

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم

# الرياضيات

## "التكنولوجيا"

### الفترة الثالثة

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970 2 2983280 | فاكس +970 2 2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

٤

## التكامل Integration

٧

Indefinite Integral التكامل غير المحدود

١٣

Rules of Indefinite Integral قواعد التكامل غير المحدود

١٧

Definite Integral التكامل المحدود

٢١

Definite Integral Properties خصائص التكامل المحدود

Integration by Substitution: التكامل بالتعويض

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف التكامل في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. التعرف إلى مفهوم التكامل غير المحدود.
٢. إيجاد التكامل غير المحدود.
٣. التعرف إلى قواعد التكامل غير المحدود وتوظيفها في إيجاد.
٤. التعرف إلى التكامل المحدود، وحسابه.
٥. التعرف إلى خواص التكامل المحدود وتوظيفها في حسابه.
٦. استخدام طريقة التعويض في إيجاد بعض التكاملات.
٧. توظيف التكامل غير المحدود في تطبيقات هندسية.

## التكامل غير المحدود Indefinite Integral

تعريف:

إذا كان الاقتران  $u(s)$  هو المشتقة الأولى للاقتران  $v(s)$ ، فإن الاقتران  $v(s) + C$  يمثل مجموعة الاقترانات التي مشتقتها الأولى  $u(s)$ ، ويسمى بالتكامل غير المحدود للاقتران  $u(s)$ ، أو يسمى بالاقتران الأصلي الذي مشتقته  $u(s)$ .  
وبالرموز يكتب:  $\int u(s) ds = v(s) + C$ ، جـ  $\exists$  ع، الرمز  $\int$  هو إشارة التكامل،  $ds$  تشير أن الاقتران بدلالة المتغير  $s$ ، جـ يسمى ثابت التكامل.

مثال (٢): أجد  $\int 2s ds$  ؟

الحل:  $\int 2s ds = v(s)$ ، حيث  $v(s) = 2$   
 $v(s) = 2s + C$   
 $\int 2s ds = 2s + C$  (الاقتران الأصلي).

مثال (٣): أجد  $\int s^3 ds$  ؟

الحل:  $\int s^3 ds = v(s)$ ، حيث  $v(s) = s^3$   
 $v(s) = s^3 + C$   
 $\therefore \int s^3 ds = s^3 + C$  (الاقتران الأصلي).

❖ مثال (٤): أي من الاقتارين و(س) =  $٢س + ٤س + ٤س + ج$

هـ(س) =  $٢س + ٥س + ٤س + ج$

يمكن اعتباره اقتراً أصلياً للمشتقة (٦س + ١٠س + ٤) ؟

الحل: و(س) =  $٦س + ٨س + ٤$

هـ(س) =  $٦س + ١٠س + ٤$

هـ(س) =  $٢س + ٥س + ٤س + ج$  هو الاقتران الأصلي للمشتقة

وبالرموز  $\left[ (٦س + ١٠س + ٤) س = ٢س + ٥س + ٤س + ج \right]$

❖ مثال (٥): إذا كان و(س) =  $\left[ (٢س + س)(س - ٢) س \right]$  ، أجد و(س) ؟

الحل: و(س) = مشتقة  $\left[ (٢س + س)(س - ٢) س \right]$  ، وبما أن الاشتقاق عملية عكسية للتكامل ،

فإن و(س) =  $(٢س + س)(س - ٢) س$  .



س١: أكمل الجدول الآتي:

| المشتقة و/ (س) | الاقتران الأصلي و (س) + ج |  |
|----------------|---------------------------|--|
| ١              | $س٤$                      |  |
| ٢              | $س٤ + س٣ + س٢ + ج$        |  |
| ٣              | $س٢ + ١$                  |  |
| ٤              | $س٤ (س٣ + ٣) س$           |  |

س٢: أضع إشارة ✓ أمام العبارة الصائبة وإشارة ✗ أمام العبارة الخاطئة:

أ.  $س٤ + \frac{س٥}{٢} = س (٤ + س٥)$

ب.  $س٣ + س٢ + س١ = س (س٣ + س٢ + س١)$

ج.  $س٣ + س٢ = س (س٣ + س٢)$

د.  $س٥ + \frac{س}{٢} = س \frac{س٥}{٢}$

هـ.  $س٢ + س١ = س (س٢ + س١)$

و.  $س٢ + س١ = س (س٢ + س١)$

س٣: إذا كان و (س) =  $\frac{س٣ + س٢}{س + ١}$ ، أجد و/ (س).

# قواعد التكامل غير المحدود وتطبيقاته (Rules of Indefinite Integral and its Application)

❖ مثال (١): أجد  $\int s^3 ds$  ؟

**الحل:** المطلوب هو إيجاد الاقتران الأصلي  $u(s)$  الذي مشتقته الأولى  $u'(s) = 3$ .

من معلوماتنا في التفاضل، ألاحظ أن الاقترانات  $u(s) = s^3$

$$u'(s) = s^3 + 0$$

$$u'(s) = s^3 - \sqrt{2}$$

$$u'(s) = s^3 + \text{ثابت}$$

هي اقترانات مشتقتها الأولى  $u'(s) = 3$ ، وألاحظ أن الفرق بين هذه الاقترانات هو في الحد الثابت فقط،

ولذلك فإن الاقتران الأصلي  $u(s)$  الذي مشتقته  $u'(s) = 3$  هو  $u(s) = s^3 + \text{ج.}$

$$\text{أي أن } \int s^3 ds = s^3 + \text{ج.}$$

قاعدة (١):



$$\int s^p ds = \frac{s^{p+1}}{p+1} + \text{ج.} , p \text{ ج. عددان حقيقيان.}$$

❖ مثال (٢): أجد التكاملات الآتية:

$$(3) \int \frac{1}{s^2} ds$$

$$(2) \int \sqrt[3]{s} ds$$

$$(1) \int s^{-5} ds$$

**الحل:** (١)  $\int s^{-5} ds = s^{-4} + \text{ج.}$ ، الاقتران بدلالة المتغير  $s$ .

$$(2) \int \sqrt[3]{s} ds = \int s^{\frac{1}{3}} ds = \frac{3}{4} s^{\frac{4}{3}} + \text{ج.}$$
، الاقتران بدلالة المتغير  $s$ .

$$(3) \int \frac{1}{s^2} ds = \int s^{-2} ds = -\frac{1}{s} + \text{ج.}$$
، الاقتران بدلالة المتغير  $s$ .

مثال (٣): أتمل الجدول الآتي، وأجيب عن الأسئلة اللاحقة:

|                     |                 |                     |                 |      |
|---------------------|-----------------|---------------------|-----------------|------|
| $\frac{س^٦}{٦} + ٢$ | $\frac{س^٥}{٥}$ | $\frac{س^٤}{٤} + ٧$ | $\frac{س^٣}{٣}$ | ١(س) |
| س <sup>٥</sup>      | س <sup>٤</sup>  | س <sup>٣</sup>      | س <sup>٢</sup>  | ٢(س) |

١. ما العلاقة بين درجة ١(س) و درجة ٢(س)؟
٢. ما العلاقة بين معامل الحد الذي يحتوي على س في ١(س) ودرجة ٢(س)؟

**الحل:** ١. درجة الاقتران ١(س) تزيد ١ عن درجة ٢(س).  
معامل الحد الذي يحتوي على س يساوي مقلوب درجة الاقتران.

قاعدة (٢):



$$\left[ \begin{aligned} & \text{س}^١ \text{س}^١ = \text{س}^٢ \\ & \text{س}^١ + \frac{\text{س}^{١+١}}{١+١} = \text{ج} \end{aligned} \right] \text{ ج عدد حقيقي، } ١ \neq ٠.$$

مثال (٤): أجد كلاً من التكمالات الآتية:

- أ.  $\left[ \text{س}^٢ \text{س} \right]$
- ب.  $\left[ \text{س}^٣ \text{س} \right]$
- ج.  $\left[ \text{س}^{\frac{١}{٢}} \text{س} \right]$
- د.  $\left[ \sqrt[٣]{\text{س}^٢} \text{س} \right]$

**الحل:** أ.  $\left[ \text{س}^٢ \text{س} \right] = \text{س}^{\frac{١+٢}{١+٢}} + \text{ج} = \text{س}^{\frac{٣}{٣}} + \text{ج} = \text{س} + \text{ج}$

ب.  $\left[ \text{س}^٣ \text{س} \right] = \text{س}^{\frac{١+٣}{١+٣}} + \text{ج} = \text{س}^{\frac{٤}{٤}} + \text{ج} = \text{س} + \text{ج}$

$$ج. \left[ س^{\frac{1}{2}} س^{\frac{1}{2}} = س^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = س^1 = س \right] \quad \left[ س^{\frac{2}{3}} س^{\frac{1}{3}} = س^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = س^1 = س \right]$$

$$د. \left[ \sqrt[3]{س^3} = س^{\frac{3}{3}} = س^1 = س \right] \quad \left[ \sqrt[5]{س^5} = س^{\frac{5}{5}} = س^1 = س \right] \quad \left[ \sqrt[3]{س^3} \sqrt[5]{س^5} = س^{\frac{3}{3} + \frac{5}{5}} = س^2 = س^2 \right]$$

### قاعدة (٣):



إذا كان الاقتران  $(س)$  قابلاً للتكامل، فإن  $\left[ ا(س) س \right] = \left[ ا(س) س \right] = س$  ،  $ا \ni س$

مثال (٥): أجد التكاملات الآتية:

$$أ. \left[ س^2 س^3 س \right] \quad ب. \left[ س^3 س^4 س \right] \quad ج. \left[ \sqrt[3]{س} \sqrt[4]{س} \right]$$

$$الحل: أ. \left[ س^2 س^3 س \right] = س^2 س^3 س^1 = س^{2+3+1} = س^6$$

$$ب. \left[ س^3 س^4 س \right] = س^3 س^4 س^1 = س^{3+4+1} = س^8$$

$$ج. \left[ \sqrt[3]{س} \sqrt[4]{س} \right] = س^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = س^{\frac{7}{12}}$$

### قاعدة (٤):



إذا كان  $(س)$ ،  $(هـ)$  اقترانين قابلين للتكامل، فإن:

$$١. \left[ (ا + ب) س \right] = \left[ ا(س) س \right] + \left[ ب(س) س \right]$$

$$٢. \left[ (ا - ب) س \right] = \left[ ا(س) س \right] - \left[ ب(س) س \right]$$

مثال (٦): أجد  $\left[ س^3 (س^2 + س^4) س \right]$

$$الحل: \left[ س^3 (س^2 + س^4) س \right] = س^3 س^2 س + س^3 س^4 س = س^6 + س^8$$

$$= س^6 + س^8 \quad (\text{لماذا؟})$$



❖ مثال (٧): أجد  $\left[ \frac{1}{4}s^2 - \frac{5}{2}s \right]_{\frac{5}{2}}$

الحل:  $\left[ \frac{1}{4}s^2 - \frac{5}{2}s \right]_{\frac{5}{2}} = \left[ \frac{1}{4}s^2 - \frac{5}{2}s \right]_{\frac{5}{2}} - \left[ \frac{1}{4}s^2 - \frac{5}{2}s \right]_{\frac{5}{2}}$

$$= \left[ \frac{1}{4}s^2 - \frac{5}{2}s \right]_{\frac{5}{2}} - \left[ \frac{1}{4}s^2 - \frac{5}{2}s \right]_{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}s^2 - \frac{5}{2}s + \frac{5}{2}s - \frac{1}{4}s^2$$

(لماذا؟)

يمكن تعميم القاعدة (٤) لأكثر من اقترانين.

❖ مثال (٨): أجد  $\left[ s^2(3+s) \right]_{\frac{5}{2}}$

الحل:  $\left[ s^2(3+s) \right]_{\frac{5}{2}} = (3+s)s^2 = (3+s)s^2 = 3s^2 + s^3$

$$\left[ s^2(3+s) \right]_{\frac{5}{2}} = \left[ 3s^2 + s^3 \right]_{\frac{5}{2}} = \left[ 3s^2 + s^3 \right]_{\frac{5}{2}} - \left[ 3s^2 + s^3 \right]_{\frac{5}{2}}$$

$$= 3s^2 + s^3 - \left( 3s^2 + s^3 \right)_{\frac{5}{2}}$$

$$= 3s^2 + s^3 - \left( 3s^2 + s^3 \right)_{\frac{5}{2}}$$

❖ مثال (٩): جد  $\left[ \frac{9-s^2}{3+s} \right]_{\frac{3}{2}}$  ،  $\frac{3}{2} \neq \frac{3}{2}$

$$\left[ \frac{9-s^2}{3+s} \right]_{\frac{3}{2}} = \left[ \frac{(3-s)(3+s)}{(3+s)} \right]_{\frac{3}{2}} = \left[ 3-s \right]_{\frac{3}{2}} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

❖ مثال (١٠): إذا كان  $\left[ \frac{5s^2 + 3s}{s} \right]_{\frac{3}{2}}$  ، أجد  $\frac{5s^2 + 3s}{s}$  ؟

$$\left[ \frac{5s^2 + 3s}{s} \right]_{\frac{3}{2}} = \left[ 5s + 3 \right]_{\frac{3}{2}} = 5s + 3 - \left( 5s + 3 \right)_{\frac{3}{2}}$$

$$= 5s + 3 - \left( 5s + 3 \right)_{\frac{3}{2}} = 5s + 3 - \left( 5s + 3 \right)_{\frac{3}{2}}$$

$$= 5s + 3 - \left( 5s + 3 \right)_{\frac{3}{2}}$$

هل يمكن الحل بطريقة أخرى؟ (وضح ذلك.)

## مثال ١١:

إذا كان ميل المماس لمنحنى  $و(س)$  عند أي نقطة عليه يعطى بالقاعدة  $و'(س) = ٣س - ١$ ، أجد قاعدة الاقتران  $و(س)$  علماً بأن منحناه يمر بالنقطة  $(٠, ٧)$ .

$$\text{الحل: } و(س) = و'(س) = ٣س - ١ = ٣س - ١ - \frac{٣س^٢}{٢} + ج$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة  $(٠, ٧)$  ومنها  $٧ = (٠)$

$$\text{ومنها } ٧ = ج$$

$$\text{ومنها } و(س) = ٣س - \frac{٣س^٢}{٢} + ٧$$

## مثال ١٢:

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  $هـ(س)$  عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة  $هـ'(س) = ٤س + ٣$ ، أجد قاعدة الاقتران  $هـ(س)$  علماً بأن منحناه يمر بالنقطة  $(٢, ٧)$ .

$$\text{الحل: } هـ(س) = هـ'(س) = ٤س + ٣$$

$$= ٤س + ٣ - \frac{٤س^٢}{٢} + ج$$

$$= ٢س^٢ + ٣س + ج$$

لكن منحنى الاقتران  $هـ(س)$  يمر بالنقطة  $(٢, ٧)$

$$\text{ومنها } ٧ = (٢)$$

$$\text{ومنها } ٧ = ج$$

$$\text{إذا } هـ(س) = ٢س^٢ + ٣س - ٧$$



س١: أجد التكاملات الآتية:

- أ.  $\int \frac{2}{3} s \, ds$       ب.  $\int \pi s \, ds$       ج.  $\int \sqrt[5]{s} \, ds$
- د.  $\int (3 + s^2) \, ds$       هـ.  $\int (s^2 - \frac{2}{s} + 1) \, ds$       و.  $\int \sqrt{s} \, ds$  ، ك ثابت  $\neq 0$ .

س٢: أجد  $\int (3 + v)(5 - 2v) \, dv$

س٣: أجد  $\int \frac{6 + 5l - l^2}{2 - l} \, dl$  ،  $l \neq 2$

س٤: أجد  $\int (1 + s)(s^3 + s^2 - 3s + 4) \, ds$

س٥: إذا كان  $u(s) = \int (3s^3 + s^2 - 5s + 4) \, ds$ ، أجد  $u'(s)$ .

س٦: إذا كان  $v = \int (2 + s)(s^2 + 2s) \, ds$ ، أجد  $\frac{dv}{ds}$ .

س٧: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  $u(s)$  عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة  $u'(s) = 5$ ، أجد قاعدة الاقتران  $u(s)$  علماً بأن منحناه يمر بالنقطة  $(2, 3)$ .

س٨: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  $u(s)$  عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة  $u'(s) = (s+1)^3$ ، أجد  $u(2)$  علماً بأن منحني  $u(s)$  يمر بالنقطة  $(0, 2)$ .

س٩: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  $u(s)$  عند أي نقطة عليه هو  $(2 - s)$ ، أجد معادلة المماس لمنحنى  $u(s)$  عندما  $s = 2$ ، علماً بأن منحني  $u(s)$  يمر بالنقطة  $(0, 3)$ .

## التكامل المحدود (Definite Integral):

### نشاط (١):



إذا كان ميل المماس لمنحنى  $u(s)$  هو  $u'(s) = 2s + 3$ ، كيف يمكن حساب التغير في الاقتران  $u(s)$  عندما تتغير  $s$  من  $s_1 = 2$  إلى  $s_2 = 5$ ؟  
لحساب هذا التغير يلزمنا  $u(s)$ ، حيث:

$$u(s) = \int u'(s) ds$$

$$= \int (2s + 3) ds$$

$$= s^2 + 3s + C$$

$$\text{التغير في الاقتران} = u(5) - u(2) =$$

$$= (25 + 15 + C) - (4 + 6 + C) =$$

$$30$$

هل نحن بحاجة لمعرفة قيمة الثابت  $C$  لحساب هذا التغير؟

### تعريف:



إذا كانت  $u(s)$  هي المشتقة الأولى للاقتران  $u(s)$ ، وكان  $u(s)$  قابلاً للتكامل،

فإن  $\int_a^b u'(s) ds = u(b) - u(a)$ ،  $a$ ،  $b$  عدنان حقيقيان. وهذا التكامل يسمى تكاملاً محدوداً،  
حدّه العلوي  $b$ ، وحدّه السفلي  $a$ ، وقيمه = عدداً ثابتاً.

❖ مثال (١): أحسب قيمة التكامل  $\int_1^2 (س - ٣) دس$  ؟

الحل:  $\int_1^2 (س - ٣) دس =$

$$= \frac{س^2}{2} - ٣س + ج$$

$$\int_1^2 (س - ٣) دس = (١) - (٢) =$$

$$= \left( \frac{1}{2} - ٣ + ج \right) - \left( \frac{2}{2} - ٦ + ج \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - ٣ - \frac{2}{2} + ٦ = ١$$

يمكن حل المثال بطريقة أخرى

$$\int_1^2 (س - ٣) دس = \int_1^2 \left( س - \frac{٣}{2} \right) دس$$

أعوض الحد العلوي، ثم أطرح منه ناتج تعويض الحد السفلي.

$$= \left( \frac{2}{2} - \frac{٣}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{٣}{2} \right) = ١$$

❖ مثال (٢): أجد  $\int_1^2 (س^٣ - ٢س^٢ + ١) دس$

الحل:  $\int_1^2 (س^٣ - ٢س^٢ + ١) دس = \int_1^2 (س^٣ + س^٢ - ٢س) دس$

$$= \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - ١ \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - ٢ \right) =$$

$$= ٩$$

❖ مثال (٣): إذا كان  $\int_2^4 (بس - ٧) دس = ٣٤$ ، أجد قيمة الثابت ب.

الحل:  $\int_2^4 (بس - ٧) دس = \int_2^4 \left( بس - \frac{٧}{2} \right) دس$

$$= \left( \frac{ب}{2} - \frac{٧}{2} \right) - \left( \frac{ب}{2} - \frac{٧}{2} \right) =$$

$$٣٤ = \frac{ب}{2} - \frac{٧}{2}$$

$$٤٨ = ب$$

$$ب = ٨$$

مثال (٤): إذا كان  $\int_0^b 6s^5 ds = 63^b$ ، أجد قيمة/قيم الثابت ب.

الحل:  $\int_0^b 6s^5 ds = 63^b$

$$63^b = 75 - 63^b$$

(لماذا؟)  $63^b = 4$

$$b = \pm 2$$

نشاط (٣):

جد و(س) في كل مما يأتي:

١.  $W(s) = \int_2^3 (s^2 + 6s^3) ds$

٢.  $W(s) = \int_1^7 (s^3 - 7s^0) ds$

أتعلم: مشتقة التكامل المحدود تساوي صفراً.



س١: أحسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ) } \int_1^2 \pi^x dx & \quad \text{ب) } \int_1^2 (5 - 3x^2) dx \\ \text{ج) } \int_1^3 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx & \quad \text{د) } \int_1^2 \sqrt{x} dx \end{aligned}$$

س٢: إذا كان  $\int_2^3 x^2 dx = 32$  فما قيمة/ قيم الثابت ب؟

س٣: إذا كان  $\int_{-2}^0 (3 - 2x) dx = \text{صفرًا}$ ، فما قيمة/ قيم الثابت پ.

س٤: أحسب  $\int_1^2 (2x - 1) dx$ .

س٥: أجد  $\frac{dx}{ds}$  لكل مما يأتي:

$$\text{أ) ص} = \int_1^2 (4x^3 + 2x - 5) dx$$

$$\text{ب) ص} = \int_1^2 (4x^3 + 2x - 5) dx$$

# خصائص التكامل المحدود Definite Integral Properties

نشاط (١):



$$٠ = (٢ - ٢) \cdot ٧ = \int_2^2 ٧ \, ds = \int_2^2 ٧ \, ds \quad ١.$$

$$٠ = \int_0^0 (٣ + s) \, ds = \int_0^0 (.....) \, ds \quad ٢. \quad (\text{لماذا؟})$$

خاصية (١): إذا كان  $u(s)$  اقتراناً قابلاً للتكامل فإن  $\int_a^b u(s) \, ds = ٠$  لكل  $a \equiv b$

فمثلاً: أ)  $\int_1^1 (٢ + s^٣ + ٢s) \, ds = ٠$  حسب الخاصية (١)

ب)  $\int_2^2 (٥ + \sqrt{s}) \, ds = ٠$  حسب الخاصية (١)

خاصية (٢): إذا كان  $u(s)$  اقتراناً قابلاً للتكامل، فإن:  $\int_a^b u(s) \, ds = - \int_b^a u(s) \, ds$

مثال (١): إذا علمت أن  $\int_1^2 u(s) \, ds = ٨$ ، أحسب  $\int_2^1 u(s) \, ds$  ؟

الحل:  $\int_2^1 u(s) \, ds = - \int_1^2 u(s) \, ds = -٨$  حسب الخاصية (٢)

مثال (٢): إذا كان  $\int_2^3 u(s) \, ds = ٣^-$ ، جد  $\int_3^2 ٢^- u(s) \, ds$  ؟

الحل:  $\int_3^2 ٢^- u(s) \, ds = \int_2^3 ٢^- u(s) \, ds = ٢^- \int_2^3 u(s) \, ds = ٢^- (٣^-) = ٦^-$



خاصية (٣): إذا كان  $U(S)$  اقتراناً قابلاً للتكامل، على  $[1, j]$ ،  $b \in [1, j]$  فإن

$$U(S) \big|_1^b + U(S) \big|_b^j = U(S) \big|_1^j \quad (\text{خاصية الإضافة})$$

❖ مثال (٣): إذا علمت أن  $U(S) \big|_1^2 = 3$ ،  $U(S) \big|_2^4 = 9$  أجد  $U(S) \big|_1^4$ ؟

الحل:  $U(S) \big|_1^4 = U(S) \big|_1^2 + U(S) \big|_2^4$  حسب الخاصية (٣)

$$6 = (9) + (3) =$$

❖ مثال (٤): إذا علمت أن  $U(S) \big|_1^3 = 2$ ،  $U(S) \big|_3^5 = 10$ ، أجد  $U(S) \big|_1^5$ ؟

الحل:  $U(S) \big|_1^5 = U(S) \big|_1^3 + U(S) \big|_3^5$

$$U(S) \big|_1^5 = U(S) \big|_1^3 + U(S) \big|_3^5$$

لكن  $U(S) \big|_1^3 = 2$ ،  $U(S) \big|_3^5 = 10$  لماذا؟

لماذا؟  $U(S) \big|_1^5 = (2) + 10 = 12$

$$\therefore U(S) \big|_1^5 = (2) + 10 = 12$$

خاصية (٤): إذا كان الاقترانان  $u(s)$  ،  $h(s)$  اقترانين قابليين للتكامل على  $[a, b]$  فإن

$$\int_a^b u(s) \pm h(s) ds = \int_a^b u(s) ds \pm \int_a^b h(s) ds$$

❖ مثال (٥): إذا كان  $\int_{-1}^2 u(s) ds = -5$  ، أجد  $\int_{-1}^2 (3u(s) + s + 2) ds$  ؟

$$\text{الحل: } \int_{-1}^2 (3u(s) + s + 2) ds = \int_{-1}^2 3u(s) ds + \int_{-1}^2 (s + 2) ds$$

$$= 3 \int_{-1}^2 u(s) ds + \int_{-1}^2 (s^2 + 2s) ds =$$

$$= 3 \left[ \left( \frac{1}{3} s^3 \right) - \left( \frac{1}{2} s^2 \right) \right]_{-1}^2 + \left[ \left( \frac{1}{2} s^2 \right) + \left( \frac{1}{3} s^3 \right) \right]_{-1}^2 =$$

$$= \frac{15}{2} = \left( \frac{3}{2} + 6 \right) + 15 =$$



س١: أحسب  $\int_2^2 (s^6 - s^2) ds$

س٢: أحسب التكاملات الآتية:

أ.  $\int_2^3 (s - 6) ds$     ب.  $\int_2^0 (s - 6) ds$     ج.  $\int_3^0 (s - 6) ds$

س٣: إذا كان  $\int_{-1}^2 (s) ds = 3$  ،  $\int_2^4 (s) ds = 4$  ، أجد قيمة الآتي:

أ.  $\int_{-1}^2 (s) ds$     ب.  $\int_{-1}^2 (s) ds$     ج.  $\int_{-1}^2 (3(s) + s) ds$

س٤: إذا كان  $\int_2^3 (s) ds = 12$  ،  $\int_2^3 (2s) ds = 6$  ، أجد قيمة:

$\int_2^3 (5(s) - 3(s)) ds$

## التكامل بالتعويض: Integration by Substitution

نشاط (١):



أجد  $\int (3-s)^2 ds$

**الحل:**  $\int (3-s)^2 ds = \int (s^2 - 6s + 9) ds$  (لماذا؟)

$$= \frac{s^3}{3} - 3s^2 + 9s + C$$

وبالطريقة نفسها جد  $\int (4-s)(9-s) ds$

لكن هل يمكن أن أجد  $\int (4-s)(9-s) ds$  بسهولة بالطريقة نفسها؟

يمكن إيجاد  $\int (3-s)^2 ds$  بطريقة أخرى، تسمى طريقة التكامل بالتعويض.

**الحل:** أفرض أن  $v = (3-s)$  ومنها  $\frac{dv}{ds} = -1$  ومنها  $ds = -dv$  بالتعويض في التكامل

$$\int (3-s)^2 ds = \int v^2 (-dv) = -\frac{v^3}{3} + C = -\frac{(3-s)^3}{3} + C$$

**مثال (١):** أجد  $\int (1+3s)^4 ds$

**الحل:** أفرض أن  $v = 1+3s$  ومنها  $\frac{dv}{ds} = 3$  ومنها  $ds = \frac{dv}{3}$

أعوض في التكامل  $\int (1+3s)^4 ds = \int v^4 \cdot \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3} \int v^4 dv$

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{v^5}{5} \right) + C = \frac{1}{15} v^5 + C = \frac{1}{15} (1+3s)^5 + C$$

❖ مثال (٢): أجد  $\int \frac{1}{s^3(1-s^2)} ds$

**الحل:** أفرض أن  $v = (1-s^2)$  ومنها  $\frac{dv}{ds} = -2s$  ومنها  $s = \frac{1}{2} \frac{dv}{ds}$

أعوض في التكامل

$$\int \frac{1}{s^3(1-s^2)} ds = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \frac{dv}{ds}\right)^3 (1-v)} \cdot \frac{1}{2} \frac{dv}{ds} =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{8} \frac{dv}{ds} (1-v)} \cdot \frac{1}{2} \frac{dv}{ds} = \int \frac{4}{(1-v)} dv =$$

$$\int \frac{4}{(1-v)} dv = 4 \int \frac{1}{(1-v)} dv =$$

$$= 4 \ln|1-v| + C = 4 \ln|1-(1-s^2)| + C = 4 \ln|s^2| + C = 8 \ln|s| + C$$

❖ مثال (٣): أجد  $\int \frac{1}{s^3(s^2+1)(s^2-5)} ds$

**الحل:** أفرض أن  $v = (s^2+1)$  ومنها  $\frac{dv}{ds} = 2s$  ومنها  $s = \frac{1}{2} \frac{dv}{ds}$

أعوض في التكامل

$$\int \frac{1}{s^3(s^2+1)(s^2-5)} ds = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \frac{dv}{ds}\right)^3 (v)(v-5)} \cdot \frac{1}{2} \frac{dv}{ds} =$$

$$= \int \frac{4}{(v)(v-5)} dv =$$

$$= \int \frac{4}{(v)(v-5)} dv = \int \frac{4}{v(v-5)} dv =$$



أجد التكاملات الآتية:

س١:  $\int (2 - 3s) s^3 ds$

س٢:  $\int \frac{s^3}{(1 - s)^2} ds$

س٣:  $\int (1 + s) s^2 ds$  ، ب ثوابت

س٤:  $\int s^2 (1 + s^3) s^4 ds$

س٥:  $\int \frac{s^2 (1 - s^2)}{s^2} ds$

س٦:  $\int \frac{s^2 (5 - s^2) (s^2 + 7) s^2}{s^2} ds$

س٧:  $\int \frac{s^3}{1 - s^3} ds$

س٨:  $\int \frac{s^2 (2 + s) \sqrt{s^2 + 4s + 5}}{s^2} ds$

(١) إذا كان  $\ln(s) = s^3 - s^4 + 2$ ، ما قيمة  $\ln(1)$  ؟

(٢) جد  $\ln s^3 \sqrt{s^2}$  ؟

(٣) إذا كان  $\ln s = 2$ ، ما قيمة  $\ln$  قيم الثابت ب ؟

(٤) إذا علمت أن  $\ln(s) = s^4 + s^2 - 2$ ،  $\ln(0) = 3$  أجد  $\ln(1)$ .

(٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة  $\ln(s) = 3 - 2s$ ، ما قاعدة الاقتران  $\ln(s)$  علماً بأن منحنى  $\ln(s)$  يمر بالنقطة (١، ٦).

س١: أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما الاقتران الذي يمثل اقتراناً أصلياً للمشتقة  $u'(s) = 4s^2 + 6s + 2$  ؟

(أ)  $u'(s) = 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$  (ب)  $u'(s) = \frac{4}{3}s^3 + \frac{2}{3}s^2 + 2s + 1$

(ج)  $u'(s) = 8s + 6$  (د)  $u'(s) = \frac{4}{3}s^3 + 3s^2 + 2s + 2$

(٢) إذا كان  $u'(s) = 3s - 4s^2 + 2$ ، ما قيمة  $u'(1)$  ؟

(أ) -٨ (ب) -٥ (ج) ١ (د) صفر

(٣) إذا كان  $u'(s) = 12$ ، وكان  $u(5) = 2$ ، ما قيمة  $u(2)$  ؟

(أ) ١٢ (ب) ٥ (ج) ٤ (د) ٢

(٤) إذا كان  $u'(s) = (2s^2 + 3s + 1)u'(s)$ ، ما قيمة  $u'(2)$  ؟

(أ) صفر (ب) ٣ (ج) ٨ (د) ١٥

(٥) إذا كان  $u'(s) = 2$ ، ما قيمة/ قيم الثابت ب ؟

(أ) ١ ، ٢ (ب) ١ ، -٢ (ج) -١ ، ٢ (د) -١ ، -٢

(٦) إذا كان  $u'(s) = 9$ ،  $u'(s) = 3$ ، ما قيمة  $u'(s)$  ؟

(أ) ٧ (ب) ١١ (ج) ٥ (د) ١



$$\text{س٢: جد } \int_1^2 (س^2 + س + ١) س^٥$$

$$\text{س٣: جد } \int (س^٢ + ٣) س^٧$$

$$\text{س٤: إذا كان } \int_1^3 (س) س^٧ = ٧, \text{ لـ } \int_1^3 (س) س^٤ = ؟$$

$$\text{ما قيمة } \int_1^3 (س^٢ - ٥س + ٢) س^٣ ؟$$

$$\text{س٥: أجد } \int_1^2 (س^٢ + ١) \sqrt{س^٢ + س + ٤} س^٢$$