١٢

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الثالثة

الطبعة الثانية
٢٠٢٠ م/ ١٤٤١ هـ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل غير المحدود وتطبيقاته في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ إيجاد الاقتران الأصلي لاقتران معطى (إن أمكن) وتحديد العلاقة بين التفاضل والتكامل.
٢ التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود، واستخدامها في إيجاد تكاملات معطاة.
٣ إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرة حدود، ومثلثية، وأسّية، ولوغاريتمية، ونسبية.
٤ استخدام طرق التكامل، مثل: التكامل بالتعويض، وبالأجزاء في إيجاد تكاملات معطاة.
٥ توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية وفيزيائية.
٦ التعرف إلى التجزئة، وحساب مجموع ريمان.
٧ إيجاد التكامل لاقتران خطّي باستخدام التعريف.
٨ التعرف إلى النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل.
٩ التعرف إلى خصائص التكامل المحدود.
١٠ حساب التكامل المحدود.
١١ إيجاد مساحة منطقة مستوية باستخدام التكامل المحدود.

المحتـــويات

البنود التي باللون الأحمر تستثنى من الفرع الصناعي

٣ - ١ التكامل غير المحدود (Indefinite Integral)

نشاط ١: من خلال ما تعلمته في التفاضل، أكمل الجدولين الآتيين، ثم أجب عن الأسئلة التي تليهما:

الجدول (أ)

ق(س)	قَ(س)
س	
س + ٥	
جاس	
$س^{٢} + ٤$	٢س
$هـ^{س}$	

الجدول (ب)

قَ(س)	ق(س)
٧	
٢س	
$٣س^{٢}$	$س^{٣} + ٣$
$قا^{٢}س$	
$\frac{١}{س}$	

١. تسمى العملية في الجدول (أ) عملية اشتقاق.
٢. اقترح اسمًا للعملية في الجدول (ب)........
٣. ما العلاقة بين العمليتين؟......................................
٤. هل الاقتران ق(س) يكون وحيدًا لكل حالة في الجدول (ب)؟ أعط أمثلة.

تعريف: معكوس المشتقة Antiderivative

إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب] فإن م(س) يسمى معكوس المشتقة (اقتران أصلي) للاقتران ق(س) إذا كان: مَ(س) = ق(س) ، ∀ س ∈]أ ، ب[

مثال ١: تحقق من أن الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ اقتران أصلي للاقتران ق(س) = $س^{٣}$

الحل: الاقتران م(س) = $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) لأن $\frac{د}{د س}$ ($\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$) = $س^{٣}$
(لاحظ أن ق(س) متصل لأنه كثير حدود).

نشاط ٢: جد اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) = ٢س

حسب التعريف يكون أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) هو م(س) = $س^{٢}$

لأن $\frac{د}{د س}$ ($س^{٢}$) = ٢س

١. هل $م_{١}$(س) = $س^{٢}$ – ٢ ، $م_{٢}$(س) = $س^{٢}$ + ٥ اقترانان أصليان آخران للاقتران ق(س)؟
٢. هل يوجد عدد محدد من الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س). ما العلاقة بينها؟

قاعدة:

إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) فإن م(س) + جـ هي الصورة العامة لأي اقتران أصلي للاقتران ق(س) حيث جـ ثابت.

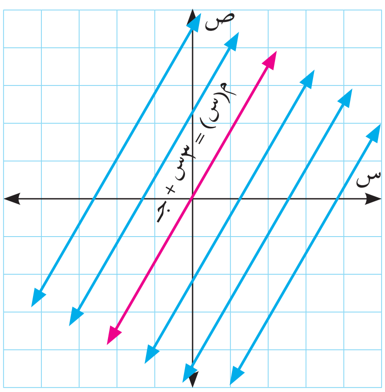
أتعلم:

الفرق بين أي اقترانين أصليين لاقتران معين يساوي اقتراناً ثابتاً دائماً.

مثال ٢ : إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)،
وكان ل(س) = م(س) − هـ(س)، فجد لَ(٣).

الحل : الاقترانان م(س) ، هـ(س) اقترانان أصليان للاقتران المتصل ق(س)
إذن م(س) − هـ(س) = جـ (ثابت)، ومنه ل(س) = جـ
لَ(س) = ٠ ومنها لَ(٣) = ٠

مثال ٣ : بيّن أن مجموعة الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = ٣ هي مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية.



الحل : جميع الاقترانات الأصلية تكون على الصورة:
م(س) = ٣س + جـ ، حيث جـ ∈ ح، وهي عبارة عن مجموعة من الاقترانات التي منحنياتها مستقيمات متوازية،
فمثلاً إذا كان جـ = ٥ فإن $م_{١}$(س) = ٣س + ٥
وإذا كانت جـ = ⁻٣ فإن $م_{٢}$(س) = ٣س − ٣ وهكذا ...

مثال ٤ : بيّن فيما إذا كان الاقتران م(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}$ اقترانًا أصليًا للاقتران
ق(س) = ١ + $\frac{٢}{س^{٣}}$ ، س ≠ ٠

الحل : م(س) = $\frac{س^{٣} - ١}{س^{٢}}$ = $\frac{س^{٣}}{س^{٢}}$ − $\frac{١}{س^{٢}}$ = س − $س^{-٢}$

ومنها مَ(س) = ١ − (⁻٢)$س^{-٢-١}$ = ١ + $\frac{٢}{س^{٣}}$ = ق(س)

∴ م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س).

تعريف:

١ تسمى مجموعة كل الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة لـ س ويرمز له بالرمز $\int$ ق(س) دس ويقرأ تكامل ق(س) دال س.

٢ إذا كان مَ(س) = ق(س) فإن $\int$ ق(س) دس = م(س) + جـ حيث جـ ثابت. (ثابت التكامل).

٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً فإن $\frac{د}{د س}\left(\int ق(س)\, دس\right)$ = ق(س).

نشاط ٣: لاحظ أن $\int$ س^{٣}دس = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ وذلك لأن $\frac{د}{د س}(\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ) = س^{٣}

وكذلك $\int$ ص$^{-٢}$دص = $\frac{-١}{ص}$ + جـ وذلك لأن ....

وبالمثل $\int$ جتاس دس = جاس + جـ وذلك لأن ....

مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً وكان $\int$ ق(س) دس = س^{٣} – ٣س + ٥

جد ق(٢) ، قَ(٢).

الحل : بما أن ق(س) اقتران متصل

إذن $\frac{د}{د س}\left(\int ق(س)\, دس\right)$ = ق(س) = ٣س^{٢} – ٣

ومنها ق(٢) = ٣(٢)^{٢} – ٣ = ٩

قَ(س) = ٦س ومنها قَ(٢) = ١٢

مثال ٦ : إذا كان ق(س) = $\int$ هـ^{س} دس ، وكان ق(٠) = ٣ ، فجد ق(١).

الحل : ق(س) = $\int$ هـ^{س} دس = هـ^{س} + جـ

لكن ق(٠) = ٣ ، ومنها يكون هـ^{٠} + جـ = ٣

أي أن ١ + جـ = ٣ ومنها جـ = ٢

ق(س) = هـ^{س} + ٢ ومنها ق(١) = هـ^{١} + ٢ = هـ + ٢

١ بيّن فيما إذا كان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران ق(س) في كل مما يأتي:

أ) م(س) = $\frac{١}{٣}$ (٢ + س^{٢})$^{\frac{٣}{٢}}$ ، ق(س) = س $\sqrt{٢ + س^{٢}}$

ب) م(س) = قا^{٣}س ، ق(س) = ٣ قا^{٢}س ظاس

جـ) م(س) = لـو$_{هـ}$(س^{٣} + هـ^{٢س}) ، ق(س) = $\frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}}$

٢ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران ق(س)،
وكان م(س) = س^{٢} − ٤س + ٦ ، هـ(٣) = ٤، فجد هـ(١).

٣ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين للاقتران المتصل ق(س)، وكان ق(٤) = ٧ ، قَ(٤) = ١٠،
فما قيمة (٣م − هـ)َ(٤)؟

٤ إذا كان م(س) = ٢ظاس − ٢قاس أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ق(س) = $\frac{أ}{١ + جاس}$ ،
س ∋ $]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$. احسب قيمة الثابت أ.

يتطلب إيجاد الاقتران الأصلي من خلال عمليات الاشتقاق كثيراً من الوقت والجهد، لذلك سنستخدم قواعد سيتم التعرف على بعض منها من خلال النشاط الآتي.

نشاط ١: أكمل الجدول الآتي حيث أ ∈ ح ، ثم أجب عن الأسئلة التي تليه:

ق(س)	قَ(س)	$\int$ قَ(س) دس
٥		جـ
أ س		أ س + جـ
س^{٣}		
س^{ن}	ن س$^{ن-١}$	
لـو$_{هـ}$ س ، س > ٠		

لاحظ أن المقدارين ق(س) ، $\int$ قَ(س) دس ، في كل حالة يختلفان بمقدار ثابت.

١ ما العلاقة بين نواتج العمود الثاني، ونواتج العمود الثالث؟

٢ بالاعتماد على النتائج التي توصلت إليها، وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل، يمكنك التحقق من صحة القواعد الآتية:

قواعد التكامل غير المحدود:

١ $\int$ أ دس = أ س + جـ ، أ ∈ ح

٢ $\int$ س^{ن} دس = $\frac{\text{س}^{ن+١}}{ن + ١}$ + جـ ، ن ≠ ⁻١

٣ $\int \frac{١}{\text{س}}$ دس = لـو$_{هـ}$ |س| + جـ

٤ $\int$ هـ^{س} دس = هـ^{س} + جـ

٥ $\int$ جاس دس = ⁻جتاس + جـ

٦ $\int$ جتاس دس = جاس + جـ

٧ $\int$ قا^{٢}س دس = ظاس + جـ

٨ $\int$ قتا^{٢}س دس = ⁻ظتاس + جـ

٩ $\int$ قاس ظاس دس = قاس + جـ

١٠ $\int$ قتاس ظتاس دس = ⁻قتاس + جـ

خواص التكامل غير المحدود:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل فإن:

١ $\int$ أ ق(س) دس = أ $\int$ ق(س) دس ، أ ≠ ٠

٢ $\int$ (ق(س) ± هـ(س)) دس = $\int$ ق(س) دس ± $\int$ هـ(س) دس ويمكن تعميمها على أكثر من اقترانين.

مثال ١ : جد كلاً من التكاملات الآتية:

١ $\int (\frac{١}{س} + ٣)$ دس

٢ $\int$ قاس (قاس + ظاس) دس

٣ $\int$ (س^٢ + هـ^{س}) دس

٤ $\int$ (٢ − ظا^{٢}س) دس

الحل :

١ $\int (\frac{١}{س} + ٣)$ دس = $\int \frac{١}{س}$ دس + $\int$ ٣ دس = لـوهـ |س| + ٣س + جـ

٢ $\int$ قاس (قاس + ظاس) دس = $\int$ (قا^{٢}س + قاس ظاس) دس

= $\int$ قا^{٢}س دس + $\int$ قاس ظاس دس

= ظاس + قاس + جـ

٣ $\int$ (س^٢ + هـ^{س}) دس = $\int$ س^٢ دس + $\int$ هـ^{س} دس = $\frac{س^٣}{٣}$ + هـ^{س} + جـ

٤ $\int$ (٢ − ظا^{٢}س) دس = $\int$ (٢ − (قا^{٢}س − ١)) دس = $\int$ (٣ − قا^{٢}س) دس

= ٣س − ظاس + جـ

مثال ٢ : جد $\int \frac{(س^٢ + ١)^٢}{س^٢}$ دس

الحل : $\int \frac{(س^٢ + ١)^٢}{س^٢}$ دس = $\int \left(\frac{س^٢ + ١}{س}\right)^٢$ دس = $\int$ (س + س$^{-١}$)^٢ دس

= $\int$ (س^٢ + ٢ + س$^{-٢}$) دس = $\frac{س^٣}{٣}$ + ٢س − $\frac{١}{س}$ + جـ

فكّر وناقش:

هل يمكنك إيجاد ناتج التكامل بطريقة أخرى؟

نشاط ٢: إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = (٥\text{س}^{٤} - ١)$، وكان ق(١) = ٥، فلإيجاد ق(٢) لاحظ أن:

$$\text{ق}(\text{س}) = \int \text{ق}'(\text{س})\ \text{دس} = \int (٥\text{س}^{٤} - ١)\ \text{دس} = \text{س}^{٥} - \text{س} + \text{جـ}$$

لكن ق(١) = ... = ٥ ومنها جـ = ...

فيكون ق(س) = ...

ق(٢) = ...

فكّر وناقش:

ما الفرق بين: $\frac{\text{د}}{\text{د س}} \int \text{ق}(\text{س})\ \text{دس}$ ، $\int \text{ق}'(\text{س})\ \text{دس}$، علماً بأن ق(س) اقتران متصل؟

تمارين ٣ - ٢

١ جد التكاملات الآتية:

أ $\int ٨\ \text{دس}$

ب $\int (٣ + \text{س})\sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

جـ $\int (٥\text{س} + \text{قاس ظاس})\ \text{دس}$

د $\int \frac{٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس}$

هـ $\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

و $\int (٥\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}})\ \text{دس}$

٢ إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}^{\text{س}} = \text{جتاس}$ ، جد ق(س) حيث ق(٠) = $^{-}١$

أولاً: تطبيقات هندسية: Geometric Applications

نشاط ١: يسير رجل على طريق منحنٍ بحيث يكون ميل المماس عند أي نقطة أ (س ، ص) على الطريق يساوي (٢س + ١). (لاحظ أن ميل المماس هو صَ = ٢س + ١)

١ الاقتران الذي يمثل معادلة الطريق هو اقتران تربيعي قاعدته ص = ...

٢ إذا كانت النقطة (٠ ، ٢) تقع على الطريق، فإن قاعدة الاقتران ص = ...

مثال ١ : إذا كان المستقيم ص = س + ٢ يمس منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٠
وكان قً(س) = ٦س ، جد قاعدة الاقتران ق(س).

الحل : قَ(س) = $\int$ قً(س) دس

= $\int$ ٦س دس = ٣س^{٢} + جـ$_{١}$

لكن قَ(٠) = ١ (لماذا؟)

ومنها جـ$_{١}$ = ١ ، قَ(س) = ٣س^{٢} + ١

وأيضاً ق(س) = $\int$ قَ(س) دس

= $\int$ (٣س^{٢} + ١)دس = س^{٣} + س + جـ$_{٢}$

وبما أن النقطة (٠ ، ٢) هي نقطة تماس

فإن ق(٠) = ٢ ومنها جـ$_{٢}$ = ٢

ق(س) = س^{٣} + س + ٢

مثال ٢ : إذا كان قً(س) = ١٢س فجد معادلة منحنى الاقتران ق(س)
علماً بأنه يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (-١ ، ١).

الحل : بما أن $\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{ق}''(\text{س})\,\text{دس}$

فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \int ١٢\text{س}\,\text{دس} = ٦\text{س}^{٢} + \text{جـ}_{١}$

كما أن $\text{ق}(\text{س}) = \int (٦\text{س}^{٢} + \text{جـ}_{١})\,\text{دس} = ٢\text{س}^{٣} + \text{جـ}_{١}\text{س} + \text{جـ}_{٢}$ (لماذا؟) .... (١)

لكن $\text{ق}(١) = ٣$ ، $\text{ق}(^{-}١) = ١$

وبالتعويض في المعادلة (١) نحصل على:

$\text{جـ}_{١} + \text{جـ}_{٢} = ١$ ، $^{-}\text{جـ}_{١} + \text{جـ}_{٢} = ٣$

وبحل المعادلتين معاً نحصل على قيمة: $\text{جـ}_{١} = ^{-}١$ ، $\text{جـ}_{٢} = ٢$

معادلة المنحنى المطلوبة هي: $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} - \text{س} + ٢$

ثانياً: تطبيقات فيزيائية Physical Applications

تأمل المخطط الآتي، ولاحظ العلاقة بين البعد ف(ن) والسرعة ع(ن) والتسارع ت(ن) في التفاضل والتكامل.

$$\text{ف}(\text{ن}) \underset{\text{بالاشتقاق}}{\overset{\text{بالتكامل}}{\rightleftarrows}} \text{ع}(\text{ن}) \underset{\text{بالاشتقاق}}{\overset{\text{بالتكامل}}{\rightleftarrows}} \text{ت}(\text{ن})$$

مثال ٣ : بدأ جسم التحرك في خط مستقيم من نقطة الأصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت سرعته في أي لحظة تعطى بالعلاقة $\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن}$ ، فما بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين من بدء الحركة؟

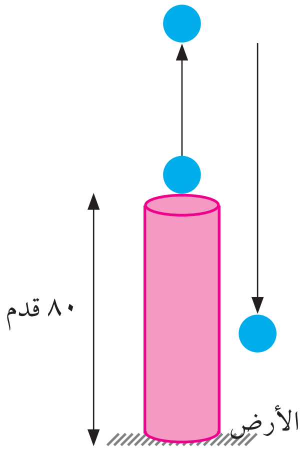
الحل : $\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\,\text{دن} = \int (٣\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن})\,\text{دن} = \text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢} + \text{جـ}$

وبما أن $\text{ف}(٠) = ٠$ فإن $\text{جـ} = ٠$

أي أن $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢}$

بعد الجسم عن نقطة الأصل بعد ثانيتين = $\text{ف}(٢) = ١٢$ متراً



مثال ٤ : قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ ث من قمة برج ارتفاعه ٨٠ قدماً. جد أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تصله الكرة، علماً بأن تسارعها يساوي $^{-}$٣٢ قدم/ ث^{٢}.

الحل : ع(ن) = $\int$ ت(ن) دن

= $\int$ $^{-}$٣٢ دن = $^{-}$٣٢ن + جـ$_{١}$

لكن ع(٠) = ٦٤ ومنها جـ$_{١}$ = ٦٤

ع(ن) = $^{-}$٣٢ن + ٦٤

تصل الكرة لأقصى ارتفاع بعد ثانيتين ..... (لماذا؟)

ف(ن) = $\int$($^{-}$٣٢ن + ٦٤) دن = $^{-}$١٦ن^{٢} + ٦٤ن + جـ$_{٢}$

لكن ف(٠) = ٨٠ ومنها جـ$_{٢}$ = ٨٠

ف(ن) = $^{-}$١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ٨٠

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ف(٢) = ١٤٤ قدماً.

تمارين ٣ - ٣

١ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي س(٣س - ٢) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(٢) = ٥

٢ إذا كان قَ(س) = أس - ٣س^{٢} ، فجد قاعدة منحنى الاقتران ق(س) علماً بأن المستقيم س + ص = ٤ مماس للمنحنى عند النقطة (١ ، ق(١)).

٣ إذا كان قً(س) = جتاس وكان قَ(π) = ٢ ، ق(π) = ١ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س).

٤ تحرك جسم في خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها، بسرعة ابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإذا كان تسارعه في أي لحظة يساوي (ن) م/ ث^{٢}، فما سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة، وما المسافة التي قطعها خلال هذه الثواني؟

يصادفنا في كثير من الأحيان تكاملات لا يمكن إيجادها باستخدام قواعد التكامل غير المحدود، وستتعرف في هذا الدرس على طريقتين لإيجاد التكامل غير المحدود، وهي:

١ التكامل بالتعويض.

٢ التكامل بالأجزاء.

أولاً: التكامل بالتعويض Integration by Substitution

نشاط ١: إذا كان ق(س) = ٢س (٢ + س^{٢})^{٢}

١ تحقق أن: م(س) = $\frac{١}{٣}$ (٢ + س^{٢})^{٣} اقتران أصلي للاقتران ق(س).

٢ $\int$ ٢س (٢ + س^{٢})^{٢} دس = ...

٣ ليكن هـ(س) = ٢ + س^{٢} فإن هـَ(س) = ...

٤ العلاقة بين ٢س ، ٢ + س^{٢} هي ....

فكّر وناقش:

هل $\int$ س $\sqrt{\text{س}}$ دس = $\int$ س دس . $\int$ $\sqrt{\text{س}}$ دس ؟ ماذا تلاحظ؟

تعلمت في الفصل الأول بأن $\frac{د}{د\,س}$ (ق(س))^{ن} = ن(ق(س))$^{ن-١}$ قَ(س)

أي أن (ق(س))^{ن} هو اقتران أصلي للاقتران ن(ق(س))$^{ن-١}$ قَ(س)

وبذلك يكون: $\int$(ق(س))$^{ن-١}$ قَ(س) دس = $\frac{١}{ن}$ (ق(س))^{ن} + جـ

وبشكل عام:

إذا كان هـ(س) = ع فإن: $\int$ق(هـ(س)) هـَ(س) دس = $\int$ق(ع) دع

علماً بأن ق(س) ، هـ(س) اقترانان متصلان.

مثال ١ : جد $\int ٢\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}\ \text{دس}$

الحل : نفرض أن: $\text{ع} = \text{س}^{٢} + ٤ \Leftarrow \text{دع} = ٢\text{س دس}$ ومنها $\text{دس} = \frac{\text{دع}}{٢\text{س}}$

وبالتعويض، ينتج أن:

$$\int ٢\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤}\ \text{دس} = \int ٢\text{س}\sqrt{\text{ع}}\ \frac{\text{دع}}{٢\text{س}} = \int \sqrt{\text{ع}}\ \text{دع} = \frac{٢\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢(\text{س}^{٢} + ٤)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$$

مثال ٢ : جد $\int (٢\text{س} + ١)^{٥}\ \text{دس}$

الحل : نفرض أن: $\text{ع} = ٢\text{س} + ١$ ومنها يكون $\text{دع} = ٢\text{دس}$ ، أي أن $\text{دس} = \frac{\text{دع}}{٢}$

$$\int (٢\text{س} + ١)^{٥}\ \text{دس} = \int \text{ع}^{٥}\ \frac{\text{دع}}{٢} = \frac{\text{ع}^{٦}}{١٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{١٢}(٢\text{س} + ١)^{٦} + \text{جـ}$$

نشاط ٢: لإيجاد $\int \text{قا}^{٢}(٣\text{س} + ٢)\ \text{دس}$

نفرض $\text{ع} = ٣\text{س} + ٢$ ، فيكون $\text{دع} = ٣\ \text{دس}$ ومنها $\text{دس} = ...$

فيصبح $\int \text{قا}^{٢}(٣\text{س} + ٢)\ \text{دس} = \frac{١}{٣}\int \text{قا}^{٢}\text{ع}\ \text{دع} = ...$

$$= \frac{١}{٣}\ \text{ظا}(٣\text{س} + ٢) + \text{جـ}$$

أتعلم:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل فإن $\int \text{قَ}(\text{أ س} + \text{ب})\ \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}}\text{ق}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{جـ}$

حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، $\text{أ} \neq ٠$

مثال ٣ : جد $\int$ س هـ$^{س^٢+١}$ دس

الحل : نفرض أن: ع = س^٢ + ١ $\Leftarrow$ دس = $\frac{دع}{٢س}$ وبالتعويض والاختصار، ينتج أن:

$$\int س\ هـ^{س^٢+١}\ دس = \frac{١}{٢}\int هـ^{ع}\ دع$$

$$= \frac{هـ^{ع}}{٢} + جـ$$

$$= \frac{هـ^{س^٢+١}}{٢} + جـ$$

مثال ٤ : جد $\int$ جا^{٣}س دس

الحل : $\int$ جا^{٣}س دس = $\int$ جا^{٢}س جاس دس = $\int$ (١ − جتا^{٢}س) جاس دس

إذن $\int$ جا^{٣}س دس = $\int$ جاس دس − $\int$ جتا^{٢}س جاس دس

= $^-$جتاس + $\frac{جتا^٣س}{٣}$ + جـ (لماذا؟)

مثال ٥ : جد $\int$ س^٥(س^٣ + ١)^٣ دس

الحل : نفرض أن: ع = س^٣ + ١ $\Leftarrow$ دس = $\frac{دع}{٣س^٢}$

$\int$ س^٥(س^٣ + ١)^٣ دس = $\int$ س^{٥}ع^٣ $\frac{دع}{٣س^٢}$ = $\frac{١}{٣}\int$ س^٣ ع^٣ دع (ماذا تلاحظ؟)

= $\frac{١}{٣}\int$ (ع − ١) ع^٣ دع = $\frac{١}{٣}\int$ (ع^٤ − ع^٣) دع

= $\frac{١}{٣}\left(\frac{ع^٥}{٥} - \frac{ع^٤}{٤}\right)$ + جـ

عوّض قيمة ع واكتب الناتج بدلالة س

قاعدة:

$$\int \frac{ق\bar{}(س)}{ق(س)} دس = لـو_{هـ} |ق(س)| + جـ ، ق(س) \neq ٠$$

مثال ٧ : جد $\int \frac{قا^{٢}س}{(١ + ظاس)} دس$

الحل : لاحظ أن البسط يساوي مشتقة المقام

وباستخدام القاعدة السابقة يكون $\int \frac{قا^{٢}س}{(١ + ظاس)} دس = لـو_{هـ} |(١ + ظاس)| + جـ$

تمارين (٣-٤ أ)

١ جد التكاملات الآتية:

أ $\int \frac{٤}{(س + ٢)^{٥}} دس$

ب $\int (١ - س) جا(س^{٢} - ٢س) دس$

جـ $\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} دس$

د $\int (س + ٢)^{٢} (س - ١)^{٦} دس$

هـ $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{س} + هـ^{٢س}} دس$

و $\int \frac{١}{س^{٢}} جا \frac{١}{س} دس$

ثانياً: التكامل بالأجزاء: Integration by Parts

فكّر وناقش:

هل يمكن إيجاد $\int$ س جتاس دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟

أتعلم:

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ق × ع) = ق × $\frac{\text{دع}}{\text{د س}}$ + ع × $\frac{\text{د ق}}{\text{د س}}$ حيث ق ، ع اقترانات قابلة للاشتقاق.

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى س ينتج أن:

ق × ع = $\int$ ق دع + $\int$ ع دق ..... (لماذا؟)

ومنها $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

تسمى هذه النتيجة قاعدة التكامل بالأجزاء، وتستخدم لإيجاد تكامل بعض الاقترانات التي تكون على صورة حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقةً للآخر.

قاعدة:

قاعدة التكامل بالأجزاء: $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

مثال ١ : جد $\int$ س جتاس دس

الحل :

نفرض أن: ق = س   دع = جتاس دس

دق = دس   ع = جاس

وحسب القاعدة $\int$ ق دع = ق × ع − $\int$ ع دق

يكون $\int$ س جتاس دس = س جاس − $\int$ جاس دس = س جاس + جتاس + جـ

فكّر وناقش:

إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ع لا يغير من النتيجة.

مثال ٢ : جد $\int$ (س − ١)هـ^س دس

الحل : نفرض أن: ق = س − ١ دع = هـ^س دس

∴ دق = دس ع = هـ^س

إذن $\int$ (س − ١)هـ^س دس = (س − ١)هـ^س − $\int$ هـ^س دس

= (س − ١)هـ^س − هـ^س + جـ

نشاط: جد $\int$ هـ^√س دس

نبدأ بالتكامل بالتعويض

بفرض √س = ص فيكون دص = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ دس

ومنها ٢ص دص = دس

إذن $\int$ هـ^√س دس = ٢ $\int$ ص هـ^ص دص

= .... (أكمل مستخدماً التكامل بالأجزاء)

مثال ٣ : جد $\int \frac{س}{\sqrt{س + ٢}}$ دس

الحل : نفرض أن: ق = س دع = $\frac{١}{\sqrt{س + ٢}}$ دس

∴ دق = دس ع = ٢ $\sqrt{س + ٢}$

$\int \frac{س}{\sqrt{س + ٢}}$ دس = ٢س $\sqrt{س + ٢}$ − ٢ $\int \sqrt{(س + ٢)}$ دس

= ٢س $\sqrt{س + ٢}$ − $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt{(س + ٢)^٣}$ + جـ (لماذا؟)

فكّر وناقش:

أوجد $\int \frac{س}{\sqrt{س + ٢}}$ دس من المثال السابق باستخدام التكامل بالتعويض.

مثال ٤ : جد $\int$ هـ^{س} جاس دس

الحل :

نفرض أن: ق = جاس ، دع = هـ^{س} دس

∴ دق = جتاس دس ، ع = هـ^{س}

$\int$ هـ^{س} جاس دس = هـ^{س} جاس − $\int$ هـ^{س} جتاس دس

لاحظ أن: $\int$ هـ^{س} جتاس دس على نمط التكامل المطلوب نفسه.

نفرض أن: ق = جتاس ، دع = هـ^{س} دس

∴ دق = $^{-}$جاس دس ، ع = هـ^{س}

$\int$ هـ^{س} جتاس دس = هـ^{س} جتاس + $\int$ هـ^{س} جاس دس (ماذا تلاحظ)؟

بالتعويض عن $\int$ هـ^{س} جتاس دس في التكامل الأصلي، فيصبح:

$\int$ هـ^{س} جاس دس = هـ^{س} جاس − هـ^{س} جتاس − $\int$ هـ^{س} جاس دس + جـ

ومنها $\int$ هـ^{س} جاس دس = $\frac{١}{٢}$ (هـ^{س} جاس − هـ^{س} جتاس) + جـ ..... (لماذا؟)

تمارين ٣ − ٤ ب

جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int$ س لو$_{هـ}$ س دس

ب) $\int$ س قا^{٢}س دس

جـ) $\int$ س جا٢س دس

د) $\int$ هـ^{س} جاس جتاس دس

ورقة عمل (١)

١ إذا كان $\int$ ق(س) دس = أ س^{٣} + جـ س ، حيث ق(س) اقتران متصل،
وكان ق(−١) = ٤ ، قَ(٢) = ٢٤، فجد قيمة كلٍ من أ ، جـ .

٢ إذا كان $\int$ (قَ(س) + س^{٢}) دس = ٢س^{٣} + جـس^{٢} + ٢، وكان قَ(١) = ٤، ق(٢) = ٦، فجد ق(−١)

٣ قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ٤٥ متراً عن سطح الأرض، وكانت السرعة في اللحظة ن تساوي (−١٠ن + ٤٠)م/ ث، جد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى سطح الأرض.

٤ جد التكاملات الآتية:

أ $\int \sqrt{\dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٥}}}$ دس

ب $\int$ (جاس + قتاس)^{٢} دس

جـ $\int$ س^{٢}(س^{٧} + س^{٣})$^{\frac{١}{٣}}$ دس

د $\int$ لـوهـ (س + ٢)^{٣} دس

هـ $\int$ هـ$^{\text{س}}$ (قتاس − قتاس ظتاس) دس

تعريف:

إذا كانت [أ ، ب] فترة مغلقة، وكانت:

$\sigma_{ن}$ = {أ = $س_{.}$ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ... ، $س_{ن}$ = ب} حيث:

$س_{.} < س_{١} < س_{٢} < س_{٣} < ... < س_{ن}$ فإننا نسمي $\sigma_{ن}$ تجزئة نونية للفترة [أ ، ب]

وتسمى الفترة $[س_{ر-١} ، س_{ر}]$ الفترة الجزئية الرائية، وطولها $\Delta س_{ر} = س_{ر} - س_{ر-١}$

طول الفترة الكلية = مجموع أطوال جميع الفترات الجزئية

وبالرموز $\sum_{ر=١}^{ن} (س_{ر} - س_{ر-١})$ = ب - أ

نلاحظ من التعريف، أنه لكتابة أي تجزئة $\sigma_{ن}$ لفترة ما يجب أن تكون:

1. الفترة مغلقة.
2. تبدأ التجزئة من بداية الفترة، وتنتهي بنهايتها.
3. عناصر التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

مثال ١ : أي من الآتية يعتبر تجزئة للفترة [⁻١ ، ٣] .

١) $\sigma_{٤}$ = {⁻١ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢ ، ٣}

٢) $\sigma_{٤}$ = {٠ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢ ، ٣}

٣) $\sigma_{٤}$ = {⁻١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

٤) $\sigma_{٤}$ = {⁻١ ، ١ ، ٠ ، ٢ ، ٣}

الحل :

١) $\sigma_{٤}$ تعتبر تجزئة للفترة، لأن $س_{.}$ = ⁻١ ، $س_{٤}$ = ٣ وعناصرها مرتبة تصاعدياً

٢) $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة، لأن $س_{.} \neq$ ⁻١

٣) $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة، لأن ٤ $\notin$ [⁻١ ، ٣]

٤) $\sigma_{٤}$ ليست تجزئة للفترة [⁻١ ، ٣] لأن عناصرها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً

مثال ٢ : اكتب ٣ تجزئات خماسية للفترة [٢ ، ٧]

الحل :

$\sigma_{٥}$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

$\sigma_{٥}$ = {٢ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ٤ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ٦ ، ٧}

$\sigma_{٥}$ = {٢ ، $\frac{٧}{٣}$ ، ٣ ، $\frac{١١}{٢}$ ، ٦ ، ٧}

فكّر وناقش:

كم تجزئة خماسية للفترة [٢ ، ٧] يمكن تكوينها؟

مثال ٣ : إذا كانت $\sigma_{٣}$ = {⁻١ ، ٣ ، ٤ ، ٦} تجزئة ثلاثية للفترة [⁻١ ، ٦]

اكتب جميع الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ ، ثم احسب طول كل منها.

الحل : الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ هي: [⁻١ ، ٣]، [٣ ، ٤]، [٤ ، ٦]

وأطوالها على الترتيب ٤ ، ١ ، ٢

تلاحظ من المثال السابق أن:

عدد عناصر التجزئة $\sigma_{٣}$ = ٤ ، عدد الفترات الجزئية = ٣

مجموع أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٣}$ = ٤ + ١ + ٢ = ٧ = طول الفترة الكلية.

نشاط: إذا كانت $\sigma_{٤}$ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} تجزئة رباعية للفترة [٢ ، ١٠]

١ الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي [٢ ، ٤]، [٤ ، ٦]، [٦ ، ٨]، [٨ ، ١٠]

٢ العلاقة بين أطوال الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_{٤}$ هي: ....

٣ عدد الفترات الجزئية = ...

٤ عدد عناصر التجزئة = ...   (ماذا تلاحظ؟)

تعريف:

تسمى التجزئة $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [أ ، ب]، إذا كانت أطوال جميع الفترات الجزئية الناتجة عنها متساوية، ويكون طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{طول الفترة الكلية}}{\text{عدد الفترات الجزئية}} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

مثال ٤ : اكتب تجزئة خماسية منتظمة للفترة [⁻٢ ، ١٣]

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{13 - {}^{-}2}{5} = 3$

ومنها تكون σ_{5} = {⁻٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣}

فكّر وناقش:

هل هناك تجزئات خماسية منتظمة أخرى للفترة [⁻٢ ، ١٣]؟

مثال ٥ : إذا كانت $\sigma_{\text{م}}$ تجزئة منتظمة للفترة [٥ ، ب] وكان طول الفترة الجزئية = $\frac{1}{3}$، جد قيمة ب

الحل : طول الفترة الجزئية = $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \frac{1}{3}$

ومنها $\frac{\text{ب} - 5}{6} = \frac{1}{3}$ فيكون ٣ب − ١٥ = ٦ وينتج أن ب = ٧

لإيجاد قيمة أي عنصر في التجزئة المنتظمة $\sigma_{\text{ن}}$

يكون العنصر الأول س_{0} = أ

العنصر الثاني $\text{س}_{1} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

والعنصر الثالث $\text{س}_{2} = \text{س}_{1} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} = \text{أ} + 2\left(\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\right)$ ..... (لماذا؟)

⋮

العنصر الرائي $\text{س}_{\text{ر}-1} = \text{أ} + (\text{ر} - 1)\,\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

وبشكل عام، فإن: $س_ر = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، ن

وتكون الفترة الجزئية الرائية هي $[س_{ر-١} ، س_ر]$

مثال ٦ : لتكن $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة $[^-١ ، ١٩]$، فجد كلاً من:

١ $س_٢$ ، $س_٩$ ٢ العنصر الثامن   ٣ الفترة الجزئية الخامسة

الحل :

١ $س_ر = أ + \frac{ب - أ}{ن} \times ر$ ومنها $س_٢ = {}^-١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٢ = \frac{٧}{٣}$

$س_٩ = {}^-١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٩ = ١٤$

٢ العنصر الثامن $س_٧ = {}^-١ + \frac{١٩ + ١}{١٢} \times ٧ = \frac{٣٢}{٣}$

٣ الفترة الجزئية الخامسة = $[س_٤ ، س_٥] = [\frac{١٧}{٣} ، \frac{٢٢}{٣}]$ (تحقق من ذلك)

تعريف:

إذا كان ق(س) اقتراناً معرفًا في الفترة [أ ، ب]، وكانت $\sigma_ن$ تجزئةً نونيةً للفترة [أ ، ب]،

فإن المقدار $\sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_ر)\ (س_ر - س_{ر-١})$ حيث $س^*_ر \in [س_{ر-١} ، س_ر]$

يسمى مجموع ريمان، ويرمز له بالرمز $م(\sigma_ن ، ق)$

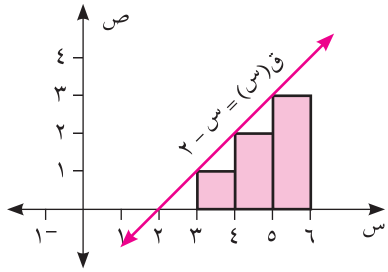
وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن $م(\sigma_ن ، ق) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س^*_ر)$

مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س − ٢ ، وكانت $\sigma_٣ = \{٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$ تجزئةً ثلاثية للفترة [٣ ، ٦]، فاحسب $م(\sigma_٣ ، ق)$ معتبراً $س^*_ر = س_{ر-١}$

الحل : نكوّن الجدول الآتي:

الفترات الجزئية	$س_ر - س_{ر-١}$	$س^*_ر$	$ق(س^*_ر)$	$ق(س^*_ر) \times (س_ر - س_{ر-١})$
[٣ ، ٤]	١	٣	١	١
[٤ ، ٥]	١	٤	٢	٢
[٥ ، ٦]	١	٥	٣	٣
المجموع				٦

أي أن $م(\sigma_٣ ، ق) = \sum_{ر = ١} ق(س_ر^*) (س_ر - س_{ر-١}) = ٦$



لاحظ من الشكل المجاور أن مجموع مساحات المستطيلات

تساوي $م(\sigma_٣ ، ق) = ٦$

مثال ٨ : إذا كان $ق(س) = س^٢ - ٢س$ ، وكانت $\sigma_٤$ تجزئةً رباعيةً منتظمةً للفترة $[-٣ ، ٥]$، فاحسب $م(\sigma_٤ ، ق)$ حيث $س_ر^* = س_{ر-١}$

الحل : بما أن التجزئة منتظمة فإن: طول الفترة الجزئية $= \frac{٨}{٤} = ٢$ ،

وتصبح $\sigma_٤ = \{-٣ ، -١ ، ١ ، ٣ ، ٥\}$

الفترات الجزئية الناتجة عن $\sigma_٤$ هي:

$[-٣ ، -١]$، $[-١ ، ١]$، $[١ ، ٣]$، $[٣ ، ٥]$

$س_ر^*$ المناظرة $= -٣ ، -١ ، ١ ، ٣$ (لماذا؟)

$$م(\sigma_ن ، ق) = \sum_{ر = ١}^{ن} ق(س_ر^*) (س_ر - س_{ر-١}) = \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر = ١}^{ن} ق(س_ر^*) \text{ (لماذا؟)}$$

$$م(\sigma_٤ ، ق) = ٢ \sum_{ر = ١}^{٤} ق(س_ر^*) = ٢(ق(-٣) + ق(-١) + ق(١) + ق(٣))$$

$$= ٢(١٥ + ٣ + -١ + ٣) = ٤٠$$

تمارين ٣ – ٥

١) إذا كانت $\sigma_٦$ تجزئةً منتظمةً للفترة $[-١ ، ٢]$، فجد:

أ) العنصر الثالث في التجزئة ب) الفترة الجزئية الرابعة

٢) إذا كان العنصر الخامس في التجزئة المنتظمة $\sigma_{١٠}$ للفترة $[جـ ، ٧]$ يساوي ٤، جد قيمة جـ.

٣) إذا كان $ق(س) = ٦ - س^٢$ معرفاً في الفترة $[١ ، ٥]$ ، وكانت $\sigma_٤$ تجزئةً منتظمةً للفترة نفسها،

فجد $م(\sigma_٤ ، ق)$ معتبرًا $س_ر^* = س_ر$

٤) إذا كان $ق(س) = \frac{أ س}{س + ٢}$ معرفاً على $[-١ ، ٨]$، وكانت $\sigma_٥ = \{-١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨\}$ تجزئة

مثال ١ : *إذا كان ق(س) = ٢س + ٣ معرفاً في الفترة [٢ ، ٦]،
ولتكن $\sigma_{\text{ن}}$ تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة نفسها
فاحسب م($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق) معتبرًا $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$

الحل :

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{ ، ق}) = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}^*_{\text{ر}})$$

لكن $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}} = \text{أ} + \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}\,\text{ر}$

فيكون $\text{س}_{\text{ر}} = ٢ + \frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر}$

$$\text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{ ، ق}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ق}(٢ + \frac{٤}{\text{ن}}\,\text{ر})$$

$$= \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٧ + \frac{٨}{\text{ن}}\,\text{ر}) = \frac{٤}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} ٧ + \frac{٤}{\text{ن}} \times \frac{٨}{\text{ن}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر}$$

$$= \frac{٤}{\text{ن}} \times ٧\text{ن} + \frac{٣٢}{\text{ن}^٢} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}$$ وبعد التبسيط

يكون $\text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{ ، ق}) = ٤٤ + \frac{١٦}{\text{ن}}$

أتذكر

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}} \pm \text{ع}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}}) \pm \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ع}_{\text{ر}})$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ}(\text{ك}_{\text{ر}}) = \text{أ} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (\text{ك}_{\text{ر}})$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{أ} = \text{أن}$$

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}$$

تعريف التكامل المحدود:

إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً ومحدوداً* في الفترة [أ ، ب]،

وكانت $\lim_{\text{ن} \to \infty} \text{م}(\sigma_{\text{ن}}\text{ ، ق}) = \text{ل}$ لجميع قيم $\text{س}^*_{\text{ر}} \in [\text{س}_{\text{ر}-١} \text{ ، س}_{\text{ر}}]$ فإن الاقتران ق(س)

يكون قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]، ويكون $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{ل}$

(نسمي أ ، ب حدود التكامل)

مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥ − ٤س حيث س ∈[٠ ، ٣]، معتبراً $\text{س}^*_{\text{ر}} = \text{س}_{\text{ر}}$ ، احسب $\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$
باستخدام تعريف التكامل المحدود .

* سوف نقتصر دراستنا في إيجاد م($\sigma_{\text{ن}}$ ، ق) (ن غير محددة) على اقترانات كثيرة حدود من الدرجة الأولى على الأكثر.

الحل :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر^*)$$

إذن $$\int_{\cdot}^{3} ق(س)\,دس = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{3 - \cdot}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ق(س_ر)$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{3}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} \left(5 - 4\left(\frac{3}{ن} ر\right)\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{3}{ن} \left(\sum_{ر=1}^{ن} 5 - \frac{12}{ن} \sum_{ر=1}^{ن} ر\right) \quad \text{(لماذا؟)}$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{3}{ن} \left(5ن - \frac{12}{ن} \times \frac{ن(ن + 1)}{2}\right)$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{3}{ن} (^-ن - 6)$$

$$= \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \left(^-3 - \frac{18}{ن}\right) = {}^-3$$

أتذكر:

إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً، فإن $\underset{س \leftarrow \pm\infty}{نهـــا}$ ق(س) =

- عدداً حقيقياً $\neq$ ٠، إذا كانت درجة البسط = درجة المقام،
وتكون قيمة النهاية = معامل $س^ن$ في البسط ÷ معامل $س^ن$ في المقام حيث ن أعلى أس في البسط والمقام.
- صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.
- إما ∞ ، أو $-\infty$ ، إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

مثال ٣ : إذا علمت أن $\int_{^-1}^{4} ق(س)\,دس = 9$ ، وكان م$(\sigma_ن ، ق) = \frac{(ن + 1)(2أن + 1)}{ن^2}$

حيث $\sigma_ن$ تجزئة نونية منتظمة للفترة [$^-1$ ، ٤]، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

$$\int_{^-1}^{4} ق(س)\,دس = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} م(\sigma_ن ، ق)$$

إذن $$\int_{^-1}^{4} ق(س)\,دس = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـــا} \frac{(ن + 1)(2أن + 1)}{ن^2} = 9$$

ومنها يكون ٢أ = ٩ ومنها أ = $\frac{9}{2}$ ..... (لماذا؟)

تمارين ٣ - ٦

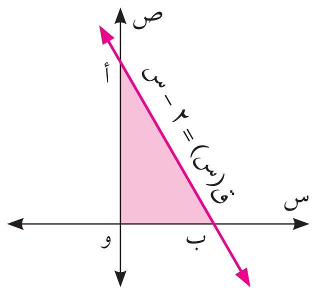
١ إذا كان ق(س) = ٢ − ٥س، وكانت σ ن تجزئةً نونيةً منتظمةً للفترة [$^-$١ ، ٣]، فاحسب م(σ ن ، ق) معتبرًا س$_{ر}^{*}$ = س ر

٢ استخدم تعريف التكامل المحدود في إيجاد قيمة كل من:

أ $\int_{-1}^{4} \frac{1}{2}$ دس

ب $\int_{1}^{2}$ (٤ − ٦س) دس

نشاط ١ : الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ − س،
والمار بالنقطتين أ ، ب



١ مساحة المثلث أ و ب = ...

٢ إذا كان م(س) هو الاقتران الأصلي للاقتران ق(س)

فإن م(س) = $\int$ (٢ − س) دس = ٢س − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

٣ قيمة م(٢) − م(٠) = ... ماذا تلاحظ؟

تعريف:

إذا كان م(س) هو أحد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [أ ، ب]،
فإن المقدار م(ب) − م(أ) يساوي التكامل المحدود للاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب]

ونرمز له بالرمز $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

١ إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وكان م(س) اقتراناً أصلياً للاقتران
ق(س) فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = م(س) $\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ = م(ب) − م(أ)

٢ أ إذا كان الاقتران ق(س) قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

فإن ت(س) = $\int_{\text{أ}}^{\text{س}}$ ق(ص) دص لجميع قيم س ∈ [أ ، ب]

ويسمى ت(س) الاقتران المكامل للاقتران ق(س).

ب إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، فإن تَ(س) = ق(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

مثال ١ : جد قيمة كل مما يأتي:

١ $\int_{-2}^{3} (٤س^{3} - ١)$ دس

٢ $\int_{4}^{9} ٣\sqrt{س}$ دس

٣ $\int_{1}^{2}$ هـ^{س} دس

الحل :

١ ق(س) = ٤س^{3} - ١ متصل على ح ، م(س) = س^{4} - س اقتران أصلي للاقتران ق(س)

إذن $\int_{-2}^{3} (٤س^{3} - ١)$ دس = م(س)$\Big|_{-2}^{3}$ = (س^{4} - س)$\Big|_{-2}^{3}$

= [(٣)^{4} - (٣)] - [(-٢)^{4} - (-٢)] = ٦٠

٢ لاحظ أن أحد الاقترانات الأصلية للاقتران ٣$\sqrt{س}$ هو ٢س$^{\frac{3}{2}}$

$\int_{4}^{9} ٣\sqrt{س}$ دس = $\int_{4}^{9}$ ٣س$^{\frac{1}{2}}$ دس = ٢س$^{\frac{3}{2}}\Big|_{4}^{9}$ = ... (أكمل)

٣ $\int_{1}^{2}$ هـ^{س} دس = هـ$^{س}\Big|_{1}^{2}$ = هـ^{2} - هـ (لماذا؟)

مثال ٢ : إذا كان م(س) اقتران أصلي للاقتران ق(س)

وكانت م(-٣) = ٤ ، م(٧) = ١٢، فجد $\int_{-3}^{7}$ ق(س) دس

الحل : $\int_{-3}^{7}$ ق(س) دس = م(س)$\Big|_{-3}^{7}$

= م(٧) - م(-٣) = ٨

مثال ٣ : إذا كان ق(س) = ٤س^{٣} معرفاً في الفترة [$^{-}$٢ ، ٤]، فجد ت(س)، ثم احسب ت($^{-}$٢) ، ت(١)

الحل : ت(س) = $\int_{أ}^{س}$ ق(ص) دص

= $\int_{-٢}^{س}$ ق(ص) دص

= $\int_{-٢}^{س}$ ٤ص^{٣} دص = ص^{٤} $\Big|_{-٢}^{س}$

= س^{٤} − ١٦

ومنها ت($^{-}$٢) = ١٦ − ١٦ = ٠ ، ت(١) = ١ − ١٦ = $^{-}$١٥

فكّر وناقش:

كيف يمكنك إيجاد ت(١) دون إيجاد ت(س)؟

مثال ٤ : إذا كان ق(س) = س^{٢} + جا٢س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، فجد:

١ الاقتران المكامل ت(س)   ٢ ت(٠)   ٣ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ ق(س) دس

الحل :

١ ت(س) = $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) دص = $\int_{٠}^{س}$ (ص^{٢} + جا٢ص) دص

= $\frac{س^{٣}}{٣}$ − $\frac{جتا٢س}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ (لماذا؟)

٢ ت(٠) = $\frac{(٠)^{٣}}{٣}$ − $\frac{جتا٢(٠)}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ٠

٣ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ ق(س) دس = ت($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{\pi^{٣}}{١٩٢}$ + $\frac{١}{٢}$ (لماذا؟)

سوف نقدم الاقتران المكامل لاقتران متعدد القاعدة في الدرس التالي:

نظرية:

إذا كان ت(س) هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س) المعرف في الفترة [أ ، ب] فإن:

١ ت(س) اقتران متصل دائماً في الفترة [أ ، ب].

٢ ت(أ) = ٠

تمارين ٣ - ٧

١ جد قيم التكاملات المحدودة الآتية:

أ $\int_{٠}^{٤} (٣ + \sqrt{\text{س}})^{٢}\, \text{دس}$

ب $\int_{١}^{٢} \text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}\, \text{دس}$

جـ $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}\, \text{دس}$

د $\int_{٠}^{٢} ١٢٠\text{س}^{٢}(\text{س} - ١)^{٣}\, \text{دس}$

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ ، س ∈ [٠ ، ٤] ، أوجد ت(س)

٣ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢\text{س}^{٢} + \text{أ} & ، \; -٢ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{ب س} + ١ & ، \; ٣ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل للاقتران ق(س)

في الفترة [−٢ ، ٥] ، فجد قيم الثابتين أ ، ب .

٤ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً، وكان $\int_{\frac{١}{٢}}^{\text{س}} \text{ق(ص) دص} = \text{س} + \text{جا}\, \pi\, \text{س} + \text{جـ}$

فجد قيمة الثابت جـ، ثم ق(٢) حيث س ≥ $\frac{١}{٢}$

للتكامل المحدود خصائص مهمة تسهل حساب قيمته، ومنها:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] فإن:

١ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس = $-\int_{ب}^{أ}$ ق(س) دس

٢ $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) دس = ٠

٣ $\int_{أ}^{ب}$ ك دس = ك (ب - أ) حيث ك $\in$ ح

٤ $\int_{أ}^{ب}$ ك ق(س) دس = ك $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس حيث ك $\in$ ح

٥ $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) ± هـ(س)) دس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس (يمكن تعميمها على أكثر من اقترانين)

مثال ١ : جد قيمة ما يأتي:

١ $\int_{-٤}^{٦}$ دس ٢ $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}}$ -٣ جاس دس ٣ $\int_{١}^{٢}$ $\frac{٣س^{٤} - ٧س^{٢} + ٥}{س^{٢}}$ دس

الحل :

١ $\int_{-٤}^{٦}$ دس = (٦ - (-٤)) = ١٠

٢ $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٣}}$ -٣ جاس دس = ٠ (لماذا؟)

٣ $\int_{١}^{٢}$ $\frac{٣س^{٤} - ٧س^{٢} + ٥}{س^{٢}}$ دس = $\int_{١}^{٢} \left(\frac{٣س^{٤}}{س^{٢}} - \frac{٧س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٢}}\right)$ دس

$\int_{١}^{٢}$ (٣س^{٢} - ٧ + ٥س$^{-٢}$) دس = $\left.\left(س^{٣} - ٧س - \frac{٥}{س}\right)\right|_{١}^{٢}$ = ... (أكمل)

مثال ٢ : إذا كان $\int_{١+٣أ}^{٢+٥أ} ٤ \, دس = ٣٦$ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل : حسب الخاصية (٣) يكون $\int_{١+٣أ}^{٢+٥أ} ٤ \, دس = ٤((٢ + ٥أ) - (٣أ + ١)) = ٣٦$

أي أن ٨أ + ٤ = ٣٦ ومنها أ = ٤

مثال ٣ : إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان $\int_{٣}^{٦} ق(س) \, دس = ١٠$ ، فجد:

١ $\int_{٣}^{٣} ق(س) \, دس$ ٢ $\int_{٦}^{٣} ق(س) \, دس$

الحل :

١ $\int_{٣}^{٣} ق(س) \, دس = ٠$

٢ $\int_{٦}^{٣} ق(س) \, دس = - \int_{٣}^{٦} ق(س) \, دس = ^{-}١٠$

نظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكان ق(س) $\geq$ ٠

لكل س $\in$[أ ، ب] فإن: $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, دس \geq ٠$

مثال ٤ : بدون حساب التكامل بيّن أن: $\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢} + ٤} \, دس \geq ٠$

الحل : نبحث في إشارة المقدار $\frac{٣س}{س^{٢} + ٤}$ في الفترة [٠ ، ٥]، وبما أن ٣س $\geq$ ٠ ، $\forall$ س $\in$[٠ ، ٥]

وكذلك $س^{٢} + ٤ > ٠$ ، $\forall$ س $\in$[٠ ، ٥]

إذن $\frac{٣س}{س^{٢} + ٤} \geq ٠$ $\forall$ س $\in$[٠ ، ٥] ومنها $\int_{٠}^{٥} \frac{٣س}{س^{٢} + ٤} \, دس \geq ٠$

خاصية المقارنة:

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في الفترة [أ ، ب]،

وكان ق(س) $\le$ هـ(س) لكل س $\in$ [أ ، ب]، فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس $\le$ $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

مثال ٥ : بدون إجراء عملية التكامل بيّن أن: $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} − ١) دس $\le$ $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ٢) دس

الحل : نفرض أن ق(س) = (س^{٢} − ١) − (٢س + ٢) = س^{٢} − ٢س − ٣

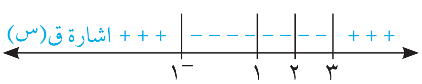
نبحث في إشارة الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

فنلاحظ أن ق(س) $\le$ ٠ في الفترة [١ ، ٢]،

أي أن س^{٢} − ٢س − ٣ $\le$ ٠ (انظر الشكل المجاور)

وبالتالي يكون (س^{٢} − ١) $\le$ (٢س + ٢) في الفترة [١ ، ٢]

أي أن $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} − ١) دس $\le$ $\int_{١}^{٢}$ (٢س + ٢) دس



مثال ٦ : إذا كان ق(س) $\le$ ٤ لجميع قيم س $\in$ [١ ، ٣]، فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس؟

الحل : بما أن ق(س) $\le$ ٤ لجميع قيم س $\in$ [١ ، ٣]،

فإن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس $\le$ $\int_{١}^{٣}$ ٤ دس

أي أن: $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس $\le$ ٨

إذن المقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس = ٥ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس $\le$ ٥ × ٨

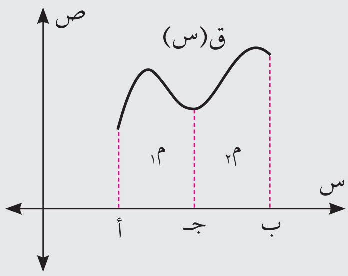
أكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ ٥ق(س) دس هي ٤٠.

خاصية الإضافة:

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة ف $\subseteq$ ح

وكان أ ، ب ، جـ أي ثلاثة أعداد تنتمي للفترة ف فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\, دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\, دس$$



مثال ٧ : عبّر بتكامل واحد عما يأتي: $\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس + \int_{4}^{9} ق(س)\, دس$

الحل : $\int_{-1}^{4} ق(س)\, دس + \int_{4}^{9} ق(س)\, دس = \int_{-1}^{9} ق(س)\, دس$

مثال ٨ : إذا كان $\int_{2}^{6} ق(س)\, دس = 3$ ، وكان $\int_{8}^{6} ق(س)\, دس = -5$ ، فجد $\int_{2}^{8} 2ق(س)\, دس$

الحل : $\int_{2}^{8} ق(س)\, دس = \int_{2}^{6} ق(س)\, دس + \int_{6}^{8} ق(س)\, دس$

$= \int_{2}^{6} ق(س)\, دس - \int_{8}^{6} ق(س)\, دس = 3 - (-5) = 8$

أي أن $\int_{2}^{8} 2ق(س)\, دس = 2 \int_{2}^{8} ق(س)\, دس = 16$

مثال ٩ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} 3س^2 & ، \quad -1 \leq س \leq 2 \\ 4س + 2 & ، \quad 2 < س \leq 4 \end{cases}$ ، فجد الاقتران المكامل ت(س)

الحل :

١ عندما $-1 \leq س \leq 2$ فإن ت(س) = $\int_{-1}^{س} ق(ص)\, دص = \int_{-1}^{س} 3ص^2\, دص = س^3 + 1$

٢ عندما $2 < س \leq 4$ فإن:

ت(س) = $\int_{-1}^{س} ق(ص)\, دص = \int_{-1}^{2} ق(س)\, دس + \int_{2}^{س} ق(ص)\, دص$

$= 9 + \int_{2}^{س} (4ص + 2)\, دص = 2س^2 + 2س - 3$ (لماذا؟)

ومنها $ت(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & ، \ ^{-}١ \le س \le ٢ \\ ٢س^{٢} + ٢س - ٣ & ، \ ٢ < س \le ٤ \end{cases}$

لاحظ أن ت(س) متصل ، $ت(^{-}١) = ٠$

نشاط : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} - ٧ & ، \ س > ٢ \\ ٢س & ، \ س \le ٢ \end{cases}$ ،

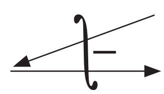
فإن $\int_{^{-}٢}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{^{-}٢}^{٢} ٢س\,دس + \int_{٢}^{٣} (........)\,دس$

$= س^{٢} \Big|_{^{-}٢}^{٢} + س^{٣} - ٧س \Big|_{٢}^{٣} = صفر + ...$

(لماذا؟)

مثال ١٠: إذا كان $\int_{٠}^{٢} س\,ق(س)\,دس = ٨$ ، $ق(٢) = ٥$ ، فجد $\int_{٠}^{٢} س^{٢}\,قَ(س)\,دس$

الحل : نفرض أن: $م = س^{٢}$ ، $دم = ٢س\,دس$



$دع = قَ(س)\,دس$ ، $ع = ق(س)$

ومنها ينتج أن: $\int س^{٢}\,قَ(س)\,دس = س^{٢}\,ق(س) - \int ٢س\,ق(س)\,دس$

$\int_{٠}^{٢} س^{٢}\,قَ(س)\,دس = س^{٢}\,ق(س) \Big|_{٠}^{٢} - ٢ \int_{٠}^{٢} س\,ق(س)\,دس$

$= (٤ \times ق(٢) - ٠ \times ق(٠)) - ٢ \times ٨$

$= ٢٠ - ١٦ = ٤$

١ جد قيمة التكاملات الآتية:

أ $\int_{٠}^{\pi} \text{جا}^{٢}\text{س دس}$

ب $\int_{٠}^{٢} (١ + \text{هـ}^{\text{س}})^{٢} \text{ دس}$

جـ $\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} + ٤) \text{ دس}$

د $\int_{-٢}^{١} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩} \text{ دس}$

٢ أثبت بدون حساب قيمة التكامل فيما يأتي:

أ $\int_{١}^{٢} (\text{س}^{٢} + ٢) \text{ دس} \geq \int_{١}^{٢} (٢\text{س} - ١) \text{ دس}$

ب $\int_{٢}^{٣} (\text{س}^{٢} + ٢) \text{ دس} \geq ٠$

٣ عبّر عن كل مما يأتي بتكامل واحد:

أ $\int_{٥}^{٧} \text{س}^{٣} \text{ دس} + \int_{١}^{٥} \text{س}^{٣} \text{ دس}$

ب $\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س} + ٢} \text{ دس} - \int_{٤}^{٢} \sqrt{\text{س} + ٢} \text{ دس}$

جـ $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٢} \text{ دس} - \int_{٣}^{١} ٤ \text{ دس} + \int_{٣}^{٥} (\text{س}^{٢} + ٤) \text{ دس}$

د $\int_{٢}^{٥} (\text{س} - ١) \text{ دس} + \int_{٧}^{٥} \frac{١ - \text{س}^{٢}}{\text{س} + ١} \text{ دس}$

٥ إذا كان $\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} = ٨$ فما قيمة؟

أ $\int_{١}^{٥} (٣\text{ق(س)} - ٢) \text{ دس}$

ب $\int_{٣}^{٧} (٤\text{ق(س} - ٢) - ٢\text{س}) \text{ دس}$

٦ إذا كان $\int_{٢}^{٧} ٣\text{ق(س) دس} = ٩$ ، وكان $\int_{٢}^{٤} ٥\text{ق(س) دس} = ١٠$ ، فما قيمة $\int_{٤}^{٧} ٢\text{ق(س) دس}$ ؟

المساحة (Area)

الحالة الأولى: مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

نظرية (١):

إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة : $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}| \, \text{دس}$

مثال ١ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س + ١ ومحور السينات والمستقيمين س = ٢ ، س = ٣

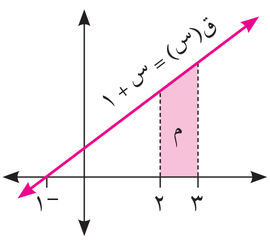
الحل : نجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق(س) مع محور السينات

وذلك بوضع س + ١ = ٠ ومنها س = $^-$١ $\notin$ [٢ ، ٣]

س + ١ > ٠ ، $\forall$ س $\in$ [٢ ، ٣]

$$\text{م} = \int_{٢}^{٣} |\text{ق(س)}| \, \text{دس} = \int_{٢}^{٣} |\text{س} + ١| \, \text{دس} = \left| \frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{س} \right|_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{٣^٢ - ٢^٢}{٢} + ١(٣ - ٢) = \frac{٧}{٢} \text{ وحدة مربعة.}$$



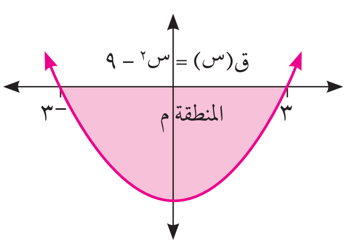
مثال ٢ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^٢ - ٩ ومحور السينات

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنى الاقتران ومحور السينات

بوضع س^٢ - ٩ = ٠ ومنها س = ±٣

$$\text{م} = \int_{-٣}^{٣} |\text{ق(س)}| \, \text{دس} = \int_{-٣}^{٣} |(\text{س}^٢ - ٩)| \, \text{دس}$$

$$= \left| \left(\frac{\text{س}^٣}{٣} - ٩\text{س} \right) \right|_{-٣}^{٣} = \left| \frac{-١٠٨}{٣} \right| = \frac{١٠٨}{٣} = ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$



الحالة الثانية: مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين، أو أكثر:

نظرية (٢):

إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) ، هـ(س) في [أ ، ب] تعطى بالعلاقة :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س) - هـ(س)|\ دس$$

مثال ٣ : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٨ − س^٢ ، هـ(س) = س^٢

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)

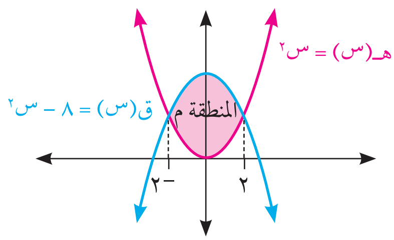
بوضع ق(س) = هـ(س) فتكون ق(س) − هـ(س) = ٠

أي أن ٨ − ٢س^٢ = ٠ ومنها س = ±٢

$$م = \int_{-٢}^{٢} |ق(س) - هـ(س)|\ دس$$

$$م = \int_{-٢}^{٢} |(٨ - ٢س^٢)|\ دس$$

$$= \left| (٨س - \frac{٢}{٣}س^٣) \Big|_{-٢}^{٢} \right| = \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$



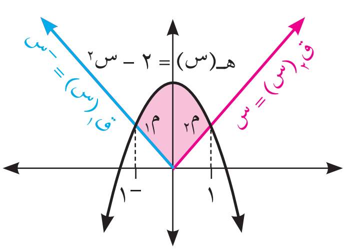
مثال ٤ : احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = |س| ، هـ(س) = ٢ − س^٢

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) بوضع ق(س) = هـ(س)

$$لكن\ ق(س) = \begin{cases} -س & ،\ س \leq ٠ \\ س & ،\ س > ٠ \end{cases}$$

عندما س ≤ ٠ ، ٢ − س^٢ = −س ومنها س = −١ (لماذا؟)

عندما س > ٠ ، ٢ − س^٢ = س ومنها س = ١ (لماذا؟)



$$\text{م} = \int_{-١}^{١} \left|\text{هـ(س)} - \text{ق(س)}\right| \text{دس} = \text{م}_١ + \text{م}_٢$$

$$\text{م}_١ = \int_{-١}^{٠} \left|(٢ - \text{س}^٢) - (-\text{س})\right| \text{دس}$$

$$= \int_{-١}^{٠} \left|(٢ - \text{س}^٢ + \text{س})\right| \text{دس} = \left|\left(٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^٣ + \frac{١}{٢}\text{س}^٢\right)\Big|_{-١}^{٠}\right| = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

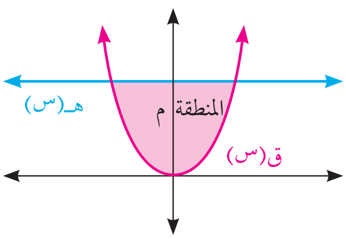
$$\text{م}_٢ = \int_{٠}^{١} \left|(٢ - \text{س}^٢ - \text{س})\right| \text{دس} = \left|\left(٢\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢\right)\Big|_{٠}^{١}\right| = \frac{٧}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{م} = \text{م}_١ + \text{م}_٢ = \frac{٧}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

نلاحظ أن: $\text{م}_١ = \text{م}_٢$ ، وبالتالي $\text{م} = ٢ \times \text{م}_١ = ٢ \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧}{٣}$

مثال ٥ : إذا علمت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $\text{ق(س)} = \text{س}^٢$ ، $\text{هـ(س)} = \text{جـ}$
، $\text{جـ} \in \text{ح}$ هي ٣٦ وحدة مربعة ، فجد قيمة/ قيم جـ .

الحل : نجد نقاط التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س)،



بوضع ق(س) = هـ(س)

ومنها $\text{س}^٢ - \text{جـ} = ٠$ أي أن $\text{س} = \pm\sqrt{\text{جـ}}$

$$\text{م} = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} \left|\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}\right| \text{دس} \quad \text{أي أن:}$$

$$٣٦ = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} (\text{هـ(س)} - \text{ق(س)}) \text{دس} \quad \text{ومنها} \quad ٣٦ = \int_{-\sqrt{\text{جـ}}}^{\sqrt{\text{جـ}}} (\text{جـ} - \text{س}^٢) \text{دس}$$

$$٣٦ = \text{جـ}\left(\sqrt{\text{جـ}} + \sqrt{\text{جـ}}\right) - \frac{\left(\sqrt{\text{جـ}}\right)^٣ - \left(-\sqrt{\text{جـ}}\right)^٣}{٣}$$

ينتج $٣٦ = \frac{٤\text{جـ}\sqrt{\text{جـ}}}{٣}$ ومنها جـ = ٩

تمارين ٣ – ٩

١ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس ومحوري السينات والصادات والواقعة في الربع الأول.

٢ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٣ – س^{٢} والمستقيم المار بالنقطتين أ(٠ ، ٠) ، ب(١ ، ٢) ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول.

٣ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = (س^{٢} – ٩) (س^{٢} – ١) ومحور السينات الواقعة في الربع الثالث.

٤ احسب المساحة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٤ ، ك(س) = ٢س

ورقة عمل (٢)

١ إذا كانت $\sigma_{٨}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الثالث فيها يساوي ٢ ، وكانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب] والعنصر الخامس فيها يساوي ٤ ، جد قيم أ ، ب.

٢ إذا كان ق(س) = ٢س معرفاً في الفترة [١ ، ب]، وكان م($\sigma_{ن}$ ، ق) = ٣٥ + $\frac{٢٥}{ن}$ ، فما قيمة الثابت ب ؟

٣ إذا كان ت(س) = $\int_{١}^{س}$ (أ + هـ^{ص}) دص وكان تَ(٢) = ١$^{-}$ ، احسب قيمة أ .

٤ إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أ س + ١ ، & ١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س^{٢} ، & ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$ ،فجد قيمة الثابت أ علماً بأن $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ١٨

٥ إذا كان ق(س) = |٢ – س| ، س ∈ [٠ ، ٥] ، أوجد الاقتران المكامل ت(س).

٦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} والمماس المرسوم له عند النقطة (٤ ، ٤) ومحور السينات.

٧ إذا كان ك(٣) = ٣ك(١) = ٦ ، فما قيمة $\int_{١}^{٣} \frac{س كَ(س) – ك(س)}{س^{٢}}$ دس ؟

اختبار الوحدة:

١ اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين أصليين مختلفين للاقتران ق(س)،

فماذا يمثل $\int$ (م(س) – هـ(س)) دس ؟

أ) اقتراناً ثابتاً ب) اقتراناً تربيعياً ج) اقترانا خطّياً د) صفراً

٢ إذا كان ق(س) = $\int$ (٣س^{٢} – ٢) دس ، وكان ق(٢) = ٩، فما قيمة ق(–٢)؟

أ) –١ ب) –٩ ج) ٤ د) ١

٣ ما قيمة $\int$ قتا^{٤}س ظتاس دس؟

أ) $\frac{-١}{٥}$ قتا^{٥}س + جـ ب) $\frac{-١}{٤}$ قتا^{٤}س + جـ

ج) $\frac{-١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ د) $\frac{١}{٣}$ قتا^{٣}س + جـ

٤ إذا كانت $\sigma_{١٠}$ ={أ ، ١ ، ..... ، ١٧ ، ب} تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، فما قيمة أ ؟

أ) صفر ب) –١ ج) –٢ د) –٣

٥ إذا كان ق(س) = ٢س + ١ معرفاً في الفترة [١ ، ٢] وكانت $\sigma_{ن}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [١ ، ٢] فما قيمة $\lim_{ن \leftarrow \infty}$ م($\sigma_{ن}$ ، ق)؟

أ) ١ ب) ٢ ج) ٤ د) غير موجودة

٦ إذا كان $\int_{٢}^{٣}$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{٢}^{٧}$ (٤ + ق(س)) دس = ٣٠ ، فما قيمة $\int_{٣}^{٧}$ ٢ق(س)) دس؟

أ) ٨ ب) ١٦ ج) ٦٠ د) ١٢

٧ ما قيمة $\int_{١}^{٢}$ $\sqrt{س^{٢} – ٢س + ١}$ دس؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٢}$ د) ١

٨ إذا كان ق(س) كثير حدود بحيث قَ(س) = ٣س − ٢، فما قيمة ق(٣) − ق(⁻١)؟

أ) ٠ ب) ٢ ج) ٤ د) ٨

٩ إذا كان ق(س) = س لــوهـ س ، فما قيمة $\int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{هـ}{٢}}$ قً(س) دس؟

أ) ⁻١ ب) ٠ ج) ١ د) هـ

أجب عن الأسئلة الآتية :

٢ أثبت أن: الاقتران م(س) = $\sqrt{١ - س^{٢}}$ هو اقتران أصلي للاقتران ق(س) = $\frac{-س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٣ إذا كانت قً(س) = س^{٢} + ٣جاس ، قَ(٠) = ٣ ، ق(٠) = ٢ ، فجد ق(س).

٤ جد كلاً من التكاملات الآتية:

١ $\int$ س $\sqrt{س^{٢} - ٣}$ دس

٢ $\int \frac{١}{س^{١٠} + س}$ دس

٣ $\int$ قا(٣س + ١) ظا(٣س + ١) دس

٤ $\int$ لــوهـ(س^{٢} − ١) دس

٥ $\int \frac{س^{٢} + ١}{س^{٣} + س}$ دس

٦ $\int$ (جتا^{٤}س − جا^{٤}س) دس

٧ $\int$ (قتاس + ظتاس)^{٨} قتاس دس

٨ $\int$ (س^{٨} − ٦س)^{٦} دس

٩ $\int_{١}^{٢}$ ٥٦(س − ٢)^{٢}(س − ١)^{٥} دس

١٠ $\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ لــوهـ س دس

١١ $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤} + س^{٢}}$ دس

٥ إذا كانت $\sigma_{١٢}$ تجزئةً منتظمةً للفترة [أ ، ب]، وكان العنصر السابع فيها يساوي ١٢، والعنصر الرابع فيها يساوي ٧، فما قيم الثابتين أ ، ب ؟

٦ إذا كان ق ، هـ اقترانين معرفين في الفترة [٢ ، ١٠] وكان هـ(س) = ٣ق(س) + س

بحيث م(σ$_ع$ ، ق) = ٦ ، جد م(σ$_ع$ ، هـ) معتبرًا س$_ر$* = س$_ر$ علماً بأن σ$_ع$ تجزئةً منتظمةً للفترة [٢ ، ١٠]

٧ استخدم تعريف التكامل المحدود لإيجاد $\int_{١}^{٥}$ ٣س دس

٨ أثبت أن : ٠ ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^٢}$ دس ≤ ٨

٩ إذا كان ق(س) متصلاً على مجاله وكان $\int_{٠}^{س}$ ق(ص) دص = س^٢ − $\sqrt{س}$ ، فجد ق(٤) ، قَ(٤).

١٠ إذا كان ت(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ٢جـس & ، ٢ \le س \le ٣ \\ أس - ب & ، ٣ < س \le ٥ \end{cases}$ ، هو الاقتران المكامل

للاقتران المتصل ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]. جد:

أ قيم أ ، ب ، جـ

ب $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس

١١ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) ، هـ(س) فيما يأتي :

أ ق(س) = س + ٢ ، هـ(س) = $\begin{cases} ٤ - س^٢ & ، س \le ٠ \\ ٤ - س & ، س > ٠ \end{cases}$

ب ق(س) = ٢جاس ، هـ(س) = ١ في الفترة [٠ ، π]

١٢ إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (جا^{٢}س + هـ^{س}) دس = أ ، $\int_{١}^{٣}$ (جتا^{٢}س) دس = ب ، فجد قيمة أ + ب.