١١

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الثالثة

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 - رام الله - فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

المحتويات

الوحدة			
٣	٣ – ١	المتغير العشوائي المنفصل، التوزيع الاحتمالي، التوقع للعلمي فقط	٣
	٣ – ٢	العلامة المعيارية للعلمي فقط	٦
	٣ – ٣	التوزيع الطبيعي (المعتدل) للعلمي فقط	٨
	٣ – ٤	تطبيقات للعلمي فقط	١٢
	٣ – ٥	المتتاليات	١٤
	٣ – ٦	المتسلسلات	١٦
	٣ – ٧	المتتاليات الحسابية (العددية)	١٩
	٣ – ٨	مجموع المتسلسلة الحسابية	٢٢
	٣ – ٩	المتتالية الهندسية	٢٤
	٣ – ١٠	المتسلسلة الهندسية المنتهية، ومجموعها	٢٦

النتاجات

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المنحنى الطبيعي ومفاهيم المتتاليات في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. التعرف إلى اقتران المتغير العشوائي المنفصل.
٢. إيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي، وتكوين جدول التوزيع الاحتمالي، حساب التوقع.
٣. التعرف إلى العلامة المعيارية، وتحويل العلامة الخام إلى علامة معيارية.
٤. التعرف إلى التوزيع الطبيعي، والطبيعي المعياري وحساب المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري.
٥. استخدام منحنى التوزيع الطبيعي لحل مشكلات حياتية.
٦. التعرف الى مفهوم المتتالية ومفهوم المتسلسلة .
٧. التعرف إلى المتتالية الحسابية والمتسلسلة الحسابية .
٨. التعرف إلى المتتالية الهندسية والمتسلسلة الهندسية.
٩. استنتاج الحدّ العـــام لكل من المتتاليتين الحسابية والهندسية.
١٠. إيجاد مجموع (ن) من حدود المتتـاليتين الحسابية والهندسية.
١١. توظيف قوانين المتتاليات والمتسلسلات في مسائل حياتية.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تعريف (المتغير العشوائي المنفصل): هو اقتران مجاله الفضاء العيني ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية القابلة للعد، ويرمز له بإحدى الحروف الهجائية ق ، ك ، ع ، ...

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل: إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، ... ، س$_ن$}

فإن التوزيع الاحتمالي: اقتران مجاله مجموعة قيم المتغير العشوائي، ومداه مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بمجموعة قيم المتغير العشوائي. يسمى هذا الاقتران اقتران كثافة احتمالية ويرمز له بالرمز ل(س).

ويكتب التوزيع الاحتمالي على صورة مجموعة من الأزواج المرتبة: {(س$_1$ ، ل(س$_1$))، (س$_2$ ، ل(س$_2$))، ...، (س$_ن$ ، ل(س$_ن$))} أو على صورة جدول، يسمى جدول التوزيع الاحتمالي:

س$_ر$	س$_1$	س$_2$	....	س$_ن$
ل(س$_ر$)	ل(س$_1$)	ل(س$_2$)	....	ل(س$_ن$)

مثال ١ : يلعب سامر اللعبة الآتية: يرمي حجر نرد منتظم مرتين متتاليين، ويلاحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة، فإذا ظهر عددان متساويان يكسب ١٠ نقاط، وإذا ظهر عددان مجموعهما ١١ يكسب ٥ نقاط وخلاف ذلك يخسر ٤ نقاط.

فإذا دلَّ المتغير العشوائي ع على عدد النقاط التي يكسبها سامر:

١ أكتب مدى المتغير العشوائي ع

٢ أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير ع

٣ أكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ع

الحل :

١ مدى ع = {١٠ ، ٥ ، -٤}

ل(١٠) = $\frac{٦}{٣٦}$ ، ل(٥) = $\frac{٢}{٣٦}$ ، ل(-٤) = $\frac{٢٨}{٣٦}$ (لماذا؟)

٢ التوزيع الاحتمالي = {(١٠ ، $\frac{٦}{٣٦}$) ، (٥ ، $\frac{٢}{٣٦}$) ، (-٤ ، $\frac{٢٨}{٣٦}$)}

٣ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع

س$_ر$	١٠	٥	-٤
ل(س$_ر$)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٢٨}{٣٦}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

أتعلم: ١) $0 \leq$ ل(س$_ر$) ≤ 1 ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن

٢) $\sum_{ر=1}^{ن}$ ل(س$_ر$) = ١ حيث ن عدد قيم س$_ر$

مثال ٢ : إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً توزيعه الاحتمالي:

{(٤ ، ٠,٢)، (٨ ، س) ، (١٢ ، ٣س)} أجد قيمة س

الحل : $\sum_{ر=1}^{3}$ ل(س$_ر$) = ١ ، ٠,٢ + س + ٣س = ١

ومنها س = ٠,٢

تعريف: إذا كان ق متغيراً عشوائياً منفصلاً مداه {س$_1$ ، س$_2$ ، س$_3$ ، ... ، س$_ن$}

فإن توقع المتغير العشوائي ق هو: ت(ق) = $\sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × ل(س$_ر$)

أتعلم: يمثل التوقع الوسط الحسابي للقيم التي يأخذها المتغير العشوائي، مع الأخذ بعين الاعتبار احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي، إذا كررت التجربة عدد كبير من المرات.

مثال ٣ : يربح بائع مرطبات ١٠ دنانير في اليوم الحارّ، وَ ٦ دنانير في اليوم المعتدل، ويخسر ديناراً واحداً في اليوم البارد. فإذا كان احتمال أن يكون الجو حارّاً في أحد الأيام يساوي ٠,٥ واحتمال أن يكون معتدلاً ٠,٣، اخترنا أحد الأيام عشوائياً، ودل المتغير العشوائي ق على المبلغ الذي يكسبه البائع في اليوم الواحد. أجد: ١- مدى ق ٢- جدول التوزيع الاحتمالي ٣- توقع ق.

الحل :

١ س = {١٠ ، ٦ ، -١}

٢

س$_ر$	١٠	٦	-١
ل(س$_ر$)	٠,٥	٠,٣	٠,٢

٣ ت(ق) = $\sum_{ر=1}^{3}$ س$_ر$ × ل(س$_ر$)

= ١٠ × ٠,٥ + ٦ × ٠,٣ + -١ × ٠,٢ = ٦,٦ ديناراً

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

١ في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومتمايزين، إذا دل المتغير العشوائي ق على الفرق المطلق بين العددين الظاهرين على الوجهين العلويين، أكتب مدى ق، التوزيع الاحتمالي، ثم أجد التوقع.

٢ إذا كان ق متغيراً عشوائياً مداه مجموعة قيم س = {-٢ ، ٣ ، ٤ }

وكان ل (س = ٣) = ١ , ٠ ، ت(ق) = ٥ , ١ ، أجد ل (س = ٤)

٣ صندوق فيه ٣ كرات حمراء، وَ ٥ كرات بيضاء متجانسة، قام ماجد بسحب عدد من الكرات على التوالي دون إرجاع، على أن يتوقف عن السحب عند ظهور أول كرة بيضاء. فإذا كان المتغير العشوائي ع يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة، أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع .

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

العلامة الخام: هي البيانات التي نقوم بجمعها حول ظاهرة ما قبل معالجتها إحصائياً.

العلامة المعيارية: هي عدد الانحرافات المعيارية للمشاهدة س عن الوسط الحسابي. ويرمز لها بالرمز ع ،

$$\text{حيث ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}.$$

والآن إذا علمت أن الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في اختبار الرياضيات ٨٥ ، والانحراف المعياري ٥، والوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في اختبار اللغة الانجليزية ٧٤ وانحراف معياري قدره ٣.

وبعد معرفتك مفهوم العلامة المعيارية وطريقة إيجادها، هل يمكنك مساعدة الأب في معرفة أي المادتين كان تحصيل الابن فيها أفضل؟

مثال ١ : إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة قيم توزيع ما هو ٧٠، والانحراف المعياري لها ٤، ما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٦٢؟

الحل : $\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma} = \frac{٦٢ - ٧٠}{٤} = -٢$

أتعلم: أن مجموع العلامات المعيارية لتوزيع ما يساوي صفر، ووسطها الحسابي يساوي صفر، وانحرافها المعياري يساوي ١ .

مثال ٢ : كانت جميع العلامات المعيارية لتوزيع ما كما يأتي: صفر ، ٠,٥ ، ل ، -١,٥ ، -٠,٥ ما قيمة ل؟

الحل : مجموع العلامات المعيارية للتوزيع = صفر

$\therefore$ صفر + ٠,٥ + ل + -١,٥ + -٠,٥ = صفر

$\Leftarrow$ ل = -١,٥

مثال ٣ : إذا كانت علامتا طالبين في امتحان العلوم ٥٠ ، ٩٠ وكانت العلامتان المعياريتان المناظرتان -٢ ، ٢ على الترتيب. أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعلاماتهما في الامتحان.

الحل : $\text{ع} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

$$-٢ = \frac{\mu - ٥٠}{\sigma} \Leftarrow \mu - ٥٠ = -٢\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$٢ = \frac{\mu - ٩٠}{\sigma} \Leftarrow \mu - ٩٠ = ٢\sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

بحل المعادلتين:

$\sigma = ١٠$ ، $\mu = ٧٠$ (أتحقق من ذلك).

تمارين ٣ - ٢

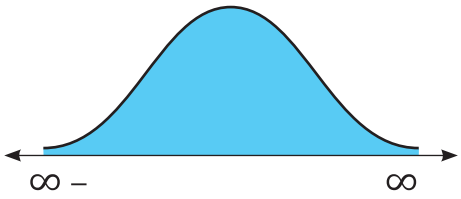
١ في امتحان الرياضيات كان الوسط الحسابي للعلامات يساوي ٦٥ والانحراف المعياري يساوي ٨، ما العلامتان المعياريتان لطالبين حصلا على العلامتين ٥٧، ٩١ ؟

٢ إذا حُوّلت مفردات توزيع ما إلى علامات معيارية، فكانت كالآتي:
صفر ، $-٠,٥$ ، ٠ ، ل ، $-٠,٥$ ، ١ ، ٣ ل، فما قيمة ل؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

التوزيع الطبيعي:

تشير الدراسات الإحصائية لكثير من الظواهر الطبيعية والاجتماعية التي تتضمن مجموعةً كبيرةً من المفردات، إلى اقتراب المنحنيات الخاصة بتوزيعات هذه الظواهر من التوزيع الطبيعي، وهو أحد صور التوزيعات التكرارية وأهمها، ويمتاز بأنه متماثل حول الوسط الحسابي، ويأخذ شكل منحناه شكل الجرس، ويسمى توزيع جاوس نسبة للعالم الألماني جاوس الذي طوره في القرن السابع عشر، ومن الأمثلة عليه: توزيعات الأطوال والكتل، ودرجات الحرارة، ومعاملات الذكاء وغيرها. ويوصف التوزيع الطبيعي بمعادلة رياضية تحدد منحناه، وهي تتعين بمعرفة التوقع (الوسط الحسابي) μ والانحراف المعياري σ .



خصائص المنحنى الطبيعي:

١. متماثل حول الوسط الحسابي μ .
٢. الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
٣. له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى – ∞، ∞ (لا يقطع محور السينات) .

التوزيع الطبيعي المعياري:

عند تحويل القيم الخام الخاصة بتوزيع طبيعي إلى علامات معيارية، وتمثيل هذه العلامات المعيارية بيانياً، فإنها تتمثل بمنحنى طبيعي يسمى المنحنى الطبيعي المعياري، وهو توزيع وسطه الحسابي يساوي صفراً وتباينه ١، وتكون المساحة تحته = ١

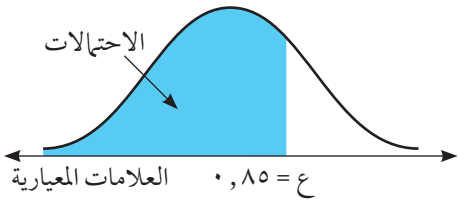
نظرية: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي μ، وانحرافه المعياري σ فإن $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$ هو توزيع طبيعي معياري وسطه الحسابي = صفر، وانحرافه المعياري = ١ .

جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

قام العلماء ببناء جدول خاص بالتوزيع الطبيعي، يربط بين العلامات المعيارية وأجزاء المساحة المناظرة لها تحت المنحنى، وهناك عدة أنماط لجداول التوزيع الطبيعي المعياري، وسنستخدم الجدول الذي يعطي المساحة على يسار قيمة معيارية مثل ع. وبالنظر إلى الجدول (١) الوارد في نهاية الكتاب، فإن الهامش الرأسي في

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

يمين الجدول يمثل العدد الصحيح والجزء العشري الأول، بينما يمثل الهامش الأفقي في أعلى الجدول الجزء العشري الثاني(جزء من مائة). أما الأعداد في داخل الجدول فهي تمثل احتمالات وقوع المتغير ع في الفترة (– ∞، أ) أي المساحة تحت المنحنى على يسار أ.

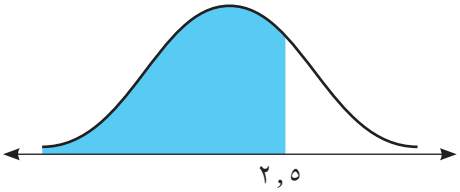


ولإيجاد ل(ع < ٠,٨٥) أي مساحة المنطقة المظللة تحت القيمة المعيارية ٠,٨٥، نبحث عن العدد الذي يمثل تقاطع الصف البادىء بـ ٠,٨ (في الهامش الرأسي) والعمود البادىء بـ ٠,٠٥ في الهامش الأفقي وهو ٠,٨٠٢٣.

مثال ١ : إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري. أجد:

١ ل(ع ≥ ٢,٥)

٢ ل(ع ≤ ١,٤)



الحل : باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

١ ل(ع ≥ ٢,٥) = ٠,٩٩٣٨

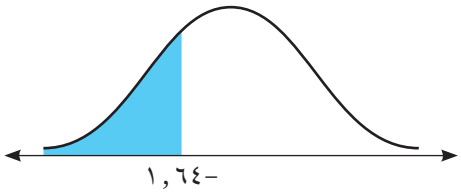
٢ ل(ع ≤ ١,٤) = ١ – ل(ع > ١,٤)

= ١ – ٠,٩١٩٢ = ٠,٠٨٠٨

مثال ٢ : إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري. أجد:

١ ل(ع ≥ –١,٦٤)

٢ ل(ع ≤ –١,٧)



الحل : باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

١ ل(ع ≥ –١,٦٤) = ٠,٠٥٠٥

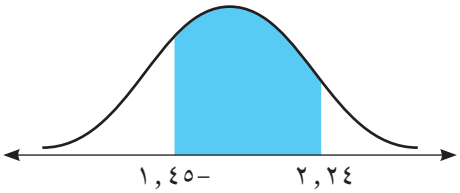
٢ ل(ع ≤ –١,٧) = ل(ع ≥ ١,٧) (لماذا؟)

= ٠,٩٥٥٤

هل يوجد حلّ آخر؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

نشاط ١ : باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد: ل(−١,٤٥ ≤ ع ≤ ٢,٢٤)



١ أجد ل(ع ≥ −١,٤٥) = ...

٢ أجد ل(ع ≥ ٢,٢٤) = ...

٣ أجد ل(−١,٤٥ ≤ ع ≤ ٢,٢٤) = ...

مثال ٣ : إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً، بوسط حسابي μ = ٧٢، وانحراف معياري σ = ٢,٥.
أجد أ بحيث ل(س ≥ أ) = ٠,٧٨٨١

الحل : ع المقابلة لهذه المساحة = ٠,٨

لكن ع = $\frac{\text{أ} - \mu}{\sigma}$ ، ٠,٨ = $\frac{\text{أ} - ٧٢}{٢,٥}$ ومنها أ = ٧٤

نشاط ٢: إذا كان المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه μ = ١٥ وانحرافه المعياري σ = ٥ ، أجد ل (١٨ < س < ٢١).

أجد القيمة المعيارية المناظرة لكل من ١٨، ٢١ بالتعويض في العلاقة: ع = $\frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$

عندما $س_١$ = ١٨ ، $ع_١$ = ٠,٦

عندما $س_٢$ = ٢١ ، $ع_٢$ = ١,٢

∴ ل (١٨ < س < ٢١) = ل(..... < ع < .....)

= ل(ع < ١,٢) − ل (ع < ٠,٦) = ٠,١٥٩٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تمارين ٣ - ٣

١ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أجد:

أ ل(ع ≥ ١,٢٥)　　ب ل(ع ≤ ٢,٤٨)

جـ ل(ع ≤ -١,٤٦)　　د ل(-٢,٣٧ ≤ ع ≤ ١,٧)

٢ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، أجد القيمة المعيارية ك بحيث:

أ ل(ع ≥ ك) = ٠,٩٩٠٩　　ب ل(ع > ك) = ٠,٩٤٩٥

جـ ل(ع ≥ ك) = ٠,١٩٧٧　　د ل(ك ≤ ع ≤ ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

٣ إذا كان ع متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، وكان ل(ع ≥ ك) = ٠,١٧٣٦

أجد ل(ك ≤ ع ≤ ١,٧).

٤ إذا كان س متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٦٠ وانحرافه المعياري ٥ ، أجد:

أ ل(س≥٥٠)　　ب ل(٥٥ ≤ س ≤ ٧٥)

٥ إذا كان س متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري يساوي ٢

وكان ل(س < ٧٨) = ٠,٠٢٢٨ ، أجد الوسط الحسابي للتوزيع.

٦ إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً، وسطه μ = ٨ وانحرافه المعياري σ = ٢

وكان ل(ع ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ أجد:

أ قيمة ك　　ب ل(س ≥ ١٢).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

بيّنّا سابقا أهمية التوزيع الطبيعي، وذلك لارتباطه بكثير من التطبيقات الحياتية، والظواهر التربوية والاقتصادية، وسنقوم بعرض أمثلة ومسائل تطبيقية في هذا المجال:

مثال ١ : تقدم ٢٠٠٠ شخص لاختبار الذكاء (IQ) والذي كانت نتائجه قريبةً من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي $\mu = ١٠٠$، وانحراف معياري $\sigma = ١٥$.

أ ما نسبة الأشخاص الذين تقع معاملات ذكائهم بين ٨٠ و ١٢٠ ؟

ب ما عدد الأفراد الذين تزيد معاملات ذكائهم عن ٨٠ ؟

الحل :

أ لنفترض أن: س متغير عشوائي طبيعي يعبر عن معامل الذكاء.

المطلوب إيجاد ل(٨٠ < س < ١٢٠)

ومنها ل(٨٠ < س < ١٢٠) = ل(-١,٣٣ < ع < ١,٣٣) (لماذا؟)

= ل(ع < ١,٣٣) - ل(ع < -١,٣٣)

= ٠,٩٠٨٢ - ٠,٠٩١٨

= ٠,٨١٦٤

أي أن حوالي ٨١,٦٤ ٪ من الأشخاص لديهم معامل ذكاء يقع بين ٨٠ ، ١٢٠

ب ل(س > ٨٠) = ل(ع > -١,٣٣)

= ٠,٩٠٨٢

عدد الأفراد الذين تزيد معاملات ذكائهم عن ٨٠

= ٢٠٠٠ × ٠,٩٠٨٢

= ١٨١٦,٤

≈ ١٨١٦ فرداً

مثال ٢ : إذا كانت علامات الطلبة في امتحان الثانوية العامة قريبة من التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٦٥، وانحراف معياري ٧، وقررت وزارة التربية والتعليم العالي قبول الطلبة الذين تكون علاماتهم ضمن أعلى ٢٠٪ من العلامات في الجامعات الحكومية، فما أدنى علامة تقبل في الجامعات الحكومية؟

الحل : نفرض أن أقل علامة تحصل على قبول في الجامعات الحكومية هي س، والعلامة المعيارية المقابلة لها ع

ل (ع ≤ $\frac{س - ٦٥}{٧}$) = ٠,٢ (لماذا؟)

⇐ ل (ع < $\frac{س - ٦٥}{٧}$) = ٠,٨ ≈ ٠,٧٩٩٥

ومن الجدول قيمة ع = ٠,٨٤ ومنها س = ٧٠,٨٨ (لماذا؟)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تمارين ٣ - ٤

١ مثلت علامات ١٠٠٠ طالب توزيعاً طبيعياً، وتم حساب العلامات المعيارية لهم، ومُثّلت على توزيع طبيعي معياري. أجد عدد الطلبة الذين تقل علاماتهم المعيارية عن – ١٥ , ٢

٢ إذا علم أن علامات الطلبة في اختبار القدرات في مادة الرياضيات، يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي ٦٩ وانحراف معياري ٤ أجد ما يأتي:

أ احتمال أن تكون علامة الطالب أكبر من ٧٥

ب احتمال أن تكون علامة الطالب بين ٦٠ ، ٧٠

جـ نسبة الطلاب الذين حصلوا على علامة أقل من ٦٩

تمارين عامة

١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كان الوسط الحسابي لعلامات ٣٠ طالباً يساوي ٧٥ والانحراف المعياري يساوي ٥، فإن العلامة المعيارية المناظرة للعلامة ٦٥ تساوي :

أ) –٢ ب) ٢ جـ) ٧ د) ٩

٢ في توزيع طبيعي وسطه الحسابي ٥٠ وانحرافه المعياري ١٠ تكون نسبة المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين ٤٠ ، ٧٠ تساوي :

أ) ١٣ ٪ ب) ٣٤ ٪ جـ) ٦٨ ٪ د) ٨٢ ٪

٣ حجر نرد منتظم عليه الأرقام ١ ، ١ ، ١ ، ٢ ، ٢، ٥ تم رميه ٣٠ مرة، كم مرةً تتوقع أن يظهر الرقم ١؟

أ) ٢٠ ب) ١٥ جـ) ١٠ د) ٥

٢ إذا كان جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق هو:

س	٣	٨	٩	١٢	١٥
ل(س)	أ	ب	٠,٣	٣ب	٢ أ

أحسب توقع المتغير العشوائي ق .

٣ تتخذ علامات (٥٠٠٠) طالب في امتحان الثانوية العامة شكلاً قريباً من التوزيع الطبيعي وسطه الحسابي ٧٦ وانحرافه المعياري ٩، فإذا كانت نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن علامة القبول في كلية الهندسة هي ٠,٨٦٤٣ ، أجد علامة القبول.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تعريف: المتتالية هي اقتران مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) ، أو مجموعة جزئية منها على صورة {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن}، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية (ح).

وتقسم المتتاليات إلى نوعين: منتهية عندما يكون فيها المجال مجموعة جزئية من ط على الصورة {١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ن}، وغير منتهية عندما يكون المجال ط.

ويرمز للحدّ الأول بالرمز $ح_١$ والحدّ الثاني بالرمز $ح_٢$ وهكذا...،

يرمز للحدّ الذي ترتيبه ن بالرمز $ح_ن$ ويسمى الحدّ العام (الحدّ النوني).

مثال ١ : إذا كان الحدّ العام للمتتالية $ح_ن = ن^٣ + ١$

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى من هذه المتتالية.

٢ أكتب الحدّ العاشر من المتتالية.

الحل :

١ بتعويض قيم ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ في الحدّ العام نحصل على:

$ح_١ = ١^٣ + ١ = ٢$ ، $ح_٢ = ٢^٣ + ١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٢٨$ ، $ح_٤ = ٦٥$ ، $ح_٥ = ١٢٦$

٢ $ح_{١٠} = ١٠^٣ + ١ = ١٠٠١$

نشاط ١ : أجد الحدّ العام للمتتاليات.

١ ٣ ، ٧ ، ١١ ، .....

٢ ١ ، $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، .....

٣ ١١ ، ١٠١ ، ١٠٠١

بالربط بين قيمة كل حدّ وترتيبه، أجد:

١ $ح_١ = ٣ = (١ \times ٤) - ١$

$ح_٢ = ٧ = (٢ \times ٤) - ١$

$ح_٣ = ١١ = (٣ \times ٤) - ١$

فيكون $ح_ن = ٤ن - ١$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

٢ $ح_{١} = ١ = \frac{١}{٣^{١}}$ ، $ح_{٢} = \frac{١}{٨} = \frac{١}{٣^{٢}}$ ، $ح_{٣} = \frac{١}{٢٧} =$ .....

فيكون $ح_{ن}$ = ...

٣ $ح_{ن}$ = ...

مثال ٢ : أكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية التي فيها:

$ح_{١} = ٢$ ، $ح_{٢} = ٣$ ، $ح_{ن+٢} = ح_{ن} \times ح_{ن+١}$

الحل : $ح_{١} = ٢$ ، $ح_{٢} = ٣$ معطى

عندما ن = ١ ، $ح_{٣} = ح_{١} \times ح_{٢} = ٢ \times ٣ = ٦$

وعندما ن = ٢ ، $ح_{٤} = ح_{٢} \times ح_{٣} = ٣ \times ٦ = ١٨$

تمارين و مسائل ٣ - ٥

١ أكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات الآتية:

أ $ح_{ن} = ٥ ن^{٢} - ٩$

ب $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٢} = -١$ ، $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} \times ح_{ن}$ $\forall$ ن $\in$ ص$^{+}$

٢ أكتب الحدّ العام لكل من المتتاليات الآتية:

أ $\frac{٢}{١}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، .....

ب ٢ ، ٩ ، ٢٨ ، .....

جـ ٤ ، -٨ ، ١٦ ، -٣٢ ، ..... ، -١٢٨

٣ في المتتالية التي حدّها العام هو $ح_{ن} = ٣ \times ٢^{(ن-٥)}$ ، أبين أن:

$(ح_{٥})^{٢} = ح_{٢} \times ح_{٨}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

نشاط ١ : تعتبر الحديقة المنزلية جزءاً من حياة المواطن الفلسطيني، و لتعميق قيم حب الأرض والانتماء لها، طلب أبو حسن من ابنه حسن استثمار وقته في العطلة الصيفية بزراعتها بأنواع الخضراوات المختلفة، على أن يكافئه بثلاثة دنانير في اليوم الأول، و ٥ دنانير في اليوم الثاني، و ٧ دنانير في اليوم الثالث وهكذا لمدة أسبوع. يمكن كتابة المبالغ على شكل متتالية، و هي .....

أما الحدّ العام للمبالغ $ح_ن$ = ...

وبعد أن أنهى حسن مهمته، قام بكتابة مبالغ المكافآت التي حصل عليها بالصورة الآتية:

٣ + ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ + ١٥ ، إن كتابة هذه المكافآت بهذه الصورة يسمى متسلسلة.

ويمكن كتابة هذا المجموع باستخدام الرمز $\sum$ ويقرأ (مجموع) حيث يمكننا كتابة هذه المتسلسلة على الصورة الآتية $\sum_{ر=١}^{٧} (٢ر + ١)$

ألاحظ أن هذه المتسلسلة منتهية، وعدد عناصرها ٧.

ويمكن التعبير عن المتسلسلة −١ + ٦ + ٢٥ + ٦٢ + ... على الصورة

$\sum_{ر=١}^{\infty} (ر^{٣} - ٢)$ حيث ر ∈ ط ، وهي متسلسلة غير منتهية.

مثال ١ : أجد مفكوك المتسلسلة الآتية $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ١)$:

الحل : عندما ر = ١ ، $ح_١ = ٣ \times ١ + ١ = ٤$

عندما ر = ٢ ، $ح_٢ = ٣ \times ٢ + ١ = ٧$ وهكذا

$\sum_{ر=١}^{٤} (٣ر + ١) = ٤ + ٧ + ١٠ + ١٣$

نشاط ٢: أكتب كلاً من المتسلسلات الآتية باستخدام الرمز ($\sum$)

١. ٥ + ١٠ + ١٥ + ... + ١٥٠

٢. ٢ + ١٦ + ٥٤ + ١٢٨ + ٢٥٠

٣. ١ × ٢ + ٢ × ٣ + ٣ × ٤ + ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

١ $٥ \times ١ + ٥ \times ٢ + ٥ \times ٣ + \ldots\ldots + ٥ \times ٣٠$

ألاحظ أن ن = ٣٠ ، $ح_ر = ٥ ر$ فتكون المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٣٠} ٥ ر$

٢ ن = ٥ ، $ح_ر$ = ... فتكون المتسلسلة .....

٣ ن = ... ، $ح_ر$ = ... فتكون المتسلسلة .....

مثال ٢ : أجد مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^{٢} + ١)$

الحل : $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ر^{٢} + ١) = ٣ + ٩ + ١٩ + ٣٣ + ٥١$

ومنها مجموع المتسلسلة = ١١٥

خصائص المجموع $\sum$

١ $\sum_{ر=١}^{ن} أ = أن$ ، $\forall أ \in ح$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} أ س_ر = أ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ ، $أ \in ح$

٣ $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \pm ص_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} ص_ر$

أتعلم:

١ $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن (ن + ١)}{٢}$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = \frac{ن (ن + ١) (٢ن + ١)}{٦}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

مثال ٣ : إذا كان $\sum_{ر=١}^{١٠} (ر^{٢} + أ ر - ٧) = ٤٢٥$ ، أجد قيمة أ.

الحل : باستخدام خصائص المجموع ($\sum$)

$$\sum_{ر=١}^{١٠} (ر^{٢} + أ ر - ٧) = \sum_{ر=١}^{١٠} ر^{٢} + أ \times \sum_{ر=١}^{١٠} ر - ٧ \sum_{ر=١}^{١٠} ١ = ٤٢٥$$

$$= \frac{ن (ن + ١) (٢ن + ١)}{٦} + أ \times \frac{ن (ن + ١)}{٢} - ٧ \times ن = ٤٢٥$$

بتعويض ن = ١٠ ينتج:

$$\frac{١٠ (١٠ + ١) (٢ \times ١٠ + ١)}{٦} + أ \times \frac{١٠ (١٠ + ١)}{٢} - ٧ \times ١٠ = ٤٢٥$$

$$\Leftarrow \quad ٣٨٥ + ٥٥ أ - ٧٠ = ٤٢٥$$

$$\Leftarrow \quad ٥٥ أ = ١١٠ ، \quad أ = ٢$$

تمارين و مسائل ٣ - ٦

١ أكتب كلا من المتسلسلات الآتية، باستخدام رمز المجموع ($\sum$)

أ) $ك^{٣} + ك^{٦} + ك^{٩} + ...$

ب) $\frac{٣}{٤} + \frac{٤}{٥} + \frac{٥}{٦} + ... + \frac{١٠٠}{١٠١}$

٢ أجد مجموع المتسلسلات الآتية:

أ) $\sum_{ر=١}^{٣} (ر^{٢} + ٢ر + ٥)$

ب) $\sum_{ر=١}^{٨٥} (-١)^{ر}$

جـ) $\frac{\sum_{ر=١}^{٤٠} ر^{٢}}{\sum_{ر=١}^{٤٠} ٢ر}$

د) $\sum_{ر=١}^{٤٠} \frac{ر}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تعريف: المتتالية الحسابية: هي المتتالية التي يكون فيها الفرق بين أي حدّ والحد السابق له مباشرة، يساوي مقداراً ثابتاً، يسمى أساس المتتالية الحسابية، ويرمز له بالرمز(د).

نشاط ١: أميز المتتاليات الحسابية من غيرها فيما يأتي:

١) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١

٢) ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١

٣) ١ ، -١ ، ١ ، -١ ، ١

٤) المتتالية التي حدّها النوني $ح_ن = ٣ن + ١$

١) المتتالية حسابية، لأن ٥ - ٣ = ٧ - ٥ = ٩ - ٧ = ٢ = د

٢) ليست حسابية، لأن ٤ - ٨ ≠ ٢ - ٤

٣) ليست حسابية، لأن .....

٤) حدود المتتالية، هي: ..... ، ..... ، ..... ، ..... وهي متتالية .....

الحدّ العام للمتتالية الحسابية:

الحدّ العام للمتتالية الحسابية هو : $ح_ن = أ + (ن-١) د$ ، حيث أ : الحدّ الأول، د : الأساس

مثال ١ : أجد الحدّ العاشر في المتتالية الحسابية التي حدّها الأول = ٥ وأساسها = ٢

الحل : أ = ٥ ، د = ٢

$ح_ن = أ + (ن - ١) د$

$ح_{١٠} = أ + ٩ د$

$= ٥ + ٩ \times ٢ = ٢٣$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

مثال ٢ : متتالية حسابية حدّها الثالث يساوي ٥ وحدها التاسع يساوي ١٧

١ أكتب حدود هذه المتتالية.

٢ هل العدد ٣٠٠ أحد حدود هذه المتتالية؟

الحل :

١ $ح_{٣} = ٥ \Leftarrow أ + ٢ د = ٥$ ..... (١)

$ح_{٩} = ١٧ \Leftarrow أ + ٨ د = ١٧$ ..... (٢)

بطرح المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن ٦ د = ١٢ ومنها د = ٢

بالتعويض في المعادلة (١) عن قيمة (د) ينتج أن أ = ١

∴ المتتالية هي ١ ، ٣ ، ٥ ، .....

أفكر بطرق أخرى للحل.

٢ أفرض أن $ح_{ن} = أ + (ن - ١) د = ٣٠٠$

$١ + (ن - ١) \times ٢ = ٣٠٠$

$١ + ٢ن - ٢ = ٣٠٠ \Leftarrow ٢ن = ٣٠١$ بالقسمة على ٢ ينتج أن:

$ن = \frac{١}{٢}$ ١٥٠ ، ألاحظ أن ن $\notin$ ط ، ومنها ٣٠٠ ليست أحد حدود المتتالية.

تعريف: الوسط الحسابي للعددين أ ، ب هو $\frac{أ + ب}{٢}$

ألاحظ أن الأعداد أ ، $\frac{أ + ب}{٢}$ ، ب تشكل متتالية حسابية.

بوجه عام: إذا أدخلنا أوساطاً حسابية $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$ بين العددين أ ، ب

فإن الأعداد: أ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$ ، ب تشكل متتالية حسابية عدد حدودها (ن + ٢)

مثال ٣ : أدخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٧ ، ١٠٧

الحل : عند إدخال ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٧ ، ١٠٧ تتكون المتتالية الحسابية:

١٧ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، $س_{٤}$ ، ١٠٧

أ = ١٧ ، $ح_{٦} = ١٠٧$

$ح_{٦} = أ + ٥ د = ١٠٧ \Leftarrow ١٧ + ٥ د = ١٠٧ \Leftarrow ٥ د = ٩٠$ ومنها د = ١٨

المتتالية هي : ١٧ ، ٣٥ ، ٥٣ ، ٧١ ، ٨٩ ، ١٠٧

الأوساط الحسابية هي: ٣٥ ، ٥٣ ، ٧١ ، ٨٩

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

١ متتالية حسابية فيها $ح_{٤} = -٣٣$ ، $ح_{٩} = -١٣$

أجد: أ حدود المتتالية.

ب رتبة أول حدّ موجب فيها.

٢ متتالية حسابية مجموع حدّيها الثاني والثالث ١٥٢ وحدّها السادس يزيد عن حدّها الثامن بمقدار ٨، أكتب حدود هذه المتتالية الحسابية.

٣ إذا كوّنت الأعداد ٧ ، س ، .... ، ١٠ س + ٩ ، ١٢٣ متتالية حسابية، أجد:

أ قيمة س

ب عدد حدود هذه المتتالية.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

أتعلم: مجموع أول ن حدٍ من حدود المتسلسلة الحسابية التي حدّها الأول (أ) وحدّها الأخير (ل)

هو $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

ويمكن استنتاج صورة أخرى للمجموع، وذلك بوضع ل = أ + (ن – ١) د

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن – ١) د]$

مثال ١ : أجد مجموع أول ١٥ حدّاً من المتسلسلة ٢٠ + ١٦ + ١٢ + ...

الحل : أ = ٢٠ ، د = ١٦ – ٢٠ = –٤ ، ن = ١٥

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ + (ن – ١) \times د)$

$= \frac{١٥}{٢} (٤٠ + ١٤ \times –٤) = –١٢٠$

مثال ٢ : أجد قيمة $\sum_{ر=١}^{٦٠} (١٠ – ر)$

الحل : المجموع = (١٠ – ١) + (١٠ – ٢) + (١٠ – ٣) + ... + (١٠ – ٦٠)

= ٩ + ٨ + ٧ + ... + (–٥٠)

أ = ٩ ، ل = –٥٠ ، ن = ٦٠

$جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

$= \frac{٦٠}{٢} \times (٩ – ٥٠) = ٣٠ \times –٤١ = –١٢٣٠$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

مثال ٣ : إذا كان مجموع أول ن حدٍّ من حدود متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة جـ$_{ن}$ = ن × (٢ن + ١)
أجد هذه المتسلسلة.

الحل : ح$_{١}$ = جـ$_{١}$ = ١ × (٢ + ١) = ٣ (لماذا؟)

ح$_{٢}$ = جـ$_{٢}$ − جـ$_{١}$ = ٢ × ٥ − ٣ = ٧

أ = ٣ ، د = ٧ − ٣ = ٤

المتسلسلة، هي: ٣ + ٧ + ١١ + ...

تمارين ومسائل ٣ - ٨

١ أجد مجموع أول ٢٠ حدٍّ من المتسلسلة ٣٠ + ٢٧ + ٢٤ + ...

٢ متسلسلة حسابية حدّها الأول ٧ و حدّها الأخير (−١٢) و مجموع حدودها (−٥٠) أجد المتسلسلة.

٣ متسلسلة حسابية تتكون من ٢٥ حدّاً، حدّها الأوسط يساوي ٣٨، ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة منها يساوي ٢١٣. أجد المتسلسلة، وأجد مجموعها.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تعريف: تسمى المتتالية متتاليةً هندسيةً،إذا كانت النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة، تساوي مقداراً ثابتاً، ويسمى المقدار الثابت أساس المتتالية الهندسية، ويرمز له بالرمز (ر).
ويمكن كتابة حدود المتتالية الهندسية التي حدّها الأول (أ) وأساسها (ر) على الصورة
أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$ ، ٠٠٠٠٠٠ ، وعليه، فإن الحدّ العام يعطى بالقاعدة: $ح_{ن} = أ ر^{ن-١}$

نشاط ١ : أميز المتتالية الهندسية عن غيرها من المتتاليات الآتية، ثم أكتب الحدّ العام للمتتالية الهندسية منها:

١) ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٠٠٠٠٠
٢) ٣٢ ، ٨ ، ٢ ، ٠٠٠٠٠
٣) ١ ، ٤ ، ٦ ، ٠٠٠٠٠٠
٤) س ، $س^{٣}$ ، $س^{٥}$ ، ٠٠٠٠ : س ≠ ٠

١) ألاحظ أن $\frac{٦}{٢} = \frac{١٨}{٦} = ٣$ إذن المتتالية هندسية، الحد العام $ح_{ن}$ = ...
٢) ..... ، الحد العام $ح_{ن}$ = ...
٣) ألاحظ أن $\frac{٤}{١} \neq \frac{٦}{٤}$ المتتالية ليست هندسية.
٤) .....

مثال ١ : أجد الحدّ السادس من المتتالية الهندسية ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ،.....

الحل : أ = ٥ ، ر = $\frac{١٠}{٥} = ٢$ ، $ح_{٦} = ٥ \times ٢^{٥} = ١٦٠$

مثال ٢ : إذا كان ١٥٣٦ هو أحد حدود المتتالية الهندسية : ٣ ، ٦ ، ١٢ ،... فما رتبة هذا الحدّ؟

الحل : أ = ٣ ، ر = $\frac{٦}{٣} = ٢$ ، $ح_{ن} = ١٥٣٦$ ، ن = ؟
$ح_{ن} = أ ر^{ن-١}$
$١٥٣٦ = ٣ \times ٢^{ن-١}$ بالقسمة على ٣ ⇐ $٢^{ن-١} = ٥١٢$ ∴ $٢^{ن-١} = ٢^{٩}$.
ومنها ن − ١ = ٩ ∴ ن = ١٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

مثال ٣ : إذا كانت س + ٣ ، ٤ ، س − ٣ تكون متتالية هندسية: فما قيمة / قيم س؟

الحل : $\frac{٤}{س + ٣} = \frac{س - ٣}{٤} \Leftarrow (س - ٣)(س + ٣) = ١٦$

$س^{٢} - ٩ = ١٦ \Leftarrow س^{٢} = ٢٥$ ، $س = \pm ٥$

تمارين ومسائل ٣ - ٩

١ أجد الحدّ السابع من المتتالية الهندسية ٣ ، −٩ ، ٢٧ ، .....

٢ متتالية هندسية مجموع حدّيها الأول والثاني ١٢، ومجموع حدّيها الثالث والرابع يساوي ١٠٨ . أجد هذه المتتالية.

٣ ثلاثة أعداد تكون متتاليةً هندسيةً مجموعها ٣٥، إذا أضيف إلى العدد الثاني ٦ وإلى العدد الثالث ٧ تكونت متتاليةً حسابيةً، أجد هذه الأعداد.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

أتعلم: مجموع أول ن حدٍ من حدود متسلسلة هندسية حدّها الأول أ، وأساسها ر يعطى بالقاعدة:

$جـ_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$، حيث ل الحدّ الأخير.

ألاحظ أنه يمكن كتابة: $جـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ ، $ر \neq ١$ بالصورة الآتية:

$جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$ (لماذا؟)

مثال ١ : أجد مجموع أول ٨ حدود من حدود المتتالية الهندسية : ٢ ، ٦ ، ١٨ ،.....

الحل : $أ = ٢$ ، $ر = ٣$ ، $ن = ٨$ $\quad جـ_٨ = \frac{٢ \times (^٨٣ - ١)}{٣ - ١} = ٦٥٦٠$

مثال ٢ : متتالية هندسية حدّها الخامس ١٦ ، وحدّها الثامن ١٢٨ ، أجد:

١ المتتالية. ٢ مجموع الحدود السبعة الأولى منها.

الحل : ١ $ح_٥ = ١٦$ ، $أ ر^٤ = ١٦$ .....(١)

$ح_٨ = ١٢٨$ ومنها $أ ر^٧ = ١٢٨$ .....(٢)

وبقسمة (٢) على (١) ينتج أن: $\frac{أ ر^٧}{أ ر^٤} = \frac{١٢٨}{١٦} \Leftarrow ر^٣ = ٨$ ومنها $ر = ٢$

بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن $١٦ أ = ١٦$ ومنها $أ = ١$

المتتالية هي ١ ، ٢ ، ٤ ،.....

٢ $جـ_٧ = \frac{١ \times (^٧٢ - ١)}{٢ - ١} = \frac{١ \times (١٢٨ - ١)}{-١} = ١٢٧$

تمارين ومسائل ٣ - ١٠

١ إذا كان الحدّ الأول من متسلسلة هندسية = ١، والحدّ الأخير = ٦٤، ومجموع حدودها = ٨٥، أجد أساسها.

٢ أجد $\sum_{ر=١}^{١٠} ٣ ر^{-٨}$

٣ تسقط كرة من ارتفاع ٨م بحيث كلما تصطدم بالأرض في كل مرة يقل ارتفاعها بمقدار ربع ارتفاعها السابق، أجد : أ ارتفاع الكرة بعد الصدمة السادسة.

ب بعد كم صدمة يكون مجموع ارتفاعاتها يساوي $\frac{٧٨١}{٣٢}$ م.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تمارين عامة

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما الحدّ العام للمتتالية ١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ... ؟

أ) $ح_ن = (-١)^ن$ ب) $ح_ن = (-١)^{ن+١}$

جـ) $ح_ن = ن^ن$ د) $ح_ن = (-ن)^ن$

٢ ما قيمة $ح_{١٠١}$ في المتتالية التي حدّها العام $ح_ن = جا(\frac{\pi ن}{٤})$ ؟

أ) −١ ب) $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ د) $\frac{١}{٢}$

٣ ما مجموع المتسلسلة $\sum_{ر=١}^{١٧٥} (-١)^{ر+١}$ ؟

أ) −١ ب) ٠ جـ) ١ د) ٢

٤ ما قيمة $\frac{\sum_{ر=١}^{١٠٠} ر^٢}{\sum_{ر=١}^{١٠٠} ر}$ ؟

أ) ٦٧ ب) ٧٠ جـ) ٨٠ د) ١٠٠

٥ ما رتبة الحدّ الذي قيمته −٣٢ في المتتالية ٤ ، ٢ ، ٠ ، ... ؟

أ) ١٨ ب) ١٩ جـ) ٢٠ د) ٢١

٢ في المتتالية الهندسية : ٢ ، ٤ ، ٨ ، ... أجد مجموع ثمانية حدود ابتداءً من الحد الخامس.

٣ إذا كان مجموع الحدود الستّة الأولى من متتالية هندسية يساوي ٩ أمثال مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها، وإذا كان حدّها العاشر = ٦٤ فما المتتالية؟

٤ خزان ماء سعته ٥ , ٦٢ م^٣، يضخ منه خُمس كمية الموجودة فيه يومياً، أجد كمية الماء التي تبقى في الخزان بعد ستة أيام.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

ورقة عمل (١)

١ قطعة نقود غير منتظمة، احتمال ظهور الصورة على وجهها العلوي عند إلقائها يساوي مثليْ احتمال ظهور الكتابة، تم إلقاؤها مع قطعة نقد منتظمة مرةً واحدةً، فإذا كان المتغير العشوائي ق يمثل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي.

أ أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق .

ب أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق إذا كُررت التجربة ١٠ مرات.

٢ إذا كانت أطوال الطلاب في جامعة بيرزيت تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري ٨سم، أجد قيمة μ إذا كانت العلامة المعيارية لطالب طوله ١٨٠سم هي ١,٢٥ .

٣ زرعت ندين ٣ بذور متجانسة في النوع والصلاحية في حديقة المنزل، وكان احتمال إنبات البذرة الواحدة يساوي $\frac{٢}{٣}$ ودلَّ المتغير العشوائي ق على عدد البذور التي ستنبت من البذور الأربعة.

١- اكتب مدى ق. ٢- أجد التوزيع الاحتمالي. ٣- أجد توقع ق.

٤ أجد أساس المتتالية الهندسية التي حدّها الأول = ٣ ، وحدّها الأخير ١٥٣٦ و مجموع حدودها ٣٠٦٩

٥ إذا كان ب هو الوسط الحسابي للعددين أ ، جـ أثبت أن:

$$\frac{ب + ٢أ}{ب - جـ} + \frac{ب + ٢جـ}{ب - أ} = ٤$$

٦ أجد مجموع ٢٥ حداً الأولى من المتتالية التي حدها العام ح$_ن$ =

$$\left.\begin{array}{l} ٢ن + ١ \quad ، \quad ن \in \{١، ٣، ٥، \ldots\} \\ ٥ن + ١ \quad ، \quad ن \in \{٢، ٤، ٦، \ldots\} \end{array}\right\}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

اختبار الوحدة

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٠ ، −٥) هي:

أ) ص٢ = −٢٠س. ب) ص٢ = ٢٠س. جـ) س٢ = ٢٠ص. د) س٢ = −٢٠ص.

ما عدد حدود المتتالية الهندسية: ٨١، ٢٧، ٩، ..... ، $\frac{١}{٨١}$ ؟

أ) ٨. ب) ٩. جـ) ١٠. د) ١٧.

إذا كان جـن = (٢ن + ٢ن) يمثل مجموع ن حداً الأولى في متتالية حسابية، فإن قيمة الحد الخامس عشر تساوي:

أ) ٢٥٥. ب) ٣٣. جـ) ٣١. د) ٢٢٤.

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو ٦٥، والانحراف المعياري σ = ٥ فما العلامة المعيارية المقابلة للقيمة ٥٥؟

أ) ٢. ب) ٠,٥. جـ) −٢. د) − ٠,٥.

ما الحد العام للمتتالية ١ ، −١ ، ١ ، −١ ، ..... ؟

أ) ع ن= (−١) ن+١. ب) ع ن= ن ن. جـ) ع ن= (−ن) ن. د) ع ن= (−١) ن

س٢: قطعة نقود غير منتظمة، احتمال ظهور الصورة على وجهها العلوي عند إلقائها يساوي ثلاثة أمثال احتمال ظهور الكتابة، تم إلقاؤها مع قطعة نقد منتظمة مرةً واحدةً، فإذا كان المتغير العشوائي ق يمثل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي، أحسب التوقع للمتغير العشوائي ق .

س٣: إذا كوّنت الأعداد ٧ ، س ، .... ، ١٠س + ٩ ، ١٢٣ متتالية حسابية، أجد:

أ قيمة س ب عدد حدود هذه المتتالية.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

س٤: إذا كان س متغيراً عشوائياً، مداه = {٠، ١، ٢، ٣، ٤} وكان ل(٠) = ل(٤) = $\frac{١}{٦}$، ل(١) = ل(٣) = $\frac{١}{٤}$.

١ـ اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س. ٢ـ احسب توقّع س.

س٥:

أ متتالية هندسية مجموع حدّيها الأول والثاني ١٢، ومجموع حدّيها الثالث والرابع يساوي ١٠٨. أجد هذه المتتالية.

ب أجد $\sum_{ر=١}^{١٠} ٣^{ر-٨}$

س٦:

إذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة في إحدى المدن هو متغير عشوائي وسطه الحسابي ١٧٠ ديناراً، وانحرافه المعياري ٢٠ ديناراً. إذا اختيرت أسرة عشوائياً من هذه الأسر فأوجد:

١- احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ ديناراً، ٢٠٠ دينار.

٢- عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠ ديناراً.

ع	-١,٥	-١	-٠,٥	٠,٥	١	١,٥
المساحة	٠,٠٦٦٨	٠,١٥٨٧	٠,٣٠٨٥	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

ملحق: جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
-٣,٧	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٦	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١
-٣,٥	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢
-٣,٤	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
-٣,٣	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
-٣,٢	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
-٣,١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
-٣,٠	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
-٢,٩	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
-٢,٨	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
-٢,٧	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
-٢,٦	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
-٢,٥	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
-٢,٤	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
-٢,٣	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
-٢,٢	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
-٢,١	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
-٢,٠	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
-١,٩	٠,٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
-١,٨	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
-١,٧	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
-١,٦	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
-١,٥	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
-١,٤	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
-١,٣	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
-١,٢	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
-١,١	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
-١,٠	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
-٠,٩	٠,١٨٤١	٠,١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
-٠,٨	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧
-٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
-٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
-٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
-٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
-٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
-٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
-٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٤	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4

تابع جدول التوزيع الطبيعي المعياري التراكمي

ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114271 | TRACK 519cca897497dca4