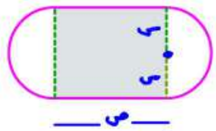
مثال (هام - كتاب مدرسي)

مسار سباق طوله ٤٠٠ متر يحيط بميدان على شكل مستطيل في كل من طرفيه نصف دائرة. ما أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن؟



الحل

مساحة المستطيل م = ٢س × ص ← ① (إقتران الهدف)

طول المسار = ٤٠٠ ⇐ ٢πس + ٢ص = ٤٠٠ (علاقة مساعدة)

٢ص = ٤٠٠ − ٢πس ومنها ص = ٢٠٠ − πس ← ②

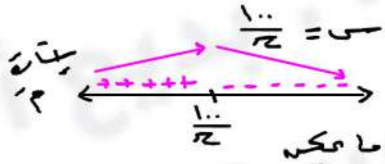
بالتعويض عن ص في ① ⇐ م = ٢س (٢٠٠ − πس)

م = ٤٠٠س − ٢πس²

م' = ٤٠٠ − ٤πس = ٠

⇐ ٤πس = ٤٠٠ ⇐ س = $\frac{١٠٠}{\pi}$

من إشارة م' نلاحظ

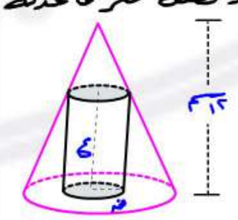


أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما س = $\boxed{\frac{١٠٠}{\pi}}$

من ② ⇐ ص = ٢٠٠ − π × $\frac{١٠٠}{\pi}$ = $\boxed{١٠٠}$

مثال (مهم كتاب مدرسي)

جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري تام ارتفاعه ١٢سم ونصف قطر قاعدته ٤سم.



الحل نفرض إرتفاع الأسطوانة = ع

ونصف قطرها = نق

حجم الأسطوانة ح = π نق² × ع ← ① إقتران الهدف

من تشابه المثلثات: $\frac{نق}{٤}$ = $\frac{١٢ - ع}{١٢}$ علاقة مساعدة

⇐ ٣نق = ١٢ − ع ⇐ ع = ١٢ − ٣نق ← ②

بالتعويض عن ع في ①

ح = π نق² (١٢ − ٣نق)

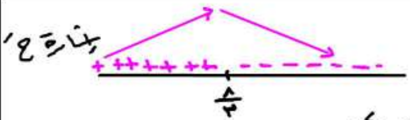
ح = ١٢π نق² − ٣π نق³

ح' = ٢٤π نق − ٩π نق² = ٠

⇐ ٣π نق (٨ − ٣نق) = ٠

إما نق = ٠ مرفوض أو ٨ − ٣نق = ٠ ⇐ نق = $\frac{٨}{٣}$

من إشارة ح'



نلاحظ أن حجم الأسطوانة يكون أكبر ما يمكن عندما نق = $\frac{٨}{٣}$ سم

⇐ ح = π($\frac{٨}{٣}$)² (١٢ − ٣ × $\frac{٨}{٣}$) = $\frac{٢٥٦}{٩}$π سم³

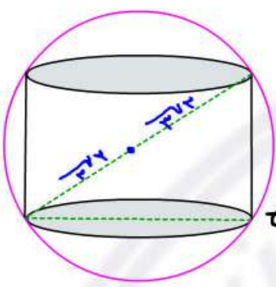
مثال جد إرتفاع الأسطوانة الدائرية ذات أكبر حجم ممكن التي يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها ٣√٣

الحل

حجم الأسطوانة ح = π نق² × ع ← ① إقتران الهدف

من فيثاغورث :-

(٢نق)² + ع² = (٦√٣)² قاعدة مساعدة



٤نق² + ع² = ١٠٨

نق² = $\frac{١٠٨ - ع²}{٤}$

بالتعويض في ①

⇐ ح = π ($\frac{١٠٨ - ع²}{٤}$) × ع

ح = $\frac{\pi}{٤}$ (١٠٨ع − ع³)

ح' = $\frac{\pi}{٤}$ (١٠٨ − ٣ع²)

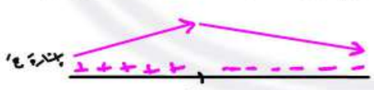
$\frac{\pi}{٤}$ (١٠٨ − ٣ع²) = ٠

⇐ ١٠٨ − ٣ع² = ٠

⇐ ٣ع² = ١٠٨

⇐ ع² = ٣٦ ⇐ ع = ±٦ نأخذ فقط ٦

من إشارة ح'



نلاحظ أن

الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما ع = ٦

*ملاحظة :- لو طلب أكبر حجم نعوض في معادلة الحجم عن ع = ٦

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال : جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٥ سم

الحل :

نفرض أبعاد المستطيل س ، ص

مساحة المستطيل :

م = س × ص ـــــ ①

من فيثاغورث $س^2 + ص^2 = (١٠)^2$ علاقة مساعدة

$س^2 + ص^2 = ١٠٠$

$ص^2 = ١٠٠ - س^2 \Leftarrow ص = \sqrt{١٠٠ - س^2}$

بالتعويض عن ص في ①

$م = س \sqrt{١٠٠ - س^2}$

$م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٠٠ - س^2}} + \sqrt{١٠٠ - س^2}$

$م' = \frac{-س^2}{\sqrt{١٠٠ - س^2}} + \sqrt{١٠٠ - س^2}$

$م' = ٠$

$\Leftarrow \frac{س^2}{\sqrt{١٠٠ - س^2}} = \sqrt{١٠٠ - س^2}$

$\Leftarrow س^2 = ١٠٠ - س^2 \Leftarrow ٢س^2 = ١٠٠$

$\Leftarrow س^2 = ٥٠ \Leftarrow س = \pm ١٠$ نأخذ الموجب فقط

من إشارة م' نلاحظ أنه

المساحة تكون أكبر ما يمكن

عندما س = ١٠ سم

ومن ② ص = $\sqrt{١٠٠ - ٥٠} = \sqrt{٥٠} = ١٠$ سم

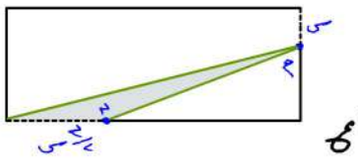
مثال : (هام - كتاب مدرسي)

أ ب ج د مستطيل عرضه أ د = ٨ سم وطوله د ج = ١٠ سم

م تقع على الضلع أ د بحيث أ م = س سم ، ن تقع على الضلع د ج بحيث م ن = $\frac{٣}{٢}$ سم ، جد قيمة س بحيث تكون مساحة المثلث م ن ج أكبر ما يمكن

تابع ← الحل

الحل



مساحة المثلث م ن ج

م = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} س \times (٨ - س)$ بفك القوس

= $٦ - س - \frac{٣}{٤} س^2$

$م' = ٦ - \frac{٣}{٢} س = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٢} س = ٦$

$\Leftarrow س = ٤$

من إشارة م' نلاحظ أنه لها قيمة تكون أكبر ما يمكن عندما س = ٤

مثال : مقلمة على شكل أسطوانة دائرية مفتوحة من أعلى سعتها ١٩٢ π سم³ فإذا علمت أن سعر كل ١ سم² من البلاستيك المستخدم لصنع القاعدة يعادل ٣ أمثال سعر ١ سم² من البلاستيك المستخدم في صنع الجوانب جد أبعاد المقلمة ذات الأقل تكلفة .

الحل :

تكلفة الجوانب = سعر ١ سم² × المساحة

= ١ × ٢ π نق × ع = ٢ π نق ع

تكلفة القاعدة = سعر ١ سم² × المساحة

= ٣ × π نق²

التكلفة الكلية ت = تكلفة الجوانب + تكلفة القاعدة

$ت = ٢ \pi نق ع + ٣ \pi نق^2$ ـــــ ① إختزال الحجم

الحجم = π نق² × ع = ١٩٢ π

القاعدة

$ع = \frac{١٩٢ \pi}{\pi نق^2} = \frac{١٩٢}{نق^2}$ ـــــ ②

بالتعويض في ①

$ت = ٢ \pi نق \times \frac{١٩٢}{نق^2} + ٣ \pi نق^2$

$ت = \frac{٣٨٤ \pi}{نق} + ٣ \pi نق^2$

$ت' = -\frac{٣٨٤ \pi}{نق^2} + ٦ \pi نق = ٠$

$\frac{٣٨٤ \pi}{نق^2} = ٦ \pi نق \Leftarrow نق^3 = ٦٤$ ومنها نق = ٤

من إشارة ت' نلاحظ أنها

أن أقل تكلفة تكون عندما نق = ٤ سم

بالتعويض في ② ⇐ ع = $\frac{١٩٢}{١٦}$ = ١٢ سم

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال : (أنا بدرس منهاج قديم)

$\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية في B وطول الساحية فيه $AB = 6$ سم جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث ينطبق أحد أضلاعه على الوتر AC ويقع الرأسان الآخران على ضلعي القائمة .

الحل : مساحة المستطيل

$م = س \times ص$ ..... ① إقترن الحرف

من التشابه المجاور $2ص + س = 6$ قاعدة مساحة

$س = 6 - 2ص$ ..... ②

بالتعويض في ① $\Leftarrow م = (6 - 2ص) \times ص$

$م = 6ص - 2ص^2 \Leftarrow م' = 6 - 4ص = 0$

$\Leftarrow ص = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

	$\frac{3}{2}$	
$م'$	+	−

من بشارة $م'$ نلاحظ أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما $ص = \frac{3}{2}$ سم

من ② $س = 6 - 2 \times \frac{3}{2} = 3$ سم

من ① $\Leftarrow$ أكبر مساحة $م = س \times ص = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ سم^2

مثال : ($A(2,1)$ و $B(3,4)$)

جد الإحداثي السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة $ص^2 - 2ص + 4س = 23$ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة $(3,1)$.

الحل

نفرض النقطة $(س، ص)$ تقع على المنحنى المسافة بينها النقطة $(س، ص)$ ، $(3,1)$

$ف = \sqrt{(س-3)^2 + (ص-1)^2}$ ..... ③ إقترن الحرف

$ف = \sqrt{س^2 - 6س + 9 + ص^2 - 2ص + 1}$

بما أن : $ص^2 - 2ص + 4س = 23$ العلاقة المساعدة

نلاحظ أن $ص^2 - 2ص = 23 - 4س$

$\Leftarrow ف = \sqrt{س^2 - 6س + 9 + 23 - 4س + 1}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{س^2 - 10س + 11}$

$ف' = \frac{2س - 10}{2\sqrt{س^2 - 10س + 11}} = 0 \Leftarrow 2س - 10 = 0$

ومنه $س = 5$

	5	
$ف'$	−	+

من بشارة $ف$ نلاحظ أن المسافة تكون أقل ما يمكن عندما الإحداثي السيني $س = 5$

مثال :- (مهم)

سلك معدني طوله 12 سم ثني ليكون مثلث متساوي الساقين ما أطوال أضلاع المثلث بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن ؟

الحل : نفرض $س$ أحد الساقين فيكون الثالث $= 12 - 2س$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الإرتفاع

$م = (6 - س) \times ع$ ..... ① إقترن الحرف

من فيثاغورث : $ع^2 + (6-س)^2 = س^2$ علاقة مساعدة

$ع^2 + 36 - 12س + س^2 = س^2$

$\Leftarrow ع^2 = 12س - 36 \Leftarrow ع = \sqrt{12س - 36}$ ..... ②

بالتعويض عن $ع$ في ①

$\Leftarrow م = (6 - س) \times \sqrt{12س - 36}$

$م' = -1 \times \sqrt{12س - 36} + (6-س) \times \frac{12}{2\sqrt{12س - 36}}$

$\Leftarrow م' = -\sqrt{12س - 36} + \frac{36 - 6س}{\sqrt{12س - 36}}$

$م' = 0 \Leftarrow \frac{36 - 6س}{\sqrt{12س - 36}} = \sqrt{12س - 36}$

$\Leftarrow 36 - 6س = 12س - 36$

$\Leftarrow 18س = 72 \Leftarrow س = \frac{72}{18} = 4$

	4	
$م'$	+	−

من بشارة $م'$ نلاحظ أن المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما $س = 4$ سم

الضلع الثالث $= 12 - 2س = 12 - 2(4) = 12 - 8 = 4$ سم

إذن أطوال أضلاع المثلث هي 4 سم ، 4 سم ، 4 سم

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال : (كتاب مدرسي)

جد النقطة / النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى $ق(س) = س + \frac{1}{س}$ يوازي التماس الواصل بين النقطتين $(1، 2)$ ، $(2، ص)$.

الحل : نفرض نقطة التماس $(س_1، ص_1)$

ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند النقطة $(س_1، ص_1)$

$= ق'(س_1) = 1 - \frac{1}{س_1^2}$

∴ ميل المماس يوازي ميل التماس المار بالنقطتين $(1، 2)$ ، $(2، ص)$

$\Leftarrow 1 - \frac{1}{س_1^2} = \frac{ص - 2}{1 - 2}$

$1 - \frac{1}{س_1^2} = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{1}{س_1^2} = \frac{1}{2} \Leftarrow س_1^2 = 2$

$\Leftarrow س = \pm \sqrt{2}$ (يوجد نقطتي تماس)

$س = \sqrt{2} \Leftarrow ص = ق(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$س = -\sqrt{2} \Leftarrow ص = ق(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

إذن التقاطع هي $(\sqrt{2}، \frac{3}{\sqrt{2}})$ ، $(-\sqrt{2}، -\frac{3}{\sqrt{2}})$

مثال : (كتاب مدرسي)

إذا كان المماس المرسوم لمنحنى $ق(س)$ عند النقطة $(2، -1)$ يصنع زاوية قياسها $135°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فما قيمة $\lim_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(2)}{س - 2}$

أ) -1 ب) $-\frac{1}{2}$ ج) 1 د) 2

الحل : $ق'(2) = ظا 135° = -1$ ... (1)

بما أن $\lim_{س \to 2} \frac{ق(س) - ق(2)}{س - 2} = ق'(2)$

بالاستعانة لو بتيال $= \frac{ق'(س)}{2}$ بما أن $= \frac{1}{2} ق'(2)$

من (1) $= \frac{1}{2} \times -1 = -\frac{1}{2}$ الجواب ب

مثال : (2007 إكمال)

إذا كانت معادلة العمودي مع منحنى $ق(س)$ عند النقطة $(2، 0)$ هي $2س - 3ص = 6$ فإن $ق'(2)$

أ) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $-\frac{2}{3}$ د) $-\frac{3}{2}$

الحل : $ص = \frac{2س - 6}{3} \Leftarrow$ ميل العمودي $= \frac{2}{3}$

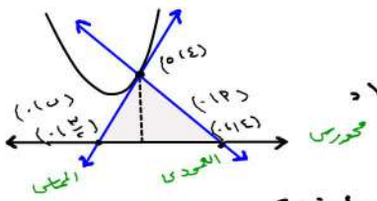
$\Leftarrow$ ميل المماس عند النقطة $(2، 0)$

$\Leftarrow ق'(2) = -\frac{3}{2}$ الإجابة د

مثال : (كتاب مدرسي منهاج قديم - محلول)

جد مساحة المنطقة المثلثية المحصورة بين محور السينات والمماس والعمودي على منحنى $ق(س) = س^2 - 6س + 13$ عند النقطة $(4، 5)$ الواقعة عليه

الحل :



فكرة الحل تعتمد على إيجاد نقاط تقاطع المماس والعمودي مع محور السينات ثم نجد طول قاعدة المثلث ثم نجد مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع حيث الارتفاع $= 5$

$ق'(س) = 2س - 6$

ميل المماس $م = ق'(4) = 8 - 6 = 2$

إذن نقطة التماس $(4، 5)$ والميل $م = 2$

فتكون معادلة المماس $ص - 5 = 2(س - 4)$

$ص - 5 = 2س - 8 \Leftarrow ص = 2س - 3$

نقطة تقاطع المماس مع السينات عندما $ص = 0$

$\Leftarrow 2س - 3 = 0 \Leftarrow س = \frac{3}{2}$

إذن يتقاطع المماس مع السينات في $(\frac{3}{2}، 0)$

بفرض التعامد ميل المماس $= 2 \Leftarrow$ ميل العمودي $= -\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ معادلة العمودي هي $ص - 5 = -\frac{1}{2}(س - 4)$

$ص - 5 = -\frac{1}{2}س + 2 \Leftarrow ص = -\frac{1}{2}س + 7$

يتقاطع العمودي مع السينات عندما $ص = 0$

$\Leftarrow 0 = -\frac{1}{2}س + 7 \Leftarrow س = 14$

نقطة تقاطع العمودي مع السينات هي $(14، 0)$

$\Leftarrow$ طول قاعدة المثلث $= 14 - \frac{3}{2} = 12,5$

إذن مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 12,5 \times 5 = 31,25$ وحدة مربعة

حل آخر للسؤال (على نفس الرسم)

$ق'(س) = 2س - 6$

ميل المماس $م = ق'(4) = 2$

نفرض $(أ، 0)$ نقطة تقاطع المماس مع السينات

المماس يمر بالنقطتين $(4، 5)$ ، $(أ، 0)$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

ميل المماس = ميل القاطع = ميل المماس

$= \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \Leftarrow 8 - 2ب = 5 \Leftarrow 2ب = 3$

$\Leftarrow ب = \frac{3}{2}$ ← نقطة تقاطع المحور مع السينات $(\frac{3}{2}, 0)$

نفرض أنه $(0, 9)$ نقطة تقاطع العمودي مع السينات

ميل العمودي $= -\frac{1}{2}$

ميل المماس = ميل القاطع

$\Leftarrow -\frac{1}{2} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \Leftarrow 4 - 9 = 10 \Leftarrow 9 = 14$

$\Leftarrow$ نقطة تقاطع العمودي مع السينات $(14, 0)$

$\Leftarrow$ طول قاعدة المثلث $= 14 - \frac{3}{2} = 12,5$

$\Leftarrow$ مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 12,5 \times 5$

$= 31,25$ وحدة مربعة

مثال: (كتاب مدرسي محلول)

إذا كان المستقيم $س = 9 - 6ص$ ليس مماساً لمنحنى الاقتران $ق(س) = \frac{3س}{س - 2}$ ، $س \neq 2$ حيث 9 عدد حقيقي.

الحل:

المستقيم $س = 9 - 6ص \Leftarrow ص = \frac{9 - س}{6}$

إذاً ميل المستقيم $= -\frac{1}{6}$

نفرض نقطة التماس $(س_1, ص_1)$

ميل المماس $= ق'(س) = \frac{3(س-2) - 3س \times 1}{(س-2)^2}$

$\Leftarrow ق'(س) = \frac{-6}{(س-2)^2}$

ميل المماس = ميل المستقيم $\Leftarrow \frac{-6}{(س-2)^2} = -\frac{1}{6}$

$\Leftarrow (س-2)^2 = 36 \Leftarrow س - 2 = \pm 6$

$س - 2 = 6 \Leftarrow س = 8$

$س - 2 = -6 \Leftarrow س = -4$

يوجد نقطتي تماس هما

$(8, ق(8)) = (8, 4)$ ، $(-4, ق(-4)) = (-4, \frac{12}{6})$

$(8, 4)$ تقع على المستقيم $\Leftarrow$ تحقق معادلته وبالتعويض نجد

$\Leftarrow 8 = 9 - 6 \times 4 \Leftarrow 8 = 9 - 24 \Leftarrow 9 = 32$

كذلك بالنسبة للنقطة $(-4, 2)$

$8 = 9 - 6 \times -2 \Leftarrow 8 = 9 + 12 \Leftarrow 9 = -4$

مثال: (غير محلول)

إذا كان $ق(س) = \frac{س^2 + 1}{ك(س)}$ ، $ك(س) \neq 0$ وكان لمنحنى $ك(س)$ مماساً أفقياً عند النقطة $(1, 2)$ جد $ق'(1)$.

الحل

$ق'(س) = \frac{ك(س) \times 2س - ك'(س)(س^2 + 1)}{(ك(س))^2}$

$ق'(1) = \frac{ك(1) \times 2 - ك'(1) \times 2}{(ك(1))^2}$ ... (1)

$ك(س)$ له مماس أفقي عند $(1, 2) \Leftarrow ك'(1) = 0$

$(1, 2)$ تقع على منحنى $ك(س) \Leftarrow ك(1) = 2$

بالتعويض في (1)

$ق'(1) = \frac{2 \times 2 - 0 \times 2}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$

مثال:

معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = س + \frac{4}{س^2}$ والذي يوازي محور السينات هي:

أ) $ص = 0$ ب) $ص = 1$ ج) $ص = 2$ د) $ص = -4$

الحل:

لإيجاد المعادلة نحتاج لميل م ونقطة التماس

ميل المماس م = 0 لأنه يوازي محور السينات

نفرض نقطة التماس هي $(س_1, ص_1)$

ميل المماس م $= ق'(س) = 1 + \frac{-4 \times 2س}{س^4}$

$م = 1 - \frac{8}{س^3}$

ميل المماس $= 0 \Leftarrow 1 - \frac{8}{س^3} = 0$

$\frac{8}{س^3} = 1 \Leftarrow س^3 = 8 \Leftarrow س = 2$

$ص = ق(2) = 2 + \frac{4}{2^2} = 3$

إذاً نقطة التماس $(س_1, ص_1) = (2, 3)$

معادلة المماس $ص - 2 = م(س - 2)$

$ص - 2 = 0(س - 2) \Leftarrow ص = 2$

الإجابة ج

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال :

إذا كانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند النقطة الواقعة عليه والتي إحداثيها السينى = ١ هي ٢س + ص - ٥ = ٠ وكان ل(س) = س^{٣} × ق(س) جد ل'(١) .

الحل : ل'(س) = س^{٣} × ق'(س) + ٣س^{٢} × ق(س)

ل'(١) = ق'(١) + ٣ ق(١)

معادلة المماس هي ص = ٥ - ٢س

⇐ ميل المماس = -٢ ⇐ ق'(١) = -٢

نقطة التماس هي (١ ، ق(١)) تنتمي للمماس

إذن تحقق معادلته

ص = ٥ - ٢س ⇐ ق(١) = ٥ - ٢(١) = ٣

⇐ ل'(١) = ق'(١) + ٣ ق(١) = -٢ + ٣(٣) = ٧

مثال : (كتاب حدد نفسك)

جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = ٣ - ظا^{٢}س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$.

الحل : نقطة التماس هي ($\frac{\pi}{٤}$ ، ق($\frac{\pi}{٤}$))

ق($\frac{\pi}{٤}$) = ٣ - ظا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$ = ٣ - (١)^{٢} = ٢

⇐ نقطة التماس = ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢)

ميل المماس عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢) = ق'($\frac{\pi}{٤}$)

ق'(س) = -٢ ظا س × قا^{٢}س

ق'($\frac{\pi}{٤}$) = -٢ ظا$\frac{\pi}{٤}$ × قا$^{٢}\frac{\pi}{٤}$

= -٢ × ١ × (√٢)^{٢} = -٤

إذن معادلة المماس ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

ص - ٢ = -٤ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

ص - ٢ = -٤س + π

ص = -٤س + (π + ٢)

مثال :

إذا تحرك جسم وفق العلاقة ف = ن^{٢} - ٦ن فإن سرعة الجسم وتسارعه يتساويان عندما ن =

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٦ د) صفر

الحل : السرعة والتسارع يتساويان عند ع = ت

ع = ف' = ٢ن - ٦

ت = ع' = ٢

⇐ ٢ن - ٦ = ٢ ⇐ ٢ن = ٨ ⇐ ن = ٤

الإجابة ب

مثال : إذا تحرك جسم وفق العلاقة ف = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ١١ فإن سرعة هذا الجسم عندما ينعدم تسارعه

أ) ٣م/ث ب) -٣م/ث ج) ١١م/ث د) صفر

الحل : ينعدم التسارع عندما ت = ٠

ع = ف' = ٣ن^{٢} - ٦ن

ت = ع' = ٦ن - ٦

ت = ٠ ⇐ ٦ن - ٦ = ٠ ⇐ ن = ١

المطلوب ع(١) = ٣(١)^{٢} - ٦(١) = ٣ - ٦ = -٣م/ث

الجواب ب

مثال : إذا تحرك جسم على خط مستقيم حيث ف(ن) الإزاحة بعد ن ثانية فإن سرعته اللحظية

أ) $\frac{ص ف}{ص ن}$ ب) $\frac{ص ع}{ص ن}$ ج) $\frac{ع ف}{ع ن}$ د) $\frac{ع ف}{ص ن}$

الحل : السرعة اللحظية = $\frac{ع ف}{ع ن}$ الإجابة ج

مثال : سقط جسم من ارتفاع ٤٠م حسب العلاقة ف(ن) = ٥ن^{٢} وقذف جسم من الأرض حسب العلاقة ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢} جد سرعة الجسمين عندما يكون بينهما على نفس الارتفاع

الحل : الجسمان على نفس الارتفاع عندما ف$_{١}$(ن) + ف$_{٢}$(ن) = ٤٠

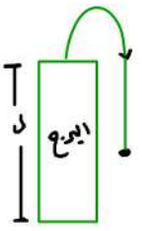
٥ن^{٢} + ٦٠ن - ٥ن^{٢} = ٤٠ ⇐ ٦٠ن = ٤٠ ⇐ ن = ٤

سرعة الجسم الأول = ع$_{١}$(ن)	سرعة الجسم الثاني = ع$_{٢}$(ن)
ع$_{١}$(ن) = ١٠ن	ع$_{٢}$(ن) = ٦٠ - ١٠ن
ع$_{١}$(٤) = ١٠ × ٤ = ٤٠م/ث	ع$_{٢}$(٤) = ٦٠ - ١٠ × ٤ = ٢٠م/ث

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

عام

مثال : قذف جسم رأسياً لأعلى وكانت ع الإزاحة جسم رأسياً لأعلى وكانت العلاقة ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن² حيث المسافة بالأمتار والزمن بالثواني، فإذا وصل الجسم إلى الأرض بسرعة ٥٠ م/ث جد ارتفاع البرج



الحل : الجسم هابط ⇐ ع = -٥٠ م/ث

ع = ف' = ٤٠ - ١٠ن

٤٠ - ١٠ن = -٥٠

١٠ن = ٩٠ ⇐ ن = ٩

أي أن الجسم يصل الأرض بعد ٩ ثوان

وعندما يصل الجسم إلى الأرض يكون ف(٩) = -ل

حيث ل = طول البرج (الإزاحة - لأن الجسم هابط)

ف(٩) = ٤٠×٩ - ٥×٩² = ٣٦٠ - ٤٠٥ = -٤٥

⇐ -ل = -٤٥ ⇐ طول البرج ل = ٤٥ متر

مثال : (هام - فلسطين ٢٠١٤)

قذف جسم رأسياً لأعلى وكان ارتفاعه ف بالأمتار عن نقطة القذف يعطى بالعلاقة ف(ن) = ١٢٨ن - ١٦ن² حيث سرعة الجسم عندما يكون قطع مسافة ٢٧٢ متر.

الحل : أقصى ارتفاع للجسم عندما ع(ن) = ٠

ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ - ٣٢ن = ٠

٣٢ن = ١٢٨ ⇐ ن = ٤

أقصى ارتفاع = ف(٤) = ١٢٨×٤ - ١٦×٤² = ٢٥٦ م

إذن عندما يقطع الجسم مسافة ٢٧٢ متر يكون هابط

⇐ ف(ن) = ٢٧٢ أقصى ارتفاع - المسافة الكلية

⇐ ف(ن) = ٢٥٦ - ٢٧٢ = -١٦ م

⇐ ١٢٨ن - ١٦ن² = -١٦

⇐ ١٦ن² - ١٢٨ن - ١٦ = ٠ بالقسمة ÷ ١٦

⇐ ن² - ٨ن + ١٥ = ٠ ⇐ (ن - ٣)(ن - ٥) = ٠

⇐ ن = ٣ مرفوض ، ن = ٥ مقبول لأن الجسم هابط

إذن الجسم يقطع مسافة ٢٧٢ متر عندما ن = ٥

وتكون السرعة = ع(٥)

= ١٢٨ - (٣٢×٥) = ١٢٨ - ١٦٠ = -٣٢ م/ث

مثال : سقط جسم من سطح برج بحيث كانت المسافة المقطوعة ف = ١٦ن² وفي نفس اللحظة سقط جسم آخر حسب العلاقة ف = ٤٠ن + ١٦ن² فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد ثانية واحدة من وصول الجسم الثاني جد :-

① ارتفاع البرج

② سرعة ارتطام كلاً من الجسمين بالأرض

الحل :

① زمن وصول الجسم الثاني = زمن وصول الجسم الأول + ١

نفرض زمن وصول الجسم الثاني ن = ن

⇐ زمن وصول الجسم الأول ن = ن + ١

المسافة التي يقطعها الجسمان متساوية هي نفسها طول البرج (ل)

ف(ن + ١) = ف(ن)

١٦(ن + ١)² = ٤٠ن + ١٦ن²

١٦(ن² + ٢ن + ١) = ٤٠ن + ١٦ن²

١٦ن² + ٣٢ن + ١٦ = ٤٠ن + ١٦ن²

ومنها ٣٢ن - ٤٠ن = -١٦

⇐ -٨ن = -١٦ ⇐ ن = ٢

طول البرج ل = ف(ن + ١) أو ف(ن)

= ف(٣) أو ف(٢) (هذه أسهل لأنها صغيرة)

ل = ف(٢) = ١٦(٢)² = ١٦×٩ = ١٤٤ متر

② سرعة الجسم الأول = ع(٢)

ع(ن) = ف'(ن) = ٣٢ن

⇐ ع(٣) = ٣٢×٣ = ٩٦ متر/ثانية

سرعة الجسم الثاني = ع(٢)

ع(ن) = ف'(ن) = ٤٠ + ٣٢ن

⇐ ع(٢) = ٤٠ + ٦٤ = ١٠٤ متر/ث

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال : يتحرك جسم وفق العلاقة ع = ٦ ن حيث ع ، ن السرعة والإزاحة بالمتر فإن تسارع الجسم =

أ) ٦ ب) ١٨ ج) ٩ د) ٣

الحل : ع = ٦ ن بتربيع الطرفين ⇐ ع^{٢} = ٣٦ ف

بالإستقامة ضمنياً بالنسبة للزمن

٢ ع $\frac{د ع}{د ن}$ = ٣٦ $\frac{د ف}{د ن}$

٢ ع ت = ٣٦ ع

٢ ت = ٣٦ ⇐ ت = ١٨ الإجابة (ب)

مثال : يتحرك جسم حسب العلاقة ف = ن^{٣} − ٤ ن^{٢} + ٥ ن + ٢

فإذا كانت سرعة الجسم عندما ن = ١٠ تساوي ضعف سرعته عندما ن = ٥ فإن قيمة الثابت ح

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٣ د) ٥

الحل : ع (١٠) = ٢ ع (٥) ، ع (ن) = ح (ن)$^{ح-١}$

⇐ ح (١٠)$^{ح-١}$ = ٢ ح (٥)$^{ح-١}$ ⇐ ١٠$^{ح-١}$ = ٢ (٥)$^{ح-١}$

⇐ ٢ × ٥$^{ح-١}$ = ١٠$^{ح-١}$ ⇐ ٢ = ٢$^{ح-١}$ = ٢^{١}

ومنه ح − ١ = ١ ⇐ ح = ٢ الإجابة (ب)

مثال : إذا كانت ع^{٢} = ف^{٣} حيث ع سرعة جسم ، ف الإزاحة بالأمتار فإن قيمة التسارع عندما ع = ٨

أ) ٢٣ م/ث^{٢} ب) ٢٤ م/ث^{٢} ج) ٤٣ م/ث^{٢} د) ٤٣٢ م/ث^{٢}

الحل : بالإستقامة ضمنياً بالنسبة للزمن

٢ ع × $\frac{د ع}{د ن}$ = ٣ ف^{٢} × $\frac{د ف}{د ن}$

٢ ع × ت = ٣ ف^{٢} × ع

⇐ ٢ ت = ٣ ف^{٢} ـــــ (١)

من المعادلة ع^{٢} = ف^{٣} عندما ع = ٨

⇐ ٦٤ = ف^{٣} ⇐ ف = $\sqrt[٣]{٦٤}$ = ٤

بالتعويض في معادلة (١) عن قيمة ف = ٤

⇐ عندما ع = ٨

٢ ت = ٣ (٤)^{٢} = ٤٨

ت = $\frac{٤٨}{٢}$ = ٢٤ م/ث^{٢} الإجابة (ب)

مثال : (كتاب مدرسي - مهم)

يقف أحمد ونزار على سطح بناية أطلت أحمد كرة من السكون وفق العلاقة ف$_{١}$ (ن) = ٥ ن^{٢} وفي اللحظة نفسها رمى نزار كرة أخرى عمودياً إلى أسفل وفق العلاقة ف$_{٢}$ (ن) = ١٥ ن + ٥ ن^{٢} فإذا ارتطمت كرة أحمد بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار ما سرعة إرتطام كرة نزار بالأرض

الحل : نفرض أن

زمن إرتطام كرة نزار بالأرض ن زمن إرتطام كرة أحمد = ن + ١

(لأن كرة نزار قبل أحمد)

والمطلوب ف$_{٢}$ (ن)

عند إرتطام الكرتان بالأرض يكون :

ف$_{١}$ (ن + ١) = ف$_{٢}$ (ن)

⇐ ٥ (ن + ١)^{٢} = ١٥ ن + ٥ ن^{٢}

⇐ ٥ (ن^{٢} + ٢ ن + ١) = ١٥ ن + ٥ ن^{٢}

٥ ن^{٢} + ١٠ ن + ٥ = ١٥ ن + ٥ ن^{٢}

١٥ ن − ١٠ ن = ٥ − ٥ ⇐ ٥ ن = ٥ ومنه ن = ١

فيكون سرعة إرتطام كرة نزار بالأرض

ع$_{٢}$ (ن) = ع$_{٢}$ (١)

ع$_{٢}$ (ن) = ف$_{٢}$' (ن) = ١٠ ن + ١٥

ع$_{٢}$ (١) = ١٠ + ١٥ = ٢٥ م/ث

مثال : (كتاب مدرسي)

يتحرك جسم وفق العلاقة ف = ٢ (ح^{٢ن} − ح$^{-٢ن}$) بين أن تسارع الجسم في أي لحظة يساوي عدداً ثابتاً يساوي ٤ ف

الحل : ع = ف' = ٢ (٢ ح^{٢ن} + ٢ ح$^{-٢ن}$)

= ٤ (ح^{٢ن} + ح$^{-٢ن}$)

ت = ع' = ٤ (٢ ح^{٢ن} − ٢ ح$^{-٢ن}$)

= ٤ × ٢ (ح^{٢ن} − ح$^{-٢ن}$) = ٤ ف

لأن ف = (ح^{٢ن} − ح$^{-٢ن}$)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال : (كتاب مدرسي)

إذا كان $ق(س)$ متصل على $[1,3]$ وكان $ق'(س) < 0$ لجميع قيم $س \in]1,3[$ ، $ق(س)$ له نقطة حرجة فقط في $]1,3[$ وكان $ق'(2) = 0$ فما العبارة الصحيحة فيما يلي

أ) $ق(جـ) > 0$ ب) $ق(جـ) > ق(2)$

جـ) $ق(جـ) = ق(1)$ د) $ق(جـ) < ق(2)$

الحل : المثلث نقاط الحرجة هي أطراف الفترة / $س = 2$

$\therefore ق'(2) = 0$

، $ق'(1) < 0$

إذن حسب إختبار المشتقة الثانية $ق(2)$ قيمة عظمى عظمى محلية $\Leftarrow ق(جـ) < ق(2)$ الإجابة (ب)

مثال : $ق(س)$ ، $ح(س)$ إقترانان كثيرا حدود قرأ إذا $ق$ يمثل الإقتران $(ق \times ح)(س)$ يكون :

أ) متزايد على $ح$ ب) متناقص على $ح$

جـ) له قيمة عظمى محلية عندما $س = 0$ د) له قيمة عظمى مطلقة

الحل : مشتقة الإقتران $= ق'(ح(س)) \times ح'(س)$

$= + \times + = +$ لأنه $ق$ هو متزايد على $ح$

الإجابة (أ)

مثال : إذا كان $ق(س)$ إقترانا متصلا بحيث $ق'(س)$ متزايد على $[-1,1]$ ، $ق'(س)$ متناقص على $[0,1]$ فإن إحدى العبارات الآتية صحيحة :-

أ) $ق(س)$ متناقص في الفترة $[0,1]$

ب) $ق(س)$ متزايد في الفترة $[0,1]$

جـ) $س = 0$ نقطة حرجة لإقتران $ق(س)$

د) $(0, ق(0))$ نقطة إنعطاف لمنحنى $ق(س)$

الحل : $ق'(س)$ متزايد في $[-1,0] \Leftarrow ق''(س) > 0$

$\Leftarrow ق(س)$ متقعر لأعلى

$ق'(س)$ متناقص في $[0,1] \Leftarrow ق''(س) < 0$

$\Leftarrow ق(س)$ متقعر لأسفل

$ق(س)$ متصل ويغير إتجاه تقعره حول $س = 0 \Leftarrow (0, ق(0))$ نقطة انعطاف الإجابة (د)

(مثال هام وشامل)

مثال : لإقتران $ق(س) = س + جتاس$ على الفترة $[0, 2\pi]$

جد : ① فترات التزايد التناقص ② القيم القصوى وبيان نوعها

③ فترات التقعر ④ نقاط الإنعطاف ⑤ زاوية الإنعطاف

الحل : ① $ق(س)$ متصل على $[0, 2\pi]$ لأنه مجموع وطرحي

$ق(س)$ قابل للإشتقاء في $]0, 2\pi[$ لأنه تحوي مستقيمه

$ق'(س) = 1 + جتاس = 0$

$\Leftarrow جتاس = -1 \Leftarrow س = \pi$

النقاط الحرجة $0, \pi, 2\pi$

$ق(س)$ متزايد في $[0, \pi]$ وكذلك في $[\pi, 2\pi]$

② $ق(0) = 0$ قيمة صغرى محلية وهي مطلقة

$ق(\pi) = \pi$ قيمة حرجة

$ق(2\pi) = 2\pi$ قيمة عظمى محلية وهي مطلقة

③ $ق''(س) = -جتاس = 0$

$\Leftarrow س = \frac{\pi}{2}$ مرفوضة ، $س = \frac{3\pi}{2}$ مقبول ، $س = \pi$ مرفوضة

(مرفوضة لأن $ق''(س)$ عندهم غير موجودة لأنها أطراف فترة)

$ق(س)$ متقعر لأعلى في $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

$ق(س)$ متقعر لأسفل في $]0, \frac{3\pi}{2}[$

④ $ق(س)$ فصل عندما $س = \frac{3\pi}{2}$

، $ق(\frac{3\pi}{2}) = 0$

، $ق(س)$ يغير إتجاه تقعره حول $س = \frac{3\pi}{2}$

إذا $(\frac{3\pi}{2}, ق(\frac{3\pi}{2}))$ نقطة إنعطاف $= (\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - 1)$

⑤ $س = \frac{3\pi}{2}$ نقطة إنعطاف $\Leftarrow$ ظاهر $= ق'(\frac{3\pi}{2}) =$ ظاهر

حيث هو زاوية الإنعطاف $\Leftarrow ق'(\frac{3\pi}{2}) = -1 = 0$

ظاهر $= -$ (إحداثي التغيرين في $ق'$ عند نقطة الإنعطاف) $\Leftarrow$ ظاهر $= 0$

مثال : (كتاب مدرسي)

إذا كان $ق'(س) = (س^2 - 1)^3 (س - 2)^4$ فما الفترة التي يكون فيها $ق(س)$ متناقصا ؟

أ) $]-\infty, -1[$ ب) $]-1, 1[$ جـ) $]1, 2[$ د) $]2, \infty[$

الحل : $ق'(س) = 0$ إما $س^2 - 1 = 0$ أو $س - 2 = 0$

$\Leftarrow س = \pm 1$ أو 2 (نقاط حرجة)

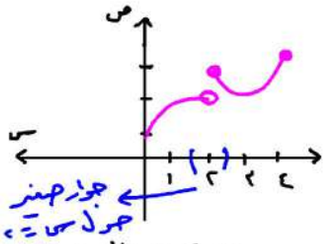
هم إذا $ق'(س) \leq 0$ فإن $ق(س)$ متناقص في $[-1, 1]$

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال : الشكل المجاور يمثل منحنى الإقتران $ق(س)$ المعرف على الفترة $[0 ، 4]$ فإن النقطة $(2 ، ق(2))$ هي :-



أ) نقطة إنعطاف لمنحنى $ق(س)$ ب) نقطة قيمة عظمى محلية

ج) نقطة قيمة صغرى مطلقة د) نقطة قيمة صغرى محلية

الحل : $ق(س)$ غير متصل عند $س = 2 \Leftarrow ق'(2)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ عند $س = 2$ قيمة حرجة

من الرسم $ق(2)$ أكبر قيمة في جوار صغير حول 2

$\Leftarrow (2 ، ق(2))$ قيمة عظمى محلية

أو يمكن إستخدام النهايات حيث نلاحظ من الرسم أن النهاية اليسرى للإقتران أصغر من $ق(2)$

الجواب ب

مثال : (كتاب مدرسي)

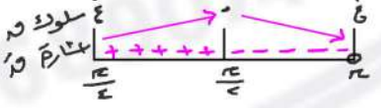
إذا كان $ق(س) = \ln جا س$ ، $س \in [\frac{\pi}{4} ، \pi]$ فإن $ق(س)$ يكون متزايداً في الفترة :

أ) $[\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{4}]$ ب) $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$ ج) $[\frac{\pi}{2} ، \pi[$ د) $[\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{2}]$

الحل : $ق'(س) = \frac{جتا س}{جا س}$

$\Leftarrow جتا س = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}$

النقاط الحرجة $\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{2} ، \pi$



$ق(س)$ متزايد في الفترة $[\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{2}]$

مثال : إذا كان الإقتران $ق(س) = جتا^2 س - جا س$

، $س \in [0 ، \pi]$ فإن $س = \frac{\pi}{2}$:

أ) قيمة عظمى محلية ب) قيمة صغرى محلية

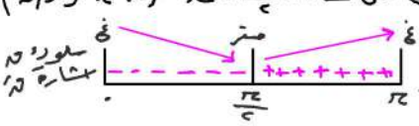
ج) نقطة إنعطاف د) قيمة عظمى مطلقة

الحل : $ق'(س) = 2 جتا س \times -جا س - جا س \times جتا س$

$= -2 جا س جتا س - جا س جتا س = -جا 2س - جا س$

$= -2 جا 2س = 0 \Leftarrow جا 2س = 0$

$2س = 0 ، \pi ، 2\pi \Leftarrow س = 0 ، \frac{\pi}{2} ، \pi$ (0 ، π مرفوضة)



$ق(0) = 1$ عظمى محلية

$ق(\frac{\pi}{2}) = -1$ صغرى محلية

$ق(\pi) = 1$ عظمى محلية

مثال : (كتاب مدرسي)

إذا كان $ق(س) = جتا س - هـ(س) + 2س$ حيث $س \in [0 ، \frac{\pi}{2}]$ ، $هـ(س)$ تابل لإستقامة بأن $(ق + هـ)(س)$ في الفترة $[0 ، \frac{\pi}{2}]$ يكون :

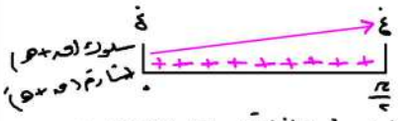
أ) متزايد ب) متناقص ج) مقعر لأعلى د) مقعر لأسفل

الحل : $ق(س) = جتا س - هـ(س) + 2س$

$(ق + هـ)(س) = ق(س) + هـ(س) = جتا س + 2س$

$(ق + هـ)'(س) = -جا س + 2 = 0$

$جا س = 2$ مرفوضة



الفاصل الحرجة 0 ، $\frac{\pi}{2}$

$(ق + هـ)(س)$ متزايد في الفترة $[0 ، \frac{\pi}{2}]$ الإجابة ج

مثال : (كتاب مدرسي)

إذا كان $ق(س)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة حيث قاعدة الإقتران $ق(س)$ إذا علمت أن $(2 ، -1)$ هي نقطة قيمة صغرى محلية و النقطة $(0 ، 2)$ هي نقطة إنعطاف للإقتران $ق(س)$.

الحل : $ق(س) = أ س^3 + ب س^2 + جـ س + د$

$ق'(س) = 3أ س^2 + 2ب س + جـ$

$ق''(س) = 6أ س + 2ب$

$(0 ، 2)$ نقطة إنعطاف $\Leftarrow ق(0) = 2$ ، $ق''(0) = 0$

$ق(0) = 2 \Leftarrow د = 2$

$ق''(0) = 0 \Leftarrow 2ب = 0 \Leftarrow ب = 0$

$(2 ، -1)$ قيمة صغرى محلية إذن

$ق(2) = -1 \Leftarrow 8أ + 4جـ + 2 = -1$

ومنه $8أ + 4جـ = -3$ ——— (1)

$ق'(2) = 0 \Leftarrow 12أ + 2ب + جـ = 0$

ومنه $12أ + جـ = 0$ ——— (2)

(2) $\times -4$ $\Leftarrow -48أ - 4جـ = 0$ ——— (3)

(1) - (3) $\Leftarrow 12أ = -3 \Leftarrow أ = -\frac{1}{4}$

من (2) $3 + جـ = 0 \Leftarrow جـ = -3$

$\Leftarrow$ قاعدة الإقتران $ق(س) = -\frac{1}{4}س^3 - 2س^2 + 2$

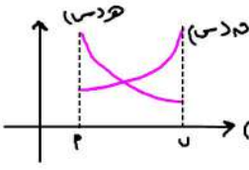
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال: (كتاب مدرسي)

الشكل المجاور يمثل منحنيي الاقترانين

ق ، هـ المعرفين على [أ ، ب]

بحيث أن الاقتران ك(س) = $\frac{ق'(س)}{هـ(س)}$ متزايد على [أ ، ب]



الحل:

بالإشتقاق ك'(س) = $\frac{هـ(س) \times ق''(س) - هـ'(س) \times ق'(س)}{(هـ(س))^2}$

هـ(س) + خوارزمي لأن

ق''(س) + لأن ق(س) مقعر لأعلى

هـ'(س) − لأن ميل مماس هـ(س) سالب عدا الرأس

ق'(س) + لأن مماس ق(س) موجب عدا الرأس

$\Rightarrow$ بإشارة ك'(س) = $\frac{(+\times+)-(-\times+)}{+}$

= $\frac{+-(-)}{+}$ = $\frac{+}{+}$ = + $\Rightarrow$ ك(س) متزايد في [أ ، ب]

مثال: (كتاب مدرسي)

إذا كان ق(س) كثير حدود و كان ق'(س) > 0 عندما س < ٤ ، ق''(س) < 0 عندما س > ٤ و كان ق'(٣) = 0

فما العبارة الصحيحة دائماً فيما يلي:-

أ) ق''(٣) = 0 ب) ق'(٤) = 0

ج) ق(٣) قيمة عظمى محلية د) ق(٣) قيمة صغرى محلية

الحل: ق(س) متصل عند س = ٣ بإشارة ق'

+ + + + + | - - - - -

٣ ٤

ق'(٣) = 0 و عند س = ٣ ق''(٣) < 0

إذن حسب إختبار المشتقة الثانية ق(٣) قيمة عظمى محلية

الإجابة ج

مثال: (كتاب مدرسي)

إذا كان ق(س) = |س| فما العبارة الصحيحة فيما يلي

أ) ق'(٠) غير موجودة ب) ق(٠) قيمة عظمى محلية

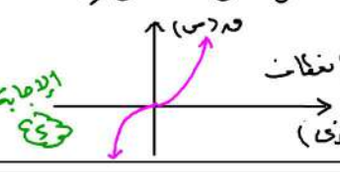
ج) ق(٠) قيمة صغرى محلية د) (٠ ، ق(٠)) نقطة إنعطاف

الحل: بإعادة التعريف ق(س) = $\begin{cases} س^2 & ، س \geq 0 \\ -س^2 & ، س < 0 \end{cases}$

عند إعادة رسم الإقتران

نلاحظ أن (٠ ، ق(٠)) نقطة إنعطاف

(الرسم من سؤالنا هنا أنظف من الرسم الأصلي)



الإجابة ج

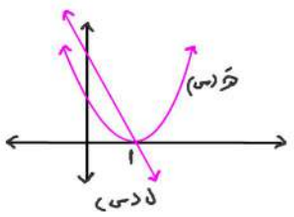
مثال: إذا كان ق(س) إقتران متصل على ع بحيث

ق'(س) = هـ(س) × ك(س)

بالإعتماد على الشكل المجاور

بحيث أن منحنى ق(س) مقعر

للأسفل في الفترة [١ ، ∞[



الحل: هـ(س) + في [١ ، ∞[لأنه فوق محور س

ك(س) − في [١ ، ∞[لأنه تحت محور س

إذن بإشارة ق''(س) = + × − = − في [١ ، ∞[

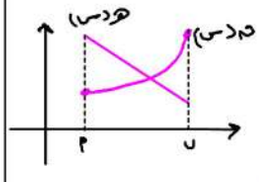
إذن ق''(س) < 0 $\Leftarrow$ ق(س) مقعر لأسفل

مثال: الشكل المجاور يمثل منحنى

الاقترانين ق(س) ، هـ(س)

المعرفين على [أ ، ب] أثبت

أن (ق ∘ هـ)(س) إقتران تناقصي في [أ ، ب]



الحل: مشتقة الإقتران (ق ∘ هـ)(س) لمعرفة الإشارة

المشتقة الأولى = ق''(هـ(س)) × هـ'(س)

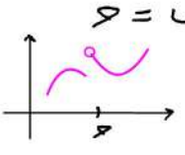
ق''(س) + في [أ ، ب] لأن ق(س) مقعر لأعلى

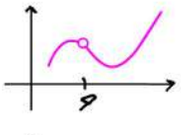
هـ'(س) − في [أ ، ب] لأن ميل هـ(س) سالب

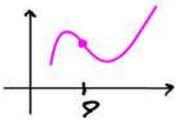
فيكون ق''(هـ(س)) × هـ'(س) = + × − = −

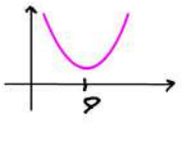
بإشارة المشتقة الأولى سالبة إذن ق(س) تناقصي في الفترة [أ ، ب]

مثال: أحد الإقترانات الآتية له نقطة إنعطاف عندما س = ح

أ) 

ب) 

ج) 

د) 

الحل: يجب أن يكون الإقتران متصل ويغير إتجاه تقعره حول ح وهذا متوفر فقط في الخيار ج

الإجابة ج

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

فلسطين : ٢٠١٧ إذا علمت أن متوسط التغير للإقتران ق (س) في الفترة [٢ ، ١٧] يساوي ٩ فإن متوسط تغير الإقتران هـ (س) = ق(س^{٢} + ١) في الفترة [١ ، ٤] = :

(أ) ٣ (ب) ٤٩ (جـ) ١٥ (د) ٤٥

الحـــل

$$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(١٧) - ق(٢)}{١٥} = ٩ \Leftarrow ق(١٧) - ق(٢) = ١٣٥ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٤ - ١} = \frac{ق(٤^{٢} + ١) - ق(١^{٢} + ١)}{٤ - ١} = \frac{ق(١٧) - ق(٢)}{٣}$$

من (١) ينتج أن : متوسط تغير الإقتران هـ (س) في الفترة [١ ، ٤] = ٤٥ (الإجابة الفرع (د))

مثال

إذا كان متوسط تغير ق(س) يساوي $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ في الفترة [١ ، ٤] فإن زاوية ميل القاطع الواصل بين النقطتين (١ ، ق(١)) ، (٤ ، ق(٤)) تساوي :

(أ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

الحـــل

ظا هـ = ميل القاطع (متوسط التغير) $\Leftarrow$ ظا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ $\Leftarrow$ هـ = $\frac{\pi}{٦}$ (الإجابة الفرع (د))

مثال

إذا كان هـ (س) = ٤ ق(س) − $\frac{أ}{س + ١}$ وكان متوسط التغير للإقتران هـ (س) في الفترة [٠ ، ٢] يساوي ٨ والتغير في ق(س) في نفس الفترة يساوي ٣ ، فما قيمة أ ؟

الحـــل

التغير في ق(س) = ق(٢) − ق(٠) = ٣ ..... (١)

$$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٢) - هـ(٠)}{٢} = \frac{(٤ ق(٢) - (\frac{أ}{١ + ٢})) - (٤ ق(٠) - (\frac{أ}{١ + ٠}))}{٢} = ٨$$

$$\Leftarrow (٤ ق(٢) - \frac{أ}{٣}) - (٤ ق(٠) - أ) = ١٦ \Leftarrow ٤ ق(٢) - \frac{أ}{٣} - ٤ ق(٠) + أ = ١٦$$

$$\Leftarrow ٤(ق(٢) - ق(٠)) + \frac{٢أ}{٣} = ١٦ \text{ من (١)} \Leftarrow ٤(٣) + \frac{٢أ}{٣} = ١٦ \Leftarrow \frac{٢أ}{٣} = ٤ \text{ ومنها } أ = ٦$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال ليكن متوسط تغير هـ(س) على الفترة [١ ، ٣] = ٣ ، جد متوسط تغير هـ (س) = ٣س^{٢} هـ(س) – س على نفس الفترة إذا علمت أن منحنى هـ (س) يمر بالنقطة (١ ، ١١)

الحـــل

هـ (س) يمر بالنقطة (١ ، ١١) ⇐ هـ (١) = ١١ ⇐ ٣ هـ(١) – ١ = ١١ ومنها هـ(١) = ٤

متوسط تغير هـ(س) = ٣ ⇐ $\frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(١)}{٢}$ = ٣ ⇐ هـ(٣) – هـ(١) = ٦

⇐ هـ(٣) – ٤ = ٦ ومنها هـ(٣) = ١٠ ، ∵ متوسط تغير هـ (س) = $\frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(١)}{٢}$

= $\frac{\text{هـ}(٣) - ١١}{٢}$ = $\frac{(٢٧) \text{هـ}(٣) - ٣) - ١١}{٢}$ وبالتعويض عن هـ(٣) = $\frac{(٢٧ \times ١٠) - ٣) - ١١}{٢}$ =

$\frac{(٢٦٧) - (١١)}{٢}$ = $\frac{٢٥٦}{٢}$ = ١٢٨

مثال صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا زاد طول ضلعها من ٥ سم إلى ٥,١ سم فإن متوسط التغير في مساحتها يساوي :

(أ) ١، ١٠ وحدة مربعة (ب) ١، ١ وحدة مربعة (ج) ٢٦,٠١ وحدة مربعة (د) ٢٦٠,١ وحدة مربعة

الحـــل

نفرض أن طول ضلع الصفيحة = س ⇐ مساحة الصفيحة م (س) = س^{٢}

$\frac{\Delta \text{م}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{\text{م}(٥،١) - \text{م}(٥)}{٥،١ - ٥}$ = $\frac{٥،١^{٢} - ٥^{٢}}{٠،١}$ = ١٠,١ وحدة مربعة (الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران هـ(س) = هـ$^{\text{س}}$ عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + ١ يساوي هـ^{٣} – هـ^{٢} ، فإن قيمة س$_{١}$

(أ) هـ (ب) هـ^{٢} (ج) ٢ (د) هـ + ٢

الحـــل

متوسط تغير الإقتران هـ(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + ١ = $\frac{\text{هـ}(\text{س}_{١} + ١) - \text{هـ}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{١} + ١ - \text{س}_{١}}$

= هـ(س$_{١}$ + ١) – هـ(س$_{١}$) = هـ^{٣} – هـ^{٢}

⇐ هـ$^{\text{س}_{١}+١}$ – هـ$^{\text{س}_{١}}$ = هـ^{٣} – هـ^{٢}

⇐ هـ$^{\text{س}_{١}}$ (هـ – ١) = هـ^{٢} (هـ – ١) ⇐ هـ$^{\text{س}_{١}}$ = هـ^{٢} ⇐ س$_{١}$ = ٢ (الإجابة الفرع (ج))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

فلسطين : ٢٠٠٩ إذا كان المستقيم القاطع لمنحنى ق (س) في النقطتين (١ ، ق (١)) ، (٣ ، ٥) يصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع محور السينات الموجب ، إحسب متوسط التغير للإقتران هـ (س) = $\frac{٢}{ق (س)}$ في الفترة [١ ، ٣]

الحـــل

ظا هـ = ميل القاطع (متوسط التغير) ⇐ ظا ١٣٥ = $\frac{ق(٣) - ق(١)}{٣ - ١}$ = $\frac{٥ - ق(١)}{٢}$

⇐ $-١ = \frac{٥ - ق(١)}{٢}$ ⇐ $-٢ = ٥ - ق(١)$ ومنها ق (١) = ٧

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٣) - هـ(١)}{٣ - ١} = \frac{\frac{٢}{ق(٣)} - \frac{٢}{ق(١)}}{٢}$ لكن ق (١) = ٧ ، ق (٣) = ٥

⇐ متوسط تغير الإقتران هـ (س) = $\frac{\frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٧}}{٢} = \frac{\frac{٤}{٣٥}}{٢} = \frac{٢}{٣٥}$

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران ق (س) على الفترة [٢ ، ٥] يساوي – ٦ وكان ق (٢) + ق (٥) = ٤

جد متوسط التغير للإقتران هـ (س) = ٧س + $ق^{٢}$ (س) على نفس الفترة

الحـــل

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٣} = \frac{((٧ \times ٥) + ق^{٢}(٥)) - ((٧ \times ٢) + ق^{٢}(٢))}{٣}$

$= \frac{٣٥ + ق^{٢}(٥) - ١٤ - ق^{٢}(٢)}{٣} = \frac{٢١ + ق^{٢}(٥) - ق^{٢}(٢)}{٣}$ ($ق^{٢}(٥) - ق^{٢}(٢)$ فرق بين مربعين)

$= \frac{٢١ + (ق(٥) + ق(٢))(ق(٥) - ق(٢))}{٣}$ ..... ①

∵ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = -٦$ ⇐ $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٣} = -٦$ ⇐ ق (٥) – ق (٢) = – ١٨

بالتعويض في ① ⇐ $\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{٢١ + (٤ \times -١٨)}{٣} = \frac{-٥١}{٣} = -١٧$ (ق (٥) + ق (٢) = ٤ معطى)

مثال

إذا كان هـ (س) = $\sqrt{س}$ ق (س) وكان متوسط التغير للإقتران هـ (س) في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٧ ، ق (١) = ٥ فما قيمة ق (٤) ؟

(أ) ١٣ (ب) ٢٦ (ج) ١٩ (د) ٣٨

الحـــل

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{هـ(٤) - هـ(١)}{٣} = ٧ \Leftarrow هـ(٤) - هـ(١) = ٢١$ ..... ①

$\Leftarrow \sqrt{٤}\, ق(٤) - \sqrt{١}\, ق(١) = ٢١ \Leftarrow ٢ ق(٤) - ٥ = ٢١ \Leftarrow ق(٤) = ١٣$ (الإجابة الفرع ب)

مثال إذا كان متوسط التغير للإقتران هـ (س) في الفترة [٢ ، ٥] يساوي ٦ حيث

$ق(س + ١) = هـ(س + ١) + س^{٢} + ٦$ جد متوسط التغير للإقتران ق (س) في الفترة [٢ ، ٥]

الحـــــل

$\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = ٦ \Leftarrow \frac{هـ(٥) - هـ(٢)}{٣} \Leftarrow هـ(٥) - هـ(٢) = ١٨$ ..... ①

$\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٣}$

عندما س + ١ = ٥ $\Leftarrow$ س = ٤ $\Leftarrow ق(٥) = هـ(٥) + ٤^{٢} + ٦ = هـ(٥) + ٢٢$

عندما س + ١ = ٢ $\Leftarrow$ س = ١ $\Leftarrow ق(٢) = هـ(٢) + ١^{٢} + ٦ = هـ(٢) + ٧$

$\Leftarrow \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{(هـ(٥) + ٢٢) - (هـ(٢) + ٧)}{٣} = \frac{هـ(٥) - هـ(٢) + ١٥}{٣}$

من ① $\Leftarrow \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{١٨ + ١٥}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$

مثال

إذا كان $ق(س) = |٢س| + |[س - ٧]|$ وكان $\Delta س = \frac{١١}{٢}$ ، $س_{١} = \frac{٣}{٢}$ فإن متوسط التغير للإقتران ق (س)

أ ٢ ب ٧ ج $\frac{١٠}{١١}$ د $\frac{١٤}{١١}$

الحـــــل

$س_{٢} = \Delta س + س_{١} \Leftarrow س_{٢} = \frac{١١}{٢} + \frac{٣}{٢} \Leftarrow س_{٢} = ٧$ ، متوسط التغير $= \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$

$= \frac{ق(٧) - ق(\frac{٣}{٢})}{\frac{١١}{٢}} = \frac{(|١٤|) + (|[٧ - ٧]|) - (|٣|) + (|[\frac{٣}{٢} - ٧]|)}{\frac{١١}{٢}}$

$= ٢ \times \frac{١٤ - ٩}{١١} = \frac{١٠}{١١}$ (الإجابة الفرع ج)

مثال

أثبت أن متوسط تغير الإقتران الخطي $ق(س) = أ س + ب$ على أي فترة $[س_{١} ، س_{٢}]$ يساوي أ (معامل س)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

متوسط تغير ف(س) = $\frac{\Delta \text{ ف}(س)}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ف}(س_٢) - \text{ف}(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{(\text{أ}\ س_٢ + \text{ب}) - (\text{أ}\ س_١ + \text{ب})}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{\text{أ}\ س_٢ - \text{أ}\ س_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{أ}\ (س_٢ - س_١)}{س_٢ - س_١} = \text{أ}$

مثال إذا كان ف(س) = [س + ٧] – [س] + | ٢س | ، س ∈ [–١ ، ٥ –] فإن ف′(–٣) =

(أ) ٢ (ب) غير موجودة (ج) ١٣ (د) ٢–

الحـــــل

ف(س) = [س + ٧] – [س] + | ٢س | = ف(س) = [س] + ٧ – [س] + | ٢س |

= ٧ + | ٢س | = ٧ – ٢س (لأن س ∈ [–١ ، ٥ –] فإن | ٢س | = –٢س)

⇐ ف′(س) = ٢– ⇐ ف′(٣) = ٢– (الإجابة الفرع (د))

مثال معدل تغير مساحة المربع بالنسبة إلى محيطه عندما يكون محيطه = ٣٢ سم هو :

(أ) ٣ (ب) ٨ (ج) ٤ (د) ٦

الحـــــل

نفرض أن طول ضلع المربع س ، مساحته م ومحيطه ح ⇐ م = $س^٢$ ، ح = ٤س المطلوب $\left| \frac{\text{د م}}{\text{د ح}} \right|_{ح = ٣٢}$

∵ ح = ٤س ⇐ س = $\frac{ح}{٤}$ ومنها $س^٢ = \frac{ح^٢}{١٦}$ ⇐ م = $\frac{ح^٢}{١٦}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ح}} = \frac{١}{١٦} \times ٢\ ح = \frac{١}{٨}\ ح$ ⇐ $\left| \frac{\text{د م}}{\text{د ح}} \right|_{ح = ٣٢} = \frac{١}{٨} \times ٣٢ = ٤$ (الإجابة الفرع (ج))

مثال إذا كان ف(س) = $س^٥$ – ٢ أ$س^٢$ + ٨س وكان ف″(–١) = أ فإن قيمة أ تساوي :

(أ) $\frac{٢٠}{٣}$ (ب) ٤– (ج) $\frac{٢٠}{٣}$– (د) ٤

الحـــــل

ف(س) = $س^٥$ – ٢ أ$س^٢$ + ٨س ، ف′(س) = ٥$س^٤$ – ٤ أس + ٨ ، ف″(س) = ٢٠$س^٣$ – ٤ أ

∵ ف″(–١) = أ ⇐ ٢٠– – ٤ أ = أ ⇐ ٥ أ = ٢٠– ومنها أ = ٤– (الإجابة الفرع (ب))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

إذا كان متوسط تغير الإقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ يساوي $\frac{٣هـ^{٢} - ٤هـ}{٢هـ}$ فإن ق'(٢) تساوي :

(أ) -٢ (ب) ١ (ج) -١ (د) ٢

الحـــل

$$ق'(٢) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣هـ^{٢} - ٤هـ}{٢هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٣هـ - ٤)}{٢هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣هـ - ٤}{٢} = \frac{-٤}{٢} = -٢$$

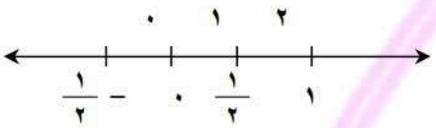
(الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان $هـ(س) = \frac{[٢س + ١]}{ل(س)}$ وكان $هـ(\frac{١}{٣}) = ٢$ ، $هـ'(\frac{١}{٣}) = -١$ فإن قيمة $ل'(\frac{١}{٣})$ تساوي :

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $-\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٩}$ (د) $-\frac{١}{٩}$

الحـــل



$٢س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -\frac{١}{٢}$

باعادة تعريف الإقتران [٢س + ١] جوار العدد $\frac{١}{٣}$ نلاحظ أن : [٢س + ١] = ١

$$\Leftarrow هـ(س) = \frac{[٢س + ١]}{ل(س)} = \frac{١}{ل(س)} \Leftarrow هـ'(س) = -\frac{ل'(س)}{(ل(س))^{٢}}$$

$$\Leftarrow هـ'(\frac{١}{٣}) = -\frac{ل'(\frac{١}{٣})}{(ل(\frac{١}{٣}))^{٢}} \Leftarrow -١ = -\frac{ل'(\frac{١}{٣})}{(ل(\frac{١}{٣}))^{٢}} \quad \text{.....} ①$$

$$\because هـ(س) = \frac{١}{ل(س)} \Leftarrow ل(س) = \frac{١}{هـ(س)} \Leftarrow ل(\frac{١}{٣}) = \frac{١}{٢} \text{ لأن } هـ(\frac{١}{٣}) = ٢$$

من ① إذن $-١ = -\frac{ل'(\frac{١}{٣})}{\frac{١}{٤}} \Leftarrow ل'(\frac{١}{٣}) = \frac{١}{٤}$

(الإجابة الفرع (أ))

مثال

تحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن^{٢} + ٤ ن حيث المسافة بالأمتار والزمن بالدقائق ، فإن التسارع المتوسط لهذا الجسم في الفترة [١ ، ٥] = :

(أ) ٢م / د^{٢} (ب) ٨م / د^{٢} (ج) ١٠م / د^{٢} (د) ٤٠م / د^{٢}

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

التسارع المتوسط ت (ن) = $\frac{\Delta ع(ن)}{\Delta ن}$ لكن ع (ن) = ف َ (ن) = ٢ ن + ٤

⇐ ت (ن) = $\frac{ع(٥) - ع(١)}{٤}$ = $\frac{٦ - ١٤}{٤}$ = ٢ م / د^{٢} (الإجابة الفرع ⓐ)

مثال إذا كان فـ(س) = $\frac{٥}{هـ(س)}$ وكان فـ(٣) = ١ ، هـ َ (٣) = ٤ فإن قيمة فـ َ (٣) تساوي :

ⓐ $\frac{٣}{٥}$ ⓑ $-\frac{٣}{٥}$ ⓒ $-\frac{٤}{٥}$ ⓓ $\frac{٤}{٥}$

الحـــــل

فـ(س) × هـ (س) = ٥ وباشتقاق الطرفين ⇐ فـ(س) × هـ َ (س) + هـ (س) × فـ َ (س) = ٠

⇐ فـ(٣) × هـ َ (٣) + هـ (٣) × فـ َ (٣) = ٠ وبما أن : هـ (٣) = $\frac{٥}{فـ(٣)}$ ⇐ هـ (٣) = ٥

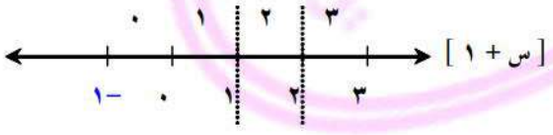
⇐ ١ × ٤ + ٥ × فـ َ (٣) = ٠ ⇐ ٤ + ٥ فـ َ (٣) = ٠ ⇐ ٥ فـ َ (٣) = −٤

⇐ فـ َ (٣) = $-\frac{٤}{٥}$ (الإجابة الفرع ⓒ)

مثال إذا كان فـ(س) = $\begin{cases} [س + ١] & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ \frac{|س|}{س} + ٤ & ، \ ٢ < س < ٥ \end{cases}$ ، جد ق َ (٢)

الحـــــل

باعادة تعريف الإقتران [س + ١] على الفترة ١ ≤ س < ٢



فإن [س + ١] = ٢

وبما أن س موجب في الفترة ٢ < س < ٥ ⇐ $\frac{|س|}{س} = \frac{س}{س}$ = ١ إذن فـ(س) = $\begin{cases} ٢ & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ ٣ & ، \ س = ٢ \\ ٥ & ، \ ٢ < س < ٥ \end{cases}$

عندما س = ٢ فـ(٢) = ٣ ، نهـــا$_{س \to ٢^{-}}$ ٢ = ٢ ، نهـــا$_{س \to ٢^{+}}$ ٥ = ٥

إذن فـ(س) غير متصل عند س = ٢ إذن ق َ (٢) غير موجودة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

إذا كان $و(س) = \frac{ل(س)}{س \times هـ(س)}$ وكان $و'(٢) = ل(٢) = -٣$ ، $ل'(٢) = هـ(٢) = ١$ أوجد $هـ'(٢)$

الحـــــل

$$و'(س) = \frac{س \times هـ(س)\ (ل'(س)) - ل(س)(س \times هـ'(س) + هـ(س) \times ١)}{(س \times هـ(س))^{٢}}$$

$$\Leftarrow\ و'(٢) = \frac{٢ هـ(٢)\ (ل'(٢)) - ل(٢)(٢ هـ'(٢) + هـ(٢))}{(٢ هـ(٢))^{٢}}$$

$$\Leftarrow\ -٣ = \frac{٢ + ٣(٢ هـ'(٢) + ١)}{(٢)^{٢}} \Leftarrow -٣ = \frac{٢ + (٦ هـ'(٢) + ٣)}{٤}$$

$$\Leftarrow\ -١٢ = ٢ + (٦ هـ'(٢) + ٣) \Leftarrow -١٢ = ٦ هـ'(٢) + ٥ \text{ ومنها } هـ'(٢) = -\frac{١٧}{٦}$$

مثال

إذا كان $و(س) = (١ - س)(١ + س)(١ + س^{٢})(١ + س^{٤})(١ + س^{٨})$ ، جد $و'(١)$

الحـــــل

$(١ - س)(١ + س) = (١ - س^{٢})$ (تحليل فرق بين مربعين)

$$\Leftarrow\ و(س) = (١ - س^{٢})(١ + س^{٢})(١ + س^{٤})(١ + س^{٨})$$

أيضاً $(١ - س^{٢})(١ + س^{٢}) = (١ - س^{٤})$ (تحليل فرق بين مربعين)

$$\Leftarrow\ و(س) = (١ - س^{٤})(١ + س^{٤})(١ + س^{٨}) \Leftarrow و(س) = (١ - س^{٨})(١ + س^{٨}) = (١ - س^{١٦})$$

$$\Leftarrow\ و'(س) = -١٦ س^{١٥} \text{ ومنها } و'(١) = -١٦ \times ١ = -١٦$$

مثال

إذا كان $و(س) = \frac{٢ و(س) - س^{٢}}{٣س}$ جد $و'(١)$

الحـــــل

بداية نجعل $و(س)$ موضع القانون

$$و(س) = \frac{٢ و(س) - س^{٢}}{٣س} \Leftarrow ٣س\ و(س) = ٢ و(س) - س^{٢} \Leftarrow ٣س\ و(س) - ٢ و(س)$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$= -س^{٢}$ ⇐ $ق'(س)(٣س-٢) = -س^{٢}$ ومنها $ق'(س) = \frac{-س^{٢}}{٣س-٢}$

⇐ $ق'(س) = \frac{(٣س-٢)\times(-٢س) - (-س^{٢})\times(٣)}{(٣س-٢)^{٢}}$

⇐ $ق'(١) = \frac{(٣-٢)\times(-٢) - (-١)\times(٣)}{(١)^{٢}} = -٢ - (-٣) = ١$

مثال إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، $ن \in ص$ وكان $ق^{(٣)}(س) = ٢س$ جد قيمة ٢

الحـــل

$ق'(س) = ن\, س^{ن-١}$ ، $ق''(س) = ن(ن-١)\, س^{ن-٢}$

$ق^{(٣)}(س) = ن(ن-١)(ن-٢)\, س^{ن-٣}$ لكن $ق^{(٣)}(س) = ٢س$

⇐ $ن(ن-١)(ن-٢)\, س^{ن-٣} = ٢س$

من تساوي الأسس ينتج أن : $ن - ٣ = ١$ ومنها $ن = ٤$

ومن تساوي المعاملات ينتج أن : $ن(ن-١)(ن-٢) = ٢$ ⇐ $٤ \times ٣ \times ٢ = ٢$ ومنها $٢ = ٢٤$

مثال إذا كان $ق(س) = ٢س + \frac{ب}{س}$ ، $س \neq ٠$ وكان متوسط التغير للإقتران $ق(س)$ في الفترة $[١، ٥] = ٢$ ، $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+٢هـ) - ق(١)}{هـ} = -٤$ ، جد قيمة ٢ ، ب

الحـــل

∵ $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ٢$ ⇐ $\frac{ق(٥) - ق(١)}{٤} = ٢$ ⇐ $ق(٥) - ق(١) = ٨$

⇐ $(١٠٢ + \frac{ب}{٥}) - (٢ + ب) = ٨$ ⇐ $١٠٢ - ٢ + \frac{ب}{٥} - ب = ٨$

⇐ $٤٢ - \frac{٤ب}{٥} = ٨$ ⇐ $٢ - \frac{ب}{٥} = ٢$ ..... ①

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+٢هـ) - ق(١)}{هـ} = -٤$ ⇐ $٢\, ق'(١) = -٤$ ⇐ $ق'(١) = -٢$

$ق'(س) = ٢ - \frac{ب}{س^{٢}}$ ⇐ $ق'(١) = ٢ - ب$ ⇐ $٢ - ب = -٢$ ..... ②

① − ② ⇐ $\frac{٤ب}{٥} = ٤$ ⇐ $ب = ٥$ و بالتعويض في ② ⇐ $٢ = ٣$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال جد قيمة الثابت ب التي تجعل الإقتران ق(س) = | ٤س^{٢} + ب س + ١ | قابلاً للإشتقاق على ح

الحـــل

يكون الإقتران ق(س) قابلاً للإشتقاق على ح إذا كان المميز ب^{٢} – ٤ أ ج سالب أو يساوي صفر

⇐ ب^{٢} – ١٦ ≤ ٠ (نحل هذه المتباينة بأي طريقة مناسبة بحث إشارة أو خصائص القيمة المطلقة)

ب^{٢} – ١٦ ≤ ٠ ⇐ ب^{٢} ≤ ١٦ ⇐ | ب | ≤ ٤ (باستخدام خصائص القيمة المطلقة)

⇐ – ٤ ≤ ب ≤ ٤ ⇐ ب ∈ [–٤ ، ٤]

مثال فلسطين : ٢٠١٢ إذا كان ص = قاس + ظاس فإن $\frac{ص`}{ص}$ تساوي :

(أ) قاس (ب) قتاس (ج) – قاس (د) – قتاس

الحـــل

ص` = قاس ظاس + قا^{٢}س = قاس (ظاس + قاس) = قاس (ص) وبقسمة الطرفين على ص

⇐ $\frac{ص`}{ص}$ = قاس (الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس فإن ص" + ص تساوي :

(أ) ٢ (أ جاس + ب جتاس) (ب) ٢ (ج) صفر (د) أ جاس – ب جتاس

الحـــل

ص` = أ جتاس – ب جاس ، ص" = – أ جاس – ب جتاس = – (أ جاس + ب جتاس)

⇐ ص" = – (ص) ومنها ص" + ص = صفر (الإجابة الفرع (ج))

مثال إذا كان ص = $\frac{جاس}{١ + جتاس}$ ، أثبت أن ص` جاس = ص .

الحـــل

ص` = $\frac{(١ + جتاس)(جتاس) + جا^{٢}س}{(١ + جتاس)^{٢}}$ = $\frac{جتاس + جتا^{٢}س + جا^{٢}س}{(١ + جتاس)^{٢}}$ = $\frac{جتاس + ١}{(١ + جتاس)^{٢}}$

= $\frac{١}{١ + جتاس}$ ⇐ ص` جاس = $\frac{١}{١ + جتاس}$ × جاس = ص

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

إذا كان ص = $\frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ تساوي :

(أ) صفر (ب) قتاس (ج) ١ (د) جتا^2 س

الحـــل

ص = $\frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}$ = $\frac{١ - \text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}$ = $\frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جتا}^2 س}$ = ١ ومنها $\frac{د ص}{د س}$ = صفر (الإجابة الفرع (أ))

مثال

إذا كان ص = جاس + ٢جتاس ، فإن صَ + صٌّ + صٌّ + ص = :

(أ) ٢جتاس (ب) ١ (ج) صفر (د) جاس

الحـــل

صَ = جتاس – ٢جاس ، صٌّ = – جاس – ٢جتاس ، صٌّ = – جتاس + ٢جاس

صَ + صٌّ + صٌّ + ص = جتاس – ٢جاس – جاس – ٢جتاس – جتاس + ٢جاس + جاس + ٢جتاس = ٠

(الإجابة الفرع (ج))

مثال

إذا كان هـ (٢) = ٤ ، هـَ (٢) = ٤ جد $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س هـ(٢) - ٢ هـ(س)}{٢س - ٤}$

الحـــل

بالتعويض المباشر $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س هـ(٢) - ٢ هـ(س)}{٢س - ٤}$ = $\frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال : $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{س هـ(٢) - ٢ هـ(س)}{٢س - ٤}$ = $\lim_{س \to ٢}$ $\frac{هـ(٢) - ٢ هـَ(س)}{٢}$

= $\frac{هـ(٢) - ٢ هـَ(٢)}{٢}$ = $\frac{٨ - ٤}{٢}$ = ٢–

مثال

إذا كان هـ (س) = $\frac{٢^{س}}{س + ١}$ جد قيمة $\lim_{س \to ١}$ $\frac{٢ هـ(س) - ٢ هـ(١)}{س - ١}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

بالتعويض المباشر $\lim_{س \to ١} \frac{٢ \text{ ق}(س) - ٢ \text{ ق}(١)}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال : $\lim_{س \to ١} \frac{٢ \text{ ق}(س) - ٢ \text{ ق}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} ٢ \text{ ق}'(س) = ٢ \text{ ق}'(١)$ ..... ①

$\text{ق}'(س) = \frac{(س + ١)(٢ \text{ هـ}^{س}) - (٢ \text{ هـ}^{س})}{(س + ١)^{٢}} \Leftarrow \text{ق}'(١) = \frac{٤\text{هـ} - ٢\text{هـ}}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ هـ}$

من ① $\Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{٢ \text{ ق}(س) - ٢ \text{ ق}(١)}{س - ١} = ٢ \times \frac{١}{٢} \text{ هـ} = \text{هـ}$

مثال

إذا كان ص = هـ ^{س} جاس أثبت أن : صً – ٢صَ + ٢ص = صفر

الحـــــل

ص = هـ ^{س} جاس ، صَ = (هـ ^{س} × جتاس) + (جاس × هـ ^{س})

صً = (هـ ^{س} × – جاس) + (جتاس × هـ ^{س}) + (جاس × هـ ^{س}) + (جتاس × هـ ^{س}) = ٢ جتاس هـ ^{س}

$\Leftarrow$ صً – ٢صَ + ٢ص = (٢ جتاس هـ ^{س}) – ٢ ((هـ ^{س} جتاس) + (جاس هـ ^{س})) + ٢ (هـ ^{س} جاس)

= ٢ جتاس هـ ^{س} – ٢ هـ ^{س} جتاس – ٢ جاس هـ ^{س} + ٢ هـ ^{س} جاس = صفر

١ – ٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية

مثال

فلسطين : ٢٠١٤ إذا كانت معادلة العمودي على منحنى ق(س) عند النقطة (٥ ، ٤) الواقعة عليه هي ٤س – ٣ص = ٨ فإن ق'(٥) تساوي :

Ⓐ $\frac{٤}{٣}$ Ⓑ $\frac{٣}{٤}$ Ⓒ $-\frac{٣}{٤}$ Ⓓ $-\frac{٤}{٣}$

الحـــــل

ميل المستقيم ٤س – ٣ص = ٨ العمودي على المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (٥ ، ٤) = $\frac{٤}{٣}$

$\Leftarrow$ ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (٥ ، ٤) = ق'(٥) = $-\frac{٣}{٤}$ (الإجابة الفرع Ⓒ)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنى الإقتران ق = س^{٢} − ٥س + ٦ عند نقطتي تقاطعه مع محور السينات متعامدان .

الحـــــل

نقاط تقاطع المنحنى فـ(س) مع محور السينات :

فـ(س) = ٠ ⇐ س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠ ⇐ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

⇐ س = ٢ ، س = ٣

فـَ (س) = ٢س − ٥

ميل المماس عند س = ٢ = فـَ (٢) = −١ ، ميل المماس عند س = ٣ = فـَ (٣) = ١

∴ فـَ (٢) × فـَ (٣) = −١ ⇐ المماسان للمنحنى عند نقاط التقاطع متعامدان .

مثال أوجد معادلة المماس لمنحنى فـ(س) = س^{٢} + س والذي يوازي المستقيم ص − ٥س = ٣

الحـــــل

معادلة المماس : ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

نفرض أن نقطة التماس هي (س ، ص)

عند نقطة التماس يكون ميل المماس فـَ (س) = ميل المستقيم ص = ٥س + ٣ (لأن المستقيم يوازي منحنى فـ(س))

⇐ فـَ (س) = ٥ ⇐ ٢س + ١ = ٥ ومنها س = ٢

⇐ نقطة التماس هي (٢ ، فـ(٢)) = (٢ ، ٦) ⇐ معادلة المماس : ص − ٦ = ٥ (س − ٢) ⇐ ص = ٥ س − ٤

مثال فلسطين : ٢٠١١ إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى الإقتران فـ(س) عند النقطة (١٢ ، ب) هي ٢ص = س وكان فـَ (١٢) = ٦ فإن الثابت ب = :

Ⓐ −٦ Ⓑ −٢ Ⓒ ٢ Ⓓ ٦

الحـــــل

ميل المستقيم ٢ص = س العمودي على المماس لمنحنى فـ(س) عند النقطة (١٢ ، ب) = $\frac{١}{٢}$

⇐ ميل المماس لمنحنى فـ(س) عند النقطة (١٢ ، ب) = فـَ (١٢) = −٢

⇐ −٢ = ٦ ⇐ ٢ = −٦ ⇐ معادلة المستقيم هي −٦ ص = س وحيث أنه يمر بالنقطة (١٢ ، ب)

⇐ −٦ ب = ١٢ ومنها ب = −٢ (الإجابة الفرع Ⓑ)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

جد الميل لجميع المماسات لمنحنى الإقتران ق(س) = ٢س^{٢} – ٥س + ٧ والمرسومة من النقطة (٠ ، –١) .

الحـــــل

ق(٠) = ٧ ≠ –١ ⇐ النقطة (٠ ، –١) لا تقع على منحنى ق(س)

نفرض أن نقطة التماس هي (س ، ص)

ميل المماس ق$'$ (س) = ميل المستقيم من النقطتين (س ، ص) ، (٠ ، –١) (الميل من التفاضل يساوي الميل من التحليلية)

⇐ ق$'$ (س) = ٤س – ٥ = $\frac{ص - (-١)}{س - ٠}$ ⇐ ص + ١ = ٤س^{٢} – ٥س

⇐ ص = ٤س^{٢} – ٥س –١ ⇐ ٢س^{٢} – ٥س + ٧ = ٤س^{٢} – ٥س –١ (لأن ص = ق(س) = ٢س^{٢} – ٥س + ٧)

⇐ ٢س^{٢} = ٨ ⇐ س = ± ٢ ⇐ يوجد مماسان للمنحنى مرسومان من النقطة (٠ ، –١)

ميل المماس الأول عند س = ٢ = ق$'$ (٢) = ٤ (٢) – ٥ = ٣

ميل المماس الثاني عند س = –٢ = ق$'$ (–٢) = ٤ (–٢) – ٥ = –١٣

مثال إذا كان المستقيم الواصل بين النقطتين (٠ ، –١) ، (١ ، ب) مماساً لمنحنى الإقتران

ق(س) = ٢س^{٢} – س + ٧ . جد قيمة الثابت ب

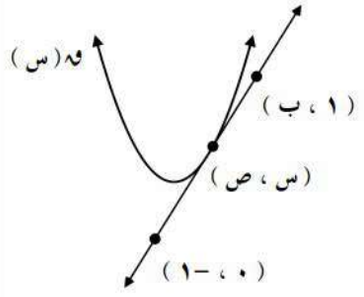
الحـــــل

نفرض أن نقطة التماس هي (س ، ص)

ميل المماس ق$'$ (س) = ميل المستقيم (الميل عند النقطة (س ، ص) من التفاضل يساوي الميل من التحليلية)

⇐ ق$'$ (س) = ٤س – ١ = $\frac{ب - (-١)}{١ - ٠}$ ⇐ ٤س – ١ = ب + ١ ⇐ ب = ٤س – ٢ ..... ①

المماس يمر بالنقطتين (س ، ص) ، (٠ ، –١)



⇐ ق$'$ (س) = ٤س – ١ = $\frac{ص - (-١)}{س - ٠}$ ⇐ ص + ١ = ٤س^{٢} – س

⇐ ص = ٤س^{٢} – س – ١ لكن ص = ق(س) = ٢س^{٢} – س + ٧

⇐ ٢س^{٢} – س + ٧ = ٤س^{٢} – س – ١ ⇐ ٢س^{٢} – ٨ = ٠ ⇐ س = ± ٢

عندما س = ٢ من ① ⇐ ب = ٦

عندما س = –٢ من ① ⇐ ب = –١٠ ⇐ ب = ٦ ، –١٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ٢ − ٦٣ ن + ١٥ ن^{٢} − ن^{٣} حيث المسافة ف بالأمتار ، الزمن ن بالثواني ، جد ما يلي :

١) المسافة الإبتدائية .
٢) التسارع الإبتدائي
٣) الفترة الزمنية التي تكون فيها السرعة موجبة
٤) السرعة عندما يسير الجسم بسرعة ثابتة .
٥) الزمن الذي يكون عنده التسارع سالباً

الحـــل

١) المسافة الإبتدائية ف (٠) = ٢ − ٠ + ٠ − ٠ = ٢ متر

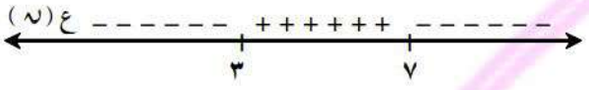
٢) التسارع الإبتدائي ت (٠)

ع (ن) = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = − ٦٣ + ٣٠ ن − ٣ ن^{٢} ، ت (ن) = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = − ٣٠ − ٦ ن ⇐ ت (٠) = − ٣٠ م / ث^{٢}

٣) لإيجاد الفترة الزمنية التي تكون فيها السرعة موجبة نبحث إشارة السرعة

ع (ن) = − ٦٣ + ٣٠ ن − ٣ ن^{٢} = ٠ ⇐ ٣ ن^{٢} − ٣٠ ن + ٦٣ = ٠ ⇐ ن^{٢} − ١٠ ن + ٢١ = ٠

⇐ (ن − ٧) (ن − ٣) = ٠ ⇐ ن = ٧ أو ن = ٣



من إشارة ع نلاحظ أن السرعة تكون موجبة في الفترة الزمنية] ٣ ، ٧ [

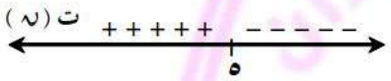
٤) السرعة عندما يسير الجسم بسرعة ثابتة أي أن المطلوب إيجاد ع (ن) عندما يكون التسارع ت (ن) = ٠

ت (ن) = − ٣٠ − ٦ ن = ٠ ⇐ ن = ٥

عندما يسير الجسم بسرعة ثابتة = ع (٥) = − ٦٣ + ٣٠ (٥) − ٣ (٥)^{٢} = − ٦٣ + ١٥٠ − ٧٥ = ١٢ م / ث

٥) لإيجاد الزمن الذي يكون عنده التسارع سالباً نبحث إشارة التسارع

ت (ن) = − ٣٠ − ٦ ن = ٠ ⇐ ن = ٥



⇐ يكون التسارع سالباً عندما ن > ٠

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ن^{٣} − ٩ ن^{٢} + ٧ حيث المسافة ف بالأمتار ، الزمن ن بالثواني ، جد ما يلي :

١) السرعة الإبتدائية
٢) التسارع عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي
٣) المسافة عندما ينعدم التسارع
٤) التسارع المتوسط في الفترة [١ ، ٣]

الحـــل

١) السرعة ع (ن) = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٣ ن^{٢} − ١٨ ن ، السرعة الإبتدائية ع (٠) = ٠ − ٠ = ٠ م / ث

٢) التسارع عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي أي أن المطلوب إيجاد ت (ن) عندما يكون ع (ن) = ٠

ت (ن) = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ٦ ن − ١٨

ع (ن) = ٠ ⇐ ٣ ن^{٢} − ١٨ ن = ٠ ⇐ ٣ ن (ن − ٦) = ٠ ⇐ ن = صفر أو ن = ٦

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

عندما ن = ٠ ⇐ ت (٠) = ٠ – ١٨ = – ١٨ م / ث^{٢}

عندما ن = ٦ ⇐ ت (٦) = ٦ (٦) – ١٨ = ٣٦ – ١٨ = ١٨ م / ث^{٢}

٣) المسافة عندما ينعدم التسارع أي المسافة ف (ن) عندما يكون التسارع ت (ن) = ٠

ت (ن) = ٠ ⇐ ٦ ن – ١٨ = ٠ ⇐ ن = ٦

⇐ ف (٦) = (٦)^{٣} – ٩ (٦)^{٢} + ٧ = ٢١٦ – ٣٢٤ + ٧ = – ١٠١ م

٤) التسارع المتوسط في الفترة [١ ، ٣] : $\overline{ت} = \frac{\Delta ع}{\Delta ن}$

$= \frac{ع (٣) – ع (١)}{٢} = \frac{(٣ \times ٩ – ١٨) – (٣ \times ١ – ١٨ \times ١)}{٢} = \frac{(– ٢٧) – (– ١٥)}{٢} = – ٦$

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف = ن^{٢} (٢ ن – ٩)

١) جد السرعة بعد ٣ ثواني من بدء الحركة . ٢) متى تبدأ سرعة الجسم بالتزايد

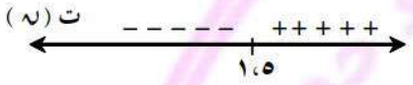
الحـــــل

١) ف = ن^{٢} (٢ ن – ٩) = ٢ ن^{٣} – ٩ ن^{٢} ، ع (ن) = ٦ ن^{٢} – ١٨ ن ⇐ ع (٣) = ٦ × ٩ – ١٨ × ٣ = ٠

٢) لمعرفة متى تبدأ سرعة الجسم بالتزايد نبحث إشارة إقتران التسارع ت (ن)

ت (ن) = ١٢ ن – ١٨ = ⇐ $ن = \frac{٣}{٢}$

نلاحظ أن سرعة الجسم تبدأ بالتزايد عندما $ن = \frac{٣}{٢}$



مثال جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى الإقتران

ق (س) = س^{٢} + ١ عند النقطة (٢ ، ٥) والمستقيم ص = ١

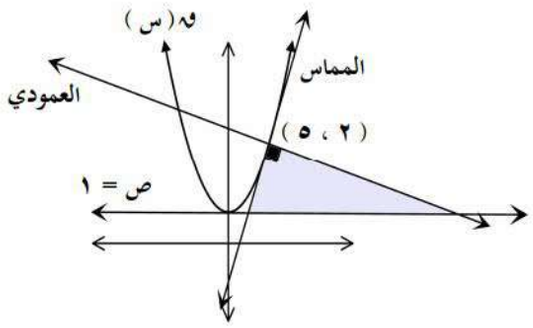
الحـــــل

م = ق$'$ (س) = ٢س ⇐ ميل المماس لمنحنى ق (س) عند (٢ ، ٥) = ق$'$ (٢) = ٤

نقطة التماس (٢ ، ٥) ⇐ معادلة المماس ص – ٥ = ٤ (س – ٢) ⇐ ص = ٤ س – ٣

يتقاطع المماس مع المستقيم ص = ١ عندما ٤ س – ٣ = ١

⇐ س = ١



معادلة العمودي ص – ٥ = $– \frac{١}{٤}$ (س – ٢)

ص = $– \frac{١}{٤}$ س + $\frac{١١}{٢}$ ويتقاطع العمودي مع المستقيم ص = ١

عندما $– \frac{١}{٤}$ س + $\frac{١١}{٢}$ = ١ ⇐ س = ١٨ ⇐ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × (١٨ – ١) × (٥ – ١) = ٣٤ وحدة مربعة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

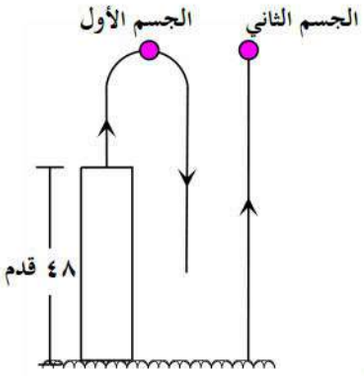
مثال من قمة برج ارتفاعه (٤٨) قدم قذف جسيم رأسياً لأعلى وفق الإقتران

$ف_١(ن) = -١٦ن^٢ + ٣٢ن$ ، وفي اللحظة نفسها قذف جسم ثانٍ من سطح الأرض للأعلى وفق الإقتران

$ف_٢(ن) = -١٦ن^٢ + ع_.ن$ حيث $ف_١$ ، $ف_٢$ المسافة بالأقدام ، ن الزمن بالثواني جد السرعة الإبتدائية ($ع_.$) للجسيم الثاني عندما يتساوى أقصى إرتفاع للجسيمين عن سطح الأرض .

الحـــــل

$ف_١(ن)$ للجسم الأول عن سطح الأرض $= -١٦ن^٢ + ٣٢ن + ٤٨$



أقصى إرتفاع للجسم الأول عندما $ع_١(ن) = ٠$

$\Leftarrow -٣٢ن + ٣٢ = ٠ \Leftarrow ن = ١$ زمن أقصى إرتفاع للجسيم الأول

$\Leftarrow$ أقصى إرتفاع للجسيم الأول عن سطح الأرض

$= ف_١(١) +$ طول البرج $= -١٦ + ٣٢ + ٤٨ = ٦٤$ قدم

أقصى إرتفاع للجسم الثاني عندما $ع_٢(ن) = ٠$

$-٣٢ن + ع_. = ٠ \Leftarrow ع_. = ٣٢ن$

عند أقصى إرتفاع يكون : $ف_٢(ن) = -١٦ن^٢ + ع_.ن = ٦٤$

بالتعويض عن $ع_.$ $= ٣٢ن \Leftarrow -١٦ن^٢ + ٣٢ن^٢ = ٦٤ \Leftarrow ١٦ن^٢ = ٦٤$

$\Leftarrow ن = ٢$ زمن أقصى إرتفاع للجسيم الثاني

$\because ع_. = ٣٢ن \Leftarrow ع_. = ٣٢ \times ٢ = ٦٤$ قدم / ثانية

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = ن^٢ - ٣ن + ٢$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، فإذا كانت سرعته المتوسطة في [٠ ، ٢] تساوي سرعته اللحظية عندما $ن = ٥$ ، فجد قيمة ٢ .

(أ) ١٠ (ب) ١٣ (ج) ٤ (د) ١

الحـــــل

السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{(٢^٢ - ٣ \times ٢ + ٢) - (٢)}{٢} = \frac{٢^٢ - ٣٢}{٢} = ٢ - ٣$

السرعة اللحظية عندما $ن = ٥$ هي : $ع(٥)$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٢ن - ٣ \Leftarrow ع(٥) = ٧ \Leftarrow ٢ - ٣ = ٧$ ومنها $٢ = ١٠$ (الإجابة الفرع (أ))

مثال فلسطين : ٢٠١٥ إكمال قذف جسم رأسياً للأعلى من نقطة على سطح الأرض أفقية بحيث أن المسافة ف بالأمتار بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة $ف = ٦٤ن - ١٦ن^٢$:

١) أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم ٢) بين أن الجسم يفقد نصف سرعته الإبتدائية على إرتفاع ٤٨ م

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

١) ع (ن) = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٦٤ – ٣٢ن = ٠ ⇐ ٣٢ن = ٦٤ ومنها ن = ٢ ث

⇐ أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم = ف (٢) = ١٢٨ – ٦٤ = ٦٤ م

٢) الجسم على إرتفاع ٤٨ متر ⇐ ف (ن) = ٤٨ ⇐ ٦٤ن – ١٦ن^{٢} = ٤٨

⇐ ١٦ن^{٢} – ٦٤ن + ٤٨ = ٠ ⇐ ن^{٢} – ٤ن + ٣ = ٠ ⇐ (ن – ٣)(ن – ١) = ٠

إما ن = ٣ أو ن = ١

عندما ن = ١ يكون الجسم صاعد (لأن ١ أقل من زمن أقصى إرتفاع ن = ٢)

ع (١) = ٦٤ – ٣٢ × ١ = ٣٢ قدم/ث ..... ①

عندما ن = ٣ يكون الجسم هابط (لأن ٣ أكبر من زمن أقصى إرتفاع ن = ٢)

ع (٣) = ٦٤ – ٣٢ × ٣ = –٣٢ قدم/ث ..... ②

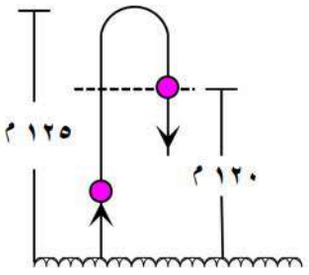
السرعة الإبتدائية ع (٠) = ٦٤ – ٣٢ × ٠ = ٦٤ قدم/ث ..... ③

من ① ، ② ، ③ نلاحظ أن الجسم يفقد نصف سرعته الإبتدائية عندما يكون على إرتفاع ٤٨ متر

مثال فلسطين : ٢٠١٠ قذف جسم رأسياً لأعلى فكانت العلاقة بين ارتفاعه بالأمتار عن نقطة قذفه وزمن حركته ن بالثواني هي ف = ٥٠ن – ٥ن^{٢} . جد الزمن اللازم لتكون المسافة التي قطعها الجسم تساوى ١٣٠م .

الحـــــل

ف = ٥٠ن – ٥ن^{٢} و بالإشتقاق بالنسبة للزمن ⇐ $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٥٠ – ١٠ن



أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم عندما $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٠ ⇐ ٥٠ – ١٠ن = ٠ ⇐ ن = ٥

وتكون المسافة التي قطعها في هذه اللحظة تساوي

ف (٥) = ٥٠ × ٥ – ٥ × ٥^{٢} = ٢٥٠ – ١٢٥ = ١٢٥ م

وعندما يقطع الجسم مسافة ١٣٠ متر يكون نازل

إرتفاع الجسم وهو نازل ف (ن) = ٢ × زمن أقصى إرتفاع – المسافة الكلية التي قطعها الجسم

⇐ ف (ن) = ٢ × ١٢٥ – ١٣٠ = ١٢٠ متر

⇐ ٥٠ن – ٥ن^{٢} = ١٢٠ ⇐ ن^{٢} – ١٠ن + ٢٤ = ٠ ومنها (ن – ٦)(ن – ٤) = ٠

⇐ ن = ٤ مرفوض لأن الجسم صاعد ، ن = ٦ ثانية وهو زمن النزول بعد قطع ١٣٠ متر وهو المطلوب

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

١ – ٦ قاعدة السلسلة

مثال إذا كان ل (س) = س^{٢} (٥ – ٣س)^{٤} فإن ل َ (٢) = :

(أ) ٤٨ (ب) ٥٢ (ج) ٤٤ (د) ٥٦

الحـــل

ل َ (س) = س^{٢} × ٤ (٥ – ٣س)^{٣} × –٣ + (٥ – ٣س)^{٤} × ٢س

ل َ (٢) = ٢ ^{٢} × ٤ (٥ – ٣×٢)^{٣} × –٣ + (٥ – ٣×٢)^{٤} × ٢×٢

= –٤٨ (–١)^{٣} + ٤ (–١)^{٤} = ٤٨ + ٤ = ٥٢ (الإجابة الفرع (ب))

مثال إذا كان وه (س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٦س + ٩}$ ، س ≠ ٣ ، فإن وه ً (س) تساوي :

(أ) – وه^{٢} (س) (ب) ٦ وه (س) (ج) ٦ وه^{٢} (س) (د) وه^{٢} (س)

الحـــل

وه َ (س) = $\frac{-(٢س - ٦)}{(س^{٢} - ٦س + ٩)^{٢}}$ = $\frac{-٢(س - ٣)}{((س - ٣)^{٢})^{٢}}$ = $\frac{-٢}{(س - ٣)^{٣}}$

وه ً (س) = ٢ × $\frac{٣(س - ٣)^{٢}}{(س - ٣)^{٦}}$ = ٦ × $\frac{١}{(س - ٣)^{٤}}$ = ٦ × $\frac{١}{((س - ٣)^{٢})^{٢}}$ = ٦ × $\frac{١}{(س^{٢} - ٦س + ٩)^{٢}}$

= ٦ ($\frac{١}{س^{٢} - ٦س + ٩}$) ^{٢} = ٦ وه^{٢} (س) (الإجابة الفرع (ج))

مثال جد نهـــا$_{س \to ٠}$ $\frac{لو_{هـ} (١ + س) - س}{جتاس - ١}$

الحـــل

بالتعويض المباشر = $\frac{٠}{٠}$ و باستخدام لوبيتال : نهـــا$_{س \to ٠}$ $\frac{لو_{هـ} (١ + س) - س}{جتاس - ١}$ = نهـــا$_{س \to ٠}$ $\frac{١ - \frac{١}{١ + س}}{- جاس}$

بالتعويض المباشر مرة = $\frac{٠}{٠}$ و باستخدام لوبيتال مرة ثانية : نهـــا$_{س \to ٠}$ $\frac{١ - \frac{١}{١ + س}}{- جاس}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{-\frac{١}{(١+س)^{٢}}}{-\text{جتاس}} = \frac{-١}{-١} = ١$$

مثال جد $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}(١ - \text{جتا س})}{س^{٢}}$

الحـــل

بالتعويض المباشر $= \frac{٠}{٠}$ و باستخدام لوبيتال : $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}(١ - \text{جتا س})}{س^{٢}}$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{قا}^{٢}(١ - \text{جتا س}) \times \text{جاس}}{٢س}$$ بالتعويض مرة ثانية $= \frac{٠}{٠}$

و باستخدام لوبيتال مرة ثانية : $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{قا}^{٢}(١ - \text{جتا س}) \times \text{جاس}}{٢س}$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(\text{قا}^{٢}(١ - \text{جتا س}) \times \text{جتاس}) + (\text{جاس} \times ٢\text{قا}(١ - \text{جتا س}) \times \text{قا}(١ - \text{جتا س}) \text{ظا}(١ - \text{جتا س}) \text{جاس})}{٢}$$

$$= \frac{١ + ٠}{٢} = \frac{١}{٢}$$

مثال إذا كان ص $= ع^{٢} + ٨ع$ ، ع $\times$ س $= ٥ +$ س فإن $\frac{د ص}{د س}$ عند س $= ١$ تساوي :

(أ) -٥٠ (ب) -١٠٠ (ج) ٢٠ (د) ١٠٠

الحـــل

ص $= ع^{٢} + ٨ع$ ، $ع = \frac{س + ٥}{س} = ١ + \frac{٥}{س}$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = (٢ع + ٨) \times -\frac{٥}{س^{٢}}$

عند س $= ١ \Leftarrow ع = ١ + ٥ = ٦ \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = (١٢ + ٨) \times -٥ = -١٠٠$ (الإجابة الفرع (ب))

مثال إذا كان قا(س) $= س^{٣} +$ س ، هـ(س) $= س^{٢}$ فإن : $(\text{قا} \circ \text{هـ})'(١)$

(أ) -١ (ب) ١٠ (ج) ٤ (د) ٨

الحـــل

قا$'$(س) $= ٣س^{٢} + ١$ ، هـ$'$(س) $= ٢$ س

$(\text{قا} \circ \text{هـ})'(١) = \text{قا}'(\text{هـ}(١)) \times \text{هـ}'(١) = \text{قا}'(١) \times ٢ = ٤ \times ٢ = ٨$ (الإجابة الفرع (د))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال إذا كان ف(س) قابلاً للإشتقاق وكان ف(س^{٣} + ١) – س = صفر فإن ف$'$(٩) = :

(أ) $\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{٩}$ (ج) صفر (د) ٣٣

الحـــل

ق (س^{٣} + ١) = س ⇐ ف$'$(س^{٣} + ١) × ٣س^{٢} = ١ وعندما س^{٣} + ١ = ٩ ⇐ س^{٣} = ٨ ⇐ س = ٢

⇐ ف$'$(٩) × ١٢ = ١ ومنها س = $\frac{١}{١٢}$ (الإجابة الفرع (أ))

مثال يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = أ (جتا٢ن + جا٢ن) حيث ف بعد الجسم عن نقطة ثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني . جد تسارع الجسم عندما يكون على بعد ٣ أمتار من النقطة (و) .

الحـــل

ع (ن) = ف$'$(ن) = أ (–٢جا٢ن + ٢جتا٢ن)

ت (ن) = ع$'$(ن) = أ (–٤جتا٢ن – ٤جا٢ن) = – ٤ أ (جتا٢ن + جا٢ن) = – ٤ ف (ن)

عندما يكون الجسم على بعد ٣ أمتار يكون : ف (ن) = ٣ ⇐ ت (ن) = – ٤ × ٣ = – ١٢ م / ث^{٢}

مثال إذا كان ف(س) = لو$_{هـ}$ ((٢س + ٣)^{٢} (٣س – ٥)^{٤}) جد ف$'$(٣)

الحـــل

ف(س) = لو$_{هـ}$ ((٢س + ٣)^{٢} (٣س – ٥)^{٤}) = لو$_{هـ}$ (٢س + ٣)^{٢} + لو$_{هـ}$ (٣س – ٥)^{٤}

= ٢لو$_{هـ}$ (٢س + ٣) + ٤لو$_{هـ}$ (٣س – ٥)

⇐ ف$'$(س) = ٢ × $\frac{٢}{٢س + ٣}$ + ٤ × $\frac{٣}{٣س – ٥}$ ⇐ ف$'$(٣) = $\frac{٤}{٩}$ + $\frac{١٢}{٤}$ = = ٣ + $\frac{٤}{٩}$ = $\frac{٣١}{٩}$

مثال إذا كان ف(س) قابل للإشتقاق عند س = ١ وكان نهـــا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{ف(١ + هـ)}{هـ}$ = ٥ فإن ف$'$(١) =

إذا كان ف(س) قابل للإشتقاق عند س = ١ وكان نهـــا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{ف(١ + هـ)}{هـ}$ = ٥ فإن ف$'$(١) = :

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

بالتعويض في النهاية البسط = ق(١) و المقام = صفر والنهاية موجودة وتساوي ٥

هذا يعني أن ق(١) = ٠ و بالتعويض المباشر = $\frac{٠}{٠}$

باستخدام لوبيتال : $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(١+هـ)}{هـ}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق'(١+هـ)\times ١}{١}$ = ق' (١)

لكن $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(١+هـ)}{هـ}$ = ٥ ⇐ ق' (١) = ٥ (الإجابة الفرع ب)

مثال

إذا كان ق(س) = هـ^{٢}(ك (س)) ، ك (١) = ٢ ، ك' (١) = ٣ ، هـ (٢) = ٤ ، هـ' (٢) = ٥ ، جد ق' (١) .

الحـــــل

ق'(س) = ٢ هـ (ك (س)) × [هـ (ك (س))]' = ٢ هـ (ك (س)) × هـ'(ك (س)) × ك' (س)

⇐ ق' (١) = ٢ هـ (ك (١)) × هـ'(ك (١)) × ك' (١)

= ٢ هـ (٢) × هـ' (٢) × ٣ = ٢ × ٤ × ٥ × ٣ = ١٢٠

مثال إذا كان ص = (١ + ن)^{٢} ، س = $\frac{١ - ن}{١ + ن}$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عند س = ٠

الحـــــل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{١}{\frac{د س}{د ن}}$

$\frac{د ص}{د ن} = ٢ (١ + ن)$ ، $\frac{د س}{د ن} = \frac{-١ \times (١ + ن) - (١ - ن)}{٢ (١ + ن)} = \frac{-٢}{٢ (١ + ن)}$

⇐ $\frac{د ص}{د س} = ٢ (١ + ن) \times \frac{(١ + ن)^{٢}}{-٢} = -(١ + ن)^{٣}$

عندما س = ٠ ⇐ ١ − ن = ٠ ⇐ ن = ١ ⇐ $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٠}$ = −(١ + ١)^{٣} = −٨

مثال

إذا كان ق(س) = | س^{٢} − ١ | فإن : (ق ○ ق)' (٣)

(أ) ٩٦ (ب) ٨٠ (ج) ١٦ (د) ٢٤

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

$(\text{و} \circ \text{و})'(٣) = \text{و}'(\text{و}(٣)) \times \text{و}'(٣)$ ، $\text{و}(٣) = |٣^{٢} - ١| = ٨$

عندما س = ٣ $\Leftarrow$ $\text{و}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ١$ $\Leftarrow$ $\text{و}'(\text{س}) = ٢\text{س}$ $\Leftarrow$ $\text{و}'(٣) = ٦$

$\Leftarrow$ $(\text{و} \circ \text{و})'(٣) = \text{و}'(٨) \times ٦$

عندما س = ٨ $\Leftarrow$ $\text{و}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ١$ $\Leftarrow$ $\text{و}'(\text{س}) = ٢\text{س}$ $\Leftarrow$ $\text{و}'(٨) = ١٦$

$\Leftarrow$ $(\text{و} \circ \text{و})'(٣) = ١٦ \times ٦ = ٩٦$ (الإجابة الفرع ⓐ)

مثال

إذا كان ص = (جاس + جتاس)^{٤} ، أثبت أن ص$''$ + ٤ص = ١٢جتا^{٢} ٢س .

الحـــــل

ص$'$ = ٤ (جاس + جتاس)^{٣} (جتاس – جاس)

ص$''$ = ٤ (جاس + جتاس)^{٣} (– جاس – جتاس) + (جتاس – جاس) × ١٢ (جاس + جتاس)^{٢} (جتاس – جاس)

= –٤ (جاس + جتاس)^{٤} + ١٢ (جاس + جتاس)^{٢} (جتاس – جاس)^{٢}

= –٤ ص + ١٢((جتاس + جاس) (جتاس – جاس))^{٢} = –٤ ص + ١٢(جتا^{٢}س – جا^{٢}س)^{٢}

$\Leftarrow$ ص$''$ + ٤ص = ١٢(جتا٢س)^{٢} $\Leftarrow$ ص$''$ + ٤ص = ١٢جتا^{٢} ٢س

مثال

إذا كان $\text{و}(\text{س}) = ٢\text{ظتاس}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{ا}\text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}$ وكان $(\text{هـ} \circ \text{و})'(\frac{\pi}{٤}) = -٥٠$ ، جد قيمة ا .

الحـــــل

$\text{و}'(\text{س}) = -٢\text{قتا}^{٢}\text{س}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{ا}\text{س} \times ٣(\text{س}^{٢} - ٣)^{٢} \times ٢\text{س} + \text{ا}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣} = ٦\text{ا}\text{س}^{٢} \times (\text{س}^{٢} - ٣)^{٢} + \text{ا}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}$

$(\text{هـ} \circ \text{و})'(\frac{\pi}{٤}) = \text{هـ}'(\text{و}(\frac{\pi}{٤})) \times \text{و}'(\frac{\pi}{٤})$

$\because$ $\text{و}(\frac{\pi}{٤}) = ٢\text{ظتاس}(\frac{\pi}{٤}) = ٢$ ، $\text{و}'(\frac{\pi}{٤}) = -٢ \times ٢ = -٤$

$\Leftarrow$ $(\text{هـ} \circ \text{و})'(\frac{\pi}{٤}) = \text{هـ}'(٢) \times -٤$

$\Leftarrow$ $-٤\,\text{هـ}'(٢) = -٥٠$ $\Leftarrow$ $-٤(٦\text{ا} \times ٢^{٢} \times (٢^{٢} - ٣)^{٢} + \text{ا}(٢^{٢} - ٣)^{٣}) = -٥٠$

$\Leftarrow$ $-٤(٢٤\text{ا} + \text{ا}) = -٥٠$ $\Leftarrow$ $-٤(٢٥\text{ا}) = -٥٠$ $\Leftarrow$ $-١٠٠\text{ا} = -٥٠$ ومنها $\text{ا} = \frac{١}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

١ – ٧ الإشتقاق الضمني

مثال إذا كان س = هـ(ص^{٢} + ١) ، هـ$'$(٥) = ٥ ، فإن $\frac{د ص}{د س}$ عندما ص = ٢ تساوي :

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢٠}$ (ج) $\frac{٣}{١٠}$ (د) $\frac{٦}{٥}$

الحـــل

باشتقاق الطرفين ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ × ٢ ص × (ص^{٢} + ١)$'$ هـ$'$ = ١ و عندما ص = ٢ ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ × ٤ × هـ$'$(٥) = ١

⇐ $\frac{د ص}{د س}$ × ٢٠ = ١ ومنها $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٢٠}$ (الإجابة الفرع (ب))

مثال فلسطين : ٢٠١٦ إذا كان ص = $\sqrt{س}$ ، فإن : $\frac{د}{د س}$ (ص ص$'$) تساوي :

(أ) $\frac{١}{\sqrt{س}}$ (ب) صفر (ج) ١ (د) $\frac{١}{٢س}$

الحـــل

ص$'$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ⇐ ص ص$'$ = $\sqrt{س}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ $\frac{د}{د س}$ (ص ص$'$) = صفر (الإجابة الفرع (ب))

مثال إذا كان ص = ظا (س ص) ، بين أن : $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{ص + ص^{٣}}{١ - س (١ + ص^{٢})}$

الحـــل

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = قا^{٢} (س ص) (س $\frac{د ص}{د س}$ + ص)

⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = س $\frac{د ص}{د س}$ قا^{٢} (س ص) + ص قا^{٢} (س ص) ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ – س $\frac{د ص}{د س}$ قا^{٢} (س ص) = ص قا^{٢} (س ص)

⇐ $\frac{د ص}{د س}$ (١ – س قا^{٢} (س ص)) = ص قا^{٢} (س ص)

∵ قا^{٢} (س ص) = ١ + ظا^{٢} (س ص) = ١ + ص^{٢} ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ (١ – س (١ + ص^{٢})) = ص (١ + ص^{٢})

⇐ $\frac{د ص}{د س}$ (١ – س (١ + ص^{٢})) = ص + ص^{٣} ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{ص + ص^{٣}}{١ - س (١ + ص^{٢})}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال إذا كان $\sqrt{ص} = \frac{ص}{س - ١}$ ، أثبت أن $ص'' ص = ص'^{٢} (س - ١)$.

الحـــــل

$\sqrt{ص} = \frac{ص}{س - ١} \Leftarrow$ $س - ١ = \sqrt{ص}$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س $\Leftarrow$ $١ = \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times ص' \Leftarrow ص' = ٢\sqrt{ص}$

$ص'' = ٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times ص' = \frac{ص'}{\sqrt{ص}} \Leftarrow ص'' = ص' \times \frac{س - ١}{ص} \Leftarrow ص'' ص = ص'^{٢} (س - ١)$.

مثال إذا كانت العلاقة بين السرعة ع والمسافة ف هي $ع = ٤ف^{٢} - ٦ف$ ، جد التسارع عندما $ف = ٢$

(أ) ٦٤ (ب) ٢٤ (ج) ٣٢ (د) ٤٠

الحـــــل

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن $\Leftarrow$ $\frac{د ع}{د ن} = ٨ف \times \frac{د ف}{د ن} - ٦ \frac{د ف}{د ن} \Leftarrow ت = ٨ ف ع - ٦ ع$

وعندما $ف = ٢ \Leftarrow ع = ٤ \times ٢^{٢} - ٦ \times ٢ = ٤$

$\Leftarrow ت = ٨ \times ٢ \times ٤ - ٦ \times ٤ = ٦٤ - ٢٤ = ٤٠$ (الإجابة الفرع (د))

مثال إذا كان $ص = ع^{٣} + ٢ع$ ، $\frac{د س}{د ع} = ٤ع$ ، جد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند $ع = ١$

الحـــــل

$\frac{د س}{د ع} = ٤ع \Leftarrow \frac{د ع}{د س} = \frac{١}{٤ع}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{١}{٤ع} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = (٣ع^{٢} + ٢) \times \frac{١}{٤ع} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{٤}ع + \frac{١}{٢ع}$

وبالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

$\Leftarrow \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = (\frac{٣}{٤} \times \frac{د ع}{د س}) - (\frac{٢}{٤ع^{٢}} \times \frac{د ع}{د س})$ وعندما $ع = ١ \Leftarrow$ فإن $\frac{د ع}{د س} = \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = (\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٤}) - (\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}) = \frac{٣}{١٦} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال إذا كان ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ أثبت أن : س ص$''$ + ٢ص$'$ + س ص = صفر

الحـــــل

ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ ⇐ س ص = جاس بالإشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى س

س ص$'$ + ص = جتاس بالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س

س ص$''$ + ص$'$ + ص$'$ = – جاس لكن س ص = جاس

⇐ س ص$''$ + ٢ص$'$ = – س ص ⇐ س ص$''$ + ٢ص$'$ + س ص = صفر

مثال فلسطين : ٢٠١٠ جد معادلة المماس المرسوم لمنحنى العلاقة (س – ص)^{٢} + ٢س

– ص = ٦ عند نقطة / نقاط تقاطع منحناها مع المستقيم ص – س + ١ = صفر .

الحـــــل

(س – ص)^{٢} + ٢س – ص = ٦ ، معادلة المستقيم ص = س – ١

لإيجاد نقطة / نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم نعوض عن قيمة ص من معادلة المستقيم في معادلة المنحنى :

⇐ (س – (س – ١))^{٢} + ٢س – (س – ١) = ٦ ⇐ ١ + ٢س – س + ١ = ٦

⇐ س + ٢ = ٦ ⇐ س = ٤

بالتعويض في معادلة المستقيم ⇐ ص = ٤ – ١ = ٣

⇐ نقطة التقاطع واحدة = (٤ ، ٣) وهي نقطة التماس

نشتق العلاقة بالنسبة إلى س لإيجاد ميل المماس عند (٤ ، ٣)

⇐ ٢ (س – ص) (١ – ص$'$) + ٢ – ص$'$ = ٠

ميل المماس عند (٤ ، ٣)

٢ (٤ – ٣) (١ – ص$'$) + ٢ – ص$'$ = ٠ ⇐ ٤ – ٣ ص$'$ = ٠ ⇐ ص$'$ = $\frac{٤}{٣}$

معادلة المماس : ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$) ⇐ ص – ٣ = $\frac{٤}{٣}$ (س – ٤)

⇐ ص – ٣ = $\frac{٤}{٣}$ س – $\frac{١٦}{٣}$ ⇐ ص = $\frac{٤}{٣}$ س – $\frac{١٦}{٣}$ + ٣ ⇐ ص = $\frac{٤}{٣}$ س – $\frac{٧}{٣}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

إذا كان ص = ﻫ(س) ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ عندما س = ١ ، $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ = ٥ عند س = ١ ، جد $\frac{د^{٢}س}{د ص^{٢}}$ عندما س = ١

الحـــــل

ص = ﻫ(س) باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ص

$\Leftarrow$ ١ = ﻫ`(س) × $\frac{د س}{د ص}$ $\Leftarrow$ $\frac{د س}{د ص}$ = $\frac{١}{ﻫ`(س)}$ وبالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى ص

$\Leftarrow$ $\frac{د^{٢}س}{د ص^{٢}}$ = $\frac{-ﻫ``(س) \times \frac{د س}{د ص}}{(ﻫ`(س))^{٢}}$

$\Leftarrow$ $\frac{د^{٢}س}{د ص^{٢}}$ عند س = ١ = $\frac{-ﻫ``(١) \times \frac{د س}{د ص}\Big|_{س=١}}{(ﻫ`(١))^{٢}}$ = $\frac{-٥ \times \frac{١}{٢}}{٢^{٢}}$ = $-\frac{٥}{٨}$

مثال

إذا كان ﻫ(س) = ٦جتا(π س) ، هـ(س) = $\sqrt{٢س + ٣}$ ، جد : $(هـ` \circ ﻫ)`(\frac{١}{٣})$

الحـــــل

ﻫ(س) = ٦جتا(π س) ، ﻫ`(س) = − ٦ π جا(π س)

هـ(س) = $\sqrt{٢س + ٣}$ ، هـ`(س) = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢س + ٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢س + ٣}}$ = $(٢س + ٣)^{-\frac{١}{٢}}$

هـ``(س) = $-\frac{١}{٢}(٢س + ٣)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢$ = $\frac{-١}{\sqrt{(٢س + ٣)^{٣}}}$

$(هـ` \circ ﻫ)`(س)$ = هـ`(ﻫ(س)) × ﻫ`(س)

$(هـ` \circ ﻫ)`(\frac{١}{٣})$ = هـ`(ﻫ($\frac{١}{٣}$)) × ﻫ`($\frac{١}{٣}$) = هـ`(٦جتا($\frac{\pi}{٣}$)) × − ٦ π جا($\frac{\pi}{٣}$)

= هـ`(٣) × − ٦ π × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = هـ`(٣) × − ٣π $\sqrt{٣}$ = $-\frac{١}{٢٧} \times -٣\sqrt{٣}\pi$ = $\frac{\pi\sqrt{٣}}{٩}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال ليكن المنحنيان س = ص^{٢} ، س ص = ك ، أثبت أن المنحنيان متعامدان عندما ٨ ك^{٢} = ١

الحـــــل

نفرض أن نقطة التعامد هي (س ، ص)

عند نقطة التعامد يكون $\sqrt{س}$ = $\frac{ك}{س}$ ⇐ س $\frac{٣}{٢}$ = ك ⇐ س = ك $\frac{٢}{٣}$

باشتقاق العلاقة الأولى بالنسبة إلى س : ١ = ٢ص ص$'$ ⇐ ميل المنحنى الأول : ص$'$ = $\frac{١}{٢ص}$

باشتقاق العلاقة الثانية بالنسبة إلى س : س ص$'$ + ص = ٠ ⇐ ميل المنحنى الثاني : ص$'$ = − $\frac{ص}{س}$

يكون المنحنيان متعامدان عندما يكون حاصل ضرب ميليهما = −١ ⇐ $\frac{١}{٢ص}$ × − $\frac{ص}{س}$ = −١

⇐ $\frac{١}{٢س}$ = ١ ⇐ ٢س = ١ وبالتعويض عن قيمة س = ك $\frac{٢}{٣}$

⇐ ٢ ك $\frac{٢}{٣}$ = ١ ⇐ وبتكعيب الطرفين ⇐ ٨ ك^{٢} = ١

مثال إذا كان ص^{٢} = $\frac{٥}{س^{٢} + ١}$ ، أثبت أن : س ص^{٣} + ٥ ص$'$ = ٠

الحـــــل

ص^{٢} = $\frac{٥}{س^{٢} + ١}$ ⇐ س^{٢} + ١ = $\frac{٥}{ص^{٢}}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

⇐ ٢س = $\frac{− ١٠ ص ص'}{ص^{٤}}$ ⇐ ٢س = $\frac{− ١٠ ص'}{ص^{٣}}$ ⇐ ٢س ص^{٣} = −١٠ ص$'$ ومنها س ص^{٣} + ٥ ص$'$ = ٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

١ – ٢ نظريتا رول والقيمة المتوسطة

مثال فلسطين : ٢٠١٦ إذا كان ف(س) = ٣ $\sqrt{س}$ – س يحقق شروط نظرية رول على الفترة [١ ، ٤] فإن قيمة جـ التي تحددها النظرية تساوي :

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{٩}{٤}$

الحـــل

ف(س) يحقق شروط نظرية رول ⇐ يوجد جـ ∈] ١ ، ٤ [حيث ف`(جـ) = ٠ ⇐ $\frac{٣}{٢\sqrt{جـ}}$ – ١ = ٠

⇐ $\frac{٣}{٢\sqrt{جـ}}$ = ١ ⇐ ٢$\sqrt{جـ}$ = ٣ ⇐ $\sqrt{جـ}$ = $\frac{٣}{٢}$ ومنها جـ = $\frac{٩}{٤}$ (الإجابة الفرع (د))

مثال

إذا كان ف(س) = ٣س^{٢} – ١٢س + ١١ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [٠ ، ٢] فإن قيمة ٢ تساوي :

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) –٤ (د) ٢

الحـــل

ف(س) يحقق شروط نظرية رول ⇐ ف(٢) = ف(٠) ⇐ ٣٢^{٢} – ١٢٢ + ١١ = ١١ ⇐ ٣٢^{٢} – ١٢٢ = ٠

⇐ ٣٢ (٢ – ٤) = ٠ ⇐ إما ٢ = ٠ (مرفوض) أو ٢ = ٤ (مقبول) (الإجابة الفرع (ب))

مثال

إذا كان ف(س) قابل للإشتقاق على ح بحيث ف(١) = –٢ ، ف`(س) ≤ ٢ ∀ س ∈ [١ ، ٦] فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يكون :

(أ) ف(٦) ≤ ٨ (ب) ف(٦) < ١٢ (جـ) ف(٦) ≥ ٥ (د) ف(٦) = ٥

الحـــل

ف(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ⇐ يوجد جـ ∈] ١ ، ٦ [حيث ف`(جـ) = $\frac{ف(٦) – ف(١)}{٥}$

∵ ف`(س) ≤ ٢ ∀ س ∈ [ ١ ، ٦ ] ، جـ ∈ ] ١ ، ٦ [ ⇐ ف`(جـ) ≤ ٢

⇐ $\frac{ف(٦) – ف(١)}{٥}$ ≤ ٢ ⇐ ف(٦) – ف(١) ≤ ١٠ وبما أن ف(١) = –٢

⇐ ف(٦) – (–٢) ≤ ١٠ ⇐ ف(٦) ≤ ٨ (الإجابة الفرع (أ))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال إذا كان ق(س) إقتران كثير حدود بحيث إن : ١ < ق`(س) < ٢ ، ق(٢) = ٣ ، أثبت باستخدام نظرية القيمة المتوسطة أن ٦ < ق(٥) < ٩

الحـــل

نطبق نظرية القيمة المتوسطة على الإقتران ق(س) في الفترة [٢ ، ٥]

∵ ق(س) متصل على [٢ ، ٥] وقابل للإشتقاق على] ٢ ، ٥ [لأنه كثير حدود

⇐ يوجد جـ ∈] ٢ ، ٥ [حيث ق`(جـ) = $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٣}$

∵ ١ < ق`(س) < ٢ ⇐ ١ < ق`(جـ) < ٢ ⇐ ١ < $\frac{ق(٥) - ق(٢)}{٣}$ < ٢

⇐ ٣ < ق(٥) − ق(٢) < ٦ لكن ق(٢) = ٣ ⇐ ٣ < ق(٥) − ٣ < ٦ ⇐ ٦ < ق(٥) < ٩

مثال

فلسطين : ٢٠١١ بين أن الإقتران هـ(س) = $\begin{cases} ٣ - س^{٢} & ، \ -١ \leq س < ١ \\ س^{٢} - ٤س + ٥ & ، \ ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [−١ ، ٢] ثم أوجد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية

الحـــل

هـ(س) متصل على الفترة [−١ ، ١ [وقابل للإشتقاق على الفترة] −١ ، ١ [لأنه كثير حدود

هـ(س) متصل على الفترة] ١ ، ٢] وقابل للإشتقاق على الفترة] ١ ، ٢ [لأنه كثير حدود

عندما س = ١ نقطة تحول

هـ(١) = ٢ ، نهـــا$_{س \to ١^{-}}$ ٣ − س^{٢} = ٢ ، نهـــا$_{س \to ١^{+}}$ س^{٢} − ٤س + ٥ = ٢

⇐ هـ(س) متصل عند س = ١ ⇐ هـ(س) متصل على [−١ ، ٢]

هـ`(س) = $\begin{cases} -٢س & ، \ -١ < س < ١ \\ ٢س - ٤ & ، \ ١ < س < ٢ \end{cases}$

∵ هـ`(١)$^{-}$ = −٢ ، هـ`(١)$^{+}$ = −٢ ⇐ هـ`(١) موجودة

⇐ هـ(س) قابل للإشتقاق على الفترة] −١ ، ٢ [⇐ هـ(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [−١ ، ٢]

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$$هـ`(س) = \begin{cases} -٢س & ، \quad -١ < س < ١ \\ ٢س - ٤ & ، \quad ١ < س < ٢ \\ -٢ & ، \quad س = ١ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad س = -١ ، ٢ \end{cases}$$

$\Leftarrow$ يوجد جـ $\in]-١ ، ٢[$ حيث $هـ`(جـ) = \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٣} = \frac{٢ - ١}{٣} = -\frac{١}{٣}$

عندما جـ $\in]-١ ، ١[$

$هـ`(جـ) = -\frac{١}{٣} \Leftarrow -٢جـ = -\frac{١}{٣} \Leftarrow$ جـ $= \frac{١}{٦}$ (مقبول) لأن $\frac{١}{٦} \in]-١ ، ١[$

عندما جـ $\in]١ ، ٢[$

$هـ`(جـ) = -\frac{١}{٣} \Leftarrow ٢جـ - ٤ = -\frac{١}{٣} \Leftarrow ٢جـ = \frac{١١}{٣} \Leftarrow$ جـ $= \frac{١١}{٦}$ (مقبول) لأن $\frac{١١}{٦} \in]١ ، ٢[$

عندما جـ $= ١$ $هـ`(جـ) = -\frac{١}{٣}$ مرفوض لأن $هـ`(١) = -٢$ $\Leftarrow$ جـ $= \frac{١}{٦}$ ، $\frac{١١}{٦}$

مثال

فلسطين : ٢٠١٣ إكمال

إذا كان $وه(س) = \begin{cases} س^٢ + س + ١ & ، \quad س \geq ١ \\ ٣س & ، \quad س < ١ \end{cases}$ متصلاً على الفترة $[-٣ ، \frac{٧}{٣}]$ بين أن وه(س) يحقق باقي شروط نظرية رول على الفترة $[-٣ ، \frac{٧}{٣}]$ ثم جد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية

الحـــــل

وه(س) متصل عندما س $\in [-٣ ، \frac{٧}{٣}]$ (معطى) ..... ①

$$وه`(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، \quad -٣ < س < ١ \\ ٣ & ، \quad ١ < س < \frac{٧}{٣} \end{cases}$$

$\because$ $وه`(١)^- = ٣$ ، $وه`(١)^+ = ٣$ $\Leftarrow$ وه`(١) موجودة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$$\Leftarrow \quad \text{ه}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ & ، \quad -٣ < \text{س} < ١ \\ ٣ & ، \quad ١ \leqslant \text{س} < \frac{٧}{٣} \\ \text{غير موجودة} & ، \quad \text{س} = -٣ \ ، \ \frac{٧}{٣} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ ه(س) قابل للإشتقاق على الفترة $]-٣ \ ، \ \frac{٧}{٣}[$ ..... ②

ه(−٣) = ٩ − ٣ + ١ = ٧ ، ه($\frac{٧}{٣}$) = ٣ × $\frac{٧}{٣}$ = ٧ $\Leftarrow$ ه(−٣) = ه($\frac{٧}{٣}$) ..... ③

من ① ، ② ، ③ $\Leftarrow$ ه(س) يحقق شروط نظرية رول على الفترة $[-٣ \ ، \ \frac{٧}{٣}]$

$\Leftarrow$ يوجد جـ ∈ $]-٣ \ ، \ \frac{٧}{٣}[$ حيث ه'(جـ) = ٠

عندما جـ ∈ $]-٣ \ ، \ ١[$

ه'(جـ) = ٠ $\Leftarrow$ ٢ جـ + ١ = ٠ $\Leftarrow$ جـ = $-\frac{١}{٢}$ (مقبول) لأن $-\frac{١}{٢}$ ∈ $]-٣ \ ، \ ١[$

عندما جـ ∈ $[١ \ ، \ \frac{٧}{٣}[$

ه'(جـ) = ٠ $\Leftarrow$ ٣ = ٠ (مستحيل) $\Leftarrow$ قيمة جـ التي تعينها النظرية = $-\frac{١}{٢}$

مثال

إذا كان ه(س) = س + $\frac{ب}{س}$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [٢ ، ٤] وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي ٢ فإن قيم ٢ ، ب على التوالي تساوي :

ⓐ ٤ ، ١ ⓑ ٤ ، ٤ ⓒ ١ ، ٤ ⓓ ٤ ، −١

الحـــل

ه(س) يحقق شروط نظرية رول ، جـ = ٢ $\Leftarrow$ ه'(٢) = ٠

ه'(س) = ١ − $\frac{ب}{س^{٢}}$ $\Leftarrow$ ١ − $\frac{ب}{٢^{٢}}$ = ٠ $\Leftarrow$ $\frac{ب}{٤}$ = ١ $\Leftarrow$ ب = ٤

أيضاً ه(٢) = ه(٤) $\Leftarrow$ ٢ + $\frac{٤}{٢}$ = ٥ $\Leftarrow$ ٢٢ + ٤ = ٢٥ $\Leftarrow$ ٢٢ − ٢٥ + ٤ = ٠

$\Leftarrow$ (٢ − ٤)(٢ − ١) = ٠ $\Leftarrow$ إما ٢ = ٤ (مرفوض) أو ٢ = ١ (مقبول) (الإجابة الفرع ⓐ)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال إذا كان ف(س) = س^{٢} ، هـ قابل للإشتقاق حيث هـ(٤) = ٠ ، هـ$'$(١) = ٠

بين أن (هـ ○ ف)(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [−٢ ، ٢] ثم أوجد قيمة / قيم جـ التي تعينها النظرية .

الحـــل

هـ(س) قابل للإشتقاق إذن متصل

ف(س) ، هـ(س) متصلين ⇐ (هـ ○ ف)(س) متصل لأنه مركب من إقترانين متصلين ..... ①

ف(س) ، هـ(س) قابلين للإشتقاق ⇐ (هـ ○ ف)(س) قابل للإشتقاق لأنه مركب من إقترانين قابلين للإشتقاق ..... ②

(هـ ○ ف)(−٢) = هـ(ف(−٢)) = هـ(٤) = ٠

(هـ ○ ف)(٢) = هـ(ف(٢)) = هـ(٤) = ٠

⇐ (هـ ○ ف)(−٢) = (هـ ○ ف)(٢) ..... ③

من ① ، ② ، ③ ⇐ (هـ ○ ف)(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [−٢ ، ٢]

⇐ يوجد جـ ∈] −٢ ، ٢ [حيث (هـ ○ ف)$'$(جـ) = ٠ ⇐ هـ$'$(ف(جـ)) × ف$'$(جـ) = ٠

وبما أن ف(جـ) = جـ^{٢} ، ف$'$(جـ) = ٢جـ

⇐ هـ$'$(جـ^{٢}) × ٢جـ = ٠ ⇐ ٢جـ = ٠ ومنها جـ = ٠

أو هـ$'$(جـ^{٢}) = ٠ لكن هـ$'$(١) = ٠ ⇐ جـ^{٢} = ١ ومنها جـ = ± ١

⇐ جـ = ٠ ، −١ ، ١

مثال فلسطين : ٢٠١٤ إكمال جد قيمة الثوابت أ ، ب ، جـ التي تجعل الإقتران

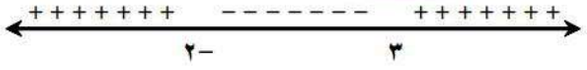
$$ف(س) = \begin{cases} |س^{٢} - س - ٦| & ، \ ٠ \leq س < ١ \\ أس + ب & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ جـ & ، \ س = ٢ \end{cases}$$

يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة [٠ ، ٢]

الحـــل

بإعادة تعريف الإقتران | س^{٢} − س − ٦ | نلاحظ أنه عندما س ∈ [٠ ، ١ [فإن

| س^{٢} − س − ٦ | = −(س^{٢} − س − ٦) = −س^{٢} + س + ٦



$$ف(س) = \begin{cases} -س^{٢} + س + ٦ & ، \ ٠ \leq س < ١ \\ أ س + ب & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ جـ & ، \ س = ٢ \end{cases}$$

، بما أن ف(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة

[٠ ، ٢] إذن ف(س) متصل على [٠ ، ٢] وقابل للإشتقاق على] ٠ ، ٢ [

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$$\text{ه}'(س) = \begin{cases} -٢س + ١ & ، \quad ٠ < س < ١ \\ أ & ، \quad ١ < س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad س = ٠ ، ٢ \end{cases}$$

① من الإشتقاق : $\text{ه}'(١)^{+} = \text{ه}'(١)^{-} \Leftarrow أ = -٢ + ١$ ومنها $أ = -١$

② من الإتصال : $\lim_{س \to ١^{+}} أ س + ب = \lim_{س \to ١^{-}} -س^{٢} + س + ٦$

$\Leftarrow -١ + ب = ٦ \Leftarrow ب = ٧$

أيضاً من الإتصال عند س = ٢ من اليسار : $\text{ه}(٢) = \lim_{س \to ٢^{-}} أ س + ب \Leftarrow ج = ٢ أ + ب \Leftarrow ج = -٢ + ٧$

$\Leftarrow ج = ٥ \Leftarrow$ قيم الثوابت $أ = -١$ ، $ب = ٧$ ، $ج = ٥$

مثال فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال

بين أن الإقتران هـ (س) = $س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}$ يحقق شروط نظرية رول على الفترة $[\frac{١}{٢} ، ٢]$ ثم أوجد قيمة / قيم ج التي تعينها النظرية

الحـــل

هـ (س) = $س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}$ متصل على الفترة $[\frac{١}{٢} ، ٢]$ لأنه مجموع متصلين وكذلك قابل للإشتقاق على الفترة $]\frac{١}{٢} ، ٢[$ لأنه مجموع قابلين للإشتقاق

هـ $(\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٤} + ٤ = \frac{١٧}{٤}$ ، هـ (٢) = $\frac{١}{٤} + ٤ = \frac{١٧}{٤}$

$\Leftarrow$ هـ (س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة $[\frac{١}{٢} ، ٢] \Leftarrow$ يوجد ج $\ni]\frac{١}{٢} ، ٢[$ حيث هـ $'(ج) = ٠$

$\Leftarrow ٢ ج - \frac{٢}{ج^{٣}} = ٠ \Leftarrow ٢ ج^{٤} = ٢ \Leftarrow ج^{٤} = ١ \Leftarrow ج = ١$ (ج = −١ مرفوضة)

مثال إذا كان ه ، هـ متصلين على الفترة [٢ ، ٣] وقابلين للإشتقاق على الفترة] ٢ ، ٣ [وكان ه(٢) = ٣ هـ (٢) = ٦ ، ه(٣) = ٤ هـ (٣) = ٨ ، بين أن : ه$'(ج)$ + هـ $'(ج) = ٢$.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

ق(س) ، هـ(س) يحققان شروط نظرية القيمة المتوسطة

⇐ يوجد جـ ∈]٢ ، ٣[حيث ق´(جـ) = ق(٣) − ق(٢) = ٨ − ٦ = ٢ ..... ①

كذلك يوجد جـ ∈]٢ ، ٣[حيث هـ´(جـ) = هـ(٣) − هـ(٢)

لكن هـ(٣) = ٢ ، هـ(٢) = ٢ ⇐ هـ´(جـ) = ٢ − ٢ = ٠ ..... ②

من ① ، ② ⇐ ق´(جـ) + هـ´(جـ) = ٢ + ٠ = ٢

مثال

إذا كان ق ، ل إقترانين متصلين على الفترة [أ ، ب] وقابلين للإشتقاق على الفترة] أ ، ب [وكان ق(أ) = ل(أ) ، ق(ب) = ل(ب) ، فأثبت وجود عدد واحد على الأقل جـ ∈] أ ، ب [بحيث إن : ق´(جـ) = ل´(جـ) .

الحـــــل

بتطبيق نظرية رول على الإقتران هـ(س) = ق(س) − ل(س)

هـ(س) متصل على الفترة [أ ، ب] لأنه ناتج طرح متصلين

هـ(س) قابل للإشتقاق على الفترة] أ ، ب [لأنه ناتج طرح مشتقين

هـ(أ) = ق(أ) − ل(أ) = ٠ ، هـ(ب) = ق(ب) − ل(ب) = ٠ ⇐ هـ(أ) = هـ(ب)

⇐ هـ(س) يحقق شروط نظرية رول على الفترة [أ ، ب]

⇐ يوجد جـ ∈] أ ، ب [حيث هـ´(جـ) = ٠ لكن : هـ´(جـ) = ق´(جـ) − ل´(جـ)

⇐ ق´(جـ) − ل´(جـ) = ٠ ⇐ ق´(جـ) = ل´(جـ)

مثال إذا كان ق(س) = ٢س(س − ٣)^{ن} حيث ن > ١ يحقق شروط نظرية رول على الفترة [٠ ، ٣]

وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية = $\frac{٣}{٤}$ جد قيمة ن

الحـــــل

ق(س) يحقق شروط نظرية رول ، جـ = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ ق´($\frac{٣}{٤}$) = ٠

ق´(س) = ٢ن س(س − ٣)$^{ن-١}$ + ٢(س − ٣)^{ن} ⇐ ٢ن $\frac{٣}{٤}$($\frac{٣}{٤}$ − ٣)$^{ن-١}$ + ٢($\frac{٣}{٤}$ − ٣)^{ن} = ٠

⇐ ٢ن $\frac{٣}{٤}$(−$\frac{٩}{٤}$)$^{ن-١}$ + ٢(−$\frac{٩}{٤}$)^{ن} = ٠ ⇐ ٢(−$\frac{٩}{٤}$)$^{ن-١}$($\frac{٣}{٤}$ ن − $\frac{٩}{٤}$) = ٠

إما (−$\frac{٩}{٤}$)$^{ن-١}$ = ٠ (وهذا مستحيل)

أو $\frac{٣}{٤}$ ن − $\frac{٩}{٤}$ = ٠ ⇐ $\frac{٣}{٤}$ ن = $\frac{٩}{٤}$ ⇐ ن = ٣ (مقبول)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال إذا كان ه(س) اقتران كثير حدود وكان ه(أ) = ه(ب) = ه(جـ) حيث أ < جـ < ب فأثبت وجود عدد واحد على الأقل د ∈] أ ، ب [بحيث ه ″(د) = ٠

الحـــل

بتطبيق نظرية رول على ه(س) في الفترة [أ ، ب]

ه(س) متصل على الفترة [أ ، ب] وقابل للإشتقاق على] أ ، ب [لأنه كثير حدود وكذلك ه(أ) = ه(ب)

⇐ حسب نظرية رول ⇐ يوجد ك ∈] أ ، ب [حيث ه َ(ك) = ٠

بتطبيق نظرية رول على ه(س) في الفترة [جـ ، ب]

ه(س) متصل على الفترة [جـ ، ب] وقابل للإشتقاق على] جـ ، ب [لأنه كثير حدود وكذلك ه(جـ) = ه(ب)

⇐ حسب نظرية رول ⇐ يوجد ل ∈] جـ ، ب [حيث ه َ(ل) = ٠

بتطبيق نظرية رول على ه َ(س) في الفترة [ك ، ل]

ه َ(س) متصل على الفترة [ك ، ل] وقابل للإشتقاق على] ك ، ل [لأنه كثير حدود وكذلك ه َ(ك) = ه َ(ل) = ٠

⇐ حسب نظرية رول ⇐ يوجد د ∈] ك ، ل [حيث ه ″(د) = ٠

∵ أ < ك < جـ < ل < ب بمعنى أن الفترة] ك ، ل [فترة جزئية من الفترة] أ ، ب [

⇐ يوجد د ∈] أ ، ب [حيث ه ″(د) = ٠

٢ – ٢ النقط الحرجة والإقترانات المتزايدة والمتناقصة

مثال

فلسطين : ٢٠١٢

إذا كان ه(س) معرفاً على ح وكان ه َ(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ فإن عدد النقاط الحرجة للإقتران ه يساوي :

(أ) ٠ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

الحـــل

(١) ه َ(س) = ٠ عندما س^{٢} + ٢س = ٠ ⇐ س (س + ٢) = ٠ ومنها س = ٠ أو س = –٢

(٢) ه َ(س) غير موجودة عند أصفار المقام ولا يوجد أصفار مقام

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ه(س) هي { ٠ ، ٢ } عددها ٢ (الإجابة الفرع (ب))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال الإقتران هـ(س) = $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٢ ، ٣ [له نقاط حرجة عند س = :

(أ) { ٠ ، ٣ } (ب) { −٢ ، −٣ } (ج) { ٠ ، ٦ ، ٣ ، −٢ } (د) { ٠ ، −٢ }

الحـــل

مجال الإقتران هـ(س) هو س ∈ [−٢ ، ٣ [، هـَ(س) = $\frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}}} = \frac{-س}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$

(١) هـَ(س) = ٠ ⇐ −س = ٠ ومنها س = ٠ (مقبولة لأنها تنتمي للمجال)

(٢) هـَ(س) غير معرفة عند أطراف الفترة وأصفار المقام وأطراف فترة المجال هي النقطة س = −٢ فقط

عندما ٣٦ − $س^{٢}$ = ٠ ⇐ $س^{٢}$ = ٣٦ ومنها س = ± ٦ (−٦ مرفوضة ، ٦ مرفوضة)

⇐ النقاط الحرجة للإقتران هـ(س) هي { ٠ ، −٢ } (الإجابة الفرع (د))

مثال إذا كان هـ(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة فإن أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للإقتران هـ(س) على الفترة [أ ، ب] يساوي :

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

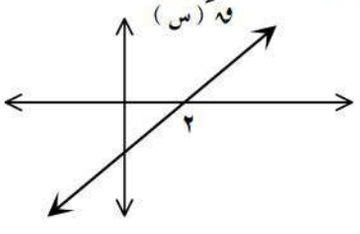
الحـــل

أكبر عدد ممكن من النقاط الحرجة للإقتران هـ(س) على الفترة [أ ، ب]

هو أكبر عدد ممكن من أصفار هـَ(س) وهو إقتران من الدرجة الثالثة بالإضافة إلى أطراف الفترة لأن هـَ(س) غير موجودة عندها

إذن أكبر عدد ممكن للنقاط الحرجة = ٣ + ٢ = ٥ (الإجابة الفرع (ج))

مثال



إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى هـَ(س) للإقتران كثير الحدود هـ(س) فإن منحنى هـ(س) يكون متزايد في الفترة :

(أ)] −∞ ، ∞ [(ب)] −∞ ، ٢ [(ج)] ٠ ، ∞ [(د)] ٢ ، ∞ [

الحـــل

الشكل المجاور يمثل منحنى هـَ(س) ⇐ لإيجاد فترات التزايد والتناقص ننظر للأجزاء أعلى وأسفل محور السينات

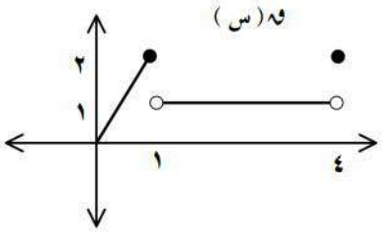
نجد أن منحنى هـَ(س) فوق محور السينات في الفترة [٢ ، ∞ [

⇐ منحنى هـ(س) يكون متزايد في الفترة [٢ ، ∞ [(الإجابة الفرع (د))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

يمثل الشكل المجاور منحنى ﻫ(س) المعرف على [٠ ، ٤] ، فإن مجموعة قيم س التي يكون لمنحنى الإقتران ﻫ(س) عندها نقاط حرجة هي :



(أ) { ٠ ، ٤ }　(ب) { ٠ } ∪ [١ ، ٤]　(ج) { ٠ ، ١ ، ٤ }　(د) { ٠ } ∪] ١ ، ٤ [

الحـــــل

الشكل المجاور يمثل منحنى ﻫ(س) لذلك قيم س التي يكون لمنحنى الإقتران ﻫ(س) عندها نقاط حرجة هي أطراف الفترات ونقط عدم الإتصال ونقط الزوايا إن وجدت وكذلك النقط التي يكون عندها ﻫ َ(س) = صفر

للتوضيح :

النقاط س = ٠ ، س = ٤ أطراف فترات

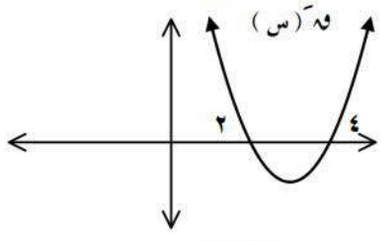
النقاط س = ١ ، س = ٤ نقاط إنفصال

الفترة] ١ ، ٤ [فيها ﻫ َ(س) = صفر

إذن مجموعة قيم س التي يكون للمنحنى عندها نقاط حرجة هي س ∈ { ٠ } ∪ [١ ، ٤]　(الإجابة الفرع (ب))

مثال

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ﻫ َ(س) للإقتران كثير الحدود ﻫ(س) فإن منحنى ﻫ(س) يكون متناقص في الفترة :



(أ) [– ∞ ، ٤]	(ب) [٤ ، ∞]
(ج) [٢ ، ٤]	(د) [– ∞ ، ٢] ∪ [٤ ، ∞]

الحـــــل

الشكل المجاور يمثل منحنى ﻫ َ(س)

⇐ لإيجاد فترات التزايد والتناقص ننظر للأجزاء أعلى وأسفل محور السينات

نجد أن منحنى ﻫ َ(س) أسفل محور السينات في الفترة [٢ ، ٤]

⇐ منحنى ﻫ(س) يكون متناقص في الفترة [٢ ، ٤]　(الإجابة الفرع (ج))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال فلسطين : ٢٠٠٩ إذا كان الإقتران ف(س) كثير حدود معرف على الفترة [٢ ، ٦] ويقع منحناه في الربع الأول ومتناقص على مجاله وكان الإقتران هـ (س) = ٨ – س ، بين أن الإقتران ك (س) = (ف × هـ)(س) متناقص في الفترة [٢ ، ٦]

الحـــل

هـ (س) = ٨ – س ⇐ هـ َ(س) = –١ ⇐ هـ (س) متناقص في [٢ ، ٦]

نبحث إشارة ك َ(س)

ك (س) = (ف × هـ)(س) ⇐ ك َ(س) = ف(س) × هـ َ(س) + هـ (س) × ف َ(س)

إشارة ف(س) (+) (لأنه في الربع الأول) ، إشارة هـ َ(س) (–)

إشارة هـ (س) (+) (لأن منحناه فوق محور السينات في [٢ ، ٦]) ، إشارة ف َ(س) (–) (لأن ف(س) متناقص)

إذن إشارة ك َ(س) = (+) × (–) + (+) × (–) = (–) + (–) = (–)

⇐ ك (س) متناقص في الفترة [٢ ، ٦]

٢ – ٣ القيم القصوى

مثال

عين فترات التزايد والتناقص للإقتران ف(س) = ٤س – $\frac{١}{٣}$ س^{٣} ، س ∈ [–٣ ، ٣] ثم أوجد القيم القصوى للإقتران .

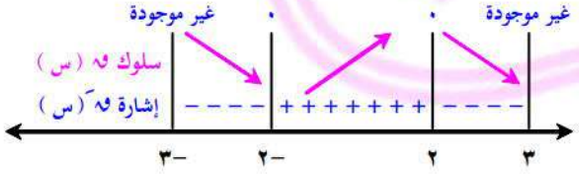
الحـــل

ف(س) متصل على الفترة [–٣ ، ٣] ، ف َ(س) = ٤ – س^{٢}

① ف َ(س) = ٠ ⇐ ٤ – س^{٢} = ٠ ⇐ س = ± ٢ (مقبولة لأنها تنتمي للمجال)

② ف َ(س) غير معرفة عند أطراف الفترة س = –٣ ، س = ٣

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ف(س) هي { ٢ ، –٢ ، ٣ ، –٣ }



من إشارة ف َ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ف(س)

متزايد على [–٢ ، ٢] ومتناقص على [–٣ ، –٢] ∪ [٢ ، ٣]

ف(–٣) = ٤(–٣) – $\frac{١}{٣}$ (–٣)^{٣} = –٣ قيمة عظمى محلية

ف(–٢) = ٤(–٢) – $\frac{١}{٣}$ (–٢)^{٣} = – $\frac{١٦}{٣}$ قيمة صغرى مطلقة ومحلية

ف(٢) = ٤(٢) – $\frac{١}{٣}$ (٢)^{٣} = $\frac{١٦}{٣}$ عظمى مطلقة ومحلية

ف(٣) = ٤(٣) – $\frac{١}{٣}$ (٣)^{٣} = ٣ قيمة عظمى محلية

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

إذا كان ف(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، π] جد :

١) مجالات التزايد والتناقص للإقتران ف(س) . ٢) القيم العظمى والصغرى للإقتران ف(س) مبيناً نوعها .

الحـــل

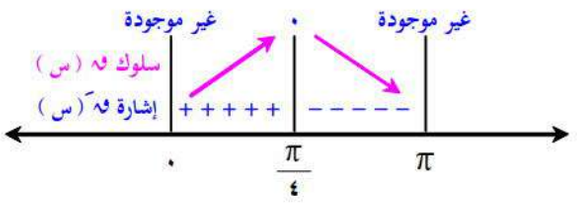
ف(س) متصل على [٠ ، π] لأنه مجموع متصلين

ف َ(س) = جتاس – جاس

① ف َ(س) = ٠ ⇐ جتاس – جاس = ٠ ⇐ ظاس = ١ ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

② ف َ(س) غير معرفة عند أطراف الفترة عندما س = ٠ ، س = π

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ف(س) هي { ٠ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، π }



من إشارة ف َ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ف(س)

متزايد على [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ومتناقص على [$\frac{\pi}{٤}$ ، π]

ف(٠) = ١ قيمة صغرى محلية ، ف($\frac{\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$ عظمى مطلقة ، ف(π) = –١ قيمة صغرى مطلقة

مثال

عين فترات التزايد والتناقص للإقتران ف(س) = س + $\frac{٩}{س + ٢}$ ، س ∈ [–١ ، ٤ [ثم أوجد القيم القصوى للإقتران .

الحـــل

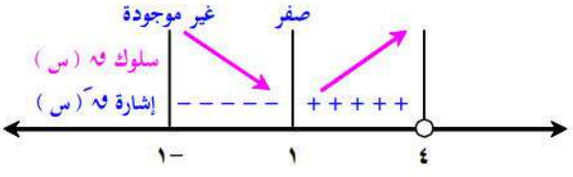
ف(س) متصل على الفترة [–١ ، ٤ [، ف َ(س) = ١ – $\frac{٩}{(س + ٢)^{٢}}$

① ف َ(س) = ٠ ⇐ (س + ٢)^{٢} = ٩ ⇐ س + ٢ = ± ٣

س + ٢ = ٣ ⇐ س = ١ (مقبولة) ، س + ٢ = –٣ ⇐ س = – ٥ (مرفوضة)

② ف َ(س) غير معرفة عند أطراف الفترة س = –١ فقط وأصفار المقام (لا يوجد)

⇐ النقاط الحرجة للإقتران ف(س) هي { ١ ، –١ }



من إشارة ف َ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ف(س)

متزايد على [١ ، ٤ [ومتناقص على [–١ ، ١]

ف(–١) = –١ + ٩ = ٨ قيمة عظمى محلية ، ف(١) = ١ + ٣ = ٤ قيمة صغرى مطلقة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

فلسطين : ٢٠١٧ ليكن ق(س) = $\sqrt{٦ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٢ ، ١] فإن القيمة الصغرى المطلقة هي:

(أ) ق(١)	(ب) ق(٠)	(ج) ق(−١)	(د) ق(−٢)

الحـــل

ق(س) متصل على الفترة [−٢ ، ١] ، ق`(س) = $\frac{-س}{\sqrt{٦ - س^{٢}}}$

(١) ق`(س) = ٠ ⇐ −س = ٠ ومنها س = ٠ (مقبولة لأنها تنتمي للمجال)

(٢) ق`(س) غير معرفة عند أطراف الفترة وأصفار المقام

أطراف فترة المجال هما س = −٢ ، س = ١

عندما ٦ − س^{٢} = ٠ ⇐ س^{٢} = ٣٦ ومنها س = ± $\sqrt{٦}$ (كلاهما مرفوض)

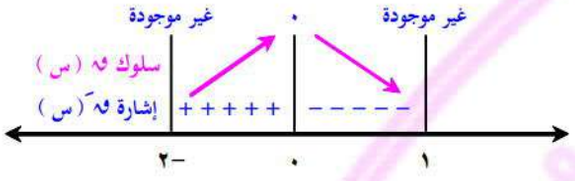
⇐ النقاط الحرجة للإقتران ق(س) هي { −٢ ، ٠ ، ١ }

من إشارة ق`(س) في الشكل المجاور يوجد

عند س = −٢ ، س = ١ قيم صغرى

ق(−٢) = $\sqrt{٢}$ قيمة صغرى مطلقة

ق(١) = $\sqrt{٥}$ قيمة صغرى محلية



(الإجابة الفرع (د))

٢ – ٤ التقعر ونقط الإنعطاف

مثال

إذا كان ق`(س) كثير حدود متزايد على الفترة س > ٠ ، وكان ق`(١) = ٠ ، ق(س) يمر بالنقطة (١ ، ٥) فإن ق(س) له قيمة محلية :

(أ) صغرى = ٥ (ب) عظمى = ٥ (ج) صغرى = ١ (د) عظمى = ١

الحـــل

ق`(س) كثير حدود متزايد على الفترة س > ٠ ⇐ ق``(س) > ٠ في هذه الفترة ⇐ ق``(١) > ٠

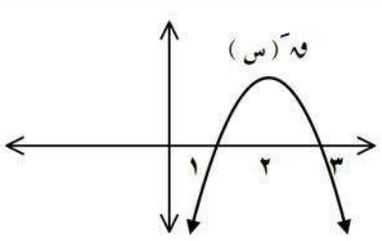
∴ ق`(١) = ٠ أي أن س = ١ نقطة حرجة

⇐ حسب اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى ق(١) = ٥ قيمة صغرى محلية (الإجابة الفرع (أ))

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال

معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل $\text{ه}'(\text{س})$ جد :



١) فترات التزايد والتناقص لمنحنى $\text{ه}(\text{س})$

٢) القيم القصوى لمنحنى $\text{ه}(\text{س})$

٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى $\text{ه}(\text{س})$ و نقط الإنعطاف (إن وجدت)

الحـــــل

الشكل المجاور يمثل $\text{ه}'(\text{س})$

١) لاحظ أن منحنى $\text{ه}'(\text{س})$ فوق محور السينات في الفترة $[\ ١\ ،\ ٣\ ]$ وتحت محور السينات في $[\ -\infty\ ،\ ١\ ]$ وكذلك $[\ ٣\ ،\ \infty\ [$

إذن $\text{ه}(\text{س})$ متزايد في $[\ ١\ ،\ ٣\ ]$ ، $\text{ه}(\text{س})$ متناقص في $[\ -\infty\ ،\ ١\ ]$ وكذلك $[\ ٣\ ،\ \infty\ [$

٢) القيم القصوى هي القيم التي يكون عندها $\text{ه}'(\text{س}) = ٠$ وتمثل نقاط تقاطع منحنى $\text{ه}'(\text{س})$ مع محور السينات ونلاحظ من الشكل أن منحنى $\text{ه}'(\text{س})$ يقطع محور السينات في النقاط س = ١ ، س = ٣

فتكون القيم القصوى لمنحنى الإقتران $\text{ه}(\text{س})$ هي النقاط (١ ، $\text{ه}(١)$) ، (٣ ، $\text{ه}(٣)$)

٣) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى $\text{ه}(\text{س})$ و نقاط الإنعطاف (إن وجدت)

لإيجاد فترات التقعر لأعلى وللأسفل لمنحنى $\text{ه}(\text{س})$

نجد أن : ميل $\text{ه}'(\text{س})$ على يسار س = ٢ موجب ($\text{ه}''(\text{س}) > ٠$)

و ميل $\text{ه}'(\text{س})$ على يمين س = ٢ سالب ($\text{ه}''(\text{س}) < ٠$)

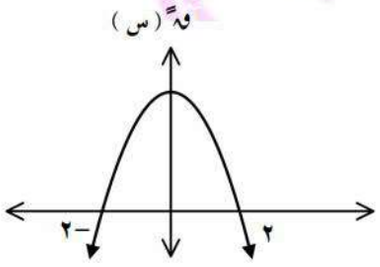
$\Leftarrow$ $\text{ه}(\text{س})$ مقعر للأعلى في الفترة $[\ -\infty\ ،\ ٢\ ]$ ، $\text{ه}(\text{س})$ مقعر للأسفل في الفترة $[\ ٢\ ،\ \infty\ [$

لإيجاد نقاط الإنعطاف من الشكل نلاحظ أن عند س = ٢ يكون $\text{ه}''(٢) = ٠$

كذلك $\text{ه}(\text{س})$ يغير إتجاه تقعره حول هذه النقطة وبالتالي تكون (٢ ، $\text{ه}(٢)$) نقطة إنعطاف

مثال

الشكل المجاور يمثل منحنى $\text{ه}''(\text{س})$ للإقتران $\text{ه}(\text{س})$ المتصل على ح ، إذا علمت أن $\text{ه}'(-١) = \text{ه}'(٦) = ٠$ جد :



١) نقاط القيم القصوى المحلية للإقتران $\text{ه}(\text{س})$.

٢) فترات التزايد والتناقص للإقتران $\text{ه}(\text{س})$.

الحـــــل

$\text{ه}'(-١) = \text{ه}'(٦) = ٠$ $\Leftarrow$ س = −١ ، س = ٦ نقاط حرجة

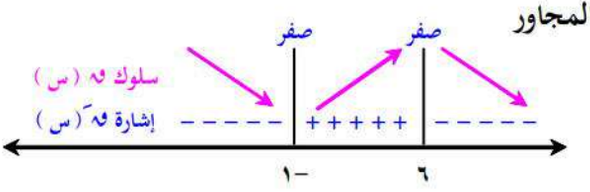
من الشكل المعطى :

$\text{ه}''(٦) < ٠$ $\Leftarrow$ حسب إختبار المشتقة الثانية (٦ ، $\text{ه}(٦)$) قيمة عظمى محلية

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$هـ'(-١) > ٠ \Leftarrow$ حسب إختبار المشتقة الثانية $(-١ ، هـ(-١))$ قيمة صغرى محلية

لإيجاد فترات التزايد والتناقص نمثل القيم العظمى والصغرى كما في الشكل المجاور



وبناءً عليه يكون منحنى هـ (س)

متزايد على $[-١ ، ٦]$

ومتناقص على $]-\infty ، -١[$ وكذلك $]٦ ، \infty[$

مثال

فلسطين : ٢٠١٧ دور ثاني

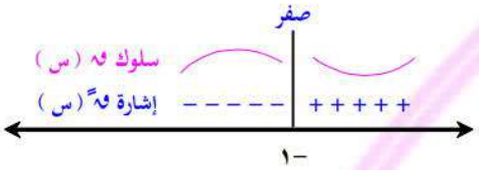
إذا كان $هـ(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} + س^{٢} - ٢س$ فإن منحنى هـ (س) يقع فوق جميع مماساته في الفترة :

(أ) $[-١ ، \infty[$ (ب) $]١ ، \infty[$ (ج) $]-\infty ، -١[$ (د) $]-\infty ، ١[$

الحـــــل

هـ (س) يقع فوق جميع مماساته يعني مقعر للأعلى

هـ (س) متصل على ح لأنه كثير حدود



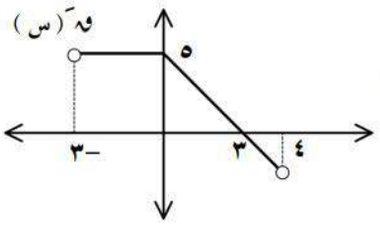
$هـ'(س) = س^{٢} + ٢س - ٢$ $هـ'(س) = ٢س + ٢ = ٠ \Leftarrow$ $س = -١$

من إشارة هـ'(س) في الشكل المجاور يكون منحنى هـ (س) مقعر للأعلى في الفترة $[-١ ، \infty[$ (الإجابة الفرع (أ))

مثال

فلسطين : ٢٠١٧

الشكل المجاور يمثل منحنى هـ'(س) على الفترة $[-٣ ، ٤]$ فإن هـ (س) يكون :



(أ) مقعر للأسفل على $[٠ ، ٤]$

(ب) مقعر للأسفل على $[-٣ ، ٣]$

(ج) متناقصاً على $[٠ ، ٤]$

(د) متناقصاً على $[٠ ، ٣]$

الحـــــل

بما أن المنحنى يمثل هـ'(س) نركز في الشكل على ميل هـ'(س) والذي يبين إشارة هـ'(س) وبالتالي يحدد إتجاه التقعر

في الفترة $[٠ ، ٤]$ نلاحظ أن ميل هـ'(س) سالب

وهذا يعني أن إشارة هـ'(س) سالبة أي أن المنحنى مقعر للأسفل في هذه الفترة (الإجابة الفرع (أ))

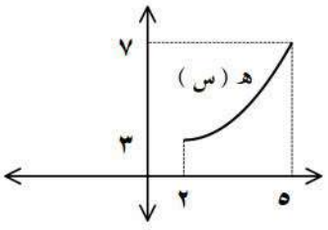
مثال

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

فلسطين : ٢٠١٦ إكمال

الشكل المجاور يمثل منحنى هـ (س) في الفترة [٢ ، ٥] ، وكان

ﻫ(س) = س هـ (س) بين أن ﻫ(س) مقعر للأعلى في الفترة [٢ ، ٥]



الحـــــل

ﻫ َ(س) = س هـ َ(س) + هـ (س) ، ﻫ ً(س) = س × هـ ً(س) + ٢هـ َ(س)

إشارة س في [٢ ، ٥] (+)

إشارة هـ ً(س) (+) (لأن منحنى هـ (س) مقعر للأعلى في [٢ ، ٥])

إشارة هـ َ(س) (+) في [٢ ، ٥] (لأن ميل هـ (س) = هـ َ(س) موجب في [٢ ، ٥])

إذن إشارة ﻫ ً(س) = ((+) × (+)) + (+) = (+) ⇐ ﻫ(س) مقعر للأعلى في الفترة [٢ ، ٥]

مثال للإقتران ﻫ(س) = جا٢س – جتا٢س ، س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] جد :

١) القيم العظمى والصغرى المحلية

٢) مجالات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الإنعطاف إن وجدت ٣) زاوية الإنعطاف .

الحـــــل

ﻫ(س) متصل على [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] لأنه حاصل طرح متصلين

ﻫ َ(س) = ٢جاس جتاس + ٢جا٢س = جا٢س + ٢ جا٢س = ٣جا٢س

① ﻫ َ(س) = ٠

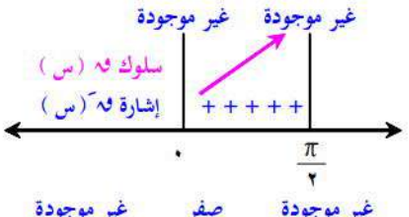
⇐ ٣جا٢س = ٠ ⇐ ٢س = ٠ ومنها س = ٠ أو ٢س = π ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ (كلاهما مرفوض لأنهما طرفي فترة)

② ﻫ َ(س) غير موجودة عند أطراف الفترة عندما س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

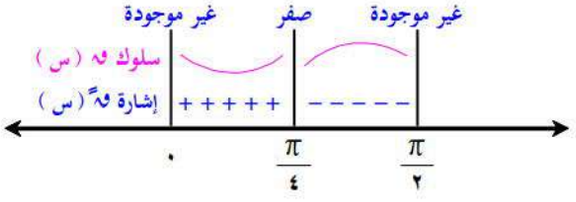
⇐ النقاط الحرجة للإقتران ﻫ(س) هي { ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ }

من إشارة ﻫ َ(س) في الشكل المجاور يكون منحنى ﻫ(س)

ﻫ(٠) = –١ قيمة صغرى مطلقة



ﻫ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢ قيمة عظمى مطلقة



ﻫ ً(س) = ٦جتا٢س

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$هـ'(س) = ٠ \Leftarrow ٦جتا٢س = ٠$

$\Leftarrow ٢س = \frac{\pi}{٢}$ ومنها $س = \frac{\pi}{٤}$ (مقبول)

$هـ'(س)$ غير موجودة عند أطراف الفترة عندما $س = ٠$ ، $س = \frac{\pi}{٢}$

من إشارة $هـ'(س)$ في الشكل المجاور يكون منحنى $هـ(س)$:

مقعر لأعلى في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ ، مقعر لأسفل في الفترة $[\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢}]$

$\because هـ'(\frac{\pi}{٤}) = ٠$ ومنحنى $هـ(س)$ يغير إتجاه تقعره حول هذه النقطة

$\Leftarrow$ نقطة الإنعطاف هي $(\frac{\pi}{٤} ، هـ(\frac{\pi}{٤}))$ وتساوي $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{١}{٢})$

زاوية الإنعطاف هـ هي التي تحقق : ظا هـ $= هـ'(\frac{\pi}{٤}) \Leftarrow$ ظا هـ $= ٣جا(\frac{\pi}{٢}) \Leftarrow$ هـ $\approx ٧١,٥٧^\circ$

مثال إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٥ - س^٢ & ، ٠ \leqslant س \leqslant ٢ \\ س^٢ - ٣ & ، ٢ < س \leqslant ٣ \end{cases}$ ، جد :

١) مجالات التزايد والتناقص للإقتران $هـ(س)$ ٢) فترات التقعر للأعلى وللأسفل

الحـــل

$هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$ إذن متصل على الفترة $[٠ ، ٢]$

$هـ'(س) = \begin{cases} -٢س & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$هـ'(٢)^+ = ٤$ ، $هـ'(٢)^- = -٤ \Leftarrow هـ'(٢)$ غير موجودة

$\Leftarrow هـ'(س) = \begin{cases} -٢س & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، ٢ < س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٠ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$

① عندما $س \in]٠ ، ٢[$

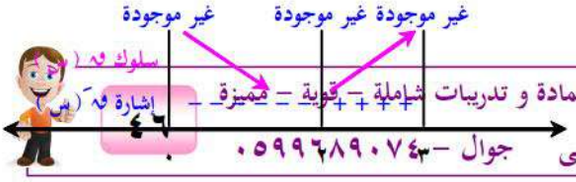
$هـ'(س) = ٠ \Leftarrow -٢س = ٠$ ومنها $س = ٠$ (مرفوض طرف فترة)

عندما $س \in]٢ ، ٣[$

$هـ'(س) = ٠ \Leftarrow ٢س = ٠$ ومنها $س = ٠$ (مرفوض)

② $هـ'(س)$ غير موجودة عند أطراف الفترة عندما $س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = ٣$

$\Leftarrow$ النقاط الحرجة للإقتران $هـ(س)$ هي $\{٠ ، ٢ ، ٣\}$

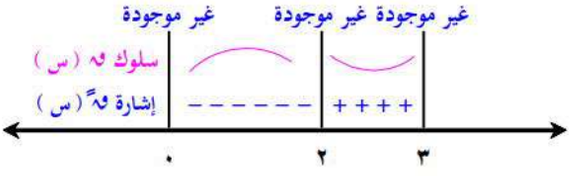


الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

من إشارة ف َ (س) في الشكل المجاور يكون منحنى ف (س)

متناقص في [٠ ، ٢] ، متزايد في [٢ ، ٣]

ف ً (س) = { −٢ ، ٠ < س < ٢ ؛ ٢ ، ٢ < س < ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ، ٢ ، ٣ }



أيضاً ف ً (س) ≠ ٠

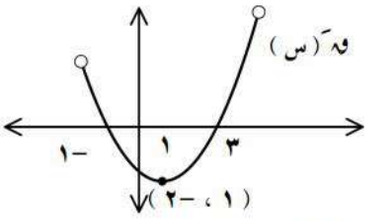
من إشارة ف ً (س) في الشكل المجاور يكون منحنى ف (س)

مقعر لأسفل في [٠ ، ٢] ، مقعر لأعلى في [٢ ، ٣]

مثال

فلسطين : ٢٠١٤

إذا كان الرسم المجاور يمثل منحنى ف َ (س) ، فإن نقطة إنعطاف منحنى ف (س) هي :



أ (١ ، −٢) ب (١ ، ف (١)) ج (٣ ، ٠) د (−١ ، ٠)

الحـــــل

بما أن المنحنى يمثل ف َ (س)

من الشكل نلاحظ أن عند س = ١ يكون ف ً (١) = ٠

كذلك ميل ف َ (س) على يمين س = ١ موجب (منحنى ف (س) مقعر للأعلى)

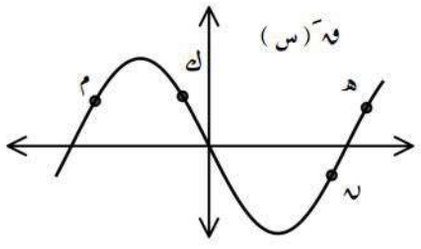
وميل ف َ (س) على يسار س = ١ سالب (منحنى ف (س) مقعر للأسفل)

⇐ ف ً (١) = ٠ ومنحنى ف (س) يغير إتجاه تقعره حول س = ١ ⇐ (١ ، ف (١)) هي نقطة إنعطاف (الإجابة الفرع ب)

مثال

جنين : ٢٠١٩ تجريبي

بالإعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ف َ (س) ، فإن النقطة التي يكون عندها ف ً (س) ، ف ً (س) سالبتين هي :



أ م	ب ك	ج هـ	د ن

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل

بما أن المنحنى يمثل قـَ (س) نركز على ميل قـَ (س) والذي يمثل قـً (س) ونركز على التقعر والذي يمثل قـً (س)

وبتفحص النقاط نجد أن :

عند النقطة ك يكون الميل وهو قـً (س) سالب والمنحنى مقعر للأسفل أي قـً (س) أيضاً سالب (الإجابة الفرع ب)

مثال

إذا كانت معادلة المماس لمنحنى قـ (س) الكثير الحدود عند نقطة الإنعطاف (٢ ، ١) هي ص = ٤ – ٢س

فإن (قـ × قـَ) َ (٢) تساوي :

أ) صفر ب) –٤ ج) ٤ د) ٥

الحـــــل

(٢ ، ١) نقطة إنعطاف ⇐ قـ (٢) = ١ ، قـً (٢) = ٠

ميل المماس = –٢ (معامل س) ⇐ قـَ (٢) = –٢

(قـ × قـَ) َ (٢) = قـ (٢) × قـً (٢) + قـَ (٢) × قـَ (٢) = ١ × ٠ + –٢ × –٢ = ٤ (الإجابة الفرع ج)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

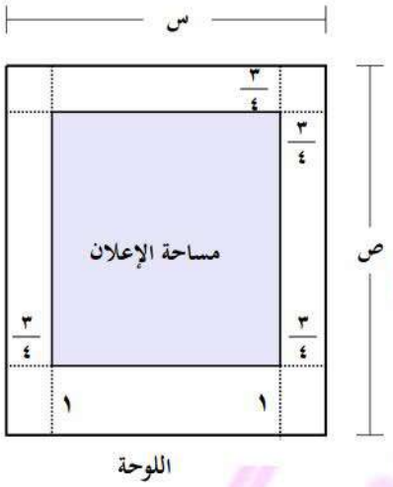
٢ – ٥ تطبيقات عملية على القيم القصوى

مثال لوحة من الورق مستطيلة الشكل محيطها ٢٤ متراً ، يراد عمل إعلان على أكبر مساحة منها بشرط أن يترك هامشاً في أسفلها عرضه متراً واحداً وثلاثة هوامش في جهاتها الثلاثة الباقية عرض كل منها $\frac{٣}{٤}$ متراً . احسب طول بعدي اللوحة .

الحـــــل

نفرض أن عرض اللوحة (س) متر وطولها = (ص) متر

مساحة الإعلان م = طول الإعلان × عرض الإعلان



$\Leftarrow$ م = (ص $-\frac{٧}{٤}$) (س $-\frac{٦}{٤}$) (إقتران الهدف)

محيط اللوحة = ٢ س + ٢ ص = ٢٤ متر

$\Leftarrow$ س + ص = ١٢ (علاقة مساعدة)

$\Leftarrow$ ص = ١٢ – س وبالتعويض عن قيمة ص في المساحة

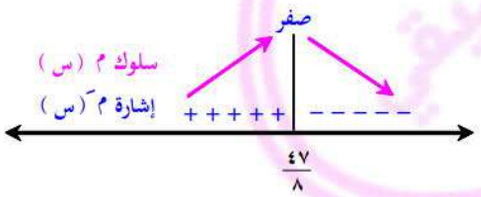
$\Leftarrow$ م = (١٢ – س $-\frac{٧}{٤}$) (س $-\frac{٦}{٤}$)

$\Leftarrow$ م = ($\frac{٤١}{٤}$ – س) (س $-\frac{٣}{٢}$)

م = ($\frac{٤١}{٤}$ س $-\frac{١٢٣}{٨}$ – س^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ س) = – س^{٢} + $\frac{٤٧}{٤}$ س – $\frac{١٢٣}{٨}$

م$'$ = –٢س + $\frac{٤٧}{٤}$

م$'$ = ٠ $\Leftarrow$ –٢س + $\frac{٤٧}{٤}$ = ٠ ومنها س = $\frac{٤٧}{٨}$

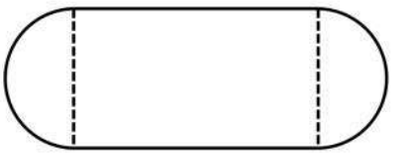


من إشارة م$'$ في الشكل المجاور

نجد أن أكبر مساحة للوحة تكون عندما س = $\frac{٤٧}{٨}$ متر

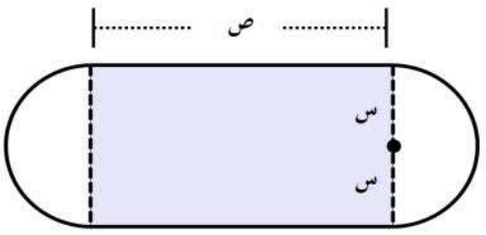
البعد الآخر ص = ١٢ – س = $\frac{٩٦}{٨}$ – $\frac{٤٧}{٨}$ = $\frac{٤٩}{٨}$ متر

مثال يراد إقامة سياج حول قطعة أرض على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة كما في الشكل المجاور ، فإذا كان تكلفة تركيب المتر الواحد من السياج على الجانبين المستقيمين ٤ دنانير وعلى الأجزاء المنحنية ٦ دنانير جد أكبر مساحة ممكنة لقطعة الأرض التي يمكن إحاطتها بسياج تكلفته ٤٠٠ دينار



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

الحـــــل



نفرض أن عرض المستطيل = (٢س) سم وطوله = (ص) سم

مساحة قطعة الأرض م = مساحة نصفي الدائرة + مساحة المستطيل

$\Leftarrow$ م = π س^{٢} + ٢س ص (إقتران الهدف)

تكلفة الجانبين المستقيمين = ٤ (٢ص) دينار = ٨ص دينار

تكلفة الأجزاء المنحنية = ٦ (π٢ س) دينار = π١٢ س دينار

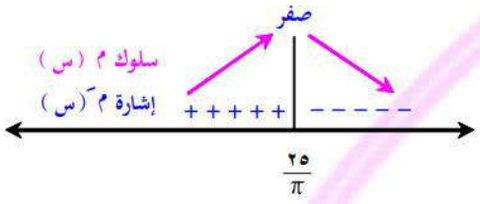
التكلفة الكلية ت = ٨ص + π١٢ س = ٤٠٠ (علاقة مساعدة)

$\Leftarrow$ ٢ص + π٣ س = ١٠٠

$\Leftarrow$ ٢ص = ١٠٠ – π٣ س وبالتعويض عن قيمة ٢ص في المساحة

$\Leftarrow$ م = π س^{٢} + س (١٠٠ – π٣ س) = π س^{٢} + ١٠٠س – π٣ س^{٢} = ١٠٠س – π٢ س^{٢}

م$'$ = ١٠٠ – π٤ س



م$'$ = ٠ $\Leftarrow$ ١٠٠ – π٤ س = ٠ ومنها س = $\frac{٢٥}{\pi}$ متر

من إشارة م$'$ في الشكل المجاور

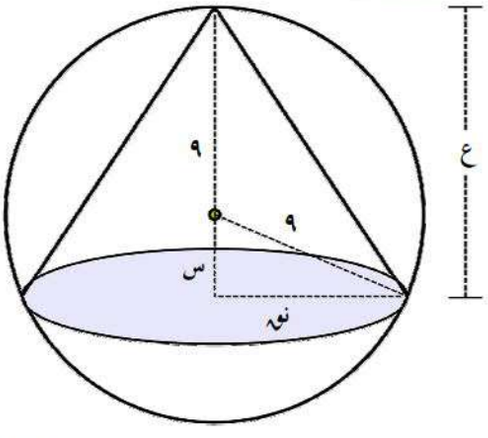
نجد أن أكبر مساحة لقطعة الأرض تكون عندما س = $\frac{٢٥}{\pi}$

بالتعويض في معادلة المساحة $\Leftarrow$ م = ١٠٠ ($\frac{٢٥}{\pi}$) – ($\frac{٢٥}{\pi}$)^{٢} π٢ = $\frac{٢٥٠٠}{\pi}$ – $\frac{١٢٥٠}{\pi}$ = $\frac{١٢٥٠}{\pi}$ م^{٢}

مثال جد أكبر حجم ممكن لمخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها ٩سم .

الحـــــل

نفرض أن نهـ نصف قطر المخروط ، ع إرتفاعه ، والضلع س كما في الشكل المجاور



حجم المخروط ح = $\frac{١}{٣}$ π نهـ^{٢} ع (إقتران الهدف)

من فيثاغورث : نهـ^{٢} = ٨١ – س^{٢} (علاقة مساعدة)

من الشكل : ع = ٩ + س (علاقة مساعدة)

بالتعويض عن نهـ^{٢} ، ع في علاقة الحجم

$\Leftarrow$ ح = $\frac{١}{٣}$ π (٨١ – س^{٢}) (٩ + س)

$\Leftarrow$ ح = $\frac{١}{٣}$ π (٧٢٩ + ٨١س – ٩س^{٢} – س^{٣})

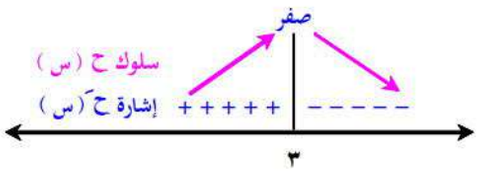
ح$'$ = $\frac{١}{٣}$ π (٨١ – ١٨س – ٣س^{٢})

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

ح َ = ٠ ⇐ ٨١ – ١٨س – ٣س^{٢} = ٠ ⇐ س^{٢} + ٦س – ٢٧ = ٠ ⇐ (س + ٩)(س – ٣) = ٠

ومنها س = ٣ (مقبول) أو س = –٩ (مرفوض)

من إشارة ح َ في الشكل المجاور



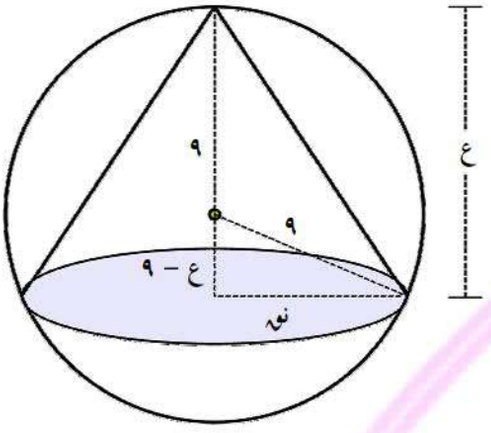
نجد أن أكبر قيمة لحجم المخروط عندما س = ٣سم

لإيجاد أكبر قيمة نعوض عن س = ٣ في حجم المخروط

⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (٧٢٩ + ٨١ (٣) – ٩ (٣)^{٢} – (٣)^{٣}) ⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (٨٦٤) = ٢٨٨ π سم^{٣}

حل آخر

نفرض أن نهـ نصف قطر المخروط ، ع إرتفاعه كما في الشكل المجاور



حجم المخروط ح = $\frac{١}{٣}$ π نهـ^{٢} ع (إقتران الهدف)

من فيثاغورث : نهـ^{٢} = ٨١ – (ع – ٩)^{٢} (علاقة مساعدة)

نهـ^{٢} = ٨١ – (ع^{٢} – ١٨ع + ٨١) = –ع^{٢} + ١٨ع

بالتعويض عن نهـ^{٢} في علاقة الحجم

⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (–ع^{٢} + ١٨ع) × ع

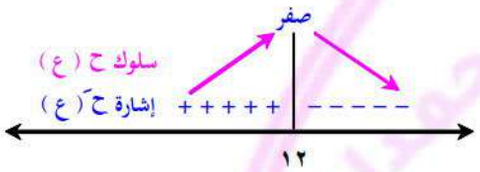
⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (–ع^{٣} + ١٨ع^{٢})

ح َ = $\frac{١}{٣}$ π (–٣ع^{٢} + ٣٦ ع)

ح َ = ٠ ⇐ –٣ع^{٢} + ٣٦ ع = ٠ ⇐ –٣ع (ع – ١٢) = ٠

ومنها ع = ١٢ (مقبول) أو ع = ٠ (مرفوض)

من إشارة ح َ في الشكل المجاور



نجد أن أكبر قيمة لحجم المخروط عندما ع = ١٢سم

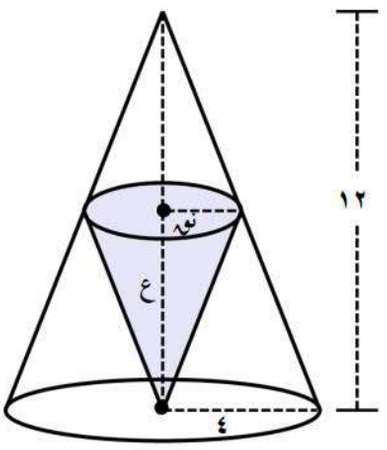
لإيجاد أكبر قيمة نعوض عن ع = ٣ في حجم المخروط

⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (–(١٢)^{٣} + ١٨ (١٢)^{٢}) ⇐ ح = $\frac{١}{٣}$ π (٨٦٤) = ٢٨٨ π سم^{٣}

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم وارتفاعه ١٢سم بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي

الحـــــل



نفرض أن نو نصف قطر المخروط الداخلي ، ع إرتفاعه كما في الشكل المجاور

حجم المخروط الداخلي ح = $\frac{١}{٣}\pi$ نو^{٢} ع (إقتران الهدف)

من التشابه : $\frac{\text{نو}}{٤} = \frac{١٢ - \text{ع}}{١٢}$ (علاقة مساعدة)

$\Leftarrow$ ٤٨ – ٤ع = ١٢ نو $\Leftarrow$ ١٢ – ع = ٣ نو

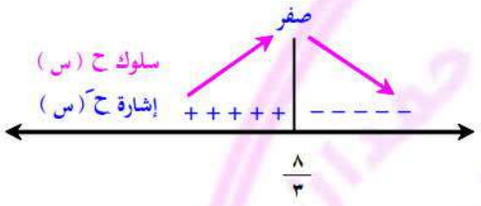
$\Leftarrow$ ع = ١٢ – ٣ نو و بالتعويض عن ع في علاقة الحجم

$\Leftarrow$ ح = $\frac{١}{٣}\pi$ نو^{٢} (١٢ – ٣ نو)

$\Leftarrow$ ح = $\frac{١}{٣}\pi$ (١٢ نو^{٢} – ٣ نو^{٣})

ح َ = $\frac{١}{٣}\pi$ (٢٤ نو – ٩ نو^{٢})

ح َ = ٠ $\Leftarrow$ ٢٤ نو – ٩ نو^{٢} = ٠ $\Leftarrow$ ٣ نو (٨ – ٣ نو) = ٠



ومنها نو = $\frac{٨}{٣}$ (مقبول) أو نو = ٠ (مرفوض)

من إشارة ح َ في الشكل المجاور

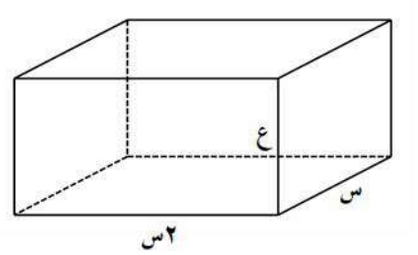
نجد أن أكبر قيمة لحجم المخروط عندما نو = $\frac{٨}{٣}$ سم

بالتعويض في حجم المخروط $\Leftarrow$ ح = $\frac{١}{٣}\pi$ (١٢ ($\frac{٨}{٣}$)^{٢} – ٣ ($\frac{٨}{٣}$)^{٣}) $\Leftarrow$ ح = $\frac{\pi\ ٢٥٦}{٢٧}$ سم^{٣}

مثال أردن : ٢٠١٢ شتوي صندوق على شكل متوازي مستطيلات قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه ، إذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم ، فجد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

الحـــــل

نفرض أن أبعاد متوازي المستطيلات العرض = س والطول = ٢س والإرتفاع = ع كما في الشكل المجاور



حجم متوازي المستطيلات ح = مساحة القاعدة × الإرتفاع

$\Leftarrow$ ح = ٢ س^{٢} × ع (إقتران الهدف)

مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته يساوي ٧٢ سم

$\Leftarrow$ ع + ٦س = ٧٢ (علاقة مساعدة)

$\Leftarrow$ ع = ٧٢ – ٦س وبالتعويض عن ع في علاقة الحجم

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

$\Leftarrow$ ح = ٢ س^{٢} × (٧٢ – ٦س) = ١٤٤ س^{٢} – ١٢ س^{٣}

ح$'$ = ٢٨٨ س – ٣٦ س^{٢}

ح$'$ = ٠ $\Leftarrow$ ٢٨٨ س – ٣٦ س^{٢} = ٠ $\Leftarrow$ ٣٦س (٨ – س) = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٨

ح$''$ = ٢٨٨ – ٧٢ س $\Leftarrow$ ح$''$ (٨) = ٢٨٨ – ٥٧٦ = – ٢٨٨ < ٠

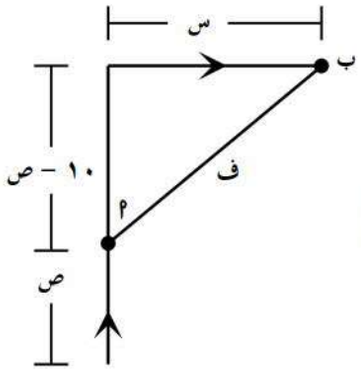
حسب إختبار المشتقة الثانية نجد أن أكبر حجم لمتوازي المستطيلات يكون عند س = ٨ سم

البعد الأول س = ٨ سم ، البعد الآخر ٢س = ٢ × ٨ = ١٦ سم ، ع = ٧٢ – ٦س = ٧٢ – ٦ (٨) = ٢٤ سم

مثال

تسير سفينة أ في اتجاه الشمال بسرعة ١٢كم/ساعة كما تسير سفينة أخرى ب في اتجاه الشرق بسرعة ٩كم/ساعة وفي لحظة ما وجدت أن ب شمالها تماماً وتبعد عنها ١٠ كيلومترات ، فأوجد الزمن الذي يمضي بعد هذه اللحظة حتى تصير المسافة بين السفينتين أقصر ما يمكن .

الحـــــل



نفرض أن السفينة أ قطعت مسافة ص للشمال و السفينة ب قطعت مسافة س للشرق

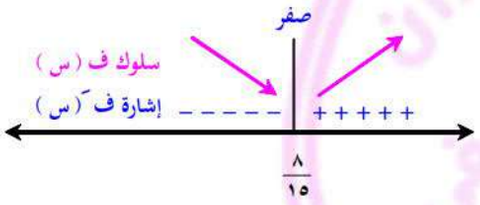
من فيثاغورث ف = $\sqrt{\text{س}^{٢} + (١٠ - \text{ص})^{٢}}$ (إقتران الهدف)

المسافة = السرعة × الزمن $\Leftarrow$ س = ٩ ن ، ص = ١٢ ن (علاقات مساعدة)

$\Leftarrow$ ف = $\sqrt{(٩\text{ن})^{٢} + (١٠ - ١٢\text{ن})^{٢}} = \sqrt{٢٢٥\text{ن}^{٢} - ٢٤٠\text{ن} + ١٠٠}$

ف$'$ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢٢٥\text{ن}^{٢} - ٢٤٠\text{ن} + ١٠٠}} \times (٤٥٠\text{ن} - ٢٤٠) = \frac{٢٢٥\text{ن} - ١٢٠}{\sqrt{٢٢٥\text{ن}^{٢} - ٢٤٠\text{ن} + ١٠٠}}$

ف$'$ = ٠ $\Leftarrow$ ٢٢٥ن – ١٢٠ = ٠ $\Leftarrow$ ن = $\frac{١٢٠}{٢٢٥} = \frac{٨}{١٥}$

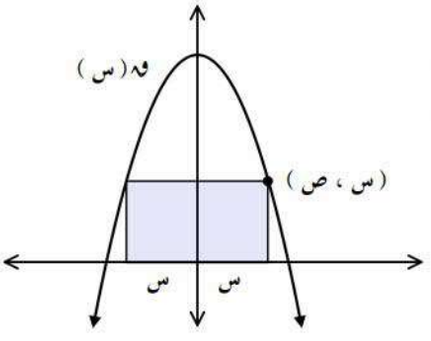


من إشارة ف$'$ في الشكل المجاور

نجد أن المسافة بين السفينتين تكون أقل ما يمكن عندما ن = $\frac{٨}{١٥}$ ساعة

مثال فلسطين : ٢٠١٣ جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يقع رأسان من رؤوسه على محور السينات والرأسان الآخران على منحنى الإقتران ق (س) = ٨ – $\frac{٢}{٣}$ س^{٢}

الحـــــل



نفرض أن (س ، ص) نقطة تقاطع المستطيل مع المنحنى ق (س

مساحة المستطيل م = طول القاعدة × الإرتفاع = ٢س ص

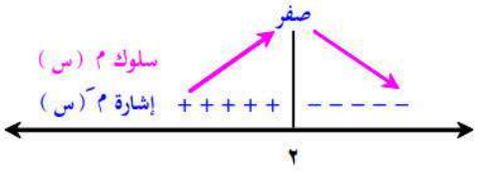
لكن ص = ق (س) = ٨ – $\frac{٢}{٣}$ س^{٢} (علاقة مساعدة)

$\Leftarrow$ م = ٢س (٨ – $\frac{٢}{٣}$ س^{٢}) = ١٦س – $\frac{٤}{٣}$ س^{٣}

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

م َ = ٠ ⇐ ١٦ – ٤ س^{٢} = ٠ ⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ± ٢ (–٢ مرفوضة)

من إشارة م َ في الشكل المجاور أكبر مساحة للمستطيل تكون عندما س = ٢ وحدة

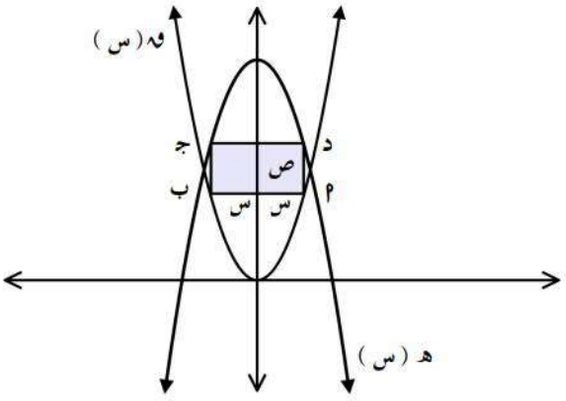


⇐ أكبر مساحة م = ١٦ (٢) – $\frac{٤}{٣}$ (٢)^{٣} = $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة .

مثال أ ب ج د مستطيل يقع داخل المنحنيين قا (س) = ٢س^{٢} ، هـ (س) = ٣٦ – س^{٢} بحيث يقع رأساه أ ، ب على منحنى قا (س) ورأساه ج ، د يقعان على منحنى هـ (س) ، جد بعدي المستطيل لتكون مساحته أكبر ما يمكن .

الحـــــل

نفرض أن أحد أبعاد المستطيل = ٢س والبعد الآخر = ص كما في الشكل المقابل



مساحة المستطيل م = طول القاعدة × الإرتفاع

م = ٢س ص (إقتران الهدف)

لكن ص = هـ (س) – قا (س) (علاقة مساعدة)

⇐ ص = ٣٦ – س^{٢} – ٢س^{٢} = ٣٦ – ٣ س^{٢}

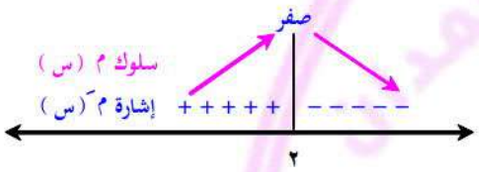
⇐ م = ٢س (٣٦ – ٣ س^{٢}) = ٧٢س – ٦ س^{٣}

م َ = ٧٢ – ١٨ س^{٢}

م َ = ٠ ⇐ ٧٢ – ١٨ س^{٢} = ٠ ⇐ ١٨ س^{٢} = ٧٢

⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ± ٢ (–٢ مرفوضة)

من إشارة م َ في الشكل المجاور



نجد أن أكبر مساحة للمستطيل تكون عندما س = ٢ وحدة طول

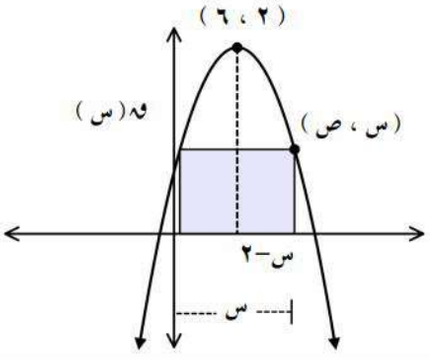
⇐ ص = ٣٦ – ٣ (٢)^{٢} = ٢٤ وحدة طول

مثال فلسطين : ٢٠٠٨ إكمال

جد بعدي المستطيل الواقع في الربع الأول والذي مساحته أكبر ما يمكن والذي تنطبق قاعدته الكبرى على محور السينات ويقع رأساه الآخران على منحنى قا (س) = ٤س – س^{٢} + ٢

الحـــــل

نفرض أن (س ، ص) نقطة تقاطع المستطيل مع المنحنى قا (س) كما في الشكل



إحداثيات نقطة الرأس للمنحنى ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، قا ($\frac{-ب}{٢أ}$)) = (٢ ، ٦)

ومحور التماثل يقسم قاعدة المستطيل إلى قسمين متساويين

بناءً عليه تكون قاعدة المستطيل = ٢ (س – ٢) = ٢س – ٤

مساحة المستطيل م = طول القاعدة × الإرتفاع

م = (٢س – ٤) × ص (إقتران الهدف)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

لكن ص = ق(س) = ٤س – س^{٢} + ٢ (علاقة مساعدة)

⇐ م = (٢س – ٤) × (٤س – س^{٢} + ٢)

= ٨ س^{٢} – ٢س^{٣} + ٤س – ١٦س + ٤ س^{٢} –٨

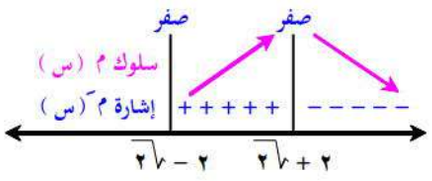
⇐ م = – ٢س^{٣} + ١٢ س^{٢} – ١٢س – ٨

م َ = – ٦س^{٢} + ٢٤ س – ١٢

م َ = ٠ ⇐ – ٦س^{٢} + ٢٤ س – ١٢ = ٠ ⇐ س^{٢} – ٤س + ٢ = ٠

⇐ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{٨}}{٢}$ = $\frac{٤ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢}$ = ٢ ± $\sqrt{٢}$

من إشارة م َ في الشكل المجاور



نجد أن أكبر مساحة للمستطيل تكون عندما س = ٢ + $\sqrt{٢}$ وحدة

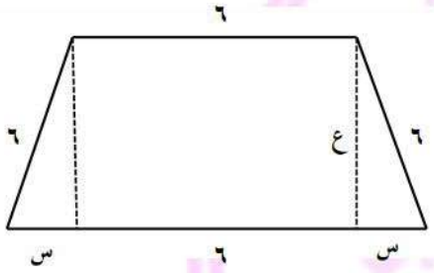
بناءً عليه تكون قاعدة المستطيل = ٢ (٢ + $\sqrt{٢}$ – ٢) = ٢$\sqrt{٢}$

البعد الآخر ص = ق(٢ + $\sqrt{٢}$) = ٤ (٢ + $\sqrt{٢}$) – (٢ + $\sqrt{٢}$)^{٢} = ٢ + ٨ + ٤$\sqrt{٢}$ – ٤ – ٢$\sqrt{٢}$ – ٢ = ٤

مثال شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية في الطول وطول كل منها يساوي ٦سم ، جد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف .

الحـــــل

نفرض ع إرتفاع شبه المنحرف ، س كما في الشكل المجاور



مساحة شبه المنحرف م = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الإرتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ (٢س + ١٢) × ع (إقتران الهدف)

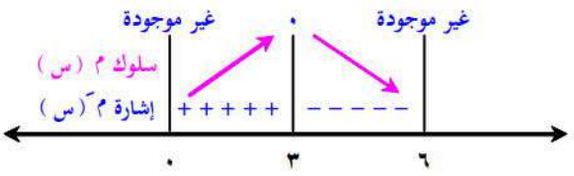
من فيثاغوث ع = $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ ، س ∈ [٠ ، ٦] (علاقة مساعدة)

⇐ م = $\frac{١}{٢}$ (٢س + ١٢) × $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ = (س + ٦) × $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

م َ = (س + ٦) × $\frac{- س}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$ + $\sqrt{٣٦ - س^{٢}}$ = $\frac{(- س^{٢} - ٦س) + (٣٦ - س^{٢})}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$ =

$\frac{- ٢س^{٢} - ٦س + ٣٦}{\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$

م َ = ٠ ⇐ – ٢س^{٢} – ٦س + ٣٦ = ٠ ⇐ س^{٢} + ٣س – ١٨ = ٠



⇐ (س + ٦) (س – ٣) = ٠

⇐ س = –٦ (مرفوض) أو س = ٣ (مقبول)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

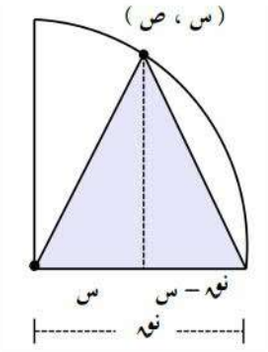
من إشارة م َ في الشكل المجاور نجد أن أكبر مساحة لشبه المنحرف تكون عندما س = ٣ وحدة

⇐ أكبر مساحة م = ٩ √ ٢٧ = ٢٧ √ ٣ وحدة مربعة

مثال رسم مثلث داخل ربع دائرة نصف قطرها نوه بحيث تنطبق قاعدة المثلث على نصف قطر الدائرة ويقع رأسه على محيطها أثبت أن أكبر مساحه لهذا المثلث تساوي $\frac{١}{٢}$ نوه٢ .

الحـــــل

معادلة ربع الدائرة : س٢ + ص٢ = نوه٢



مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الإرتفاع = $\frac{١}{٢}$ نوه × ص (إقتران الهدف)

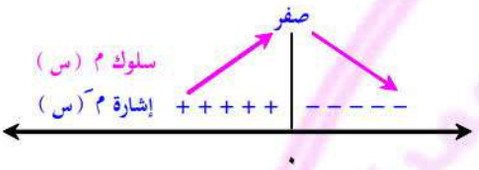
لكن ص = √ نوه٢ – س٢ (علاقة مساعدة)

⇐ م = $\frac{١}{٢}$ نوه √ نوه٢ – س٢

م َ = $\frac{١}{٢}$ نوه × $\frac{-٢س}{٢ √ نوه٢ – س٢}$ = $\frac{١}{٢}$ نوه × $\frac{-س}{√ نوه٢ – س٢}$ (نوه مقدار ثابت)

م َ = ٠ ⇐ – س = ٠ ⇐ س = ٠

من إشارة م َ في الشكل المجاور نجد أن أكبر مساحة للمثلث تكون عندما س = ٠



⇐ م = $\frac{١}{٢}$ نوه √ نوه٢ – س٢

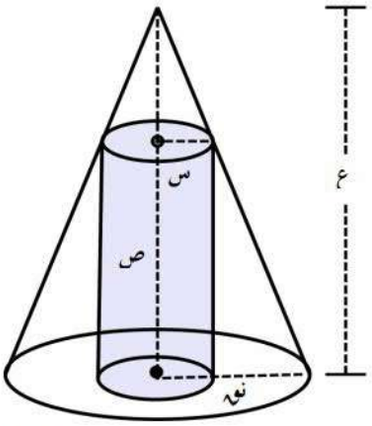
= $\frac{١}{٢}$ نوه √ نوه٢ – ٠ = $\frac{١}{٢}$ نوه × نوه = $\frac{١}{٢}$ نوه٢

مثال بين أن أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط .

الحـــــل

نفرض أن س نصف قطر الأسطوانة ، ص إرتفاعها ، ونفرض أن نوه نصف قطر المخروط ، ع إرتفاعه (نوه ، ع ثوابت)

حجم الأسطوانة الدائرية ح = π س٢ ص (إقتران الهدف)



من التشابه : $\frac{س}{نوه}$ = $\frac{ع – ص}{ع}$ (علاقة مساعدة)

⇐ ع – ص = $\frac{س ع}{نوه}$ ⇐ ص = ع – $\frac{س ع}{نوه}$ و بالتعويض عن ص في علاقة الحجم

⇐ ح = π س٢ (ع – $\frac{س ع}{نوه}$) ⇐ ح = π (ع س٢ – $\frac{ع}{نوه}$ س٣)

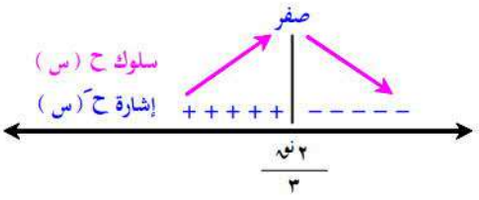
ح َ = π (٢ ع س – $\frac{٣ ع}{نوه}$ س٢) (نوه ، ع ثوابت)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

ح َ = ٠ ⇐ ٢ ع س − $\frac{٣ ع}{نوه}$ س^{٢} = ٠ ⇐ ع س (٢ − $\frac{٣س}{نوه}$) = ٠

ومنها س = ٠ (مرفوض) أو ٢ − $\frac{٣س}{نوه}$ = ٠ ⇐ س = $\frac{٢نوه}{٣}$

من إشارة ح َ في الشكل المجاور أكبر قيمة لحجم الأسطوانة عندما س = $\frac{٢نوه}{٣}$



لإيجاد أكبر قيمة نعوض عن س = $\frac{٢نوه}{٣}$ في حجم الأسطوانة

⇐ ح = π (ع ($\frac{٢نوه}{٣}$)^{٢} − $\frac{ع}{نوه}$ ($\frac{٢نوه}{٣}$)^{٣}) = π ($\frac{٢نوه}{٣}$)^{٢} (ع − $\frac{ع}{نوه}$ ($\frac{٢نوه}{٣}$))

= $\frac{٤ π نوه^{٢}}{٩}$ (ع − $\frac{٢ع}{٣}$) = $\frac{٤ π نوه^{٢}}{٩}$ × $\frac{ع}{٣}$ = $\frac{٤}{٩}$ × $\frac{١}{٣}$ π نوه^{٢} ع

⇐ ح = $\frac{٤}{٩}$ × $\frac{١}{٣}$ π نوه^{٢} ع = $\frac{٤}{٩}$ × حجم المخروط

مثال جد النقطة على منحنى قه (س) = $\sqrt{٨س}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤ ، ٢) .

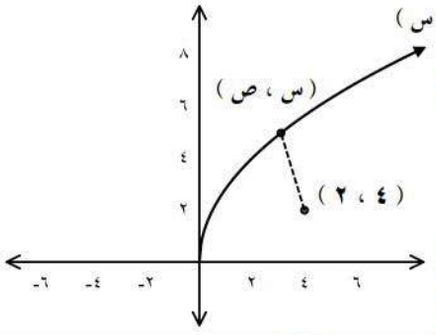
الحـــــل

نفرض أن ف المسافة بين النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى والنقطة (٤ ، ٢)

المسافة بين النقطتين ف = $\sqrt{(ص − ٢)^{٢} + (س − ٤)^{٢}}$ (إقتران الهدف)

ص = قه (س) = $\sqrt{٨س}$ (علاقة مساعدة)

⇐ ف = $\sqrt{(\sqrt{٨س} − ٢)^{٢} + (س − ٤)^{٢}}$



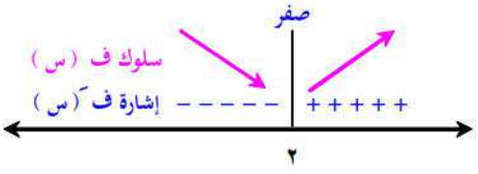
ف َ = $\frac{٢ (\sqrt{٨س} − ٢) × \frac{٨}{٢\sqrt{٨س}} + ٢ (س − ٤) × ١}{٢ \sqrt{(\sqrt{٨س} − ٢)^{٢} + (س − ٤)^{٢}}}$

ف َ = ٠ ⇐ $\frac{٨ (\sqrt{٨س} − ٢)}{\sqrt{٨س}}$ + ٢ (س − ٤) = ٠ ⇐ ٨ − ٢ س + $\frac{١٦}{\sqrt{٨س}}$ = ٠

⇐ ٢ س = $\frac{١٦}{\sqrt{٨س}}$ ⇐ ٢ س $\sqrt{٨س}$ = ١٦ ⇐ س $\sqrt{٨س}$ = ٨ بتربيع الطرفين

⇐ ٨س^{٣} = ٦٤ ⇐ س^{٣} = ٨ ⇐ س = ٢

من إشارة ف َ في الشكل المجاور نجد أن أقل مسافة بين النقطتين تكون عندما س = ٢



ص = $\sqrt{٨س}$ = $\sqrt{٨ × ٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

⇐ (٢ ، ٤) هي أقرب نقطة واقعة على المنحنى قه (س) إلى النقطة (٤ ، ٢)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b

مثال مصنع إطارات ينتج يومياً ١٠٠س إطار من النوع الممتاز ، ١٠٠ص إطار من النوع الاقل جودة حيث $ص = \frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س}$ ، $س < ٤$ ، فإذا كان مكسبه من النوع الممتاز دينارين عن كل إطار ومكسبه من النوع الأقل جودة دينار واحد عن كل إطار فأوجد عدد الإطارات من كل نوع والتي تحقق أكبر مكسب يومي للمصنع .

الحـــــل

نفرض أن المكسب اليومي م دينار

$\Leftarrow م = (٢ \times ١٠٠س) + (١ \times ١٠٠ص) = ٢٠٠س + ١٠٠ص$ (إقتران الهدف)

$\because ص = \frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س}$ (علاقة مساعدة)

$\Leftarrow م = ٢٠٠س + ١٠٠ \times \frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س} = ١٠٠ (٢س + \frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س})$

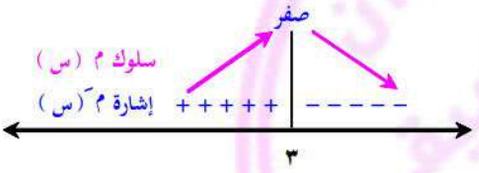
$م' = ١٠٠ (٢ + \frac{(٥ - س) \times (-٨) - (٣٢ - ٨س) \times (-١)}{(٥ - س)^{٢}})$

$= ١٠٠ (٢ + \frac{-٤٠ + ٨س + ٣٢ - ٨س}{(٥ - س)^{٢}}) = ١٠٠ (٢ - \frac{٨}{(٥ - س)^{٢}})$

$م' = ٠ \Leftarrow ٢ - \frac{٨}{(٥ - س)^{٢}} = ٠ \Leftarrow (٥ - س)^{٢} = ٤ \Leftarrow ٥ - س = \pm ٢$

ومنها س = ٧ (مرفوض) أو س = ٣ (مقبول)

من إشارة م' في الشكل المجاور



نجد أن أكبر قيمة للمكسب اليومي تكون عندما س = ٣

$\Leftarrow$ عدد الإطارات في اليوم الواحد من النوع الممتاز = ١٠٠س = ٣٠٠ إطار

عدد الإطارات في اليوم الواحد من النوع الأقل جودة = ١٠٠ص = $١٠٠ \times \frac{٣٢ - ٨س}{٥ - س}$

$= ١٠٠ \times \frac{٣٢ - ٢٤}{٥ - ٣} = ٤٠٠$ إطار

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #114705 | TRACK c5ff0b9eb9cdac6b