

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفرع العلمي والصناعي

الفترة الرابعة

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 فاكس | +970-2-2983280 هاتف

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

٣	١ - ٤	القطع المكافئ
٦	٢ - ٤	القطع الناقص
٩	٣ - ٤	القطع الزائد
١٢	٤ - ٤	نهاية الاقتران عند نقطة
١٦	٥ - ٤	النهايات والصورة غير المعينة
١٩	٦ - ٤	نهايات الاقترانات الدائرية
٢١	٧ - ٤	نهاية الاقتران عندما $\leftarrow \pm \infty$
٢٣	٨ - ٤	الاتصال

النتائج

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف القطوع المخروطية ومبادئ التفاضل في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١ التعرف على القطع المكافئ، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرته، ودليله، ومحور تماثله.
- ٢ التعرف على القطع الناقص، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومحوريه الأكبر والأصغر، وطوليهما، واختلافه المركزي.
- ٣ التعرف على القطع الزائد، وكتابة معادلته في الوضع القياسي، وتعيين: بؤرتيه، ورأسيه، ومعادلتيه محوريه، والقاطع والمرافق وطوليهما، واختلافه المركزي.
- ٤ تمثيل القطوع المخروطية بيانياً في الوضع القياسي.
- ٥ حل مسائل تطبيقية على القطوع المخروطية.
- ٦ التعرف على النهاية من جهة اليسار، والنهاية من جهة اليمين.
- ٧ إيجاد نهايات الاقتران متعدد القاعدة عند نقاط التحول.
- ٨ إيجاد نهايات الاقترانات الكسرية.
- ٩ التعرف على نهايات الاقترانات الدائرية.
- ١٠ التعرف على اتصال اقتران عند نقطة، البحث في اتصال اقتران على مجاله.
- ١١ تطبيق نظريات الاتصال على اقترانات مختلفة.

القطع المكافئ: هو المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك في المستوى بشرط أن يكون بُعدها عن نقطة ثابتة ب يساوي بعدها عن مستقيم معلوم ل. تسمى النقطة الثابتة ب البؤرة، ويسمى المستقيم المعلوم ل الدليل.

الحالة الأولى: القطع المكافئ مفتوح لليمين

الرأس $(0, 0)$ وتقع البؤرة على الجزء الموجب لمحور السينات أي أن إحداثيات البؤرة ب $(A, 0)$ ، $A > 0$ وبالإستعانة بالشكل المجاور، وحسب تعريف القطع المكافئ فإن:

ن ب = ن د

أي أن: $\sqrt{{}^2(٠) + {}^2(أ + س)} = \sqrt{{}^2(٠ - ص) + {}^2(أ - س)}$

إذن معادلة هذا القطع المكافئ: $\text{ص}^2 = 4\text{أ س}$ (لماذا؟)

أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي بؤرته $(3, 0)$ ، ثم أجد معادلة دليhle.

مثال ۱ :

بما أن البؤرة (٣، ٠) فإن القطع مفتوح لليمين. إذن معادلته $ص^2 = ٤ع$ أس

الحل :

وكذلك بما أن البؤرة $(٣, ٠)$ فإن $أ = ٣$

أي أن معادلته هي $v^2 = 12$ س معادلة دليله هي $s = -3$

الحالة الثانية: القطع المكافئ مفتوح لليسار

الرأس (٠ ، ٠) وتقع البؤرة على الجزء السالب من محور السينات أى أن: ب (-أ ، ٠) ، أ < ٠

والمعادلة في هذه الحالة هي: $v^2 = 4 - u^2$ (لماذا؟)

مثال ٢ :

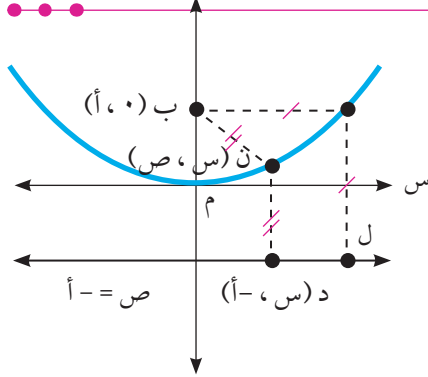
أكتب معادلة القطع المكافئ القياسي الذي معادلة دليله $s = 4$.

الحل :

بما أن القطع المكافئ بالصورة القياسية، إذن رأسه نقطة الأصل.

وبما أن معادلة دليله $s = 4$ إذن القطع المكافئ مفتوح لليسار، $s = 4$

إذن معادلة القطع المكافئ هي : $s = 4 - 4s^2$ إذن $s = 16 - 4s^2$



الحالة الثالثة: القطع المكافئ مفتوح للأعلى

الرأس $(0,0)$ وتقع البؤرة على الجزء الموجب من محور الصادات

أي أن $B(0,A)$ ، $A < 0$

والمعادلة في هذه الحالة هي: $s = 4 - 4s^2$ (لماذا؟)

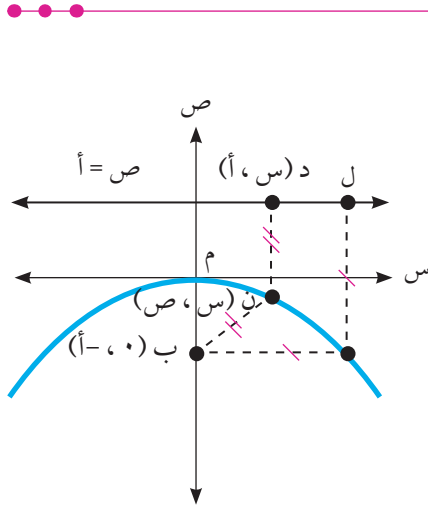
مثال ٣ :

ما إحداثيات البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته: $s = 20 - 4s^2$

الحل :

$s = 20 - 4s^2$ هي معادلة قطع مكافئ مفتوح للأعلى

$s = 20 - 4s^2$ ومنها $s = 5$ ومنها البؤرة $(5,0)$ ، ومعادلة الدليل $s = -5$



الحالة الرابعة: القطع المكافئ مفتوح للأسفل

الرأس $(0,0)$ وتقع البؤرة على الجزء السالب من محور الصادات

أي أن: $B(0,-A)$ ، $A < 0$

والمعادلة في هذه الحالة هي: $s = 4 - 4s^2$

مثال ٤ :

قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(3,-)$

أجد معادلته، ومعادلة دليله.

الحل :

بما أن البؤرة $(3,-)$

إذن معادلته هي: $s = 4 - 4s^2$ ، $A < 0$

وبما أن $s = 3$ فإن $s = 12 - 4s^2$ ، ومعادلة دليله هي $s = 3$

١ أجد كلاً من: الرأس، و البؤرة، ومعادلة الدليل، ومعادلة محور التماثل، لكل من القطوع المكافئة الآتية:

أ ص $^2 = -4$ س

ب ص $^2 = -8$ س

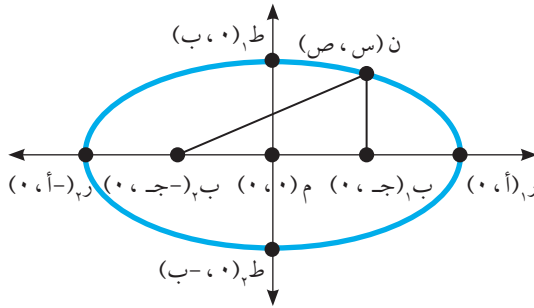
٢ أجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0, 0)$ ويمر بالنقطة $(-3, 6)$ ومحور تماثله محور السينات.

٣ قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ ومفتوح لجهة اليمين، فإذا كانت النقطة $(س_١, ٦)$ الواقعة عليه تبعد عن بؤرته ١٠ وحدات، أجد معادلة هذا القطع؟

تعريف: القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) والتي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أكبر من البعد بينهما، تسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.

سنقتصر في هذا البند على الوضع القياسي للقطع الناقص وهو الوضع الذي يكون فيه المركز نقطة الأصل (٠، ٠)، ومحوراه ينطبقان على محوري الإحداثيات. وهناك حالتان للقطع الناقص:

الحالة الأولى: القطع الناقص السيني:



الشكل المجاور يمثل قطعاً ناقصاً سينياً، فيه:

- ١ البؤرتان: النقطتان $ب_١(ج، ٠)$ ، $ب_٢(-ج، ٠)$
- ٢ الرأسان: النقطتان $ر_١(أ، ٠)$ ، $ر_٢(٠، -أ)$
- ٣ المحور الأكبر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين $ر_١$ ، $ر_٢$ وطوله $ن ب_١ + ن ب_٢ = ٢أ$ ، $٠ < أ$
- ٤ المحور الأصغر وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين $ط_١(ب، ٠)$ و $ط_٢(٠، -ب)$ وطوله $٢ب$ ، $ب < ٠$
- ٥ المركز وهي النقطة م (٠، ٠) والتي تقع في منتصف المسافة بين البؤرتين.
- ٦ البعد البؤري وهو البعد بين البؤرتين ويساوي $٢ج$ ($ج < ٠$)
- ٧ الاختلاف المركزي هـ وهو النسبة بين البعد البؤري إلى طول المحور الأكبر ويرمز له بالرمز هـ $= \frac{ج}{أ} > ١$ (لماذا؟) ويبين مدى تفلطح الشكل البيضاوي (الإهليلجي).

٨ معادلة هذا القطع هي: $١ = \frac{ص^٢}{ب^٢} + \frac{س^٢}{أ^٢}$

حيث $أ < ب$ ، $ج = أ - ب$

مثال ١: تتحرك النقطة و(س، ص) في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين

(٠، ٨) و(٠، -٨) يساوي ٢٠ وحدة.

١ أكتب معادلة هذا المحل الهندسي. ٢ أجد طول كل من محوريه واختلافه المركزي.

١ الحل : المحل الهندسي يمثل قطعاً ناقصاً سينياً لأن النقطتين الثابتتين تقعان على محور السينات، فيه:

البؤرتان $(0, 8) = (0, 8 \mp)$ ومنها $ج = ٨$ ، $أ = ٢٠$ ومنها $أ = ١٠$ نجد قيمة ب:

$$أ = ب^2 + ج^2، ب^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦، اذن ب = ٦.$$

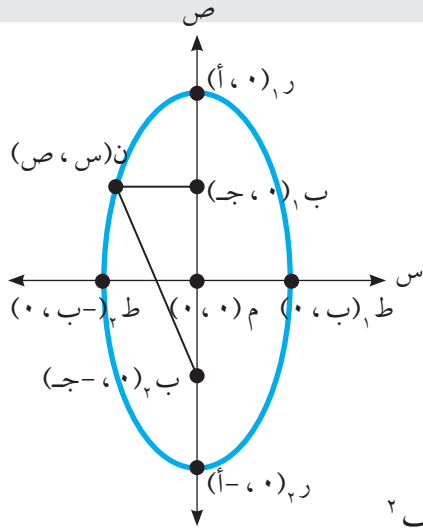
$$معادلة هذا القطع هي: $١ = \frac{ص^2}{٣٦} + \frac{س^2}{١٠٠}$ ، $١ = \frac{ص^2}{٣٦} + \frac{س^2}{١٠٠}$$$

٢ طول المحور الأكبر $أ = ٢٠$

طول المحور الأصغر $ب = ١٢$

$$\frac{٨}{١٠} = \frac{ج}{أ} = \text{الاختلاف المركزي هـ}$$

الحالة الثانية: القطع الناقص الصادي:



الشكل المقابل يمثل قطعاً ناقصاً صادياً:

نشاط ١:

١ مركزه هو

٢ رأساه هما

٣ بؤرتاه هما $(0, 8 \mp)$

٤ البعد البؤري =

٥ معادلة محوره الأكبر $س = ٠$ ، وطوله =

٦ معادلة محوره الأصغر, وطوله =

٦ الاختلاف المركزي هـ =

٨ معادلة هذا القطع هي: $١ = \frac{ص^2}{٣٦} + \frac{س^2}{١٠٠}$ ، $أ < ب^2$

جد معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات رأسيه $(10 \pm, 0)$ وإحداثيات بؤرتيه $(8 \pm, 0)$.

مثال ٢ :

القطع الناقص هو صادي لأن البؤرتين تقعان على محور الصادات

الحل :

$$أ = ١٠، ج = ٨، ب^2 = أ^2 - ج^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦، ب = ٦$$

$$المعادلة هي $١ = \frac{ص^2}{٣٦} + \frac{س^2}{١٠٠}$ اذن $١ = \frac{ص^2}{٣٦} + \frac{س^2}{١٠٠}$$$

مثال ٣ : قطع مخروطي معادلته $١٤٤ - ١٦س - ٩ص = ٠$

١ أحدد نوع هذا القطع ٢ أجد طولي محوريه. ٣ أجد إحداثيات بؤرتيه.

١ الحل : ١٤٤ - ١٦ س^٢ - ٩ ص^٢ = ٠ ، ومنها ١٤٤ = ٩ ص^٢ + ١٦ س^٢ بالقسمة على ١٤٤

$$١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{١٦} ، هذه معادلة قطع ناقص صادي لماذا؟$$

٢ $١٦ = ٢ أ \Leftarrow ٩ = ٢ ب \Leftarrow ٣ = ٢$

طول المحور الأكبر = ٨ = ٢ أ ، طول المحور الأصغر = ٦ = ٢ ب

٣ $ج = ١٦ - ٩ = ٧ \Leftarrow ج = \sqrt{٧} ، البؤرتان (٠ ، \pm \sqrt{٧}) ، الرأسان (٠ ، \pm ٤)$

تمارين ٤ - ٢

١ أضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ قطع ناقص معادلته $١ = \frac{ص^2}{٢٥} + \frac{س^2}{١٦}$ ، ما طول المحور الأكبر؟

أ) ٨ ب) ٥ ج) ١٠ د) ١٦

٢ قطع ناقص سيني مركزه (٠ ، ٠) وطول محوره الأكبر = ١٠ وحدات وطول محوره الأصغر = ٦ وحدات ما معادلته؟

أ) $١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{٢٥}$ ب) $١ = \frac{ص^2}{٩} + \frac{س^2}{١٦}$

ج) $١ = \frac{ص^2}{٢٥} + \frac{س^2}{٩}$ د) $١ = \frac{ص^2}{١٦} + \frac{س^2}{٩}$

٢ قطع مخروطي معادلته $١ = ٩ ص^2 + ٤ س^2$ ، أحدد نوع القطع، وأجد الرأسين والبؤرتين وجد طولي المحورين ومعادلتيهما.

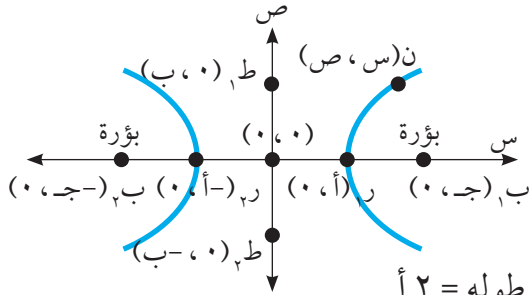
٣ قطع ناقص صادي البعد بين إحدى بؤرتيه والرأس القريب منها يساوي ٢ وحدة طول، والبعد بينها وبين الرأس البعيد منها يساوي ٨. أجد معادلة هذا القطع.

٤ النقطة (س ، ص) تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين (٠ ، ٥) و (٠ ، ٥) يساوي ١٢ وحدة ما المحل الهندسي للنقطة وما معادلته؟

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديهما عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتاً أصغر من البعد بينهما، وتسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين.

وستقتصر في دراستنا هذه الدرس على الوضع القياسي للقطع الزائد وهناك حالتان:

الحالة الاولى: القطع الزائد السيني



يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً سينياً فيه:
البؤرتان $ب_1 (ج، ٠)$ ، $ب_2 (٠، -ج)$ ، والبعد بينهما يسمى البعد البؤري للقطع الزائد $٢ ج$ ،
النقطة م $(٠، ٠)$ المركز.

الرأسان $ر_1 (٠، أ)$ ، $ر_2 (٠، -أ)$ ، وهما طرفا المحور القاطع وطوله $٢ أ$
النقطتان $ط_1 (ب، ٠)$ ، $ط_2 (٠، -ب)$ ، وهما طرفا المحور المرافق وطوله $٢ ب$.
ويشكل محورا القطع الزائد (القاطع والمرافق) محوري تماثل له.

معادلة هذا القطع هي $\frac{ص^2}{ب^2} - \frac{س^2}{أ^2} = ١$ ، حيث يكون معامل س^٢ موجباً.

الاختلاف المركزي للقطع الزائد $هـ = \frac{ج}{أ} > ١$ ، $ج^2 = أ^2 + ب^2$
ان $ب - ن = ب_1$ لأي نقطة مثل ن.

مثال ١: تتحرك النقطة ن (س، ص) في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديهما عن نقطتين ثابتتين $(٠، ١٠ \pm)$ يساوي ١٦. أجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن.

الحل ١: هذا المحل يمثل قطعاً زائداً سينياً فيه: م $(٠، ٠)$ ، $١٦ = ٢أ$ ومنها $أ = ٨$ ،

بؤرتاه $(٠، ١٠ \pm) = (٠، ج \pm)$

$ج = ١٠$ ، $ج^2 = أ^2 + ب^2$ ، ومنها $ب = ٦$ معادلته:

$$\frac{ص^2}{٦^2} - \frac{س^2}{٨^2} = ١$$

١ أحدد نوع هذا القطع . ٢ أكتب عناصره .
قطع مخروطي معادلته $(٢س - ٣ص)(٢س + ٣ص) - ٣٦ = ٠$

١ $(٢س - ٣ص)(٢س + ٣ص) - ٣٦ = ٠$ ، ومنها $٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٣٦$ ،

وبالقسمة على ٣٦ ينتج ان: $\frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٤} = ١$

وهذه معادلة قطع زائد سيني (إشارة س^٢ موجبة) فيه :

٢ $أ = ٣$ ، $ب = ٢$ ، $ج = \sqrt{١٣}$ ، م $(٠، ٠)$ ، بؤرتاه $(٠، \mp ج) = (٠، \mp \sqrt{١٣})$

الرأسان $(٠، \mp أ) = (٠، \mp ٣)$ ، طول المحور القاطع $أ٢ = ٩$.

طول المحور المرافق $ب٢ = ٤$ ، الاختلاف المركزي $هـ = \frac{\sqrt{١٣}}{٣} < ١$

الحالة الثانية:- القطع الزائد الصادي

يبين المنحنى المجاور قطعاً زائداً صادياً فيه:

البؤرتان $ب_١ (٠، ج)$ ، $ب_٢ (٠، -ج)$

والبعد بينهما يسمى البعد البؤري وطوله $٢ج$

النقطة م $(٠، ٠)$ المركز.

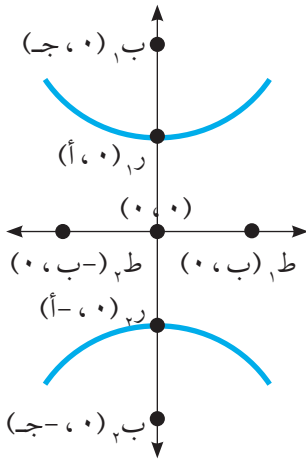
الرأسان $ر_١ (٠، أ)$ ، $ر_٢ (٠، -أ)$

وهما طرفا المحور القاطع وطوله $٢أ$.

النقطتان $ط_١ (٠، ب)$ ، $ط_٢ (٠، -ب)$

وهما طرفا المحور المرافق وطوله $٢ب$.

معادلة هذا القطع هي $\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$



قطع مخروطي في وضع قياسي رأساه $(0, 6)$ ، واختلافه المركزي $= \frac{5}{3}$ ،

١ أكتب معادلته. ٢ أجد إحداثيات بؤرتيه.

الرأسان $(0, 6)$ ، هـ $1 <$ اذن هذا قطع لماذا؟

$$\frac{5}{3} = \frac{ج}{أ} = هـ، 6 = أ$$

إذن ج = ١٠، ب = ٨ لماذا؟

١ معادلته هي:

٢ إحداثيات بؤرتيه هما:

تمارين ٤ - ٣

١ أجد إحداثيات البؤرتين و الرأسين وطولي المحورين والاختلاف المركزي لكل من القطوع المخروطية التالية ثم أرسم منحنى تقريباً في كل حالة:

أ ٩س^٢ - ص^٢ = ٣٦ ب ٦ص^٢ - ٢س^٢ = ٣ ج ٩س^٢ - ١٦ص^٢ = ١

٢ قطع مخروطي معادلته ١٦س^٢ - ٩ص^٢ = ١٤٤ = صفر، أجد الفرق المطلق للبعد بين النقطة

$$\left(2, \frac{\sqrt{53}}{2} \right) \text{ و بؤرتي القطع.}$$

٣ أجد معادلة القطع الزائد القياسي الذي طول محوره القاطع يساوي ٨ وحدات، واختلافه المركزي

$$هـ = \frac{5}{4} \text{ (أكتب جميع الحلول الممكنة).}$$

تعريف: إذا كان $Q(s)$ اقتراناً معرفاً بجوار العدد A^* ، وكانت قيم $Q(s)$ تقترب من العدد L كلما اقتربت قيم s من العدد A من جهة اليسار ومن جهة اليمين، فإن نهاية الاقتران $Q(s)$ عندما s تقترب من العدد A تساوي L . ويعبر عن ذلك رياضياً على النحو الآتي: نهاية $Q(s) = L$.

- ١) **أتعلم:** نهاية $Q(s)$ تعني أن $s \neq A$ وإنما s عدد إما أن يكون أقل من العدد A بمقدار صغير جداً وتسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليسار، وتكتب رياضياً على النحو: نهاية $Q(s)$.
أو أن يكون أكبر من العدد A بمقدار صغير جداً، تسمى النهاية في هذه الحالة النهاية من جهة اليمين، وتكتب رياضياً على النحو: نهاية $Q(s)$.
- ٢) حتى تكون نهاية $Q(s)$ موجودة يجب أن تكون نهاية $Q(s) =$ نهاية $Q(s)$.
- ٣) لإيجاد نهاية $Q(s)$ ليس من الضروري أن يكون $Q(s)$ معرفاً عند $s = A$ وإنما يجب أن يكون $Q(s)$ معرفاً بجوار العدد A .

نظرية (١): • إذا كان $Q(s)$ اقتراناً كثير حدود فإن نهاية $Q(s) = Q(A)$.

• إذا كان $Q(s) = \frac{K(s)}{H(s)}$ اقتراناً نسبياً فإن نهاية $Q(s) = \frac{K(A)}{H(A)}$ ، $H(A) \neq 0$.

أجد نهاية كل مما يأتي:

مثال ١:

١) نهاية $(s^3 - 2s + 5)$ $s \leftarrow 2$

٢) نهاية $\frac{s^3 - 3s + 4}{s + 3}$ $s \leftarrow 5$

الحل:

١) نهاية $(s^3 - 2s + 5)$ $s \leftarrow 2$ $9 = 5 + 4 - 8 = (5 + 4 - 8)$

٢) نهاية $\frac{s^3 - 3s + 4}{s + 3}$ $s \leftarrow 5$ $\frac{31}{2} = \frac{4 + 5 - 125}{8} = \frac{4 + 5 - 125}{8}$

نشاط ١: إذا كانت نهاية $(As + A^3) = 10$ ، أجد قيمة / قيم A .

نهاية $(As + A^3)$ $s \leftarrow A$ $10 = \dots\dots\dots$

إذن $A^2 + A^3 - 10 = 0$ ، ومنها $A = \dots\dots\dots$

نظرية (٢): إذا كانت نهاق (س) = ل ، نهاه (س) = م ، ل ، م $\exists$ ح فإن:

● نهيا (ق ± هـ) (س) = نهاق (س) ± نهاه (س) = ل ± م

● نهيا ك (ق) (س) = ك نهاق (س) = ك ل ، حيث ك $\exists$ ح

● نهيا (ق × هـ) (س) = نهاق (س) × نهاه (س) = ل × م

● نهيا ق (س) هـ (س) = نهاق (س) نهاه (س) = ل م ، م ≠ ٠

● نهيا (ق) (س) = نهاق (س) ل ، حيث ن عدد صحيح موجب

● نهيا (ق) (س) = نهاق (س) ل بشرط أن ل < ٠ عندما ن عدد زوجي

مثال ٢ :

إذا كانت نهاق (س) = ٣ ، نهاه (س) = ٢ - أجد قيمة ما يأتي:

١ نهيا (٣ ق + ٥ هـ) (س) ٢ نهيا (ق) (س) هـ (س)

٣ نهيا (٢ ق) (س) - نهيا (٣ س) + نهيا (٢ س) ٤ نهيا ق (س) + ٦

الحل :

١ نهيا (٣ ق + ٥ هـ) (س) = نهاق (س) + نهيا (٥ هـ) (س) = ٣ + ٥ = ٨ - ٩ = ١ -

٢ نهيا (ق) (س) هـ (س) = نهاق (س) (لماذا؟) ٣

٣ نهيا (٢ ق) (س) - نهيا (٣ س) + نهيا (٢ س) ٤

= ٢ نهيا ق (س) - نهيا هـ (٣ س) + نهيا س (٢) = ١٨

٤ نهيا ق (س) + ٦ = نهيا (٣ + ٦) (لماذا؟) ٣

مثال ٣ :

أجد قيمة ما يأتي: ١ نهيا ٢ س - نهيا ٢ س - نهيا (٣ - س - ٢ س) ٢

الحل :

١ نهيا ٢ س - نهيا ٢ س - نهيا (٣ - س - ٢ س) = نهيا ٢ س - نهيا ٢ س - نهيا ٣ = ٦

٢ نهيا (٣ - س - ٢ س) = نهيا (٣ - س - ٢ س) = ١ -

أتعلم: نقاط التحول: وهي النقاط التي تتغير قاعدة الاقتران في جوارها، وفي هذه الحالة نجد النهاية من اليمين ومن اليسار.

نشاط ٢:

إذا كان $ق(س) = [-\frac{1}{2}, 2 + س]$ ، $س \in [-2, 4]$ ، أجد:

- ١ نهاق $ق(س)$ $س \leftarrow 2$ ٢ نهاق $ق(س)$ $س \leftarrow 1$ ٣ نهاق $ق(س)$ $س \leftarrow 4$

أعيد تعريف $ق(س)$ وأكتبه على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

$$ق(س) = \left. \begin{array}{l} 3, \quad س = -2 \\ 2, \quad -2 < س \leq 0 \\ 1, \quad 0 < س \leq 2 \\ 0, \quad 2 < س \leq 4 \end{array} \right\}$$

١ لإيجاد نهاق $ق(س)$ ألاحظ أن $ق(س)$ يغير قاعدته في جوار $س = 2$ (نقطة تحول) لذلك

أجد النهاية من اليسار واليمين: نهاق $ق(س) = 1$ ، بينما نهاق $ق(س) = \dots\dots\dots$

بما أن نهاق $ق(س) \neq$ نهاق $ق(س)$ ، إذن نهاق $ق(س) = \dots\dots\dots$

٢ نهاق $ق(س) = \dots\dots\dots$ (ألاحظ أن $س = 1$ هي نقطة داخلية، وليست نقطة تحول)

٣ نهاق $ق(س) = \dots\dots\dots$ (ألاحظ أن $س = 4$ هي نقطة طرفية)

أتعلم: إذا كان $ق(س) = جاس$ ، فإن نهاق $ق(س) = جا$ $س \leftarrow 1$

إذا كان $ق(س) = جتاس$ ، فإن نهاق $ق(س) = جتا$ $س \leftarrow 1$

نشاط ٣:

أجد قيمة ما يأتي:

- ١ نهاق $ق(س) = 5جتاس + 2جا2س$ $س \leftarrow 0$ ٢ نهاق $ق(س) = 2جا2س - جتا4س$ $س \leftarrow \pi$

١ الحل : نهاق $ق(س) = 5جتاس + 2جا2س = 5جتا + 2جا(2 \times 0) = \dots\dots\dots$

٢ نهاق $ق(س) = 2جا2س - جتا4س = \dots\dots\dots$

١ إذا كانت نهياق (س) = -٢ ، نهيا هـ (س) = ١ أجد قيمة ما يأتي:

أ نهيا $\frac{س ق (س)}{٢ هـ (س)}$ س ← ١

ب نهيا $(س) ق (س) + ٢ س$ س ← ١

ج نهيا $\sqrt{١٠ + ٣ ق (س)}$ س ← ١

٢ أجد قيمة ما يأتي:

أ نهيا $\frac{س + ٢}{٣ + ٢ س}$ س ← ٢

ب نهيا $\frac{\sqrt{٣ + ٢ ص}}{١ - ٢ ص}$ ص ← ١

ج نهيا $(ع جتا \pi ع + جا ٢ \pi ع)$ ع ← ١

د نهيا $|س - ٢ - ٦ س + ٥|$ س ← ٥

٣ إذا كان ق (س) = $[\frac{١}{٣} س + ١]$ أجد ما يأتي:

أ نهياق (س) س ← ٢

ب نهيا $(س) ق (س) + ٢ س$ س ← ٣

٥ إذا كان ق (س) = $أس + ٢ - ٣ س$ ، نهياق (س) = ١٠ ، أجد نهيا $(س) ق (س) + ٣$.

٦ إذا كان ق (س) = $\left. \begin{array}{l} أس + ٢ + ٣ س ، س \geq ٢ \\ أس + ١٠ ، س < ٢ \end{array} \right\}$

أجد قيمة أعلماً بأن نهياق (س) موجودة.

المقامات، ومن ثم أجد قيمة النهاية المطلوبة.

مثال ۱ :

الحل :



نشاط ١ :

$$\frac{\text{س } ۳ - ۸}{\text{س } ۲ - ۸} \quad \text{خبر}$$



$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \frac{\text{نہا}^{\text{س} \leftarrow ۳} - \text{س}^{\text{س} \leftarrow ۳}}{\text{س}^{\text{س} \leftarrow ۳} - \text{س}^{\text{س} \leftarrow ۳}} = \dots\dots\dots$$

٢

۳

Σ

نشاط ٢:

1

مثال ٢ : أجد قيمة $\frac{\sqrt{3-2+s}}{s-7}$ نها $s \leftarrow 7$

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{0}{0}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية من خلال الضرب بمرافق البسط

$$\frac{\sqrt{3-2+s}}{s-7} \times \frac{\sqrt{3-2+s}}{\sqrt{3-2+s}} = \frac{3-2+s}{s-7} \times \frac{1}{\sqrt{3-2+s}} \quad (\text{لماذا؟})$$

$$= \frac{1}{6} = \frac{1}{3+3} \times 1 =$$

أتعلم: الضرب بالمرافق التربيعي، يعني جعل المقدار الجبري على صورة فرق بين مربعين.

نشاط ٣: أجد قيمة $\frac{\sqrt{2-2+s}}{s-1}$ نها $s \leftarrow 1$

مرافق $\sqrt{2-2+s}$ هو $\sqrt{2-2+s}$

$$\frac{\sqrt{2-2+s}}{s-1} \times \frac{\sqrt{2-2+s}}{\sqrt{2-2+s}} = \frac{2-2+s}{s-1} \times \frac{1}{\sqrt{2-2+s}}$$

إذن $\frac{\sqrt{2-2+s}}{s-1} = \frac{2-2+s}{s-1} \times \frac{1}{\sqrt{2-2+s}}$ (هل هناك طرق أخرى للحل؟)

مثال ٣ : أجد قيمة: $\frac{(\frac{1}{5} - \frac{1}{2+s})}{\frac{3-s}{3-s}}$ نها

الحل : التعويض المباشر يعطي النتيجة $\frac{0}{0}$ لذلك أبحث عن قيمة هذه النهاية.
ألاحظ أن البسط يحتوي على كسر لذلك أوجد المقامات:

$$\frac{(\frac{1}{5} - \frac{1}{2+s})}{\frac{3-s}{3-s}} \text{ نها} = \frac{2-s-5}{(5)(2+s)(3-s)} \text{ نها} = \frac{(\frac{1}{5} - \frac{1}{2+s})}{\frac{3-s}{3-s}} \text{ نها} = \frac{1-}{25} = \frac{1-}{(5)(5)} = \frac{1-}{(5)(2+s)} \text{ نها} =$$

تمارين ومسائل ٤ - ٥

١ أجد كلاً من النهايات الآتية:

أ $\frac{2+s}{4-2s}$ نها

ب $\frac{10+s-7}{5-s}$ نها

ج $\frac{3s-5s^2+6s}{3-s}$ نها

د $\frac{\sqrt{2s+6}-4}{10-2s}$ نها

٢ إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{2+s-8}{2-s} \\ \frac{4s^2+s-4}{1+s^2} \end{array} \right\}$ ، س > ٢ ،
س < ٢ ،

أجد قيمة أ التي تجعل نها ق(س) موجودة.

نظرية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (حيث $\sin$ بالتقدير الدائري)

أتعلم: ١ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ٢ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ (حيث $\sin$ بالتقدير الدائري)

مثال ١: أجد قيمة ما يأتي:

١ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}$ ٢ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 5x}$ ٣ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin 5x}$

الحل: ١ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \frac{1}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{1}{7} \times 5 = \frac{5}{7}$

٢ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 5x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x} = \frac{1}{0} = \infty$

٣ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)^2}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x = \frac{3}{5} \times 0 = 0$

نشاط ١: أجد ما يأتي:

١ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5 \sin x}{\sin 3x}$ ٢ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin^2 x}{\sin 3x + \sin^2 x}$

١ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5 \sin x}{\sin 3x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x - 5 \lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x} = \frac{0 - 5 \times 0}{0} = \frac{0}{0}$

تصبح النهاية على الصورة $\frac{0}{0}$ ، أقسم كلا من البسط والمقام على $\sin x$:

٢ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin^2 x}{\sin 3x + \sin^2 x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x + \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x + \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x} = \frac{0 + 0}{0 + 0} = \frac{0}{0}$

تصبح النهاية على الصورة $\frac{0}{0}$ ، بقسمة كل من البسط والمقام على $\sin x$:

مثال ٢: أجد ما يأتي: ١) نهيا $\frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2}$

الحل : ١) نهيا $\frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2}$ ، أضرب كلا من البسط والمقام بمرافق البسط (١ + جتا ٥ س)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\text{س}^2 + \text{جتا } 5 \text{ س}} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}}{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \text{جتا } 5 \text{ س}}{\text{س}^2} \times \frac{1 + \text{جتا } 5 \text{ س}}{2} \end{aligned}$$

تمارين ومسائل ٤ - ٦

١) أجد ما يأتي، وأتحقق:

أ) نهيا $\frac{\text{ظا } 3 \text{ س}}{\text{جا } 7 \text{ س}}$

ب) نهيا $\frac{1}{\text{س}^2 \text{ ظتا } \pi \text{ س}}$

ج) نهيا $\frac{\text{ظا } 5 \text{ س}}{\text{س}^3}$

د) نهيا $\frac{3 - \text{جا } 5 \text{ س}}{5 \text{ ظتا } 3 \text{ س}}$

٢) إذا كان ق(س) = $\frac{\sqrt{\text{جا } 5 \text{ س}}}{\text{س}}$ ، أجد نهيا ق(س).

٣) إذا كانت نهيا أ - جتا ب س = $\frac{9}{4}$ ، أجد قيم أ ، ب .

نظرية: ١ إذا كان $\frac{أ}{س} = (س)$ ، $س \neq ٠$ فإن نهاية $(س) = ٠$ $\leftarrow \pm \infty$

٢ إذا كان $(س) = ج$ فإن نهاية $(س) = ج$ $\leftarrow \pm \infty$

مثال ١ : أجد ما يأتي:

١) نهاية $\frac{٥-}{س} \leftarrow \infty$

٢) نهاية $٧ \leftarrow \infty$

الحل : ١) نهاية $\frac{٥-}{س} \leftarrow \infty = ٠$

٢) نهاية $٧ \leftarrow \infty = ٧$

مثال ٢ : أجد نهاية $(س^٣ - ٢س + ٥) \leftarrow \infty$

الحل : نهاية $(س^٣ - ٢س + ٥) \leftarrow \infty = (س^٣ - ٢س + ٥) \leftarrow \infty = (١ - \frac{٢}{س} + \frac{٥}{س^٣}) \leftarrow \infty = (١ - ٠ + ٠) \leftarrow \infty = ١$

مثال ٣ : أجد ما يأتي:

١) نهاية $\frac{٥س^٢ + ٣س + ٥}{س^٣ + ٢س} \leftarrow \infty$

٢) نهاية $\frac{س^٣ + ٢س - ١}{س^٢ - ١} \leftarrow \infty$

٣) نهاية $\frac{س^٢ + ٢س - ٨}{س^٣ + ٢س - ٥} \leftarrow \infty$

الحل : ١) نهاية $\frac{٥س^٢ + ٣س + ٥}{س^٣ + ٢س} \leftarrow \infty = \frac{(٥ + \frac{٣}{س} + \frac{٥}{س^٢})}{(١ + \frac{٢}{س} + \frac{٥}{س^٣})} \leftarrow \infty = \frac{(٥ + ٠ + ٠)}{(١ + ٠ + ٠)} = ٥$

٢) نهاية $\frac{س^٣ + ٢س - ١}{س^٢ - ١} \leftarrow \infty = \frac{(١ + \frac{٢}{س} - \frac{١}{س^٣})}{(١ - \frac{١}{س^٢})} \leftarrow \infty = \frac{(١ + ٠ - ٠)}{(١ - ٠)} = ١$ (لماذا؟)

٣) نهاية $\frac{س^٢ + ٢س - ٨}{س^٣ + ٢س - ٥} \leftarrow \infty = \frac{(١ + \frac{٢}{س} - \frac{٨}{س^٢})}{(١ + \frac{٢}{س} - \frac{٥}{س^٣})} \leftarrow \infty = \frac{(١ + ٠ - ٠)}{(١ + ٠ - ٠)} = ١$ صفر

١ أجد ما يأتي :

ب) نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(s^2 + 3)(s + 5)}{s^2(s^2 + 3)}$

أ) نها $\lim_{s \rightarrow \infty} (s^4 - 7s + 15)$

د) نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s^2 - 2}{s^3 + 2s - 5} \right)$

ج) نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{s + 2}{s + 1} - \frac{s^2 - 2}{s - 1} \right)$

هـ) نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{|5 - s^2|}{s^3 + 3} \right)$

٢ إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{(2 - s^2)(s^4 + s^3 + 2s - 1)}{s^3 + 3s^2 + 3} \right) = 1 -$ ، أجد قيم أ ، ب .

تعريف: إذا كان q (س) اقتراناً، أ عدداً حقيقياً ينتمي لمجال q (س)، فإن q (س) اقتران متصل عند $s = a$ إذا كان:

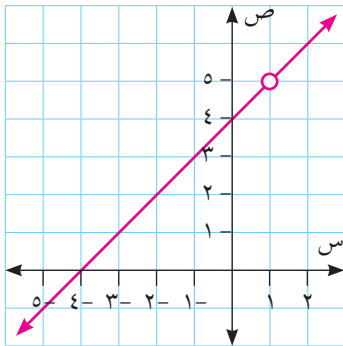
١ q (س) معرفاً عند $s = a$

٢ نهاية q (س) موجودة كعدد حقيقي.

٣ نهاية q (س) $= q(a)$

مثال ١: إذا كان q (س) $= \frac{s^2 + 3s - 4}{s - 1}$ ، $s \neq 1$ ، أبحث في اتصال q (س) عند $s = 3$ ، $s = 1$

الحل: عندما $s = 3$ ، $q(3) = \frac{4 - (3)^3 + 2(3)}{1 - 3} = 7$ ، نهاية q (س) $= \frac{4 - (3)^3 + 2(3)}{1 - 3} = 7$



نهاية q (س) $= q(3)$ ، إذن q (س) متصل عند $s = 3$

q (س) غير معرف عند $s = 1$

إذن q (س) غير متصل عند $s = 1$

(ألاحظ أن نهاية q (س) موجودة).

مثال ٢: إذا كان q (س) $= \frac{s^2 + 3s - 4}{s - 1}$ ، $s > 1$ ، $s \geq 1$ ، $s < 3$ ، $s \leq 3$

أبحث في اتصال q (س) عندما $s = 0$ ، $s = 1$ ، $s = 2$ ، $s = 3$ ، $s = 5$.

الحل: ١ عندما $s = 0$ ، $q(0) = 3 - 0 + 0 = 3$ ، $3 - = 3 - 0 + 0 = 3$

نهاية q (س) $= \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 + 3s - 4) = 3 - = 3 - 0 + 0 = 3$

$q(0) = 3$ ، إذن q (س) متصل عند $s = 0$

٢ عندما $s = 1$ (ألاحظ أن $s = 1$ نقطة تحول)،

$$ق(١) = \sqrt{1 + 1 - 3} = 1$$

$$نہا ق(س) = (س) \begin{matrix} -1 \leftarrow س \\ -1 \leftarrow س \end{matrix} = 1 - (3 - س + 2)$$

$$نہا ق(س) = (س) \begin{matrix} +1 \leftarrow س \\ +1 \leftarrow س \end{matrix} = 1 + 3 - س$$

$$نہا ق(س) \neq نہا ق(س) \begin{matrix} -1 \leftarrow س \\ +1 \leftarrow س \end{matrix}$$

$$نہا ق(س) (س) غير موجوده ، إذن ق(س) منفصل عند س = 1$$

$$\textcircled{3} \text{ عند س} = 2$$

$$ق(2) = \sqrt{1 + 2 - 3} = 0$$

$$نہا ق(س) = (س) \begin{matrix} 2 \leftarrow س \\ 2 \leftarrow س \end{matrix} = 1 + 2 - 3$$

$$ق(2) = نہا ق(س) (س) ، إذن ق(س) متصل عند س = 2$$

$$\textcircled{4} \text{ عند س} = 3 \text{ (ألاحظ أنه عند س} = 3 \text{ يوجد نقطة تحول)}$$

$$ق(3) = \sqrt{1 + 3 - 3} = 1$$

$$نہا ق(س) = (س) \begin{matrix} -3 \leftarrow س \\ -3 \leftarrow س \end{matrix} = 1 + 3 - س$$

$$نہا ق(س) = (س) \begin{matrix} +3 \leftarrow س \\ +3 \leftarrow س \end{matrix} = 1 + 3 - س ، إذن نہا ق(س) = 0$$

$$نہا ق(س) = ق(3) ، إذن ق(س) متصل عند س = 3$$

$$\textcircled{5} \text{ عندما س} = 5$$

$$ق(5) = 0 ، نہا ق(س) = (س) \begin{matrix} 5 \leftarrow س \\ 5 \leftarrow س \end{matrix} = 5$$

$$ق(5) = نہا ق(س) (س) ، إذن ق(س) متصل عند س = 5$$

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتراناً متعدد القاعدة، ويغير قاعدته عند س = أ فإن ق(س) متصل عند س = أ ، إذا كان نہا ق(س) = نہا ق(س) = ق(أ)

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان ق(س) = } \frac{|س^2 - 2س - 2|}{س - 2} ، س \neq 2 ، \text{ أبحث في اتصال ق(س) عندما س} = 2 \\ \text{أعيد تعريف ق(س) وأكتبه على صورة اقتربان متعدد القاعدة على النحو الآتي:} \end{array} \right\}$$

نشاط ١:

ق(س) = =

ق(٢) = =

نهـا ق(س) = ، نهـا ق(س) = ، إذن نهـا ق(س) =
 $\text{س} \leftarrow ٢$ $\text{س} \leftarrow ٢$ $\text{س} \leftarrow ٢$

ق(٢) نهـا ق(س) ، ومنها
 $\text{س} \leftarrow ٢$

إذا كان ق(س) = س + $\left[\frac{\text{س}}{٢}\right]$ ، س $\in [٢-، ٤]$ أبحث في اتصال ق(س)

مثال ٣ :

عند س = ١- ، ٢- .

أعيد تعريف ق(س) ، وأكتب ق(س) على صورة اقتران متعدد القاعدة على النحو الآتي:

الحل :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - ١ ، \text{س} - ٢ \geq \text{س} > ٠ \\ \text{س} ، \text{س} \geq ٠ > ٢ \\ \text{س} + ١ ، \text{س} \geq ٢ > ٤ \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

١ عندما س = ١-

$$\text{ق(١-)} = ١ - ١ - = ٢- ، \text{نهـا ق(س)} = \text{نهـا (س - ١)} = ٢-
 $\text{س} \leftarrow ١$ $\text{س} \leftarrow ١$$$

$$\text{ق(١-)} = \text{نهـا ق(س)} ، \text{إذن ق(س) متصل عند س} = ١-
 $\text{س} \leftarrow ١$$$

٢ عندما س = ٢ (ألاحظ أن س = ٢ نقطة تحول)

$$\text{ق(٢)} = ١ + ٢ = ٣$$

نهـا ق(س) = نهـا س = ٢ ، إذن ق(س) منفصل عند س = ٢ (لماذا؟)

ماذا ألاحظ في سلوك الإقتران عند س = ٢ ؟

نظرية: إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين عند س = أ ، فإن كلا من الاقترانات الآتية:

متصلة عند س = أ :

١ (ق ± هـ)(س) ٢ (ق × هـ)(س)

٣ ك × ق(س) ، حيث ك عدد ثابت. ٤ $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)$ (س) ، بشرط أن هـ(أ) ≠ ٠

٥ $\sqrt[n]{\text{ق(س)}}$: بشرط أن ق(أ) < ٠ ، إذا كانت زوجية (لماذا؟)

- أتعلم: ١ إذا كان ق(س) اقتراناً كثير حدود فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح.
- ٢ إذا كان ق(س) اقتراناً نسبياً فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح - {أصفار المقام}.
- ٣ إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً $\forall$ س $\exists$ ح فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح ، ن عدد صحيح موجب.
- ٤ إذا كان ق(س) = جاس فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح.
- ٥ إذا كان ق(س) = جتاس فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح.
- ٦ إذا كان ق(س) = |هـ(س)|، فإن ق(س) اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح ، عندما هـ(س) متصل.

مثال ٤ :

أبحث في اتصال كل من الاقترانات الآتية:

١ ق(س) = س^٢جتاس - $(\frac{س+٣}{س+٤})$

٢ ك(س) = ٥ + |س^٢ - س - ١٢|

الحل :

١ ق(س) = س^٢جتاس - $(\frac{س+٣}{س+٤})$ متصل $\forall$ س $\exists$ ح لأنه حاصل طرح اقترانين متصلين.
 س^٢جتاس متصل $\forall$ س $\exists$ ح لأنه كثير حدود، جتاس اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح،
 س^٢جتاس متصل لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين، $(\frac{س+٣}{س+٤})$ متصل $\forall$ س $\exists$ ح
 لأنه اقتران نسبي والمقام لا يساوي صفراً.

٢ ك(س) = ٥ + |س^٢ - س - ١٢| متصل $\forall$ س $\exists$ ح لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين.
 (٥ اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح لأنه اقتران ثابت، |س^٢ - س - ١٢| اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ ح
 لأنه اقتران قيمة مطلقة لاقتران كثير حدود متصل $\forall$ س $\exists$ ح)

أتعلم: إذا كان ق(س) اقتراناً معرفاً على [أ، ب] فإن:

ق(س) اقتران متصل $\forall$ س $\exists$ [أ، ب] إذا كان:

- ق(س) اقتراناً متصلاً عند كل نقطة في [أ، ب]
- ق(س) متصلاً عند س = أ من جهة اليمين.
- ق(س) متصلاً عند س = ب من جهة اليسار.

$$\left. \begin{array}{l} ١ - س \geq ٠ \\ ٢ \geq س \\ س = ٢ \end{array} \right\} \text{ إذا كان ق(س) = جتا } (٢\pi س)$$

مثال ٥ :

أبحث في اتصال ق(س) في [١، ٢]

١ عندما $1 \leq s < 0$ ، ق(س) = $s^2 - 1$ متصل لأنه كثير حدود.

$0 < s < 2$ ، ق(س) = جتا($2\pi s$) متصل لأنه اقتران جتا س.

٢ عندما $s = 2$ ، (نقطة طرفية) : ق(2) = 10

نها ق(س) = 1 ، ومنها ق(2) $\neq$ نها ق(س)
 $s \leftarrow 2$ $s \leftarrow 2$

ومنها ق(س) منفصل عند $s = 2$ من جهة اليسار.

٣ عندما $s = 0$ ، (نقطة تحول) : ق(0) = 1 ، نها ق(س) = نها جتا($2\pi s$) = 1
 $s \leftarrow 0$ $s \leftarrow 0$

نها ق(س) = نها (س) = $1 - 1 = 0$ ، ومنها ق(س) منفصل عند $s = 0$ = صفر

إذن ق(س) متصل $\forall s \in [1, 2] - \{2\}$ (ق(س) غير متصل على $[1, 2]$)

تمارين ومسائل ٤ - ٨

١ أبحث في اتصال كل من الاقتارات الآتية عند النقطة المطلوبة:

أ ق(س) = $|s^2 + 2s - 8|$ عندما $s = 2$ ،

ب ق(س) = $s^2 \times [s - 2, 0]$ ، عندما $s = 8, 0$ ،

٢ إذا كان ق(س) = $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{5s+1} - 3}{s-3} , s \neq 3 \\ 3 , s = 3 \end{array} \right.$ ، أبحث في اتصال ق(س) عندما $s = 3$.

٣ أبحث في اتصال كل من الاقتارات الآتية على مجالها:

أ ق(س) = $|3s - 3| + 2s$ ، $s \in \mathbb{R}$.

ب ق(س) = $[1 - \frac{s}{3}, 5]$ ، $s \in [3, 5]$.

٤ إذا كان ق(س) = $\left\{ \begin{array}{l} s^2 + 3 , 1 \leq s < 1 \\ 1 + s^2 , 1 \leq s < 3 \\ \frac{s+2}{s+1} , 3 \leq s < 5 \end{array} \right.$ ، أجد قيم أ ، ب التي تجعل ق(س) متصلاً على مجاله.

- ١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:
- ١ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠، ٠) وبؤرته (٢، -٠)؟
 (أ) $s^2 = 8x$ (ب) $s^2 = -8x$ (ج) $s^2 = 8x$ (د) $s^2 = -8x$
- ٢ ما معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $s = 5, 2$ ؟
 (أ) $s^2 = 10x$ (ب) $s^2 = -10x$ (ج) $s^2 = 10x$ (د) $s^2 = -10x$
- ٣ إذا كان القطع المكافئ $s^2 = 4x$ يمر بالنقطة (١، ٢) فما معادلة دليل هذا القطع؟
 (أ) $s = 1$ (ب) $s = 1$ (ج) $s = -1$ (د) $s = -1$
- ٤ ما نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $\frac{s^2}{9} + \frac{ص^2}{16} = 1$ ؟
 (أ) قطع ناقص صادي (ب) قطع ناقص سيني
 (ج) قطع زائد سيني (د) قطع زائد صادي
- ٥ ما البعد البؤري للقطع $s^2 = 36 + 100x$ ؟
 (أ) ١٢ وحدة (ب) $2\sqrt{136}$ وحدة (ج) ٨ وحدات (د) ١٦ وحدة
- ٦ إذا كانت $نها$ (٣ق(س) - ٢(س) ، ما قيمة $نها$ ق(س)؟
 (أ) ٢- (ب) ١- (ج) ١ (د) ٢
- ٧ إذا كان ق(٢-) = ٣ ، $نها$ ق(س) = -٥ ، ما قيمة $نها$ ق(٣- (س)؟
 (أ) ١٥- (ب) ٦- (ج) ٣ (د) ٩
- ٨ إذا كان ق(س) = $s^2 - 1$ ، $هـ(س) = \frac{1}{s-1}$ ، ما قيمة $نها$ (ق × هـ) (س)؟
 (أ) كمية غير معرفة (ب) ١- (ج) ٢ (د) ٥
- ٩ ما قيمة $نها$ $\frac{\pi}{2}$ جا $\frac{\pi}{2}$ ؟
 (أ) ١- (ب) π (ج) $\frac{1}{\pi}$ (د) ١

١٠ ما قيمة نها $\frac{3^3 - 5}{3^3 + 3}$ ؟

- (أ) $-\infty$ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ∞

٢ إذا كان ق(س) = $\frac{3 - 3(2 - 3) - 2}{3 - 3}$ ، $3 \neq 3$ ، $3 = 3$ ، 11

اقتراناً متصلاً على ح أجد قيمة / قيم ب.

٣ إذا كانت نها $\frac{(1 + 2)^2}{(1 + 3)^2}$ ، $2 = -$ ، أجد قيم كل من أ ، ن .

٤ المعادلتان س = ٢ن ، ص = ٦ن حيث $0 \leq ٠$ ، تحددان موقع جسم على منحنى في اللحظة ن ، أكتب معادلة المنحنى الذي يتحرك عليه الجسم على صورة س = ق(ص) ، وأعين نوع المنحنى.



٥ تشتهر المباني الفلسطينية القديمة بأقواسها ، إذا كان طول قاعدة أحد الأقواس في سجن عكا على شكل قطع مكافئ يساوي ٨م ، وبعد أعلى نقطة في القوس عن قاعدته يساوي ٣م ، أكتب معادلة هذا القوس (علماً أنه في الوضع القياسي).

ورقة عمل (٤)

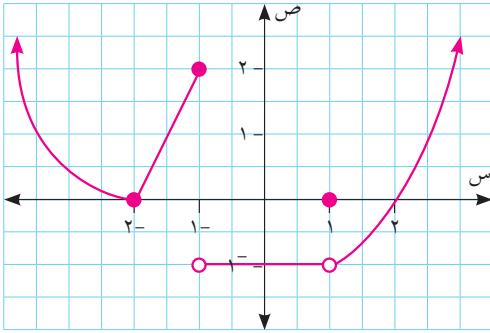
١ قطع مكافئ قياسي يمر بالنقطة (٢، ٨). أكتب معادلته (أكتب جميع الحالات الممكنة).

٢ أجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومحوره القاطع ينطبق على محور الصادات ويمر بالنقطتين (٤، ٦)، (١، -٣)؟

٣ أجد بؤرتي القطع الزائد $1 = \frac{س^2}{١٦ - د} - \frac{ص^2}{د - ٢٥}$

٤ جسر على شكل نصف قطع ناقص، محوره الأكبر أفقي، إذا كان طول قاعدة القوس ٢٤ م، وتبعد أعلى نقطة في القوس فوق الطريق الأفقية ٦ م، أجد ارتفاع القوس على بعد ٤ م من مركز القاعدة.

٥ إذا كانت $س \rightarrow \infty$ $فها = \frac{س(١ + س^٢)}{س^٢(١ + س)}$ ، أجد قيم كل من أ، ن.



٦ يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران

ق(س) المعروف على ح، بالاعتماد عليه أجب عن الأسئلة الآتية:

أ أجد الإحداثيات السينية لنقاط انفصال ق(س).

ب هل ق(س) متصل على $[-٢، ١]$ ، ولماذا؟

ج هل ق(س) متصل $[-١، \infty]$ ، ولماذا؟

د هل ق(س) متصل $[-\infty، ٢]$ ، ولماذا؟

هـ هل ق(س) متصل على مجاله، ولماذا؟

٧ أجد ما يأتي:

ب $فها = \frac{١ - جتا ٥ س}{س جا ٥ س}$

أ $فها = \frac{جتا س - جتا ٣ س}{١ - جتا ٧ س}$



س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١. معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠، ٠) وبؤرته (٠، ٥) هي:

(أ) ص ٢ - = ٢٠ س. (ب) ص ٢ = ٢٠ س. (ج) ص ٢ = ٢٠ س. (د) ص ٢ - = ٢٠ س.

٢. المعادلة $\frac{ص^2}{٢-ك} + \frac{ص^2}{ك} = ١$ ، ك < ٥ تمثل معادلة قطع:

(أ) زائد سيني. (ب) زائد صادي. (ج) ناقص سيني. (د) ناقص صادي.

٣. إذا كان (س) اقتراناً متصلاً على ٤ ، وكانت $١٨ = (٢+س)٥$ وكانت $١٨ = (٢-س)٥$ فإن (٣) تساوي:

(أ) ٨، ٤. (ب) ٢٠. (ج) ٤. (د) ٣، ٢.

٤. الاقتران (س) = [٤، ٠ + س] متصل عند س تساوي:

(أ) صفر. (ب) ٠، ٦. (ج) ١، ٦. (د) ٠، ٤.

٥. $\frac{(٢-٢س)(٣+س)}{٣س-٤س}$ يساوي:

(أ) ٠، ٥. (ب) ٠، ٥. (ج) ∞ . (د) صفر.

٦. $\frac{|٩-٢س|}{٣-س}$:

(أ) ٦. (ب) ٦-. (ج) صفر. (د) غير موجودة.

٧. $\frac{س٣-٣س}{س٤-٢س}$ تساوي:

(أ) ١-. (ب) ١. (ج) $\frac{١}{٢}$ -. (د) $\frac{٣}{٢}$ -. (هـ) $\frac{١}{٢}$.

٨. قطع ناقص معادلته $٨س + ٩ص = ٧٢$ ، ما طول محوره الأكبر؟

(أ) ٦. (ب) ٣. (ج) $٢\sqrt{٤}$. (د) ٢.

س٢: أبحث في اتصال كل من الاقتارات الآتية على مجالها:

أ. ق(س) = جا٢س + ٣س - ٣، س ∃ ح.

ب. ق(س) = [١ - $\frac{س}{٣}$]، س ∃ [-٣، ٥].

س٣: أ) جد معادلة منحنى القطع الزائد الذي مركزه (٠، ٠)، والبعد بين بؤرتيه ١٠، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$ ، ومحوره القاطع ينطبق على محور السينات، ثم ارسم منحناه.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{٢ - ٣ + س}}{١ - س} \\ ١ = س \\ ١ < س \\ ١ > س \end{array} \right\} \text{ب) إذا كان ق(س) = } \left. \begin{array}{l} ٢ \\ ١ \\ ٢ + س \end{array} \right\}$$

متصلاً على ح، جد قيم الثابتين ل، ب.

س٤: أ) جد: ١- $\frac{٦٤ - ٦(١ + س)}{س - ٢}$ ٢- $\frac{٦٤ - ٦(١ + س)}{س - ٢}$ ٣- $\frac{٦٤ - ٦(١ + س)}{س - ٢}$

ب) تتحرك النقطة ه (س، ص) في المستوى، بحيث يكون مجموع بعدها عن النقطتين (٤، ٠)، (٠، ٤) يساوي ١٠ وحدات دائماً.

أوجد معادلة المحل الهندسي لهذه النقطة.

- ١ • $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ • $\sin^2 \theta + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ • $\cos^2 \theta + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$
- ٢ • $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ • $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ • $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
- ٣ • $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ • $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ • $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$
- ٤ • $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ • $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ • $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
- ٥ • $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ 1 - \sin^2 \theta \\ 2 \sin^2 \theta - 1 \end{array} \right\} = \cos(2\theta)$$

ع	٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ع
٣,٧-	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٣,٧-
٣,٦-	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٦-
٣,٥-	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٢	٣,٥-
٣,٤-	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٣,٤-
٣,٣-	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٣,٣-
٣,٢-	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٣,٢-
٣,١-	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠١٠	٣,١-
٣,٠-	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٣,٠-
٢,٩-	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٩	٢,٩-
٢,٨-	٠,٠٠١٩	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٦	٢,٨-
٢,٧-	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٥	٢,٧-
٢,٦-	٠,٠٠٣٦	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٧	٢,٦-
٢,٥-	٠,٠٠٤٨	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٦٢	٢,٥-
٢,٤-	٠,٠٠٦٤	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٨٢	٢,٤-
٢,٣-	٠,٠٠٨٤	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٩	٠,٠١٠٢	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٧	٢,٣-
٢,٢-	٠,٠١١٠	٠,٠١١٣	٠,٠١١٦	٠,٠١١٩	٠,٠١٢٢	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٩	٠,٠١٣٢	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٩	٢,٢-
٢,١-	٠,٠١٤٣	٠,٠١٤٦	٠,٠١٥٠	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٨	٠,٠١٦٢	٠,٠١٦٦	٠,٠١٧٠	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٩	٢,١-
٢,٠-	٠,٠١٨٣	٠,٠١٨٨	٠,٠١٩٢	٠,٠١٩٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢٢٨	٢,٠-
١,٩-	٠,٠٢٣٣	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٨٧	١,٩-
١,٨-	٠,٠٢٩٤	٠,٠٣٠١	٠,٠٣٠٧	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٥١	٠,٠٣٥٩	١,٨-
١,٧-	٠,٠٣٦٧	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٩٢	٠,٠٤٠١	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٤٦	١,٧-
١,٦-	٠,٠٤٥٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٥٠٥	٠,٠٥١٦	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٤٨	١,٦-
١,٥-	٠,٠٥٥٩	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٩٤	٠,٠٦٠٦	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٦٨	١,٥-
١,٤-	٠,٠٦٨١	٠,٠٦٩٤	٠,٠٧٠٨	٠,٠٧٢١	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٠٨	١,٤-
١,٣-	٠,٠٨٢٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٦٩	٠,٠٨٨٥	٠,٠٩٠١	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٦٨	١,٣-
١,٢-	٠,٠٩٨٥	٠,١٠٠٣	٠,١٠٢٠	٠,١٠٣٨	٠,١٠٥٦	٠,١٠٧٥	٠,١٠٩٣	٠,١١١٢	٠,١١٣١	٠,١١٥١	١,٢-
١,١-	٠,١١٧٠	٠,١١٩٠	٠,١٢١٠	٠,١٢٣٠	٠,١٢٥١	٠,١٢٧١	٠,١٢٩٢	٠,١٣١٤	٠,١٣٣٥	٠,١٣٥٧	١,١-
١,٠-	٠,١٣٧٩	٠,١٤٠١	٠,١٤٢٣	٠,١٤٤٦	٠,١٤٦٩	٠,١٤٩٢	٠,١٥١٥	٠,١٥٣٩	٠,١٥٦٢	٠,١٥٨٧	١,٠-
٠,٩-	٠,١٦١١	٠,١٦٣٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٨٥	٠,١٧١١	٠,١٧٣٦	٠,١٧٦٢	٠,١٧٨٨	٠,١٨١٤	٠,١٨٤١	٠,٩-
٠,٨-	٠,١٨٦٧	٠,١٨٩٤	٠,١٩٢٢	٠,١٩٤٩	٠,١٩٧٧	٠,٢٠٠٥	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٩٠	٠,٢١١٩	٠,٨-
٠,٧-	٠,٢١٤٨	٠,٢١٧٧	٠,٢٢٠٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٩٦	٠,٢٣٢٧	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٠	٠,٧-
٠,٦-	٠,٢٤٥١	٠,٢٤٨٣	٠,٢٥١٤	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥٧٨	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦٧٦	٠,٢٧٠٩	٠,٢٧٤٣	٠,٦-
٠,٥-	٠,٢٧٧٦	٠,٢٨١٠	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨٧٧	٠,٢٩١٢	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩٨١	٠,٣٠١٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠٨٥	٠,٥-
٠,٤-	٠,٣١٢١	٠,٣١٥٦	٠,٣١٩٢	٠,٣٢٢٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٣٠٠	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٧٢	٠,٣٤٠٩	٠,٣٤٤٦	٠,٤-
٠,٣-	٠,٣٤٨٣	٠,٣٥٢٠	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٩٤	٠,٣٦٣٢	٠,٣٦٦٩	٠,٣٧٠٧	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٨٣	٠,٣٨٢١	٠,٣-
٠,٢-	٠,٣٨٥٩	٠,٣٨٩٧	٠,٣٩٣٦	٠,٣٩٧٤	٠,٤٠١٣	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠٩٠	٠,٤١٢٩	٠,٤١٦٨	٠,٤٢٠٧	٠,٢-
٠,١-	٠,٤٢٤٧	٠,٤٢٨٦	٠,٤٣٢٥	٠,٤٣٦٤	٠,٤٤٠٤	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٨٣	٠,٤٥٢٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٦٠٢	٠,١-
٠,٠	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٨١	٠,٤٧٢١	٠,٤٧٦١	٠,٤٨٠١	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٦٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠



ع	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٩	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨
٣,٥	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨
٣,٦	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩
٣,٧	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩