$

٢ أ

نرتب المعادلات إذا لزم ذلك :

$$\begin{matrix} ٣س - ٤ص = ٨ \\ س + ص = ١٢ \end{matrix}$$

١) نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = جـ) : ←

$$\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٢ \end{bmatrix}$$

٢) نفرض أ مصفوفة المعاملات $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

٣) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = (٣\times١) - (١\times-٤) = ٣ + ٤ = \boxed{٧}$

٤) نجد : $|أ_{س}|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٨ & -٤ \\ ١٢ & ١ \end{vmatrix} = (٨\times١) - (١٢\times-٤) = ٨ + ٤٨ = \boxed{٥٦}$$

٥) نجد : $|أ_{ص}|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ١ & ١٢ \end{vmatrix} = (٣\times١٢) - (١\times٨) = ٣٦ - ٨ = \boxed{٢٨}$$

٦) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٥٦}{٧} = \boxed{٨}$

٧) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٢٨}{٧} = \boxed{٤}$ ← (س ، ص) = (٨ ، ٤)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ب

١) نرتب المعادلات إذا لزم ذلك : $\begin{matrix} ٣س - ٢ص = ١٩ \\ ٣س + ص = ١٣ \end{matrix}$

٢) نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = جـ) : ← $\begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ \\ ١٣ \end{bmatrix}$

٣) نفرض أ مصفوفة المعاملات $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

٤) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = (٣ \times ١) - (-٢ \times ٣) = ٣ + ٦ = \boxed{٩}$

٥) نجد : $|أ_س|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} ١٩ & -٢ \\ ١٣ & ١ \end{vmatrix} = (١٩ \times ١) - (١٣ \times -٢) = ١٩ + ٢٦ = \boxed{٤٥}$$

٦) نجد : $|أ_ص|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ١٩ \\ ٣ & ١٣ \end{vmatrix} = (٣ \times ١٣) - (٣ \times ١٩) = ٣٩ - ٥٧ = \boxed{-١٨}$$

٧) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٤٥}{٩} = \boxed{٥}$

٨) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{-١٨}{٩} = \boxed{-٢}$ ← (س ، ص) = (٥ ، -٢)

٣ عند استخدام قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أن : ص = ٤ ، $|أ_ص| = ٢٠$ ، $|أ_س| = -١٥$ ، جد قيمة س .

$$ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|}$$

$$٤ = \frac{٢٠}{|أ|} \quad (\text{بالضرب التبادلي})$$

$$\frac{٤}{٤}|أ| = \frac{٢٠}{٤} \leftarrow |أ| = \boxed{٥}$$

$$س = \frac{|أ_س|}{|أ|} \leftarrow س = \frac{-١٥}{٥} = \boxed{-٣}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ورقة عمل ٢ – ٥ | قاعدة كريمر

أولاً إختر الإجابة الصحيحة

١ إذا كان: $|أ_{س}| = ٨$ ، س $= -٤$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة $|أ|$ ؟

أ) $-٠,٥$ ب) -٣٢ ج) -٢ د) ٢

٢ إذا كان: $|أ_{ص}| = -٩$ ، ص $= -٣$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة $|أ|$ ؟

أ) ٣ ب) -٣ ج) $\frac{١}{٣}$ د) ٢٧

٣ إذا كان: $|أ_{س}| = ٦$ ، $|أ| = ٣$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة س ؟

أ) ١٨ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) -٢

٤ إذا كان: $|أ_{ص}| = -١٢$ ، $|أ| = ٢$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة ص ؟

أ) ٦ ب) -٦ ج) $-\frac{١}{٦}$ د) -٢٤

٥ إذا كان: $|أ| = -٣$ ، س $= ٦$ في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة $|أ_{س}|$ ؟

أ) $-\frac{١}{٢}$ ب) -٢ ج) ١٨ د) -١٨

إعداد المعلم : سائد احلاق

٦ إذا كان: $|أ_{س}| = ٦$ ، $|أ_{ص}| = ١٦$ ، س $= -٣$ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، فما قيمة ص ؟

أ) -٢ ب) ٨ ج) -٨ د) -٣٢

٧ عند استخدام قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أن $|أ| = ٧$ ، $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ ،

فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ) $(١،٢)$ ب) $(٢،١)$ ج) $(-٢،-١)$ د) $(-١،-٢)$

٨ فلسطين : ٢٠٢٠

إذا كانت: $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، فما قيمة $|أ|$ ؟

أ) -٣ ب) -٥ ج) -١٢ د) -١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً: الأسئلة المقالية

م	السؤال	الجواب النهائي
١	في نظام كريمر ، إذا كان: $\|أ\| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ، $أ_س = \begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ١٠ & ١ \end{vmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١٠ \end{vmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ، حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ؟	س = ٣ ص = ١
٢	في نظام كريمر ، إذا كان: $\|أ\| = -١٢$ ، $\|أ_س\| = ٨$ ، $\|أ_ص\| = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ،حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ؟	س = ٦,٥ ص = –٨
٣	في نظام كريمر ، إذا كان: $\|أ_س\| = -١٢$ ، $\|أ_ص\| = ١٥$ ، ص = ٥ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فما قيمة س ؟	س = –٤
٤	في نظام كريمر ، إذا كان: $أ_س = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٦ & -١ \end{bmatrix}$ ، $أ_ص = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، في نظام مكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين ، احسب قيمة كل من : س ، ص حيث أن : أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، $\|أ\| \neq$ صفر.	س = ٤ ص = ٢
٥	في نظام كريمر ، إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $\|أ\| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $\|أ_س\| = \begin{vmatrix} ٨ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $\|أ_ص\| = \begin{vmatrix} ١ & ٨ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix}$ ما قيمة كل من س ، ص ؟	س = ١ ص = ٥
٦	جد حل المعادلة المصفوفية التالية بطريقة كريمر: $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ \\ -٤ \end{bmatrix}$	س = ٢ ص = –٢
٧	استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ص = ٤ – ٢س ، س = ص + ٥	س = ٣ ص = –٢

إعداد المعلم : سائد احلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال أغسطس استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٣س + ص = −٣ ، ٢ص = ٤ − س	س = −٢ ، ص = ٣
٩	فلسطين : ٢٠١٩إكمال استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٥س + ص − ٨ = ٠ ، ص = ٢س + ١	س = ١ ، ص = ٣
١٠	فلسطين : ٢٠١٩ استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: ٢س − ١ − ص = ٠ ، س − ٢ص = −٤	س = ٢ ، ص = ٣
١١	فلسطين : ٢٠٢٠ إكمال ديسمبر في نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين باستخدام قاعدة كريمر وجد أن : $\left\|أ_س\right\| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $\left\|أ_ص\right\| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$ ، أوجد : ١) المصفوفة ٢) مجموعة حل النظام	$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ س = ٣ ص = −١
١٢	نابلس : ٢٠٢٠ تجريبي استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي: ٤ س − ٣ = ص ، س + ٢ ص = ١٢	س = ٢ ، ص = ٥
١٣	قباطية : ٢٠٢٠ تجريبي إعداد المعلم : سائد الحلاق إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان $\left\|أ\right\| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix}$ $\left\|أ_س\right\| = \begin{vmatrix} ٨ & ١ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix}$ ، $\left\|أ_ص\right\| = \begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix}$ ، ما قيمة كل من س ، ص ؟	س = ١ ، ص = ٥
١٤	قباطية : ٢٠١٩ تجريبي استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي: ٥ س − ٢ ص = ٥ ، ٩ = ص − ٢ س	س = ٢٣ ، ص = ٥٥
١٥	شرق غزة : ٢٠١٩ تجريبي باستخدام قاعدة كريمر حل النظام التالي: س + ٢ ص = ٥ ، ٣س − ص = ١	س = ١ ، ص = ٢
١٦	فلسطين : ٢٠١٣ إكمال عند حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين بطريقة كريمر ، وجد أن : س = −٢ ، $\left\|أ_س\right\|$ = ٤ ، $\left\|أ_ص\right\|$ = ٦ ، فما قيمة ص؟	ص = −٣




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

تمارين عامة

تمارين ومسائل (٢-٦)

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الحل	ﺩ	ب	ب	أ	ﺩ	ب	ب	جـ	أ	ب

٢) $أ \times (ب + جـ) = أ \times ب + أ \times جـ$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

٣) نرتب المعادلات: $٢س - ص = -١$ ، $س - ٢ص = ٤$

نكتب المعادلات على الصورة ($أ.ع = جـ$) : $\leftarrow$ $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- \\ ٤ \end{bmatrix}$

نفرض أ مصفوفة المعاملات $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢- \end{vmatrix} = (٢ \times ٢-) - (١- \times ١) = ٤ + ١ = ٣-$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ١- & ١- \\ ٤ & ٢- \end{vmatrix} = (١- \times ٢-) - (٤ \times ١-) = ٢ - (٤-) = ٦$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = (٤ \times ٢) - (١- \times ١) = ٨ + ١ = ٩$$

نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{٦}{٣-} = ٢-$

نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{٩}{٣-} = ٣-$

$\leftarrow$ (س ، ص) = (٢- ، ٣-)

إعداد المعلم : سائد الحلاق

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٤ نرتب المعادلات: $\begin{matrix} س - ص = -١ \\ ٣س + ٣ص = ٦ \end{matrix}$

نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = جـ) : $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٦ \end{bmatrix}$

نفرض أ مصفوفة المعاملات $أ = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

نجد: $|أ| = (١ \times ٣) - (-١ \times ٣) = ٣ + ٣ = ٦$

نجد : $أ^{-١} = \frac{١}{٦} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٦} \times \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \frac{١}{٦} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٩ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٦} \\ \frac{٩}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} \\ \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$$

$س = \boxed{\frac{١}{٢}}$ ، $ص = \boxed{\frac{٣}{٢}}$

إعداد المعلم : سائد احلاق

٥ أجد قيمة / قيم س التي تحقق المعادلة : $٣\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + س^{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$

$٣((١ \times ٣) - (١ \times ٢)) + س^{٢} = (٤ \times س) - (٦ \times ٠)$

$٣(٣ - ٢) + س^{٢} = ٤س$

$٣ \times ١ + س^{٢} = ٤س$

$٣ + س^{٢} = ٤س$

$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠$

$(س - ١)(س - ٣) = ٠$

$س = \boxed{١}$ ، $س = \boxed{٣}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٦ أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة الآتية :

$$\begin{bmatrix} ٨ & -١٤ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix} = س \times \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

نفرض أن أ $= \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

نحسب النظير الضربي للمصفوفة أ أي نحسب أ$^{-١}$

$$|أ| = (٢ \times ٣) - (١ \times ٤) = \boxed{-٢}$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix}$$

نضرب أ$^{-١}$ من جهة اليمين

$$س = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٤ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٨ & -١٤ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$$ نجري عملية ضرب مصفوفتين

$$= \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ -٨ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{٢}{-٢} & \frac{١٠}{-٢} \\ \frac{-٨}{-٢} & \frac{-٤}{-٢} \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} -١ & -٥ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

كتاب الفترة الثانية

حلول الاختبار الذاتي

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الحل	أ	جـ	أ	ء	أ	٢٨−	ب	أ	أ	ء

٢ استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي : $\begin{matrix} ٣س+٢ص-٧=٤ \\ ٢ص+٤س=٦١ \end{matrix}$

١) نرتب المعادلات : $\begin{matrix} ٣س+٢ص=١١ \\ ٤س+٢ص=٦١ \end{matrix}$

٢) نكتب المعادلات على الصورة (أ.ع = جـ) : $\leftarrow \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ٦١ \end{bmatrix}$

٣) نفرض أ مصفوفة المعاملات $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

٤) نجد : $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = (٢\times٣)-(٢\times٤) = ٦-٨ = \boxed{-٢}$

٥) نجد : $|أ_س|$ من خلال استبدال العمود الأول (الممثل لمعاملات س) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} ١١ & ٢ \\ ٦١ & ٢ \end{vmatrix} = (٢\times٦١)-(٢\times١١) = ١٢٢-٢٢ = \boxed{-١٠٠}$$

٦) نجد : $|أ_ص|$ من خلال استبدال العمود الثاني (الممثل لمعاملات ص) بعمود مصفوفة الثوابت ، فينتج :

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ١١ \\ ٤ & ٦١ \end{vmatrix} = (٦١\times٣)-(١١\times٤) = ١٨٣-٤٤ = \boxed{١٣٩}$$

٧) نحسب قيمة س من خلال : $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{-١٠٠}{-٢} = \boxed{٥٠}$

٨) نحسب قيمة ص من خلال : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{١٣٩}{-٢} = \boxed{-٦٩,٥}$

$\leftarrow$ (س ، ص) = (٥٠ ، −٦٩,٥)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٣ حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$٣\begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩- & ٦ \end{bmatrix} - ٢س = \begin{bmatrix} ٤ & ٥- \\ ٢ & ٨- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥- & ٦ \end{bmatrix}$$

$$-٢س = \begin{bmatrix} ١٢ & ١٥ \\ ١٨- & ٢٧ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٤- \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$$

$$-٢س = \begin{bmatrix} ٧- & ١٦- \\ ٣٠- & ١٦ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} \frac{٧-}{٢-} & \frac{١٦-}{٢-} \\ \frac{٣٠-}{٢-} & \frac{١٦}{٢-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣,٥ & ٨ \\ ١٥ & ٨- \end{bmatrix}$$

٤ إذا كانت ص $= \begin{bmatrix} ٥- & ٢ \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ١- \end{bmatrix}$ جد ص$^{-١}$

ص $= \begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ٠ & ٣- \end{bmatrix}$ ← |ص| $= (٠\times٠) - (٣-\times٢-) = ٠-٦ = \boxed{٦}$

ص$^{-١} = \frac{١}{٦}\begin{bmatrix} ٣- & ٠ \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣-}{٦} & \frac{٠}{٦} \\ \frac{٠}{٦} & \frac{٢-}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢}- & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{٣}- \end{bmatrix}$

٥ ما قيم س التي تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} ٥ & ٢- \\ ٤ & ٣-س \end{vmatrix} = ٨$ ؟

$$\boxed{٨} = (٢-\times٤) - (٣-س)٥$$

$$٨ = ٨ + ٥س - ١٥$$

$$\frac{٥-}{٥-}س = \frac{١٥-}{٥-}$$

$$س = \boxed{٣}$$

إعداد المعلم : سائد احلاق
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢ – ٧ أسئلة اثراء الوحدة الثانية (المصفوفات)

القسم الأول: أسئلة اختيار من المتعدد :

السؤال الأول / ضع دائرة رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

١) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ ٢ & ٠ \\ ٧ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٥ & ٧ & ٠,٥ \\ ٤ & ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $-٣(أ_{٢٣} + ٢ب_{٣١})$ ؟

أ) ٢٧ ب) -٢٧ جـ) ٩ د) -٢١

٢) إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & -٢ \\ ١ & ٧ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ -٢ & ٩ \\ -١ & ١١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $٤أ_{١٢} - ب_{٢١}$ ؟

أ) -٧ ب) ٨ جـ) ٤ د) -٤

٣) إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ٨ & -٣ & ٣ \\ ١٢ & -٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ_{٣٢} \times -٣ب_{١٢}$ ؟

أ) ٦ ب) -٦ جـ) ٣ د) -٣

٤) إذا كانت: ٢س $= \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\frac{١}{٢}$ ص $= \begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة : ٢س$_{٢٢}$ + ٣ص$_{١٣}$ ؟

أ) -١٤ ب) -١٠ جـ) ٢٠ د) ١٤

٥) إذا كانت: $\begin{bmatrix} ٢س + ص & ص \\ س & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢٠ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س + ٢ص ؟

أ) ١٣ ب) ٢٠ جـ) ١٩ د) -١٩

٦) إذا كان : $\begin{bmatrix} ٤ & ص^{٢} \\ ١٠ & ص + ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٦ \\ س - ص & ١ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س ؟

أ) -١٤ ب) ١٤ ج) -٦ د) ٦

٧) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢س & ٣ \\ ص + س & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ -٤ & -١٠ \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ) ٦ ، ٠ ب) ٦ ، -١٢ ج) ٦ ، ١٢ د) -٦ ، ١٢

إعداد المعلم : سائد الحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨) إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ١٥(أ − ب) + ١٤(ب − أ) ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٤- & ٤- \\ ٠ & ٣- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٤- & ٤- \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

٩) إذا كان ١٤أ $= \begin{bmatrix} ٠ & ٤- \\ ٨ & ٤- \end{bmatrix}$ فما المصفوفة − أ − م^{٢} ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

١٠) إذا كانت: $\frac{١}{٣}$س $= [٣ \quad ١ \quad ٦-]$ ، فإن $-\frac{٢}{٣}$س تساوي:

أ) $[٦ \quad ٢ \quad ١٢-]$ ب) $[٩ \quad ٣ \quad ١٨-]$ ج) $[٦- \quad ٢- \quad ١٢]$ د) $[٣- \quad ١- \quad ٦]$

١١) إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١- \end{bmatrix}$ ، ص $= \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فإن (س − و$_{٢}$) − (ص + م^{٢}) تساوي :

أ) $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢- & ١- \end{bmatrix}$

١٢) إذا علمت أن: أ $= [٥ \quad ٤-]$، ب $= [٤- \quad ٥]$، وكانت المصفوفة س = أ − ب ، فما قيمة ٢(س$_{٢١}$ + س$_{١١}$)؟

أ) ١٨ ب) ٣٦− ج) صفر د) ١٨−

١٣) ما حل المعادلة المصفوفة: ٢س + $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} ١ & ٧- \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$؟

إعداد المعلم: سائد الحلاق

أ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣- & ٩- \\ ٧ & ٣- \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٧- & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣- & ٩- \\ ٧- & ٣- \end{bmatrix}$

١٤) إذا كانت المصفوفة ص من الرتبة ٣×٢ ، فإن رتبة المصفوفة س بحيث ص$_{٣\times٢}$ − س = ل$_{٣\times٢}$

أ) ٢×٢ ب) ٢×٣ ج) ٣×٣ د) ٣×٢

١٥) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ بحيث : ٣س − ٦م^{٢} = ٢و$_{٢}$ ، فما هي المصفوفة س ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ٢- & ٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ٦ \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

١٦) ما حل المعادلة المصفوفية: ٢ $\left(\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} + \text{س} \right) = \begin{bmatrix} ٨ \\ ٢ \end{bmatrix}$؟

أ) $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٦- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١٢ \\ ١٠ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣- \end{bmatrix}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٧) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٧- \\ ٥- & ١- \end{bmatrix}$ ، وكانت ٢أ – س $= -٣$أ^{٢} ، فإن المصفوفة س تساوي :

أ) $\begin{bmatrix} ١٧- & ١- \\ ١٣- & ٢- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١١- & ٢ \\ ٧- & ٢ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١١- & ٢- \\ ٧- & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١١- \\ ٧- & ٢- \end{bmatrix}$

١٨) ما المصفوفة س بحيث: ٣(س $+ \begin{bmatrix} ١- & ١ \end{bmatrix}$) $= ٢$س $+ \begin{bmatrix} ٠ & ١- \end{bmatrix}$؟

أ) $\begin{bmatrix} ٣- & ٤- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ & ٣- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤- \end{bmatrix}$

١٩) إذا كانت: $\frac{١}{٣}$س $= \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٩- & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن $-\frac{١}{٩}$س $=$

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣- \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٩ & ١٨ \\ ٩ & ٢٧- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١- & ٢- \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

٢٠) إذا كانت $\begin{bmatrix} ٢س & ٤ \\ س & ٥- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ع & ١- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ص & ٣ \\ ٧- & ص \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ع ؟

أ) $١٤-$ ب) $١-$ ج) $٦-$ د) ٦

٢١) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان أ $+$ ب $=$ ب ، فإن أ $=$

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ د) و$_{٢}$

٢٢) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان ب $\times$ أ $=$ أ ، فإن ب $=$

أ) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) م^{٢}

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢٣) إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات: بحيث : أ$_{٣\times ي}$ $\times$ ب$_{٤\times ن}$ $=$ جـ$_{٣\times ٥}$، فإن ي $\times$ ن $=$ .....

أ) ١٥ ب) ٢٠ ج) ٩ د) ١

٢٤) إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات:بحيث جـ $\times$ ب $=$ أ، وكانت رتبة أ $= ٣\times ٤$ ، جـ $= ٣\times ٣$ ، فما رتبة المصفوفة ب ؟

أ) ٣×٣ ب) ٤×٣ ج) ٤×٤ د) ٣×٤

٢٥) إذا كانت: أ مصفوفة ، فإن أ $+ (-$أ$) =$....

أ) ٢أ ب) و ج) م د) أ^{٢}

٢٦) إذا كانت: أ $\times \begin{bmatrix} ١ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١- \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ \\ ١- \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٢٧) إذا كانت رتبة المصفوفة س هي ٢×٥ ، ورتبة المصفوفة ص هي ٥×٥ ، وكان أ = ص×س . ما رتبة المصفوفة أ ؟

أ) ٢×٥ ب) ٥×٢ ج) ٥×٥ د) لا يمكن إجراء العملية

٢٨) إذا كان س = $\begin{bmatrix} ٢- & أ \\ ٥- & ٣ \end{bmatrix}$ ، س$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٥- & ٣- \\ ٣ & ب \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي أ ، ب على الترتيب ؟

أ) ٣ ، ٢− ب) ٣− ، ٢− ج) ٣− ، ٢ د) ٢− ، ٣

٢٩) إذا كان س = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦- & ٠ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكانت المصفوفة ع = ص × س ، فما قيمة $\frac{١}{٢}$ ع$_{٢١}$ ؟

أ) ٣ ب) ٣− ج) ١− د) ٦−

٣٠) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان | أ | = |−٢ب| ، | ب | = ٥، فإن |٢أ| =.....

أ) ٤٠ ب) ٨٠ ج) ٢٠ د) ٢٠−

٣١) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان |٤أ| = |−٢ب| ، |ب| = ٤، فإن |٥أ| =.....

أ) ٢٥ ب) ٥٠ ج) ٢٥− د) ٥−

٣٢) إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & جـ \end{bmatrix}$ ، س$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & ١ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}$ ، فما قيمة جـ ؟

أ) ٦ ب) ١٢ ج) ٦− د) ٣

٣٣) ما مجموعة جميع قيم س التي تجعل: $\begin{bmatrix} ١ & س^{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ س \end{bmatrix} = [١٢]$ ؟

أ) {٣ ، ٤−} ب) {٤ ، ٣−} ج) {٤− ، ٣−} د) {٣ ، ٤}

٣٤) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س- & ٥ \\ ٢٠- & س \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؟

أ) ١٠ ب) ١٠− ج) ١٠± د) ١٠٠

٣٥) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ س & ٣- \end{bmatrix}$ منفردة ؟

أ) ٣ ب) ٣− ج) ٦− د) ٦

٣٦) إذا كان $\begin{vmatrix} س^{٢} & ٣ \\ ٩ & ٤ \end{vmatrix}$ = −١١ ، فما قيمة/قيم س؟

أ) ٢ ، ٢− ب) ٣− ، ٣ ج) ٤ د) ٣−

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٣٧) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ ، وكان $|\sqrt{٦}\ س| = -١٢$ فما قيمة $|-٢س| + ٢|س| - |-\frac{١}{٢}س| + \frac{١}{٢}$ ؟

أ) ١١ ب) −١١ ج) −١٣ د) ١٣

٣٨) إذا كانت $٤س = \begin{bmatrix} ٠ & -٤ \\ ٤ & -١٢ \end{bmatrix}$ ، وكان $|٢ص| = -١٢$ ، حيث ص مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، فما قيمة $|س\ ص|$ ؟

أ) ٣ ب) −٦ ج) −٣ د) ٦

٣٩) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|\frac{١}{٢}أ| = -\frac{١}{٢}$ ، فما قيمة س ؟

أ) ٤ ب) ١٢ ج) −٤ د) $-\frac{١٦}{٣}$

٤٠) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٤ & س \\ س & ١ \end{bmatrix}$ ، وكان $|-٢أ| = ١٢$ ، فما قيمة/قيم س ؟

أ) ١ ب) ١ ، −١ ج) −١ د) ٠

٤١) إذا كانت $|٣أ| = ١٨$ ، وفما قيمة $١٠|-أ| - ٢|-٣أ|$ ؟

أ) ٣٦ ب) −٥٦ ج) ١٦ د) −١٦

٤٢) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = ٢|ب|$ ، فإن $|أ \times ب| =$ .....

أ) $٤|أ|^{٢}$ ب) $٢|أ|^{٢}$ ج) $\frac{١}{٢}|أ|^{٢}$ د) $\frac{١}{٤}|أ|^{٢}$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٤٣) إذا كان : $|أس| = -٥$ ، $|أص| = ١٠$ ، ص = ٢ ، فما قيمة س؟

أ) −٥ ب) ج) −١ د) ٢٥

٤٤) إذا علمت أن : ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكان $|-٣ب| = ٩$ ، فما قيمة $\frac{١}{٢}|٢ب|$ ؟:

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٨ د) ١

٤٥) إذا كانت المصفوفة $س = \begin{bmatrix} ب & -ب \\ ٢ & ب \end{bmatrix}$ ، فما قيمة/قيم ب التي تجعل المصفوفة س ليس لها نظير ضربي؟

أ) ٢،٠ ب) ٠ ، −٢ ج) −٢ د) ٠

٤٦) إذا كانت : $ب^{-١} = \begin{bmatrix} ٦ & ٥ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما المصفوفة ب؟

أ) $\begin{bmatrix} -٤ & ٥ \\ ٥ & -٦ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٤ & -٥ \\ -٥ & ٦ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٦ & ٥ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٤٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ ،و كان $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ ٨ & ٢ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ١ & ٨ \end{vmatrix}$ فما قيمة س ؟

أ) ٤,٥ ب) ٠,٥ ج) ٢− د) ٢

٤٨) إذا كانت $\frac{١}{٢}س \times \begin{bmatrix} ٠ & ٢- \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فإن ٣س =

أ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$

٤٩) إذا كانت المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، تمثل مصفوفة المعاملات في نظام خطي مكون من معادلتين خطيتين يمتغيرين س ، ص ، وكانت $أ_س = \begin{bmatrix} ٧ & ١- \\ ٧ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة المتغير ص ؟

أ) ٤ ب) ١ ج) ٤− د) ١−

٥٠) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية بحيث : $٢س - ٤ق_٢ = ٣و_٢$ ، فإن $|س|$ يساوي:

أ) ٢ ب) ٤ ج) ١ د) ٤−

٥١) ما قيمة : $\begin{vmatrix} ٢ & ٢- \\ ٤- & ٣ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٠ & ١- \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ ؟

أ) ٩− ب) ٢١ ج) ٥− د) ٥

٥٢) إذا كانت: $(س^{-١})^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فإن س تساوي :

أ) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٦ & ٣- \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$

٥٣) ما قيمة / قيم س التي تجعل: $\begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ٥ & س^{٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & س \end{vmatrix}$ ؟

أ) ٢ ، ١− ب) ٢ ، ١ ج) ١− ، ٢− د) ١ ، ٢−

٥٤) إذا كانت : ب $= \begin{bmatrix} س & ٣ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ ، وكان $|٣ب| = ٢٧$ ، ما قيمة / قيم س ؟

أ) ٣ ب) ٣− ج) ٣− ، ٣+ د) ٩− ، ٩

إعداد المعلم : سائد احلاق
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

القسم الثاني: الأسئلة المقالية :

أجب عن الأسئلة التالية:

١) إذا كان $\begin{bmatrix} ص & ٢ \\ ٤ & س \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٦ & ١- \\ ٠ & ٢- \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ١٨ & ٧- \\ ع٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من الثوابت س ، ص ، ع ؟

٢) إذا كان س $=\begin{bmatrix} ٢ل & ٦ \end{bmatrix}$ ، ص $=\begin{bmatrix} ٣- & \frac{١}{٢}ب \end{bmatrix}$ وكان $-$ ٣س $=$ ٤ص ، جد قيمة كل من الثابتين ل ، ب

٣) إذا كان أ $=\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب $=\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد:

أ) $|٢أ - ٣ب|$ (ب أ) (أب)$^{-١}$ ج) قيمة س التي تجعل : أ$_{٢١}$ + ب$_{١٢}$ = ب$_{١١}$ $-$ ٢س

٤) إذا كان س $=\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٤- & ٦- \end{bmatrix}$ ، ص $=\begin{bmatrix} ٤- & ٥ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix}$ ، جد:

أ) $\frac{١}{٢}$(س + ص) ب) ص $\times$ ٢س

ج) $|$س $-$ ص$|$ د) ٢س ص$^{-١}$

٥) إذا كان : س $\times$ ص $=$ ع ، وكان س $=\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$ ، ع $=\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، أوجد ٢ ص$^{-١}$

٦) أجد قيمة / قيم س التي تحقق المعادلة الآتية: $٣\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}+$ س^{٢} $=\begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$

٧) إذا كانت أ $=\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب $=\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}$ ، وكانت ع أ $=$ ب ، جد المصفوفة ع

٨) حل المعادلة المصفوفية التالية: $٢\left(س+\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٥- & ٤ \end{bmatrix}\right)=-٣\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ٦- \end{bmatrix}$

٩) أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $٣\left(س+٢\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}\right)+$ م$_{٢}$ $=$ س $-٢\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$

١٠) حل المعادلة المصفوفية التالية: س $\times\begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٤ & ٤- \end{bmatrix}$

١١) حل المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} ٣ & ٤- \\ ١- & ٠ \end{bmatrix}\times$٣س $=\begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}+$٢م^{٢}

١٢) أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة المصفوفية التالية: $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}\times$ س $=$ ٣م$_{٢}$ $-\begin{bmatrix} ٢- & ٤- \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

١٣) حل النظام التالي باستخدام النظير الضربي : $-$ ٣ص + ٥س $=$ ٧ ، ٣س $-$ ٨ $=$ ٢ص

١٤) استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات: ٩ $-$ ص $=-$ ٣س ، ٤ص $-$ ٨ $=$ ٢س

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



٢ – ٨ أسئلة تفوق الوحدة الثانية (المصفوفات)

حاول أن تحل الأسئلة التالية :

١ إذا كانت أ٢ = [– ٣ س] ، $\frac{ب}{٣}$ = [ص ٣] ، فما قيمة كل من الثابتين س ، ص إذا كان – ٢ أ – ٣ب = و$_{٢١}$

٢ إذا كان س ، ص مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان |٤س| = |– ٢ص| ، ٢|– ص| = ٨ ، فما قيمة |$\overline{٣}$س| ؟

٣ إذا كان س × ص = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٧ \end{bmatrix}$ ، س × ع = $\begin{bmatrix} ٨ \\ -٢ \end{bmatrix}$ ، أجد س (ص – ع)

٤ إذا كان |أب| = ٢٥ ، |– ٣ب| = ٤٥ ، احسب : |أ٢| × |$\frac{ب}{٢}$|

٥ إذا كانت جـ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن |جـ| = |٢ جـ$^{-١}$| .

٦ إذا كان $\frac{أ}{٢}$ = $\begin{bmatrix} س & ٢ \\ ١ & س \end{bmatrix}$ ، $\overline{٤}$ب = $\begin{bmatrix} ٢س & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة / قيم الثابت س إذا علمت أن |أ| |– | ب | = – ٢

٧ إذا كان م = $\begin{bmatrix} -٢ & س \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ ، ن = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣س \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، وكانت ل = م + ن

إعداد المعلم: سائد الحلاق

أوجد قيمة الثابت س التي تجعل المصفوفة ل مصفوفة منفردة .

٨ إذا كان س = [أ٢ ٦] ، ص = [– ٣ $\frac{١}{٢}$ب] ، وكان – ٣س = ٤ص ،

فما قيمة كل من الثابتين أ ، ب ؟

٩ إذا كان (س × ص)$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، س × ع = $\begin{bmatrix} ٠ & -٣ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، بين أن : س (ص + ع) = ٢م^{٢}

١٠ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١-ب \\ ٢ & ١+ب \end{bmatrix}$ ، وكان |أ| = ٥ فما قيمة / قيم ب ؟

١١ إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكانت ٣س – ٢م^{٢} = ٦٣ و$_{٢}$ ، فما قيمة |س| × س$^{-١}$ ؟





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٢ إذا كانت س $= \begin{bmatrix} ٥ & -٤ \\ -٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أثبت أن $|س^{-١}| = \frac{١}{|س|}$

١٣ إذا كان أ $= \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$ ، $(أب)^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أجد ب $^{-١}$

١٤ حل المعادلة المصفوفية التالية : $٢(س - و_٢) = ٤\left(س - ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} + \frac{١}{٢}س\right) - ٣م_٢$

١٥ إذا كان : $\begin{bmatrix} ب & ٠ \\ ٠ & أ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -١ \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٨ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من أ، ب ؟

١٦ إذا كان $\begin{bmatrix} ٣ & س & -١ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & ٣ \\ ص & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة كل من س، ص ؟

١٧ إذا كان س $= \begin{bmatrix} -٦ & -٤ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$ وكان $٣|ك س| = ٣٦$ ، فما قيمة الثابت ك ؟

١٨ إذا كان س $^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$ ، س ص $= \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد المصفوفة ص

١٩ إذا كان أ $^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ وكان ٢ أ × ب $- \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = م_٢$ ، أجد المصفوفة ب

٢٠ إذا كانت أ $^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٧ & -٢ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$

فحل المعادلة: أ $^{-١} \times (م_٢ + أ س) = ب$

٢١ عند حل المعادلتين الآتيتين بنظام كريمر : ب ص $-$ س $= ٤$ ، ص $= -$أ س $+ ٥$ وجد أن :

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $|أ_س| = -٦$ ، فما قيمة كل من الثابتين أ، ب ؟

٢٢ حل النظام التالي باستخدام قاعدة كريمر $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$

إعداد المعلم: سائد احلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ــ غرب غزة	اختبار نهاية الوحدة الثانية		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفحات	٢	المدرسة:	العلامة
	التاريخ:	٢٠٢٠م	الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الزمن:	تسعون دقيقة ٥٠

ملاحظة: عدد أسئلة الاختبار " ستة " أسئلة أجب عنها جميعا

السؤال الأول: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة: (٢٠) علامة

١) إذا كان : ب $= \begin{bmatrix} ٥ & ٥ \\ ٤ & ٧- \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $٣\left(ب_{٢١} + \frac{جـ_{٣٢}}{٢}\right)$ ؟

أ) ٣ ب) ٩- جـ) ٩ د) ٣-

٢) إذا كان : $\begin{bmatrix} ص^{٢}-١ & ٤ \\ ٧ & ١+ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٣+٢س & ٤ \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب؟

أ) ٢ ، ٣ ب) ٢- ، ٣- جـ) ٢- ، ٣ د) ٢ ، ٣-

٣) إذا كانت: أ مصفوفة ، فإن $|أ \times أ^{-١}| = ...$

أ) ٠ ب) ١ جـ) ١- د) م

٤) ما مجموعة جميع قيم س التي تجعل : $[٢ \quad -س] \begin{bmatrix} ٣س \\ س \end{bmatrix} = [٨]$ ؟

أ) {٢- ، ٤} ب) {٢- ، ٤} جـ) {٢ ، ٤} د) {٢- ، ٤-}

٥) إذا كانت: $٢أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ٨ & ٤- \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢- & ٥- \end{bmatrix}$ ، ، فما قيمة $٢٠أ^{٢} + ١٩أب - ١٨(ب + أ)$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢- & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٧ & ٢- \\ ١١ & ٢- \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ١- & ١٠- \\ ٢ & ١٣ \end{bmatrix}$

٦) ما حل المعادلة المصفوفية: $٣\left(س - \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix} - ٢س$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١- \\ ٥ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$

٧) إذا كان : أ$_{٢\times٢}$ ، ب$_{٢\times٣}$ ، جـ$_{٣\times٢}$ ، فأي من العمليات التالية يمكن إجراؤها؟

أ) أ × ب + جـ ب) جـ × أ + ب جـ) جـ × ب + أ د) ب × جـ + أ

إعداد المعلم : سائد إحلاق





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٨) إذا كان : أ ، ب مصفوفتين مربعتين من الرتبة الثانية ، وكان $|أ| = ٢|ب|$ ، فإن $|أ \times ب| = ...$

أ) $\frac{١}{٢}|ب|^{٢}$ ب) $٢|ب|^{٢}$ ج) $\frac{١}{٤}|ب|^{٢}$ د) $٤|ب|^{٢}$

٩) ما قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢س & -٦ \\ -٣ & س \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي؟

أ) ± ٣ ب) -٣ ج) ± ١٨ د) ± ٣٦

١٠) إذا كان: $|أس| = ١٢$ ، $|أص| = -٦$ ، $س = -٢$ ، فما قيمة ص؟

أ) -٦ ب) -١ ج) ٣٦ د) ١

السؤال الثاني : (٩) علامات

إذا كان $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix}$ ، جد:

١) $|أ - \frac{١}{٢}ب|$ ٢) $(ب أ)^{-١}$ ٣) $(١٢ \times ب)$

السؤال الثالث: (٦) علامات

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$٢س \times \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال الرابع : (٥) علامات

إذا كانت المصفوفة ص $= \begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٢ & س \end{vmatrix}$ وكان $|-٣ص| = ٢٧$ ، فما قيمة / قيم الثابت س ؟

السؤال الخامس : (١٠) علامات

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات التالي:

$٣ص = -٥س + ٧$ ، $٢ص - س + ٤ = ٠$

إنتهى





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم – غرب غزة	اختبار تجريبي لنهاية الفصل الدراسي الأول		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفحات	٤	المدرسة:	العلامة
	إعداد المعلم	سائد زياد الحلاق	الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )
	العام الدراسي	٢٠٢٠/٢٠٢١م	الزمن:	ساعتان ١٠٠
ملاحظة : عدد أسئلة الاختبار " ستة " أسئلة أجب عن خمسة منها فقط				

القسم الأول : يتكون هذا القسم من (٤) أسئلة وعلى المشترك أن يجيب عنها جميعاً.

السؤال الأول: (٣٠) علامة

يتكون هذا السؤال من (٢٠) فقرة من نوع اختيار من متعدد ، من أربعة بدائل ، اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق (س) = س^{٢} + ١ للفترة $[أ، ٤]$ هو ١ ، فما قيمة / قيم الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) −٣ ج) ٤، −٣ د) ٤، −٣

٢) إذا كان : ٢ق (س) = ٦س − ٣هـ (س) ، وكان ق′ (١) = −٦ ، ما قيمة هـ′ (س) ؟

أ) −١٨ ب) −٣ ج) −٦ د) ٦

٣) إذا كان الاقتران ق (س) = −س$^{-١}$ − ١ ، فإن ق′ (س) يساوي

أ) $\frac{١}{س^{٢}} - ١$ ب) س ج) $\frac{١}{س^{٢}}$ د) س^{٢}

٤) إذا كان الاقتران ق(س) = ب س^{٢} + ٢س ، وكان ق′(٢) = ١٠ . فما قيمة الثابت ب ؟

أ) ٨ ب) ١٢ ج) −٢ د) ٢

٥) إذا كان (ق × هـ)′ (٢) = ٢٠ ، ق(٢) = −٥ ، ق′(٢) = ٣ ، هـ′(٢) = −٢ ، فما قيمة هـ(٢)؟

أ) ٢ ب) −٢ ج) ١٠ د) −٦

٦) إذا كان الاقتران هـ(س) = $\frac{٢ - س}{س + ١}$ ، فما قيمة هـ′ (−٢)؟

أ) −٣ ب) ٣ ج) ٥ د) $\frac{١}{٣}$

٧) الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س لهُ قيمة صغرى محلية تساوي :

أ) ٣ ب) ٤ ج) ١ د) −١

٨) إذا كان الاقتران ق(س) = س^{٣} + $\int_{ب}^{ب} (٢س^{٢}) - (\sqrt{٨س}) .د س$ ، فما قيمة ق′ (−٢)؟

أ) −١٠ ب) ١٠ ج) ٢٠ د) −٢٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٩) إذا كان ق′(س) مشتقة ق(س) وكان: ق(−٢) = ٤ ، ق(٣) = −٦ ، فما قيمة $\int_{-٢}^{٣} \frac{ق'(س)}{٢}$ ﺩس؟

أ) −٥ ب) ٥ ج) −١٠ د) −١

١٠) إذا كان: $\int_{ب}^{١} (ب)$ ﺩس + ٢٠ = ٠ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟

أ) −٤،٥ ب) −٥،٤ ج) −٤ د) ٥

١١) إذا كان $\int$ ق′(س) = (٢س^{٣} − ٣س + جـ) ، فما قيمة ق′(−١)؟

أ) −١٢ ب) ٣ ج) ١ د) −٣،٤

١٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} \frac{س}{٣} & ٣ \\ س - ٢ص & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٩ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ) −٣ ، ٣ ب) ٣ ، −٣ ج) −٣ ، −٣ د) −٣ ، ٣

١٣) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ -٦ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٩ & \sqrt{٤} \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة ٢ب$_{٢×١}$ + أ$_{٣×٢}$؟

أ) ١٢ ب) ٨ ج) ٦ د) ٢٢

١٤) إذا كانت المصفوفة ع = ص + ٣س وكانت ع$_{٢٢}$ = −١٠ ، ص$_{٢٢}$ = ٥ ، فما قيمة المدخلة س$_{٢٢}$؟

أ) −١٥ ب) −٥ ج) −٣ د) ٥

١٥) إذا كانت كان أ ، ب ، جـ مصفوفات: بحيث : أ$_{ن×م}$ × ب$_{٢×٣}$ = جـ$_{٤×٣}$، فإن ن + م = ...

أ) ٨ ب) ٧ ج) ٦ د) ٥

١٦) إذا كانت : ص = $\begin{bmatrix} -٥ & أ \\ -٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، ص$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ٣ & ب \end{bmatrix}$ ، فما قيمتي أ ، ب على الترتيب ؟

أ) −٣ ، ٢ ب) ٣ ، −٢ ج) −٣ ، −٢ د) ٣ ، ٢

١٧) إذا كانت ص مصفوفة مربعة من الرتبة ٢×٢ وكان: |−٢ص| = ١٦ ، فما قيمة: $|\sqrt{٤}$ ص| + |$\sqrt{٢}$ ص| ؟

أ) −٨ ب) ١٦ ج) صفر د) ٢٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق




الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

١٨) ما قيمة / قيم س التي تحقق $\begin{vmatrix} ٢س & ٦ \\ ٦ & س \end{vmatrix} = ٣٦$ ؟

أ) $\sqrt{٧٢}$ ب) -٦ ج) ٦ د) $-٦،٦$

١٩) إذا كان $\frac{أ}{٢} = ٣ب^{-١}$ ، فما المصفوفة التي تمثل ب أ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٦ & ٠ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$

٢٠) عند استخدام قاعدة كريمر في حل نظام من المعادلات الخطية نتج أن $|أ| = -١$ ، $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٨ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ٨ \end{vmatrix}$ ،

فما قيمتي س ، ص على الترتيب ؟

أ) $-١،-١$ ب) $١،١$ ج) $-١،١$ د) $١،-١$

السؤال الثاني : (٢٠) علامة

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران هـ(س) عندما تتغير س في الفترة $[-١،٢]$ هو -١٢ ، جد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = س هـ(س) + س في نفس الفترة ، علماً بأن هـ(٢) = ٧ .

٢) جد $\int \left(-\frac{٤}{س^{٢}} + \frac{٣}{٢} \sqrt{س} + ٧س^{\frac{٣}{٤}} \right) د س$

إعداد المعلم : سائد احلاق

٣) حل المعادلة المصفوفية : $٣\left(س - \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix} \right) = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٦ & -٢ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix} + ٢ص^{٢}$

السؤال الثالث : (٢٠) علامة

١) إذا كان الإقتران هـ(س) = $س^{٣} - ٣س + ٣$ ، $س \in ع$ ، جد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) على ع

ب) القيم القصوى للاقتران هـ(س) ، ثم حدد نوعها.

٢) حل المعادلة التالية: $\begin{vmatrix} س & ٢ \\ -١ & (١ - س) \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} س & ٠ \\ -س & ١ \end{vmatrix}$

٣) جد قاعدة الاقتران هـ(س) عندما هـ′(س) = $٣س^{٢} + ٢$ ، الذي يمر بالنقطة $(٢،-٦)$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

السؤال الرابع : (٢٠) علامة

١) استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات التالي: ٣ص = −٥س + ٧ ، ٢ص − س + ٤ = ٠

٢) إذا كان : $\int_{١}^{٢} ٢هـ(س) ـ د س + ٣ = -٥$ ، $\int_{١}^{٣} (هـ(س) + ٣) ـ د س = ٧$ ، فما قيمة $\int_{٢}^{٣} (هـ(س) + ٥) ـ د س$ ؟

٣) إذا كان : $هـ(س) = \frac{هـ(س)}{٢س} - ٣\sqrt{س}$ ، جد $هـ'(١)$ ، إذا علمت أن : $هـ'(١) = -١$ ، $هـ(١) = \frac{٥}{٢}$

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى المشترك أن يجيب عن أحدهما فقط:

السؤال الخامس : (١٠) علامات

١) إذا كان $(س \times ص)^{-١} = \begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $س \times ع = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ -٢ & -٣ \end{bmatrix}$ ، بين أن : $س(ص + ع) = ٢س^{٢}$

٢) إذا كان متوسط تغير الاقتران $هـ(س) = ٢س^{٢} + ٩\sqrt{س^{٢}} + ١٢$ ، للفترة $[أ ، ٣أ]$ يساوي ١١

فما قيمة الثابت أ ؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال السادس : (١٠) علامات

١) ليكن الاقتران $هـ(س) = أس^{٢} + بس + ٣$ ، وكان $هـ'(١) = -٢$ ، $هـ(١) = ٤$ ،فما قيمة الثابتين أ،ب ؟

٢) إذا كان $\int_{٢}^{٠} (٢هـ'(س) + هـ'(س) + ٢س) ـ د س = ٢٥$ وكان : $٣هـ(٥) = ٣$ ، $٢هـ(٢) = -٣$ ،

$٢(هـ(٥) - هـ(٢)) = ٤ب - ٢$ ما قيمة / قيم الثابت ب ؟

إنتهى





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

دولة فلسطين وزارة التربية والتعليم العالي مديرية التربية والتعليم ــ جنوب الخليل	امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول		الاسم:	
	مادة الاختبار	الرياضيات		
	عدد الصفحات	٣	المدرسة:	العلامة
	التاريخ:		الصف:	الثاني عشر أدبي وشرعي ( )
	العام الدراسي	٢٠١٩/٢٠٢٠م	الزمن:	ساعتان ٦٠

ملاحظة : عدد أسئلة الاختبار " ستة " أسئلة أجب عن خمسة منها فقط

القسم الأول : يتكون هذا القسم من (٤) أسئلة وعلى المشترك الإجابة عنها جميعا:

السؤال الأول : (١٨) علامات

يتكون هذا السؤال من (١٢) فقرة من نوع اختيار من متعدد ، من أربعة بدائل ، اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{س - ٢}$ عندما تتغير س من س$_١$ = ١١ إلى س$_١$ = ١٨ ؟

أ) $\frac{١}{٧}$ ب) ٧ ج) ٧− د) $\frac{١}{٥}$

٢) إذا كانت : ص = $\pi^{٢}$ + $\int_{-١}^{٢}$ ٢س^{٤} . دس فما قيمة $\frac{د ص}{د س}$ ؟

أ) ١ ب) ٢ π ج) $\frac{\pi}{٣}$ د) صفر

٣) إذا كان الاقتران ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ق(١) = ٥ ، ق′(١) = ٢ ، هـ(١) = ٤ ، هـ′(١) = −١

فما قيمة (ق × هـ)′(١)؟

إعداد المعلم : سائد الحلاق

أ) ٣ ب) ١٥− ج) ١٨− د) ٦

٤) إذا كان ق′(س) = (٣س^{٢} − ٤س + جـ) ، فما قيمة ق′(٢)؟

أ) ١٢ ب) ٤ ج) ٢− د) ٨

٥) إذا كان $\int_{٣}^{ب}$ دس = $\int_{٠}^{٢}$ ٢س دس ، فما قيمة الثابت ب؟

أ) ٢− ب) ٢ ج) ٣ د) ٤−

٦) إذا كان أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية ، وكان |٢أ| = ١٦ ، فما قيمة |$\frac{١}{٢}$ أ| ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ١ ج) ٢ د) ٤





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٧) إذا كانت المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} -١ & س \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي ، فما قيمة س ؟

أ) -١ ب) -٢ ج) ١ د) ٢

٨) إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٣ & -٩ \\ ٢ & -٨ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة $أ_{١٢} - ب_{٢١}$ ؟

أ) -٣ ب) ٣ ج) ١ د) -٢

٩) إذا كان $[٢ \quad س] \begin{bmatrix} ٥ \\ س \end{bmatrix} = [١٩]$ ، فما قيمة س السالبة؟

أ) -٣ ب) -٥ ج) -٩ د) -١٩

١٠) إذا كان: هـ$(س) = \int \frac{س + ١}{س^{٢} - ٢}$.دس ، فما قيمة هـ$'(١)$ ؟

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) -٢ د) ٢

١١) ما ميل القاطع لمنحنى الاقتران هـ$(س) = ٣س^{٢} - ٢$ ، المار بالنقطتين $(-١، هـ(-١))$ ، $(٢، هـ(٢))$؟

أ) ٣ ب) -٦ ج) ٢ د) ٩

١٢) إذا كان هـ $(س) = ٦ \sqrt[٣]{س^{٥}}$ ، فما قيمة هـ$'(٨)$ ؟

أ) $\frac{١}{٤٨}$ ب) -٤ ج) ٤٨ د) ٤

إعداد المعلم : سائد الحلاق

السؤال الثاني : (١٢) علامة

أ) إذا كان الإقتران هـ$(س) = ٣س^{٣} - ٩س + ٥$ ، $س \in ع$ ، أوجد:

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ$(س)$ على ع

٢) القيم القصوى للاقتران هـ$(س)$ ، ثم حدد نوعها.

ب) استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات التالي: $س + ص = ٧$ ، $ص = ٢س + ١$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

السؤال الثالث : (١٢) علامة

أ) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣- & ٦ \end{bmatrix}$ ، أوجد ما يلي:

١) $|٢أ + ب|$ ٢) $أ.ب$ ٣) $(-٢أ)^{-١}$

ب) إذا كان : $\int_{٥}^{٧} ٢هـ(س).د س = ٦$ ، $\int_{٥}^{١} (هـ(س)).د س = ٤$ ، فما قيمة $\int_{١}^{٧} (٣هـ(س) + ٢).د س$

السؤال الرابع : (١٢) علامة

أ) حل المعادلة المصفوفية : $٢\left(٢س + \begin{bmatrix} ٨ & ١٠ \\ ١١- & ٠ \end{bmatrix}\right) = س + \begin{bmatrix} ٨ & ٧- \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

ب) جد قيمة $\int \left(٦س^{-٤} + \frac{٢}{٥س^{٢}}\right).د س$

ج) إذا كان : $هـ(س) = \frac{٣س + ١}{٢س}$ ، $س \neq ٠$ ، أوجد $هـ'(١)$

القسم الثاني : يتكون هذا القسم من سؤالين وعلى الطالب الإجابة عن سؤال واحد فقط

السؤال الخامس : (٦) علامات

أ) إذا كان $هـ(س) = أس^{٢} + ٨س - ب$ لهُ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(٢، ٥)$ ، أجد قيمة الثوابت أ، ب

ب) ما قيمة / قيم س التي تحقق المعادلة $س - ٢\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & ٢ \\ ٠ & س \end{vmatrix}$ ؟

السؤال السادس : (٦) علامات

أ) إذا كان $(أ)^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٢- \\ ١ & ٢- \end{bmatrix}$ ، حل المعادلة $أ^{-١} \times (م_{٢} + أس) = ب$

ب) إذا كان $\left(\frac{هـ}{ه}\right)(س) = -٢س^{٣}$ ، $ه(س) \neq ٠$ ، وكان : $هـ(٢) = ٤$ ، $ه(٢) = ٢$ ، $ه'(٢) = ١٢$ ،
أوجد $هـ'(٢)$

انتهت الأسئلة





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec



أساسيات | بعض من التعريفات والمفاهيم والعلاقات الرياضية

أولاً | العمليات الأساسية على الأعداد الحقيقية

١ جمع الأعداد الحقيقية وطرحها

عند جمع عددين متشابهين في الإشارة ، نجمع العددين وتبقى الإشارة كما هي .

- $٣+٥=٨$
- $-٣+-٥=-٨$

عند جمع عددين مختلفين في الإشارة ، نضع إشارة العدد الأكبر ثم نطرح العد

- $-٣+٥=٢$
- $-٣+-٥=-٢$

عند طرح عددين نحول الطرح إلى جمع ونعكس إشارة المطروح ، ثم نطبق قواعد الجمع

- $-٣-٥=-٣+-٥=-٨$

عندما تأتي الإشارة السالبة بعد عملية الطرح (المطروح يكون سالب) يتم دمج الاشارتين وتصبح موجب

- $-٣--٥=-٣+-٥=-٨$

٢ ضرب الأعداد الحقيقية وقسمتها

إعداد المعلم : سائد احلاق

عند ضرب أو قسمة عددين متشابهين بالإشارة (موجبين أو سالبين) ، فأن إشارة العدد الناتج موجباً دائماً.

- $٣\times٥=١٥$
- $-٣\times-٥=١٥$
- $٢٤\div٦=٤$
- $-٢٤\div-٦=٤$

عند ضرب أو قسمة عددين مختلفين بالإشارة (موجبين أو سالبين) ، فإن إشارة العدد الناتج سالباً دائماً.

- $-٣\times٥=-١٥$
- $٣\times-٥=-١٥$
- $-٢٤\div٦=-٤$
- $٢٤\div-٦=-٤$

٣ أولويات إجراء العمليات الحسابية

الأقواس ، الأسس ، الضرب والقسمة بدءاً من اليمين ثم الجمع والطرح بدءاً من اليمين .

- $(٢+٣)\times٥=٥\times٥=٢٥$
- $١٢\div(٤-١)=١٢\div٣=٤$
- $٢+٣\times٥=٢+١٥=١٧$
- $١٢\div٤-١=٣-١=٢$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثانياً — حل المعـــادلات

١ حل المعادلة الخطية:

المعادلة : هي عبارة رياضية تحتوي على متغيرات وثوابت واشارة مساواة .

مثال أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات الخطية التالية :

١) $٥س - ٤ = -١٩$

$٥س = -١٩ + ٤$

$\frac{٥}{٥}س = \frac{-١٥}{٥}$

$س = -٣$ ← $ح.م = \{-٣\}$

٢) $-٤س + ٧ = -٨ + س$

$-٤س - س = -٨ - ٧$

$\frac{-٥}{-٥}س = \frac{-١٥}{-٥}$

$س = ٣$ ← $ح.م = \{٣\}$

إعداد المعلم : سائد احلاق

٢ حل معادلة تربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل:

مثال أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية :

١) $س^٢ - ٨س + ١٥ = ٠$

$س$	-٥
$س$	-٣

$(س - ٥)(س - ٣) = ٠$

$س - ٥ = ٠$ ، $س = ٥$

$س - ٣ = ٠$ ، $س = ٣$

$\therefore ح.م = \{٣، ٥\}$

٢) $س^٢ - س - ٢٠ = ٠$

$س$	-٥
$س$	$+٤$

$(س - ٥)(س + ٤) = ٠$

$س - ٥ = ٠$ ، $س = ٥$

$س + ٤ = ٠$ ، $س = -٤$

$\therefore ح.م = \{-٤، ٥\}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

٣ حل معادلتين خطيتين جبرياً:

مثال ١ أوجد مجموعة حل المعادلتين الخطيتين التاليتين بطريقة **الحذف** :

● ٣س – ص = ٥ ، س + ص = ٣

٣س – ص = ٥ [١]

س + ص = ٣ [٢]

٤س = ٨ ← س = ٢

نعوض عن قيمة س في المعادلة [٢]

← ٢ + ص = ٣ ⇐ ص = ١

∴ م.ع = {(٢ ، ١)}

مديرية التربية والتعليم شمال غزة
أ. سائد الحلاق

مثال ٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين التاليتين بطريقة **التعويض** :

● ٤س + ٢ص = ١٠ ، س ص = ٢

٤س + ٢ص = ١٠ [١]

س × ص = ٢ [٢]

إعداد المعلم : سائد الحلاق

من معادلة [١] نجعل ص موضع قانون ⇐ ٢ص = ١٠ – ٤س ⇐ ص = ٥ – ٢س

عوض عن ص = ٥ – ٢س في المعادلة [٢] ⇐ س(٥ – ٢س) = ٢ ⇐ ٥س – ٢س^{٢} = ٢

⇐ ٢س^{٢} – ٥س + ٢ = صفر ⇐ (٢س – ١)(س – ٢) = صفر

٢س	– ١
س	– ٢

إما ٢س – ١ = ٠ ⇐ س = $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = ٥ – ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٥ – ١ = ٤

أو س – ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

ومنها ص = ٥ – ٢ × ٢ = ٥ – ٤ = ١

م.ع = {($\frac{١}{٢}$ ، ٤) ، (٢ ، ١)}





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

ثالثاً — تحليل كثيرات الحـــــــدود

١ التحليل بإخراج عامل مشترك:

مثال حلل:

١) $٤س^{٢} - ٨س = ٤س(س - ٢)$

٢) $٦س - ٣س^{٢} = ٣س(٢ - س)$



٢ تحليل الفرق بين مربعين:

مثال حلل:

١) $س^{٢} - ١٦ = (س - ٤)(س + ٤)$

٢) $س^{٢} - ٧ = (س - \sqrt{٧})(س + \sqrt{٧})$

٣ تحليل الفرق بين مكعبين:

مثال حلل:

إعداد المعلم : سائد الحلاق

$س^{٣} - ٢٧ = (س - ٣)(س^{٢} + ٣س + ٩)$

٤ تحليل مجموع مكعبين:

مثال حلل:

$س^{٣} + ٦٤ = (س + ٤)(س^{٢} - ٤س + ١٦)$

٥ مفكوك القوس التربيعي:

مثال حلل:

١) $(س + ٥)^{٢} = س^{٢} + ١٠س + ٢٥$

٢) $(س - ٦)^{٢} = س^{٢} - ١٢س + ٣٦$





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

رابعاً — بعض من أنواع الاقترانات

١ الاقتران الثابت

هـ (س) = جـ ، جـ ∈ ح ، عند تمثيله في المستوى الديكارتي يكون خط مستقيم يوازي محور السينات.

مثال إذا كان هـ (س) = ١٢ ، فما قيمة هـ (٣) ؟

الحل هـ (٣) = ١٢

٢ الاقتران الخطي

هو اقتران كثير حدود من الدرجة الأولى ، وعند تمثيله في المستوى الديكارتي يكون خط مستقيم .

هـ (س) = أ س + ب ، أ، ب ∈ ح ، أ ≠ ٠

مثال إذا كان هـ (س) = ٢س + ٣ ، فما قيمة هـ (٢) ؟

الحل هـ (٢) = ٢ × ٢ + ٣ = ٤ + ٣ = $\boxed{٧}$

٣ الاقتران التربيعي

هو اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية .

هـ (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

مثال إذا كان هـ (س) = س^{٢} + ٣س − ٥ ، فما قيمة هـ (٤) ؟

الحل هـ (٤) = (٤)^{٢} + ٣ × ٤ − ٥ = ١٦ + ١٢ − ٥ = $\boxed{٢٣}$

٤ الاقتران التكعيبي

هو اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة .

هـ (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء ، أ ، ب ، جـ ، ء ∈ ح ، أ ≠ ٠

مثال إذا كان هـ (س) = س^{٣} + ٢س + ١ ، فما قيمة هـ (١) ؟

الحل هـ (١) = ١^{٣} + ٢ × ١ + ١ = ١ + ٢ + ١ = $\boxed{٤}$

إعداد المعلم: سائد الحلاق
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

خامساً — قـــوانين الأســـــــس واللوغاريتمات

١ الأسس

لتكن أ ، م ، ن ∈ ع

أ^صفر = ١ حيث أ ≠ ١ ، ١^أ = ١

(−١)^ن = −١ إذا كان ن عدد فردي ، (−١)^ن = ١ إذا كان ن عدد زوجي

بعض قوانين الأسس

م	القانون	المثال
١	أ^م × أ^ن = أ^(م+ن)	٣^٢ × ٣^٤ = ٣^(٢+٤) = ٣^٦
٢	أ^م / أ^ن = أ^(م−ن)	٤^٧ / ٤^٤ = ٤^(٧−٤) = ٤^٣
٣	(أ^م)^ن = أ^(م×ن)	(أ^٣)^٥ = أ^١٥
٤	أ^(م/ن) = ∛(أ^م)	٨^(٢/٣) = ∛(٨^٢) = ∛٦٤ = ٨
٥	أ^(−م) = ١/أ^م ، ١/أ^(−م) = أ^م	١/أ^٢ = أ^(−٢) ، ١/أ^(−٥) = أ^٥
٦	أ^م = أ^ن ← م = ن (إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس)	

إعداد المعلم : سائد الحلاق

٢ اللوغاريتمات

لتكن أ ، م ، ن ∈ ع

١) لـو_أ س = جـ تكافئ أ^جـ = س ، أ > ٠ ، س > ٠ ، أ ≠ ١

٢) لـو_أ أ = ١ ، أ > ١ ، لـو_أ ١ = ٠ ، أ > ١

٣) لـو_أ (أ)^ن = ن × لـو_أ أ = ن ، س > ٠

٤) لـو_أ (س × ص) = لـو_أ س + لـو_أ ص

٥) لـو_أ (س ÷ ص) = لـو_أ س − لـو_أ ص

تم بحمد الله





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

وفي خاتمة هذا العمل أُذكر نفسي وغيري بقول الله تعالى:

"وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ۖ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ"

وقد كانت رحلة جاهدة للارتقاء بدرجات العقل ومعراج الأفكار

فما هذا الا جهد مقل ولا أدعي فيه الكمال ولكن عذري أني بذلت فيه قصارى جهدي فإن أصبت فذاك مرادي وان لم أُصب فلي شرف المحاولة والتعلم ...

ولكن هذا جهد قليل في مقابل خدمة جميع طلبة فلسطين .

وأخيرا أعزائي الطلبة يمكنكم متابعتي عبر مجموعة شبكة رياضيات فلسطين

على الرابط

إعداد المعلم : سائد احلاق

https://www.facebook.com/groups/360785677395726/?ref=bookmarks

أو التواصل لأي استفسار عبر رقم الجوال : 0599632532

تم بحمد الله





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec

شرح المنهاج - تدريبات شاملة

أسئلة اختبارات سابقة

أ. سائد زياد الحلاق

جوال: 0599632532

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #113931 | TRACK 18c21893444afaec