

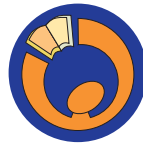


دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف الثامن

الفترة الرابعة



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | mohe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 هاتف | فاكس +970-2-2983280

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

المحتويات

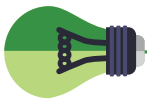
النسب المثلثية والاحتمالات

١	١-٤ النسب المثلثية للزوايا الحادة (١)
٤	٢-٤ النسب المثلثية للزوايا الحادة (٢)
٦	٣-٤ زوايا الارتفاع والانخفاض
٨	٤-٤ احتمال الحادث وقوانين
١١	٥-٤ قوانين الاحتمالات
١٦	٦-٤ احتمال المتممة لحادث واحتمال الفرق بين حادثين

النتائج

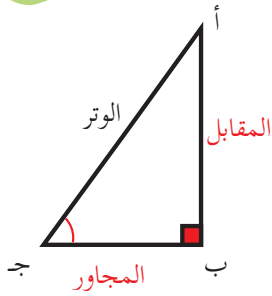
يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف النسب المثلثية وقوانين الاحتمالات في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١- تعرّف النسب المثلثية الأساسية للزوايا الحادة.
- ٢- إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأيّ زاوية حادة .
- ٣- استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة.
- ٤- تعرّف العلاقة بين جيب الزاوية وجيب تمام متممها.
- ٥- استنتاج النسب المثلثية لزاويا خاصّة.
- ٦- تعريف زاويتي الارتفاع والانخفاض.
- ٧- توظيف النسب المثلثية وزوايا الارتفاع والانخفاض في حلّ مسائل حياتية.
- ٨- إيجاد احتمال حادث في تجربة عشوائية.
- ٩- إيجاد احتمال الاتحاد لأيّ حادثين.
- ١٠- إيجاد احتمال متممة حادث.
- ١١- إيجاد احتمال الفرق بين حادثين.
- ١٢- توظيف الاحتمالات في حلّ مسائل حياتية.



النَّسَبُ الْمُثَلَّثِيَّةُ لِلزَّوَايَا الْحَادَّةِ (١)

١-٤



تعريف ١: في المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب، يُسمَّى الضلعُ أ ج وَتَرَ المثلث، فيما يُسمَّى الضلعُ أ ب المقابل للزاوية ج، بينما يُسمى الضلع ب ج المجاور للزاوية ج.

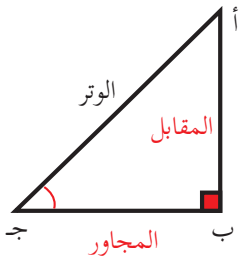
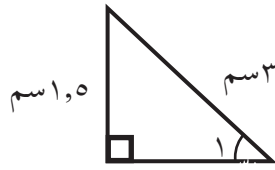
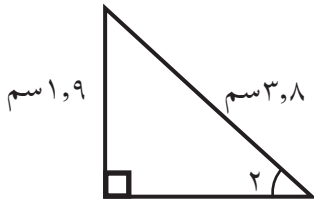


نشاط ١: أتاَمَلُ المثلثات القائمة الآتية التي فيها $1 \neq 2$ ، ثمَّ أَكْمِلُ:

(للزاوية ١): $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dots$

(للزاوية ٢): $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dots$

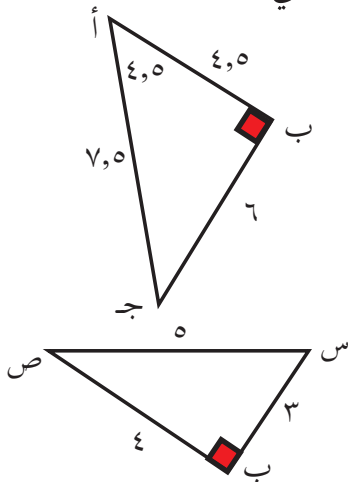
ماذا تلاحظ؟



تعريف ٢: في المثلث القائم الزاوية في ب، يُعرَّف جيبُ الزاوية الحادة ج (جاجة) بأنه نسبة طول الضلع المقابل للزاوية ج إلى طول الوتر في المثلث؛ أي أن جاجة = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$



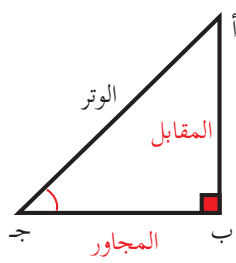
نشاط ٢: أتاَمَلُ المثلثات القائمة الآتية، وأكْمِلُ الجدول الآتي:



الزاوية	طول مقابلها	طول الوتر	جيب الزاوية
أ	٦	٧,٥	
ج			
ص		٥	
س			$\frac{6}{\dots}$

أفكّر، وأناقش: هل يمكن أن يزيد جيبُ الزاوية الحادة عن ١؟





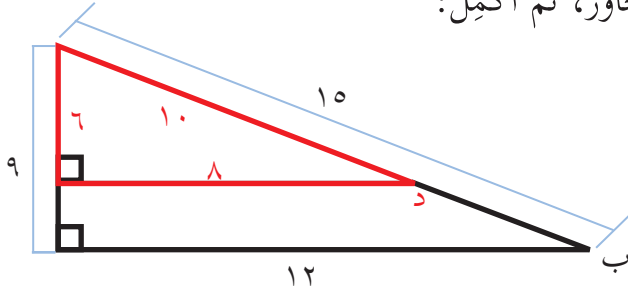
تعريف ٣: في المثلث القائم الزاوية في ب، يُعرف جيب تمام الزاوية جـ (جتاج): بأنه نسبة طول الضلع المجاور للزاوية جـ الى طول الوتر؛ أي أن جتاج = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$



أَتأملُ الشَّكْلَ المجاور، ثُمَّ أَكْمِلُ:



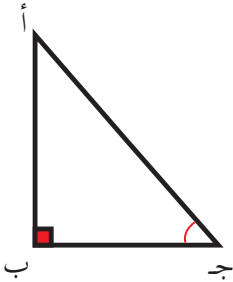
نشاط ٣:



ب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ (لماذا؟)

$$\frac{\dots}{10} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{جتاج}$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{جتاج} \quad \text{ماذا تلاحظ؟}$$



تعريف ٤: في المثلث القائم الزاوية في ب، يُعرف ظلُّ الزاوية الحادة جـ (ظاج): بأنه نسبة طول الضلع المقابل للزاوية جـ الى طول الضلع المجاور لها؛ أي أن ظاج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



أَتأملُ الشَّكْلَ المجاور، وَأَحْسِبُ ظِلَّ الزَّاوِيَةِ ع بطريقتين:

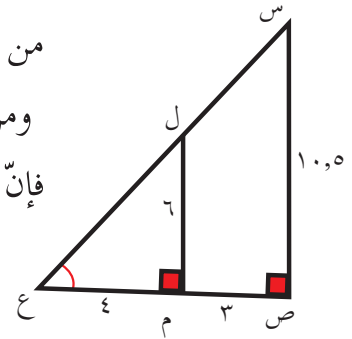


نشاط ٤:

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{ل م}}{\text{ع م}} = \text{ظاج} \quad \text{فإن ظاج ع}$$

ومن المثلث س ص ع

$$\text{فإن ظاج} = \dots = \dots \quad \text{(ماذا تلاحظ؟)}$$



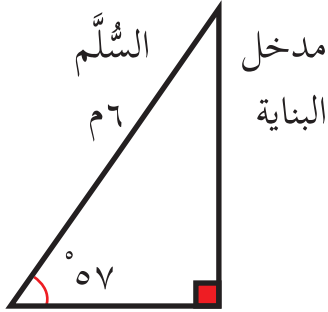
أَتَعَلَّم: لأي زاوية حادة جـ تسمى النسب: جاج، جتاج، ظاج، بالنسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ حيث ظاج = $\frac{\text{جاج}}{\text{جتاج}}$





نشاط ٥:

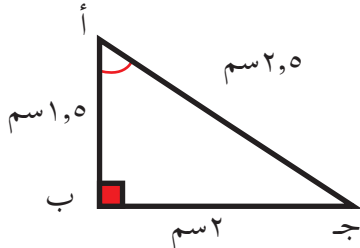
تريد لى تركيز سُلّم طوله ٦م على حائط قائم ، فإذا كانت الزاوية المحصورة بين حافة السُلّم و سطح الأرض ٥٧° ، فما بُعد أسفل السُلّم عن مدخل البناية (أعتبر جتا ٥٧° = ٠,٥٤) .
أرسم رسماً توضيحياً، كما في الشكل المجاور:



$$\text{جتا } ٥٧^\circ = \frac{\text{بُعد أسفل السُلّم عن حافة البناية}}{\text{طول السُلّم}} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$\text{ومنها: } ٠,٥٤ = \frac{\text{بُعد أسفل السُلّم عن حافة البناية}}{\text{... م}}$$

ومنها: بُعد أسفل السُلّم عن حافة البناية =

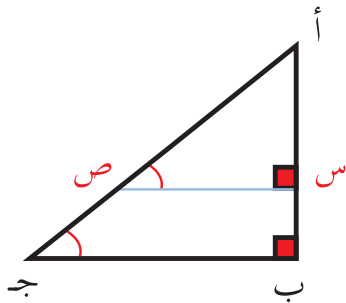


تَمارينُ وَمَسائِلُ:

(١) أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ، معتمداً على الشكل الآتي:

(٢) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه: أ ب = ٨سم، ب ج = ٦سم، أ ج = ١٠سم،
أجد كلاً من: جأ، جاج، جتا.

(٣) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٦سم، ب ج = ٨سم. رُسم من النقطة ه الواقعة على ب ج عمود على أ ج في النقطة د، فإذا كان ه د = ٣سم، د ج = ٤سم،
أجد كلاً من: (أ) جأ (ب) ظاهر (ج) ظاج



مهمة تعليمية :

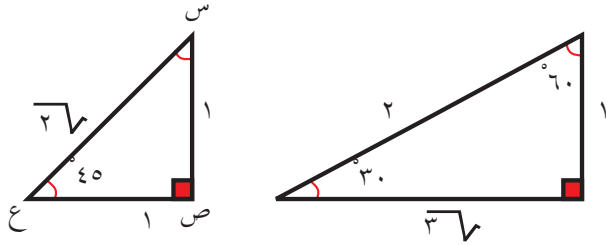
أتأمل الشكل الآتي الذي فيه أ س = ٦سم، س ص = ٨سم،
أ ب = ٩سم، ثم أجد طول الضلع ب ج.



٢-٤ النَّسَبُ الْمُثَلَّثِيَّةُ لِلزَّوَايَا الْحَادَّةِ (٢)

نشاط ١:

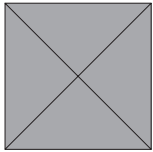
للعرب والمسلمين إنجازات مهمة في علم المثلثات، فكان البتاني أول من استخدم مصطلحي الجيب وجيب التمام، فيما يُعدُّ البيروني من أهم الذين أرسوا أسس علم المثلثات الحديث. فكيف يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا الخاصة ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°؟
أتمل المثلثات الآتية، وتعاون مع مجموعتي؛ لإكمال الجدول الآتي:



الزاوية أ	جاء	جتأ	ظأ
٣٠°			
٦٠°	$\frac{1}{2}$		
٤٥°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		

نشاط ٢:

مع تطوّر الزمن، اخترع (بليز باسكال) الآلة الحاسبة، فكيف يمكن



استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية للزوايا الحادة؟

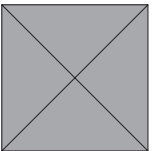
- يُكتَبُ جيب الزاوية س بالرموز جاس، ويُكتَبُ في الآلة الحاسبة (sinx).
- ويُكتَبُ جيب تمام الزاوية س بالرموز جتاس، ويُكتَبُ في الآلة الحاسبة (cosx).
- كما يُكتَبُ ظل الزاوية س بالرموز ظاس، ويُكتَبُ في الآلة الحاسبة (tanx).

أجد النسب المثلثية الآتية لأقرب منزلتين عشريتين كلاً من: جاه ٢°، جتاه ٦°، ظاه ٤°.

أضغَطُ (sin)، ثُمَّ أحدد الزاوية ٢٥°، فيظهر أن جاه ٢° = ٠,٤٢...

أضغَطُ (cos)، ثُمَّ أحدد الزاوية ٦٥°، فيظهر أن جتاه ٦° = ...

اضغَطُ tan ثُمَّ أحدد الزاوية ٤٥° فيظهر أن ظاه ٤° = ...



نشاط ٣:

أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كلٍّ من الآتية:

أ) جاه ٢٠° = ب) جتاه ٧٠° = ج) جاه ٦٥° = د) جتاه ٢٥° =

أَتَعَلَّمُ: جيبُ الزَّاوِيَةِ = جيبُ تمامِ الزَّاوِيَةِ الْمُتَمِّمَةِ لَهَا، والعكسُ صحيح، وبالرموز: جاس = جتا (٩٠ - س)، جتاس = جا (٩٠ - س).



نشاط ٤:

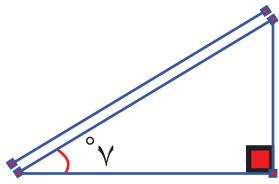


أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه ب جـ = ٤ سم
إذا كان جأ = ٠,٨، فما قيمة أ جـ؟ أرسم رسماً توضيحياً، كما في الشكل المجاور:

$$\frac{ب ج}{أ ج} = ٠,٨ \text{ ومنها: } \frac{٤}{أ ج} = ٠,٨$$

٠,٨ أ جـ = ٤، ومنها: أ جـ = سم

نشاط ٥:



صُمِّمَ مَمَرٌ لذوي الإعاقة، بحيثُ يميلُ بزاوية مقدارها ٧° عن المستوى الأفقي، فإذا كان ارتفاع نقطة نهاية الممر ١,٨ م،

فما طول هذا الممر؟ أرسم شكلاً توضيحياً، ومن الشكل ألاحظ أن:

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = ٧^\circ \text{، ومنها: طول الممر} \times \dots = ١,٨ \text{ (لماذا؟) طول الممر} = \dots$$



تَمارينُ ومَسائلُ:

(١) أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد كُلٍّ من: جا ٣٣°، جتا ٧٠°، ظا ١٠°

(٢) أجد القيمة العددية للمقدار:

$$(أ) \text{ جا } ٣٠^\circ + ٢ \text{ جا } ٦٠^\circ$$

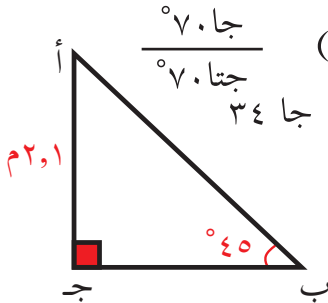
$$(ب) ٢ (\text{جا } ٤٥^\circ) (\text{جتا } ٤٥^\circ)$$

$$(ج) \frac{\text{جا } ٧٠^\circ}{\text{جتا } ٧٠^\circ}$$

(٣) إذا كان جا ٤٣° = ٠,٦٨، جتا ٥٦° = ٠,٥٦، أجد كل من: جتا ٤٧°، جا ٣٤°

(٤) يوضِّح الشكل المجاور مثلثاً قائم الزاوية في جـ، فإذا

كان أ جـ = ٢,١ م، ب = ٤٥°، فما محيط هذا المثلث؟

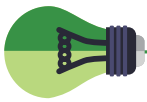


مهمة تعليمية:



يرتفع عمودٌ عن سطح الأرض ٤ م، فما طول ظل ذلك العمود، عندما تميل أشعة الشمس بزاوية مقدارها ٣٠° عن المستوى الأفقي.





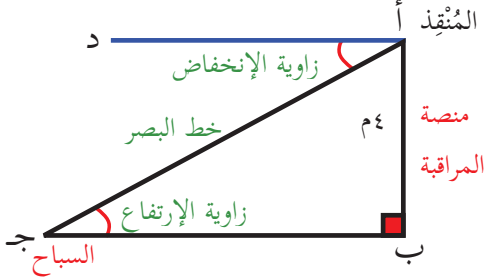
٣-٤ زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض



نشاط ١:

يبلغ طول الساحل الفلسطيني على البحر المتوسط من رأس الناقورة

شمالاً إلى رفح جنوباً ٢٢٤ كم، فإذا نظر مراقب إنقاذ يقف على منصة ارتفاعها عن الشاطئ ٤ م إلى سباح أمامه، يبعد ٢٥ م عن أسفل المنصة، فماذا تسمى الزاوية التي نَظَرَ بها المراقب، وبماذا تختلف هذه الزاوية عن تلك التي ينظر بها السباح إلى المراقب؟



أرسمُ رسماً توضيحاً، كما في الشكل المجاور، بحيثُ تمثِّلُ القطعة المستقيمة أ ج خط البصر، ومن الشكل المجاور يتضح أن: $\angle د أ ج = \angle ب ج أ$ (لماذا؟)

تسمى $\angle د أ ج$ **زاوية الانخفاض**، وهي الزاوية المحصورة

بين المستوى الأفقي للنظر، وخط البصر تحت المستوى الأفقي، بينما تسمى $\angle ب ج أ$ **زاوية الارتفاع**، وهي الزاوية المحصورة و.....



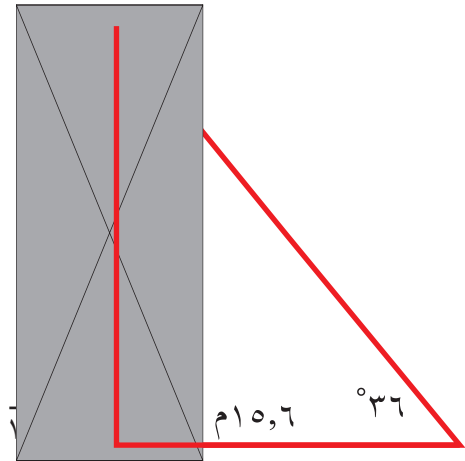
نشاط ٢:

من نقطة تبعد مسافة ١٥,٦ متراً

من قاعدة شجرة، ووجد أن زاوية ارتفاع قمة الشجرة 36° ،

فما ارتفاع هذه الشجرة؟ أرسم شكلاً توضيحياً، وأعتبر ارتفاع

الشجرة س



$$\text{ظا } 36^\circ = \text{منها: س} = 15,6 \times 0,73 \quad \text{س} = \dots\dots\dots \text{م}$$



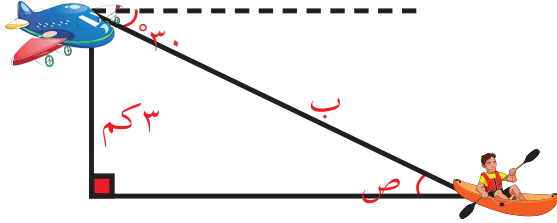
نشاط ٣:

رصدَ طيارٌ قارباً بزاوية انخفاضٍ مقدارها 30° ، أجدُ البُعدَ بينَ

القاربِ والطائرة، علماً أن الطائرة تُحلّقُ على ارتفاع ٣ كم فوق مستوى سطح البحر؟ أرسمُ شكلاً توضيحياً، كما في الشكل المجاور: اعتبرُ ب: بُعد الطائرة عن القارب. ومنها: ص

$$30^\circ = \text{ (لماذا؟) } \text{جا } 30^\circ = \frac{3}{\text{ب}} \text{ ومنها:}$$

$$\text{ب} \times \dots = 3 = \text{ب} \dots = \text{ب} \dots \text{ كم}$$



تمارين ومسابيل :

(١) تطيرُ طائرةٌ أفقياً على ارتفاع ٦ كم، فإذا رصَدَتِ الطائرةُ هدفاً على الأرض بزاوية

انخفاضٍ مقدارها 60° ، فما بُعد الطائرة عن الهدف في تلك اللحظة؟

(٢) قاسَ أحمدُ زاوية ارتفاع شجرة، فكانت 70° ، ثمَّ تحرَّكَ إلى الخلف مسافة ١٠ م، وقاسَ

زاوية ارتفاعها، فكانت 26° ، فما ارتفاع هذه الشجرة؟

مهمة تعليمية :

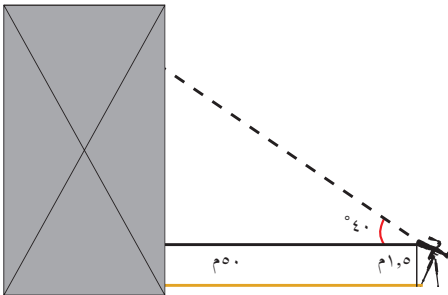
رصدت كاميرا مثبتة على ارتفاع ١,٥ م عن سطح الأرض قمة شجرة، بزاوية ارتفاع مقدارها 40° ، فإذا كانت الكاميرا تبعد ٥٠ متراً عن ساق الشجرة، كما في الشكل.

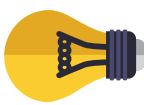
أجدُ كلاً من:

(١) ارتفاع هذه الشجرة.

(٢) بُعد الكاميرا عن قمة الشجرة؟ وهل يمكنُ

إيجاد هذا البُعدِ بطريقةٍ مختلفة؟





٤-٤ احتمال الحادث

عدد عناصر ح

عدد عناصر Ω

أذكر: إذا كان ح حادثاً في فضاءٍ عينيٍّ Ω ، فإن احتمال الحادث ح =

$$\frac{ع(ح)}{ع(\Omega)} = ل(ح)$$



نشاط ١:

لدى رمي حجر الترد المنتظم مرةً واحدةً، وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه

العلوي، أكتب Ω ، ثم أحسب احتمال الحوادث ح_١، ح_٢، ح_٣ : $\Omega = \{ ١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦ \}$

(١) ح_١ : ظهور عدد زوجي

$$ح_١ = \{ ٢, ٤, ٦ \}$$

$$ومنها ل(ح_١) = \frac{ع(ح_١)}{ع(\Omega)}$$

= ، وهو عدد موجب

(٢) ح_٢ : ظهور عدد أقل من ٢

$$ح_٢ = \{ ١ \} \quad ومنها ل(ح_٢) = \frac{ع(ح_٢)}{ع(\Omega)} = ، وهو عدد$$

(٣) ح_٣ : ظهور عدد أقل من ١

$$ح_٣ = \emptyset \quad (لماذا؟)$$

$$ومنها: ل(ح_٣) = \frac{ع(ح_٣)}{ع(\Omega)} =$$

(٤) ح_٤ : ظهور عدد أكبر من صفر

$$ح_٤ = \Omega \quad (لماذا؟)$$

$$ومنها: ل(ح_٤) = ١ \quad (لماذا؟)$$





أتذكّر: لأيّ حادث ح، فإنّ: صفر $\geq$ ل(ح) $\geq$ ١



نشاط ٢:

صندوقان يضمّ الأول ٣ بطاقاتٍ مرقّمةً بالأرقام ٢، ٤، ٥ ويضمّ الثاني

بطاقتين مرقّمةً بالأرقام ٤، ٦، تريد لى سحب بطاقةٍ من الصندوق الأول، ثمّ سحب بطاقةٍ من الصندوق الثاني. أكمل إيجاد احتمالات الحوادث الآتية: ح_١: ظهور عددين مجموعهما ٨، ح_٢: ظهور عددين زوجيين

$$\Omega = \{(٦، ٥)، (٤، ٥)، (٦، ٤)، (٤، ٤)، (٦، ٢)، (٤، ٢)\}$$

$$ح_١ = \{(٦، ٢)، ٠٠٠٠\} \text{ ومنها: ل(ح}_١\text{)} = \frac{٢}{٦} \text{ (لماذا؟)}$$

$$ح_٢ = \{(٤، ٢)، (٦، ٢)، (٤، ٤)، (٦، ٤)\} \text{ ومنها: ل(ح}_٢\text{)} = ٠٠٠٠$$



نشاط ٣:

لدى تسجيل المواليد للأسر ذات الأطفال الثلاثة، حسب الجنس وتسلسل الولادة. فإذا تمّ اختيار أسرة عشوائياً، أجد احتمال الحوادث الآتية:

ح_١: أن يكون لدى الأسرة ولدان فقط.

ح_٢: أن يكون لدى الأسرة ولدان على الأقل.

$$\Omega = \{و و و، و و ب، و ب و، و ب ب، ب و ب، ب ب و، ب ب ب، ب ب ب\} \text{ ومنها: ل(ح}_١\text{)} = ٤$$

$$ح_١ = \{و و ب، و ب و، ب و و، ب و و\} \text{ ومنها: ل(ح}_١\text{)} = \frac{٤}{٨}$$

$$ح_٢ = \{و و ب، و ب و، ب و و، و و و\} \text{ ومنها: ل(ح}_٢\text{)} = \frac{٤}{٨}$$



نشاط ٤:

مجموعة علب عصير تضم ٣ علب عصير ليمون، و٥ علب عصير تفاح، و٢ علبة عصير عنب، غُمِرت في حوض ماء فأزيلَ عنها اللاصقُ الخارجي الذي يغلفها، فإذا اختيرت علبةٌ عشوائياً، فما احتمال أن تكونَ العلبة المختارة:

(١) تحتوي عصير تفاح. (٢) تحتوي عصير عنب.

$$(١) \text{ ل (العلبة تحتوي عصير تفاح) } = \frac{\text{عدد علب التفاح}}{\text{عدد العلب الكلي}} = \frac{٥}{١٠}$$

$$(٢) \text{ ل (العلبة تحتوي عصير عنب) } = \frac{\text{عدد علب العنب}}{\text{عدد العلب الكلي}} = \frac{٢}{١٠}$$



تمارين ومسائل:

- (١) يريد أحمدُ اختيارَ مِظَلَّةٍ عشوائياً من صُنْدُوقٍ يضمُّ ٣ مِظَلَّاتٍ ملوّنة برسومٍ للأطفال، و ٧ منها ملوّنة بالأزرق، و ٣ منها ملوّنة بالأصفر، ما احتمال:
 - (أ) أن تكونَ المِظَلَّةُ المختارة ملوّنة برسوم الأطفال؟
 - (ب) أن تكونَ المِظَلَّةُ المختارة ملوّنة بالأزرق؟
 - (ج) أن تكونَ المِظَلَّةُ المختارة غيرَ ملوّنة برسوم الأطفال؟
- (٢) لدى رمي قطعة نقدٍ ثلاث مرّاتٍ وملاحظة النتائج الظاهرة على الوجه العلوي في الرميات الثلاث، أجد احتمال الحوادث الآتية:
 - (أ) ح_١: ظهور صورة وكتابتين.
 - (ب) ح_٢: ظهور صورتين على الأقلّ.
 - (ج) ح_٣: أن تكون النتائج على الأوجه الثلاثة متشابهة.
- (٣) لدى إلقاء قطعة نقدٍ، ثم رمي حجرٍ نرد، أجد احتمال الحوادث الآتية:
 - (أ) ح_١: ظهور صورة، وعدد زوجي.
 - (ب) ح_٢: ظهور كتابة، وعدد أقلّ من ٣.
- (٤) إذا كان ح_١، ح_٢ حادثين في فضاءٍ عينيّ، وكان ل (ح_١) = ٠,٦ وكان ع (ح_١) = ٣، ع (ح_٢) = ٤، فما قيمة ل (ح_٢)؟



أُتذَكَّر: إذا كان H_1 ، H_2 حادثين في فضاءٍ عينيٍّ، فإن $P(H_1 \cap H_2)$ هو احتمال حدوث الحادثين H_1 ، H_2 معاً، أمّا $P(H_1 \cup H_2)$ ، فهو احتمال حدوث أحد الحادثين H_1 أو H_2 على الأقلّ وأنّ: $P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$



نشاط ١:

أكمل إيجاد $P(H_1 \cup H_2)$ في كلّ ممّا يأتي:

(١) إذا كان $P(H_1) = ٠,٤$ ، $P(H_2) = ٠,٧$ ، $P(H_1 \cap H_2) = ٠,٢$

$$P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

$$= ٠,٤ + ٠,٧ - ٠,٢$$

$$= ٠,٩$$

(٢) إذا كان $P(H_1) = ٠,٧$ ، $P(H_2) = ٠,٣$ ، $P(H_1 \cap H_2) = ٠,٣$

$$P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

$$= ٠,٧ + ٠,٣ - ٠,٣$$

$$= ٠,٧$$

$$P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

$$= ٠,٧ + ٠,٣ - ٠,٣$$

$$= ٠,٧$$



نشاط ٢:

إذا كان احتمال نجاح رجاء في امتحان الرياضيات ٠,٧، واحتمال نجاحها في امتحان اللغة العربية ٠,٨، واحتمال نجاحها في الإمتحانين معاً ٠,٦، فما احتمال نجاح رجاء في أحد هذين الإمتحانين؟

أفرض أن: $L(H_1) =$ احتمال نجاح رجاء في الرياضيات، ومنها: $L(H_1) = ٠,٧$

وأن: $L(H_2) =$ احتمال نجاح رجاء في اللغة العربية، ومنها: $L(H_2) = \dots$

أستنتج أن: $L(H_1 \cap H_2) = ٠,٦$ (لماذا؟)، وأن المطلوب هو: $L(H_1 \cup H_2)$ (لماذا؟)

$$L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2) - L(H_1 \cap H_2)$$

$$\dots = ٠,٨ + ٠,٦ - \dots$$

$$\dots = ١,٥ - ٠,٦$$

$$\dots = \dots$$

أُتعلّم: إذا كان H_1, H_2 حادثين منفصلين ($H_1 \cap H_2 = \emptyset$)، فإن:
 $L(H_1 \cap H_2) =$ صفر،
 وعندها يكون $L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2)$.



أناقش: الحادثان المنفصلان، هما حادثان لا يمكن أن يحدثا في الوقت ذاته.





نشاط ٣:

إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين في فضاءٍ عينيٍّ، وكان $ل(ح_١) = ٠,٤$ ، $ل(ح_٢) = ٠,٥$ ،

$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ٠,٨$ ، فهل $ح_١$ ، $ح_٢$ منفصلان؟

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$٠,٨ = ٠,٤ + ٠,٥ - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$٠,٨ = ٠,٩ - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$٠,١ = ل(ح_١ \cap ح_٢) \text{ (لماذا؟)}$$

ومنها: $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,١$

وعليه فإنّ: $ح_١$ ، $ح_٢$ غير منفصلين.



نشاط ٤:

أتأمّل التمثيل المجاور بأشكال فن للفضاء العيني (Ω) ،

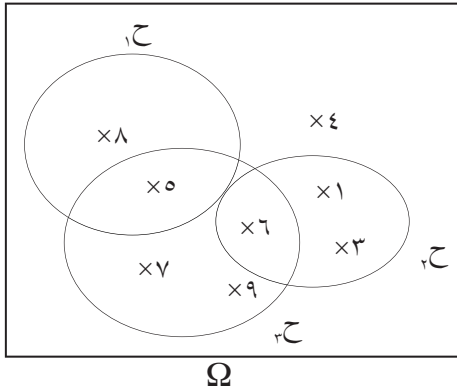
لتجربة عشوائية والحوادث $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ثم أكمل:

$$\Omega = \{ ١, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩ \}$$

$$ح_١ = \{ ٥, ٨ \} \text{ ومنها: } ل(ح_١) = \frac{٢}{٨}$$

$$ح_٢ = \{ ١, ٣, ٦ \} \text{ ومنها: } ل(ح_٢) = \dots$$

$$ح_٣ = \{ ٥, ٦, ٧, ٩ \} \text{ ومنها: } ل(ح_٣) = \dots$$



$$\dots = {}_2C_1 \cap {}_2C_1$$

ومنها: ${}_2C_1 \cup {}_2C_1 = {}_2C_1 + {}_2C_1$ (لماذا؟)

$$\dots = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$$

$$\dots = {}_2C_1 \cap {}_2C_1 = \{6\} \text{ ومنها } {}_2C_1 \cap {}_2C_1$$

$${}_2C_1 \cup {}_2C_1 = {}_2C_1 + {}_2C_1 - {}_2C_1 \cap {}_2C_1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{3}{8} =$$

$$\dots = \text{(لماذا؟)}$$

$$\dots = {}_2C_1 \cap {}_2C_1 = \{5\} \text{ ومنها: } {}_2C_1 \cap {}_2C_1$$

$${}_2C_1 \cup {}_2C_1 = {}_2C_1 + {}_2C_1 - {}_2C_1 \cap {}_2C_1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{8} + \frac{2}{8} =$$

$$\dots = \text{(لماذا؟)}$$



تمارين ومسائل

(١) يضمُّ صفُّ ٣٠ طالباً، فإذا كان ١٤ منهم يتابعون مباريات كرة القدم، ١٠ منهم يتابعون مباريات كرة السلة، ٨ يتابعون مباريات اللعبتين. فإذا تمَّ اختيارُ أحدِ طلاب الصفِّ عشوائياً، فما احتمال أن يكون هذا الطالب من متابعي:

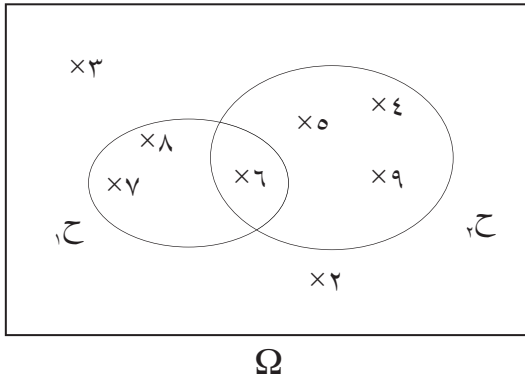
(أ) مباريات كرة السلة وكرة القدم. (ب) مباريات كرة السلة أو كرة القدم.

(٢) إذا كان احتمال نجاح يميني في الرياضيات ٠,٧٥، واحتمال نجاحها في الفيزياء ٠,٨، واحتمال نجاحها في الرياضيات، أو الفيزياء = ٠,٨٨، فما احتمال نجاحها في المبحثين معاً؟

(٣) إذا كان $L(H) = 2$ وكان $L(H \cup H_1) = 7$ ، $L(H \cap H_1) = 3$ ،
أجد: $L(H)$ ، $L(H_1)$.

(٤) سُحِبَتْ بطاقة عشوائياً من صندوق يضم ٨ بطاقات مرقمة بالأرقام: ١ إلى ٨، فإذا كان
 H : يمثل ظهور عدد أولي.
 H_1 : يمثل ظهور مربع عدد طبيعي.
 H_2 : يمثل ظهور عدد أكبر من ٣.
أجد كلاً من: $L(H \cup H_1)$ ، $L(H \cup H_2)$ ، $L(H \cap H_1)$.

(٥) معتمداً على التمثيل المجاور،
أجد الآتي:



(أ) $L(H \cap H_1)$

(ب) $L(H \cup H_1)$



مهمة تعليمية :

يُراد اختيار حرف عشوائياً من مجموعة بطاقات كُتبت عليها الحروف:
س، ل، ق، د، ت، ف، ط، ي، ن، و، ب، ر، ا. أجد $L(H \cap H_1)$ ، $L(H \cup H_1)$:



٦-٤ احتمال المتمة لحادث والفرق بين حادثين



أتعلم: إذا كان H حادثاً في فضاءٍ عينيّ، فإنّ $L(H)$ هو احتمال متمة الحادث H ، والذي يعني أيضاً احتمال عدم حدوث الحادث H ، وأنّ: $L(H) + L(\bar{H}) = 1$ أي أنّ: $L(\bar{H}) = 1 - L(H)$



نشاط ١:

لدى إلقاء قطعة نقدٍ منتظمة ثلاث مرات، ما احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل؟
أفرض H : حادث ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

ومنها $\bar{H}$: عدم ظهور أي صورة

ومنها $\bar{H} = \{K, K, K\}$

ع $\Omega = 8$ (لماذا؟)

ومنها: $L(\bar{H}) = \frac{1}{8}$

$L(H) = 1 - L(\bar{H})$

$\dots = \frac{1}{8} - 1 =$



نشاط ٢:

إذا كان $L_1(H) = 0.4$ ، $L_2(H) = 0.6$ ، $L_3(H \cap H_1) = 0.3$ ، أجد:

أ) احتمال حدوث H_1

ب) احتمال عدم حدوث H_1

ج) احتمال عدم حدوث الحادثين H_1 ، H_2 معاً .

أ) احتمال حدوث H_1 $= 1 - L_1(\bar{H}) = 1 - 0.6 = 0.4$

ب) احتمال عدم حدوث H_1 $= L_1(\bar{H}) = 0.6$

$\dots = 1 - L_2(\bar{H}) = 1 - 0.6 = 0.4$

ج) احتمال عدم حدوث الحادثين H_1 ، H_2 معاً $= L_3(\bar{H} \cap \bar{H}_1)$ (لماذا؟)

$= 1 - L_3(H \cap H_1)$

$= 1 - 0.3 = 0.7$



أتعلّم: إذا كان H_1 ، H_2 حادثين في فضاء عيني، فإنّ احتمال حدوث H_1 وعدم حدوث H_2 التي تُكتب على الصورة $L(H_1 - H_2)$ ، يمكن أن تُحسب من القاعدة:

$$L(H_1 - H_2) = L(H_1) - L(H_1 \cap H_2)$$

وبالمثل فإنّ: $L(H_2 - H_1) = L(H_2) - L(H_1 \cap H_2)$.



نشاط ٣:

إذا كانت $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ، وكان $H_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ ،

$H_2 = \{2, 3, 5, 6, 9\}$ ، أجد $H_1 - H_2$ ، ثم أكمل:

$H_1 - H_2$ يعني حدوث H_1 وعدم حدوث H_2 ؛ أي العناصر الموجودة في H_1 وغير موجودة في

H_2 ومنها: $H_1 - H_2 = \{1, 4, 8\}$ (لماذا؟)

$$L(H_1 - H_2) = \frac{3}{7}$$

$H_1 \cap H_2 = \{2, 3, 5\}$ ومنها: $L(H_1 \cap H_2) = \dots$

$$L(H_1) - L(H_1 \cap H_2) = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{7} =$$

ألاحظ أنّ: $L(H_1 - H_2) = L(H_1) - L(H_1 \cap H_2)$



نشاط ٤ :

يحتوي صندوق على سبع كراتٍ مرقّمةٍ بالأرقام ٢، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، يريد حمزة سحب كرةٍ من الصندوق عشوائياً، فإذا كان الحادث H_1 يمثل ظهور رقمٍ يقبل القسمة على ٢، وكان الحادث H_2 يمثل ظهور رقمٍ أكبر من ٤، أجد: $L(H_1 - H_2)$ ، $L(H_2 - H_1)$.

$$H_1 = \{2, 4, 6, 8\}, \text{ ومنها: } L(H_1) = \frac{4}{7}$$

$$H_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}, \text{ ومنها: } L(H_2) = \frac{5}{7}$$

$$H_1 \cap H_2 = \{6, 8\}, \text{ ومنها: } L(H_1 \cap H_2) = \frac{2}{7}$$

$$L(H_1 - H_2) = L(H_1) - L(H_1 \cap H_2)$$

$$= \frac{4}{7} - \frac{2}{7} =$$

$$= \frac{2}{7}$$

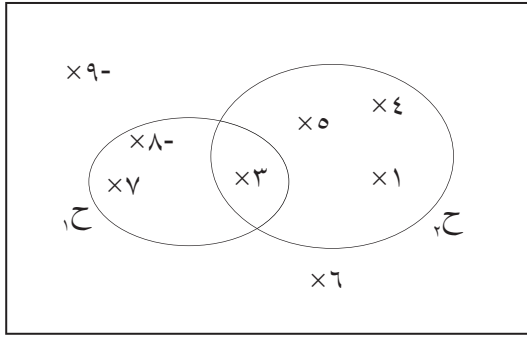
$$L(H_2 - H_1) = L(H_2) - L(H_1 \cap H_2)$$

$$= \frac{5}{7} - \frac{2}{7} =$$

$$= \frac{3}{7}$$



تمارين ومسائل :



Ω

(١) معتمداً على الشكل المجاور، أجد كلاً ممّا يأتي :

(أ) $P(\bar{ح})$

(ب) $P(\bar{ح} \cap \bar{ر})$

(ج) $P(ح - ح \cap ر)$

(د) $P(ح - ر \cap ح)$

(٢) إذا كان احتمال نجاح رؤى في امتحان الرياضيات ٠,٩، واحتمال نجاحها في امتحان اللغة العربية ٠,٨٥، واحتمال نجاحها في المبحثين معاً ٠,٨، أجد كلاً ممّا يأتي :

(أ) احتمال عدم نجاح رؤى في الرياضيات.

(ب) احتمال نجاحها في الرياضيات، وعدم نجاحها في اللغة العربية.

(ج) احتمال عدم نجاحها في المبحثين معاً.

(٣) إذا كان $P(ح) = ٠,٥$ ، $P(ر) = ٠,٦$ ، $P(ح \cap ر) = ٠,٣$ ، أجد :

(أ) احتمال عدم حدوث $ح$.

(ب) احتمال حدوث $ح$.

(ج) احتمال عدم حدوث الحادثين $ح$ ، $ر$ معاً.



مهمة تعليمية :

استطلع المعلم آراء ٣٦ طالباً من طلاب الصف الثامن حول طبيعة الألعاب الرياضية التي يفضلون ممارستها، فوجد أن: ٢٠ طالباً يفضلون الألعاب الجماعية، و ١٠ طلاب يفضلون ممارسة الألعاب الفردية، و ٦ طلاب يفضلون ممارسة النوعين من الألعاب. إذا تم اختيار طالب عشوائياً، فما احتمال أن يكون هذا الطالب:

(أ) لا يفضل ممارسة الألعاب الجماعية؟

(ب) يفضل ممارسة الألعاب الفردية، ولا يفضل ممارسة الألعاب الجماعية؟

(ج) يفضل ممارسة الألعاب الجماعية، ولا يفضل ممارسة الألعاب الفردية؟

ورقة عمل

س ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في الفقرات (١-٤):

(١) ما قياس زاوية الارتفاع لسلم طوله (١٤) م، وُضع بشكل مائل على حائط طوله (٧) م؟

- (أ) 30° (ب) 60° (ج) 45° (د) 70°

(٢) إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان علوم يساوي 3 أمثال رسوبه فيه، واحتمال نجاحه في امتحان رياضيات يساوي $\frac{1}{4}$ ، واحتمال نجاحه في الامتحانين معاً يساوي $\frac{1}{8}$ ، ما احتمال نجاحه في أحد الامتحانين؟

- (أ) $\frac{3}{8}$. (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٣) في تجربة رمي حجرى نرد منتظمين، وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي، ما احتمال أن يكون العددين الظاهران مختلفين؟

- (أ) $\frac{1}{36}$. (ب) $\frac{6}{36}$. (ج) $\frac{18}{36}$. (د) $\frac{30}{36}$

(٤) أي الآتي تساوي جا 25° ؟

- (أ) جتا 25° (ب) جتا 65° (ج) جا 65° (د) ظا 65°

س ٢: في تجربة إلقاء قطعة نقد، ثم رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجهين الظاهرين، وكان ح: حدث ظهور صورة مع عدد زوجي. ح: حدث ظهور صورة مع عدد أولي. أجد: ل (ح - ح_١).

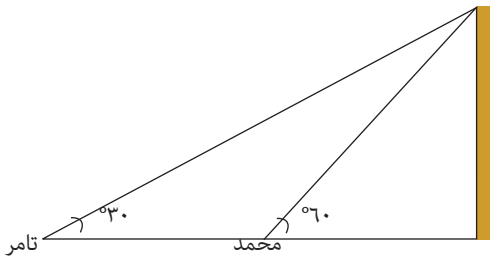
س ٣: يقف محمد وتامر أمام البرج، كما هو موضح في الشكل المجاور، حيث يبعد

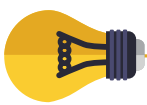
محمد عن قاعدة البرج (٣٠) متراً، انظر الشكل

ثم جد ما يأتي:

١ - ارتفاع البرج.

٢ - المسافة بين محمد و تامر.

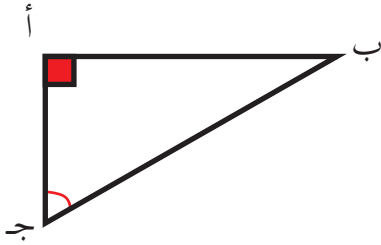




اختبار ذاتي

(١) أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

(١) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في أ، أيُّ الآتيّة تُمثِّلُ جاج؟



(أ) $\frac{أب}{أج}$ (ب) $\frac{أج}{أب}$

(ج) $\frac{أب}{ب ج}$ (د) $\frac{أج}{ب ج}$

(٢) أيُّ الآتيّة يُمكنُ أن يُمثِّلَ جيب تمام زاوية حادّة؟

(أ) صفر (ب) ٠,٨٩ (ج) ١ (د) ٢

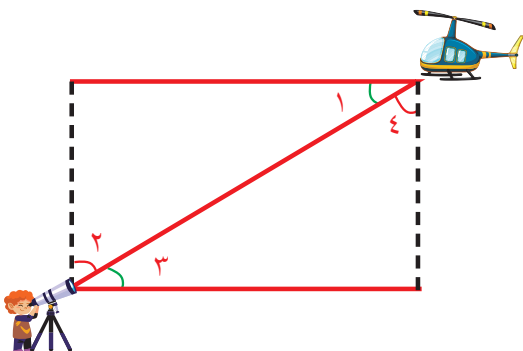
(٣) أيُّ الآتيّة تساوي جا ٤٠°؟

(أ) جتا ٤٠° (ب) جا ٥٠° (ج) جتا ٥٠° (د) ظا ٥٠°

(٤) ما قيمةُ حا ٥٢°؟

(أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٧٥ (د) ١

(٥) في الشكّل الآتي، ما الزاوية التي تُمثِّلُ زاوية ارتفاع المروحية؟



(أ) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) ٤

٦) لدى إلقاء قطعة نقد منتظمة مرتين، ما احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة فقط من هاتين الرمتين؟

- أ) ٠,٢٥ (ب) ٠,٥ (ج) ٠,٧٥ (د) ١

٧) إذا كانت $E = \{ \Omega \}$ ، وكان $H = \{ ٣ ، ٤ ، ٥ \}$ ، فما قيمة $E \cap H$ ؟

- أ) ٠,٣ (ب) ٠,٧ (ج) ٣ (د) ٧

٨) إذا كان $L \cap H = \{ \}$ ، فأَيُّ العبارات الآتية دائماً صحيحة؟

- أ) $L \cap H = \{ \}$ (ب) $L \cap H = \{ \}$ منفصلين

- (ج) $L \cap H = \{ \}$ (د) $L \cap H = \{ \}$

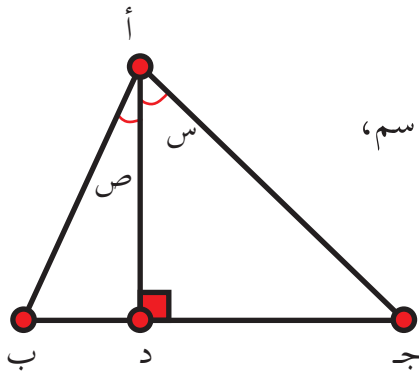
٩) عائلة مكونة من أربعة أطفال، ما احتمال أن يكون لديها ٤ أطفال ذكور؟

- أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{16}$

١٠) إذا كان $L \cap H = \{ \}$ ، $L \cap H = \{ \}$ ، وكان $H = \{ ٣ ، ٤ ، ٥ \}$ ، فأَيُّ العبارات الآتية خاطئة؟

- أ) $L \cap H = \{ \}$ (ب) $L \cap H = \{ \}$

- (ج) $L \cap H = \{ \}$ (د) $L \cap H = \{ \}$ صفر



٢) المثلثُ أ ب ج، فيه أ د عموديٌّ على ب ج، حيثُ إنَّ:

أ ج = ٢٠ سم، أ ب = ١٥ سم، أ د = ١٢ سم، ب ج = ٢٥ سم،

ب د = ٩ سم، أ ج د:

أ) جاس

ب) ظاص

ج) جاب

د) جتاج

٣) أجد قيمة كل من الآتية، دون استخدام الآلة الحاسبة:

أ) $30^\circ + 45^\circ$

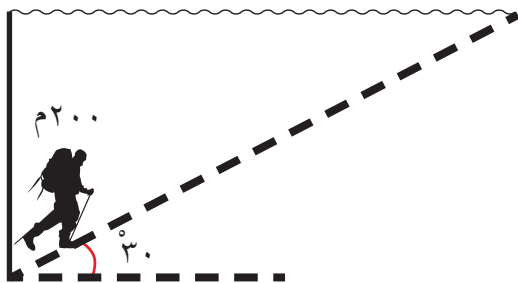
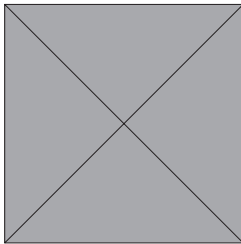
ب) $33^\circ - 57^\circ$

٤) أجد كلاً من الآتية:

أ) 63°

ب) 24°

ج) 80°



٥) يريد رياضيّ تسلّق منحدر، ارتفاع قمته ٢٠٠ م عن نقطة انطلاقه، حيث يمشي في مسارٍ مائلٍ بزاوية مقدارها 30° ، كما في الشكل المجاور، فما طول المسار الذي سيسلكه الرياضي حتى يصل إلى قمة المنحدر؟

٦) في تجربة رمي حجر نرد منتظم مرة واحدة، إذا كان ح: حدث ظهور عدد أقل من ٤، ح: حدث ظهور عدد زوجي، فما احتمال ظهور عدد أقل من ٤، أو ظهور عدد زوجي؟

٧) إذا كان ح، ح: حادثين منفصلين، وكان ل(ح) = ٠,٧، ل(ح) = ٠,٢، أجد:

أ) $P(H \cup L)$ ب) $P(H \cap L)$

٨) إذا كان $L(H) = L(H) \cup L(H)$ ، وكان $L(H) = L(H) \cup L(H)$ ، أجد $L(H)$ ، $L(H)$ ، علماً بأن $L(H)$ ، $L(H)$ ، حدثان منفصلان.

٩) إذا كان $L(H)$ ، $L(H)$ حدثين في فضاء عيني، وكان $L(H) = L(H)$ ، $L(H) = L(H)$ ، $L(H) \cap L(H)$ $L(H) = L(H)$ ، أجد:

$$A) L(H) \quad B) L(\overline{H} - H) \quad C) L(H \cup H)$$

١٠) أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأي زاوية حادة.			
استخدام الآلة الحاسبة في إيجاد النسب المثلثية لزاوية حادة.			
تعرف العلاقة بين جيب الزاوية وجيب تمام متممها.			
استنتاج النسب المثلثية لزاويا خاصة.			
توظيف النسب المثلثية وزوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية.			
إيجاد احتمال حادث في تجربة عشوائية.			
إيجاد احتمال الاتحاد لأي حادثين.			
إيجاد احتمال متممة حادث.			
إيجاد احتمال الفرق بين حادثين.			
توظيف الاحتمالات في حل مسائل حياتية.			