بسم الله الرحمن الرحيم

١٠

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيات

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

فريق التأليف:

د. تحسين المغربي (منسقًا)
أ. أحلام صلاح
أ. سرين أبو عيشة
أ. نايف الطيطي
أ. وهبة ثابت
أ. مؤيد الحنجوري

مركز المناهج

أ. قيس شبانة
د. نسرين دويكات

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/ ٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية:

الإشراف الإداري	كمال فحماوي
التصميم الفني	أمينة عاصي

التحكيم العلمي:	د. عمر ...نام
التحرير اللغوي:	أ. وفاء جيوسي
الرسومات:	أ. سالم نعيم
المتابعة للمحافظات الجنوبية:	د. سمية النخالة

الطبعة الرابعة
٢٠٢٦ م / ١٤٤٨ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس +970-2-2969377 | هاتف +970-2-2969350

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم العالي

مركز المناهج الفلسطينية

آب / ٢٠١٧

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مقدمة

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ ليكونَ امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفّذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستوياتِ الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

يتكوّن هذا الكتاب من ستة وحدات تعليمية، تناولت الوحدة الأولى منه المنطق الرياضي، والعبارات المتكافئة، أمّا الوحدة الثانية فتناولت بعمق الاقترانات ورسومها البيانية، أما الوحدة الثالثة فناقشت الدائرة كمفهوم هندسي أساسي، أما الوحدة الرابعة فتناولت الاقترانات المثلثية، فيما عرضت الوحدة الخامسة المصفوفات كتطبيق على تنظيم البيانات والتعامل معها، وعرضت الوحدة السادسة طرق العد، ونظرية ذات الحدّين.

أملُنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظّم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

فريق التأليف

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

المحتويات

الوحدة الأولى	الدرس الأول: العبارة الرياضية ونفيها	٩
	الدرس الثاني: جداول الصواب وأدوات الربط	١٣
	الدرس الثالث: أدوات الربط الشرطية	١٨
	الدرس الرابع: العبارات الرياضية المتكافئة	٢٢
	تمارين عامة (١)	٢٧
	مشروع الوحدة	٢٨
الوحدة الثانية	الدرس الأول: تمثيل الاقترانات باستخدام الانسحاب	٣١
	الدرس الثاني: تمثيل الاقترانات باستخدام الانعكاس	٣٦
	الدرس الثالث: إشارة الاقتران	٤٠
	الدرس الرابع: حل المتباينات	٤٧
	الدرس الخامس: الاقترانات متعددة القاعدة	٥٠
	الدرس السادس: اقتران القيمة المطلقة	٥٤
	الدرس السابع: اقتران أكبر عدد صحيح	٥٨
	الدرس الثامن: الاقتران الأسي	٦٣
	الدرس التاسع: الاقتران اللوغاريتمي	٦٩
	تمارين عامة (٢)	٧٥
	مشروع الوحدة	٧٨
الوحدة الثالثة	الدرس الأول: الدائرة	٨١
	الدرس الثاني: الزوايا المركزية والزوايا المحيطية	٨٦
	الدرس الثالث: الشكل الرباعي الدائري	٩٢
	تمارين عامة (٣)	٩٦
	مشروع الوحدة	٩٨

www.wepal.net SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

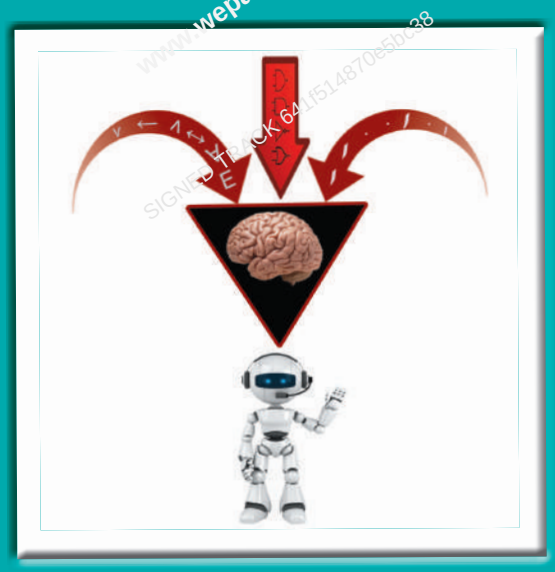
الوحدة الرابعة	الدرس الأول: الزاوية في الوضع القياسي	١٠١
	الدرس الثاني: قياس الزوايا	١٠٦
	الدرس الثالث: الاقترانات المثلثية	١١٢
	الدرس الرابع: تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً	١٢٢
	الدرس الخامس: المتطابقات والمعادلات المثلثية	١٣١
	تمارين عامة (٤)	١٣٧
	مشروع الوحدة	١٤٠
الوحدة الخامسة	الدرس الأول: المصفوفة	١٤٣
	الدرس الثاني: العمليات على المصفوفات	١٤٩
	الدرس الثالث: ضرب المصفوفات	١٥٨
	الدرس الرابع: النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية	١٦٣
	الدرس الخامس: حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر	١٦٩
	تمارين عامة (٥)	١٧٣
	مشروع الوحدة	١٧٥
الوحدة السادسة	الدرس الأول: مبدأ العد	١٧٨
	الدرس الثاني: التباديل	١٨٢
	الدرس الثالث: التوافيق	١٨٥
	الدرس الرابع: نظرية ذات الحدين	١٨٨
	تمارين عامة (٦)	١٩١
	مشروع الوحدة	١٩٣

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الوحدة

١

المنـطـق الـريـاضـي



يقول الإمام الغزالي:

«الإكراه سلاح كلِّ فقيرٍ في براهينه، فاشلٍ في إقناعه، أعْوَزه المنطق فأسعفته العصا»

أناقش هذه العبارة؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف العبارات الرياضية وجداول الصواب في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١ التعرف إلى أنواع العبارات الرياضية، وأدوات الربط بينها.

٢ التعرف إلى جداول الصواب، وتوظيفها في إثبات تكافؤ العبارات.

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أولاً: العبارة الرياضية

نتحدث ونتحاور ونتناقش في حياتنا اليومية وتعاملاتنا المختلفة بكلمات وجمل، ولعل معجم كل منّا يزخر بأمثلة لأنواع من الجمل التي نتحدث بها.

نشاط ١: أقرأ الحوار الآتي الذي دار بين الصديقين حسام ويوسف:

حسام : هل اطلعت يا يوسف على القانون الأساسي الفلسطيني؟

يوسف : لم تسنح لي الفرصة لغاية الآن للاطلاع عليه، أخبرني عن مواد هذا القانون.

حسام : ما أكبر سؤالك، يا يوسف! وما أطول إجابته! فهو بحاجة إلى مختص للإجابة عليه، ولكن سأعطيك بعض الأمثلة التي أعرفها: جاء في (المادة ٢٤) من هذا القانون، «أن التعليم حق لكل مواطن، وإلزامي حتى نهاية المرحلة الأساسية على الأقل، ومجاني في المدارس والمعاهد والمؤسسات العامة».

يوسف : وماذا جاء في هذا القانون عن العمل والحياة السياسية، يا حسام؟

حسام : جاء في (المادة ٢٥) أن العمل حق لكل مواطن، وهو واجب وشرف، وتسعى السلطة الوطنية إلى توفيره لكل قادر عليه»، كما جاء في القانون أيضاً «أن التنظيم النقابي حق وينظم القانون أحكامه، والحق في الإضراب يمارس في حدود القانون»، وجاء في (المادة ٢٦) من هذا القانون «أن للفلسطينيين حق المشاركة في الحياة السياسية أفراداً وجماعاتٍ، ولهم على وجه الخصوص الحق في تشكيل الأحزاب السياسية، والانضمام إليها، والحق في تشكيل: النقابات، والجمعيات، والاتحادات، والروابط والأندية، والمؤسسات الشعبية وَفقاً للقانون».

يوسف : لقد أثرت فضولي يا حسام للبحث عن وثيقة القانون الأساسي الفلسطيني؛ لمعرفة حقوقي من جهةٍ، وما يترتب علي من واجبات من جهةٍ أخرى في مناحي الحياة كافة.

بالرجوع إلى الحوار الذي دار بين الصديقين حسام ويوسف، أعطي مثالاً على:

١ شبه جملة ٢ جملة استفهامية ٣ جملة تعجبية

٤ جملة خبرية ٥ جملة نداء ٦ جملة منفية

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

العبارة الرياضية : جملة خبرية (إما أن تكون صائبةً، أو خاطئةً، ولا تكون كليهما).

ولكل عبارة رياضية قيمة صواب: إما صائبة ويرمز لها بالرمز (ص) وإما خاطئة ويرمز لها بالرمز (خ).
بالرجوع إلى نشاط ١ السابق، وبالاعتماد على التعريف، أعطي أمثلةً لعبارات رياضية.

مثال ١ : أقرأ ما يأتي، وأبيّن أيّاً منها يمثل عبارة رياضية؟

١ ياسر عرفات أول رئيس لمنظمة التحرير الفلسطينية.
٢ ما أجمل بحر غزة !
٣ الأرض تدور حول الشمس.
٤ ما ارتفاع جبل جرزيم؟
٥ زويل عالم كيمياء مصري.
٦ ١ عدد أولي.
٧ فدوى طوقان شاعرة فلسطينية.
٨ استمع لنصيحتي.

الحل :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عبارة	ليست عبارة	عبارة	ليست عبارة	عبارة	عبارة	عبارة	ليست عبارة

نشاط ٢: أكتب قيم صواب العبارات الرياضية الواردة في الجدول الآتي*:

الرقم	العبارة الرياضية	قيمة الصواب
١	لُقِّب الخليفة عمر بن الخطاب رضي الله عنه بالفاروق	ص
٢	أعلى جبل في الوطن العربي هو جبل النبي شعيب في اليمن	
٣	نظم سميح القاسم قصيدة الأرض	
٤	مارك زوكربيرج مؤسس موقع فيس بوك	
٥	يقبل العدد ٢٢٥ القسمة على ٣ دون باقٍ	ص
٦	ق(٢) هو أحد أصفار الاقتران ق(س) = س^{٣} – ٨	خ

ولتسهيل التعامل مع العبارات الرياضية، فإنه بإمكاننا إعطاء العبارة الرياضية أحد الرموز الهجائية، فيمكن أن نرمز للعبارة الرياضية «النيل أطول نهر في العالم» بالرمز «ف» ونكتب ف: النيل أطول نهر في العالم.

* يمكن الحصول على بعض المعلومات بالرجوع إلى الشبكة العنكبوتية

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

ثانياً: نفي العبارة الرياضية

يقول الشاعر: وليس عتابُ الناسِ للمرءِ نافعاً إذا لم يكن للمرءِ لُبٌّ يعاتبه

تتعدد في اللغة العربية أدوات النفي، مثل: ليس، لا، لم وغيرها، وبهذه الأدوات يمكن أن ننفي العبارة الرياضية، فنفي العبارة الرياضية ف: النيل أطول نهر في العالم هو: النيل ليس أطول نهر في العالم، وتكتب رمزياً ~ ف: ونفي العبارة الرياضية ن: ط ⊆ ص، هو ~ ن : ط ⊈ ص.

أفكر وأناقش: ما العلاقة بين قيمة صواب العبارة الرياضية ف، وقيمة صواب نفيها؟

مثال ١ : أنفي كل عبارة من العبارات الرياضية الآتية، دون استخدام «ليس صحيحاً أن»:

١ منير نايفة عالم ذرة فلسطيني

٢ ٩١ عدد أولي

٣ $\sqrt[3]{١٥}$ عدد غير حقيقي

٤ ٧ أحد عوامل ٨٣

٥ $-٧ \leq ٢$

٦ $\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$

الحل :

العبارة الرياضية	منير نايفة عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد أولي	$\sqrt[3]{١٥}$ عدد غير حقيقي	٧ أحد عوامل ٨٣	$-٧ \leq ٢$	$\frac{٢}{٣} > \frac{٣}{٢}$
نفيها	منير نايفة ليس عالم ذرة فلسطيني	٩١ عدد غير أولي	$\sqrt[3]{١٥}$ عدد حقيقي	٧ ليس أحد عوامل ٨٣	$-٧ > ٢$	$\frac{٢}{٣} \leq \frac{٣}{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ١-١

١ أبيّن فيما إذا كانت الجمل الآتية تمثل عبارات رياضية أم لا؟

أ) يقع المسجد الأقصى في القدس. ب) سبسطية بلدة أثرية. جـ) $٢^{٣} = ٣^{٢}$

د) $٢س^{٢} + ص^{٢} = ١$ تمثل معادلة دائرة. هـ) يا طلبتي الأعزاء. و) سجّل أنا عربي.

٢ أبيّن قيم الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ متماثل حول نقطة الأصل.

٢ $\sqrt{٤٥} > \sqrt[٣]{١٣٥}$

٣ ق(س) = $س^{٢}$ اقتران فردي.

٤ العدد $٢^{١٠}$ من مضاعفات العدد ٣٢

٥ الصفر عدد نسبي.

٦ المستقيم الذي معادلته س = ٢ يعامد المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{١}{٢}$

٣ أنفي العبارات الرياضية الواردة في السؤال السابق.

٤ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

١ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) ما أعلى البرج! ب) الخوارزمي عالم رياضيات

جـ) يا مجيب الدعوات د) اشرب العصير

٢ ما الجملة التي **لا تمثل** عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) ٢ + س = ٥ ب) ٢ + ٣ < ٥ جـ) ٢ + ٣ ≤ ٥ د) ٢ + ٣ = ٥

٣ ما نفي العبارة الرياضية ١٢ ≤ −٢١؟

أ) −٢١ ≤ ١٢ ب) ١٢ ≥ −٢١ جـ) ١٢ > −٢١ د) ١٢ ≥ ٢١

٤ ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (ص) فيما يأتي؟

أ) الزئبق مادة صلبة في الطبيعة. ب) النحاس غير موصل للتيار الكهربائي.

جـ) النيتروجين من الهالوجينات. د) الأكسجين ضروري للاحتراق.

٥ ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (خ) فيما يأتي؟

أ) رموز نظام العد الثنائي هي ١، ٢ ب) رموز نظام العد الثنائي هي ٠، ١

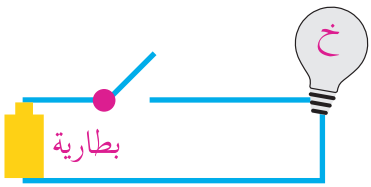
جـ) ١ جيجا بايت = $١٠^{٩}$ بايت د) ١ ميجا بايت = $١٠^{٦}$ بايت

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أولاً: جداول الصواب

تعلمت في درس سابق أن العبارة الرياضية ف إما أن تكون صائبة أو خاطئة، أي أن قيمة صوابها يمكن أن تكون صائبة أو خاطئة.

ويمكن أن نمثل العبارة الرياضية بالدارة الكهربائية.



(أنظر الشكل المجاور) التي لها فرصتان للتشغيل، فإما أن تكون مغلقاً ويقابل ذلك قيمة الصواب (ص)، وإما أن تكون مفتوحاً، ويقابل ذلك قيمة الصواب (خ).

أما إذا كان لدينا العبارتان ف، ن فإن لهاتين العبارتين الرياضيتين معاً أربع حالات لقيم صوابهما، وهي: العبارتان صائبتان، أو الأولى صائبة والثانية خاطئة، أو الأولى خاطئة والثانية صائبة، أو الاثنتان خاطئتان، ولتسهيل كتابة إمكانات صواب أو خطأ عبارتين رياضيتين مركبتين معاً، فقد تم تنظيم هذه الإمكانات في جداول خاصة تسمى جداول الصواب، وهي مفيدة لنا لدراسة العبارات الرياضية المركبة في جوانب عديدة كما سيتضح لاحقاً، والجدول الموضح هو جدول الصواب الخاص بالعبارتين ف، ن

ف	ن
ص	ص
ص	خ
خ	ص
خ	خ

أفكر وأناقش: عدد الإمكانات الممكنة لقيم صواب ك عبارة رياضية مركبة يساوي $٢^{ك}$.

ثانياً: العبارة الرياضية المركبة

في خضم حديثنا عن التراث الفلسطيني، تتردد بعض الجمل مثل: المسخن أكلة فلسطينية، والخبيصة (حلوى الخروب) من الحلويات الشعبية الفلسطينية التي دأبت على إعدادها الجدّات، والقمباز والكوفية، أو الحطة والعقال، أزياء تراثية طالما ارتداها أجدادنا...

العبارة الرياضية المركبة: هي عبارة رياضية تتكون من عبارتين رياضيتين، أو أكثر تربط بينها أدوات ربط مثل (و) ، (أو) ، (إذا كان... فإن ...) ، (...إذا وفقط إذا ...).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

١ أداة الربط (و) (and)

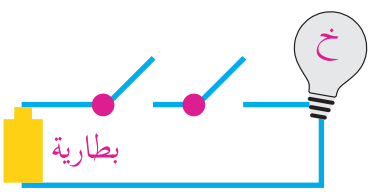
يرمز لأداة الربط (و) بالرمز ∧ .

نشاط ١: وعد والد كريم ابنه كريماً بأنه سيصحبه في رحلة إلى بيت لحم، وسيقدم له هديةً إن حصل على معدلٍ عالٍ، وبعد حصول كريم على معدل عال، فكر في وعد والده، فوجد إمكانات أربعة لتنفيذ الوالد وعده، فإما أن ينفذ وعده كاملاً، حيث سيصحبه إلى بيت لحم ويقدم له الهدية، وهذا هو السلوك الصائب الذي يتماشى مع القيم الإيجابية السائدة، في الإيفاء بالوعد، وإما ألّا ينفذ وعده جزئياً، بمعنى سوف لن يصحبه إلى بيت لحم ولكن سيقدم له هدية، أو سيصحبه إلى بيت لحم ولن يقدم له هدية ،أو ألّا ينفذ وعده كاملاً أي لن يصحبه إلى بيت لحم ولن يقدم له هدية، ترى كيف تصرّف الأب تجاه وعده لابنه؟

إذا رمزنا ف: صحب الأب ابنه كريماً إلى بيت لحم، ن: قدم الأب هدية لكريم، فإنه يمكن بناء جدول الصواب للعبارة الرياضية: ف ∧ ن بإمكاناته الأربعة المقابلة لإمكانات تنفيذ والد كريم للوعد كما يأتي: ويلاحظ من الجدول أن ف ∧ ن تكون صائبةً في الحالة الوحيدة التي تكون كل من مركبتيها صائبة، وفيما سوى ذلك تكون خاطئة.

ف	ن	ف ∧ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	خ

أفكر وأناقش: ما أوجه الشبه بين قيم الصواب الممكنة للعبارة الرياضية ف ∧ ن
وإمكانات تشغيل الدارة الكهربائية ذي المفتاح المزدوج الممثلة بالشكل المجاور؟



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٢: أكتب قيمة الصواب لكل من العبارات الرياضية المركبة الآتية في المكان المخصص، موضحاً السبب:

١ العسل مفيد لصحة الإنسان، والنحلة حشرة مفيدة للبيئة.

ألاحظ أن مركبتي العبارة صحيحتان، وأداة الربط هي (و) لذا فالعبارة المركبة صحيحة.

٢ الأسد مفترس، والحمامة جارحة _____

٣ (٢ ∋ ح) ∧ (٢ > −٥) (خ) لأن ٢ ∋ ح صائبة ، ٢ > −٥ خاطئة ∴ ص ∧ خ هو خ

٤ (٢^٣ = ٨) ∧ لـو٢ (٨) = ٣ _____

٥ (جتا π/٤ = √٣/٢) ∧ (ظا π/٤ = √٣) _____

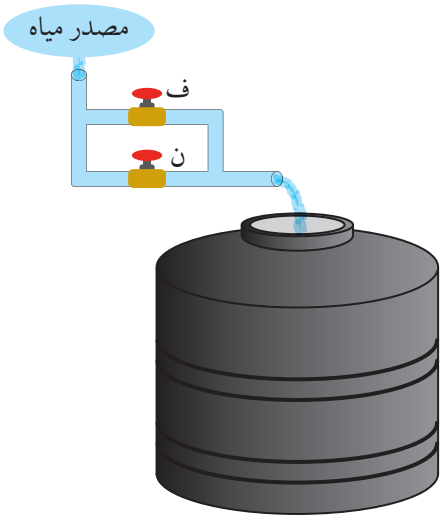
٢ أداة الربط (أو) (or)

يرمز لأداة الربط (أو) بالرمز (∨)

وتكون العبارة الرياضية المركبة التي تربط مركبتيها أداة الربط (أو) خاطئةً في الحالة الوحيدة التي تكون كل من مركبتيها خاطئةً، وفيما سوى ذلك تكون صائبةً لاحظ الجدول:

ف	ن	ف ∨ ن
ص	ص	ص
ص	خ	ص
خ	ص	ص
خ	خ	خ

نشاط ٣: أتأمل الشكل المجاور، كيف يمكن الربط بين إمكانية تدفق الماء من مصدره، والوصول للخزان، مع أداة الربط (أو) وجدول صوابها.



١ أذكر الحالات التي سيتدفق بها الماء من المصدر وصولاً إلى الخزان.

١- المحبسان ف ، ن مفتوحان

٢- _____ .

٣- _____ .

٢ ما الحالة التي لن يصل بها الماء إلى الخزان؟ _____ .

٣ أستخدم الرمز ص إذا كان المحبس مفتوحاً، خ إذا كان مغلقاً، ثم أمثل الحالات السابقة في جدول، وأقارنه بجدول الصواب الخاص بأداة الربط (أو).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثال ٢ : أوضح قيم صواب العبارات الرياضية المركبة الآتية:

١ المثلث مجسم أو الإسطوانة شكل مستوٍ.

٢ ($\varnothing \supset \{٠\}$) أو ($٢ \notin \{٢٣\}$)

٣ (مجموع قواسم العدد $١٨ > ٤٠$) أو ٧ تقسم على ٢٨ دون باقٍ.

٤ إما المسجد الأقصى أو المسجد الحرام أولى القبلتين.

٥ باب الساهرة أحد أبواب الخليل أو الطور أحد جبالها.

الحل : ألاحظ الجدول

رقم العبارة	المركبة الأولى ف	المركبة الثانية ن	ف ∨ ن
١	خ	خ	خ
٢	ص	ص	ص
٣	خ	خ	خ
٤	ص	خ	ص
٥	خ	خ	خ

www.wepal.net SIGNED_TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

١ لتكن ف: النيون من العناصر النبيلة ، ن: الكبريت فلز

أعبر عن العبارات الرياضية الرمزية الآتية بالكلمات، وأبيّن قيمة صواب كل منها:

أ ف ∧ ~ن ب ~ف ∧ ~ن جـ ~ف ∨ ن

٢ أبين قيمة صواب كل من العبارات الرياضية المركبة الآتية:

أ يحدث الخسوف للشمس و يحدث الكسوف للقمر

ب م (٢ ، ٥) تحقق ص = ٢س + ١ أو ك (−٢ ، −١) تقع في الربع الثالث في المستوى الديكارتي

جـ ($\sqrt{٢}$ ∋ ح) و (π عدد نسبي)

٣ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت ف عبارة رياضية صائبة ، ن خاطئة ، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ∧ ن ب) ~ف ∧ ن جـ) ~ف ∨ ~ن د) ن ∨ ~ف

٢ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) الألوان الأساسية هي: أحمر، أصفر، أزرق

ب) الألوان الثانوية هي: أحمر، أصفر، أزرق

جـ) الألوان الباردة هي: أحمر، أصفر، أزرق

د) الألوان المحايدة هي: أحمر، أصفر، أزرق.

٣ ما العبارة الرياضية **التي قيمة صوابها (خ)** فيما يأتي؟

أ) ابن الهيثم عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.

ب) ابن الهيثم ليس عالم بصريات أو أبو قراط أبو الطب.

جـ) ابن الهيثم عالم بصريات أو أبو قراط ليس أبا الطب.

د) ابن الهيثم ليس عالم بصريات و أبو قراط أبو الطب.

٤ ما العبارة الرياضية الصحيحة فيما يأتي؟

أ) −٣ عدد غير صحيح ٧ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

ب) −٣ عدد غير صحيح ٧ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

جـ) −٣ عدد غير صحيح ٨ $\sqrt{٢}$ عدد نسبي.

د) −٣ عدد غير صحيح ٨ $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أولاً: أداة الربط: (إذا كان ... فإن ...) (If... then...)

تسمى أداة الربط (إذا كان... فإن ...) أداة الشرط ويرمز لها بالرمز (←)

نشاط ١: إليك النص الآتي:

«هناك علاقة ثلاثية مميزة بين الفلاح والأرض والمطر، فإذا كان المطر يعيق حركة بعض الناس، فإن الفلاح ينتظر نزوله بفارغ الصبر؛ لتثمر أرضه وتجود بالحصاد، والخير الوفير. يطل أبو نجيب من شباك بيته، ويراقب المطر الغزير، ويقول لزوجته: إن استمر المطر في الهطول، سيكون موسم خير علينا، وستغل زروعنا، وإذا بعنا منتوجنا من الحبوب فإننا سنكون قادرين على شراء الجرّار، وإذا اشتريناه سيعيننا في العمل في الأرض، ويتضاعف إنتاجنا، وعندها سنكون قادرين على تعليم أبنائنا». إذا تأملت النص السابق تجد أنه يزخر بالعبارات الشرطية، وتجد أن كلاً منها يتكون من فعل الشرط وجوابه، تربطهما أداة الربط (إذا كان... فإن ...) ويعبر عنها رمزياً (ف ← ن) ، وتقرأ (إذا كان ف فإن ن) أو (ف إذن ن)، تسمى مركبتها الأولى ف مقدمة العبارة الرياضية الشرطية، بينما تسمى الثانية تاليها؛ أكمل جدول الصواب لهذه العبارة الرياضية كما يأتي:

ف	ن	ف ← ن
ص	ص	ص
ص		خ
خ		ص
	خ	ص

ويلاحظ أن العبارة الرياضية الشرطية ف ← ن تكون خاطئة في الحالة الوحيدة، عندما تكون مقدمتها صائبة وتاليها خاطئاً .

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثال ١ : عامر من أفضل طلبة الصف الذين يبرمجون (الروبوت) في المدرسة الصناعية، قال له مدير المدرسة في بداية العام الدراسي: إذا فزت في المسابقة التي تنظمها وزارة التربية (للروبوتات) فسأقدم لك جائزةً، جهاز حاسوب محمول. متى تكون هذه العبارة الرياضية صائبة، ومتى تكون خاطئة؟

الحل : بناءً على جدول صواب العبارة الرياضية الشرطية، وكما هو واضح في الجدول السابق، تكون العبارة الرياضية صائبة في الحالات الآتية :

١ عامر فاز في المسابقة وقدم له المدير الجائزة.

٢ لم يفز عامر ولكن المدير قدم له الجائزة.

٣ لم يفز عامر ولم يقدم له المدير الجائزة.

وتكون هذه العبارة الرياضية خاطئة في الحالة: «أن عامراً فاز بالمسابقة، ولكن المدير لم يقدم له الجائزة».

www.wepal.net
UNED TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٢: أكتب قيم صواب كل من العبارات الرياضية الآتية في المكان المخصص، وأبيّن السبب:

١ إذا كان وادي الباذان يقع في نابلس فإن سلفيت محافظة الزيتون.

وادي الباذان في نابلس عبارة صائبة،

وكذلك سلفيت محافظة الزيتون ∴ ص ← ص هو .....

٢ للمثلث متساوي الساقين محورا تماثل إذن مجموع قياسات زواياه = ١٨٠° _____ .

٣ (إذا كان الصفر حلاً للمعادلة $س^{٢} = س$) فإن ($٤^{-\frac{١}{٢}} = ٢$) _____ .

الصفر حل للمعادلة $س^{٢} = س$ صائبة، $٤^{-\frac{١}{٢}} = ٢$ خاطئة (لماذا؟) ∴ ص ← خ هو ___ .

٤ ($٥^{-١} = -٥$) ← ($\sqrt{١٨} = ٢\sqrt{٣}$) _____ .

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

ثانياً: أداة الربط (... إذا وفقط إذا...) (If and only if...)

يرمز لهذه الأداة بالرمز (↔) وتسمى أداة الشرط الثنائية وتقرأ ف إذا وفقط إذا ن

ويرمز لها (ف ↔ ن) تعني (ف ← ن) ∧ (ن ← ف)

إذا كانت ف: الضرب عملية تبديلية على ح ، ن: أ × ب = ب × أ ، أ، ب ∈ ح فإن العبارة الرياضية «الضرب عملية تبديلية إذا وفقط إذا كان أ × ب = ب × أ» ويكون جدول صواب هذه الأداة كما يأتي:

ف	ن	ف ↔ ن
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	خ
خ	خ	ص

مثال ٢ : أبين قيم الصواب للعبارات الرياضية الآتية.

١ الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$ إذا وفقط إذا $\sum س = ن \times \overline{س}$.

٢ قطرا المستطيل متعامدان إذا وفقط إذا كانت زواياه قوائم.

٣ ٢ + ٣ < ١٠ إذا وفقط إذا كان ٥١ عدداً أولياً.

٤ $\sqrt{٤} = \pm ٢ \leftrightarrow |-٤| = ٤$

٥ الحرم الإبراهيمي في الخليل إذا وفقط إذا كانت كنيسة المهد في القدس.

الحل : ١ ، ٣ صائبتان ، ٢ ، ٤ ، ٥ خاطئة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

١ لتكن ف : الوتر أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية

ن : مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي الداخلية = ٥٤٠°

أعبر عما يأتي بالكلمات:

١ ف ← ن ٢ ~ ن ← ~ ف ٣ ~ ف ↔ ن

٢ أبين قيم الصواب لكل مما يأتي:

١ إذا كان الصفر عدداً فردياً فإن الواحد عدد أولي.

٢ إذا كان ١٠٠ أحد قوى العشرة فإما −٣ > −٢ أو [١,٣] = ٣

٣ إذا كان ٥ من عوامل العدد ٢٠ فإنه (٥ × ٤ = ٢٠) و (٢٠ ÷ ٥ = ٤)

٤ ٢ + −٥ = ٣ و−٨ عدد زوجي إذن ٥ × −٦ = ٣٠

٣ إذا كانت م: محمود درويش شاعر، ن: ناجي العلي رسام كاريكاتير، ع: عارف العارف مؤرخ

أعبر بالرموز عن العبارات الرياضية الآتية:

١ إذا كان محمود درويش شاعراً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٢ ناجي العلي رسام كاريكاتير إذا وفقط إذا كان عارف العارف مؤرخاً.

٣ إذا كان محمود درويش شاعراً وعارف العارف مؤرخاً فإن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٤ إما عارف العارف مؤرخ أو محمود درويش شاعر إذن ناجي العلي رسام كاريكاتير.

٤ أعبر عما يأتي بأمثلة من كلماتي:

١ ف ← (ن ∨ م) ٢ ~ ف ∨ (ن ∧ م) ٣ (ن ∧ م) ↔ ف

٥ أصمم جدول الصواب لكل من العبارات الرياضية الآتية:

١ (ف ← ن) ∧ ~ ف ٢ (~ ف ∨ ن) ← (ف ∧ ~ ن) ٣ ~ (ف ← ن) ∧ ~ م

٦ أملأ الجدول الآتي بما يناسب:

ف	ن			~ ف ∧ ~ ن	
ص	ص	خ	ص	خ	ص
ص	خ	ص	ص		ص
خ	ص	خ	ص	خ	ص
خ	خ	ص	خ		خ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أولاً: إثبات تكافؤ عبارتين رياضيتين مركبتين باستخدام جداول الصواب:

من الاستخدامات المهمة لجداول الصواب، هو استخدامها في إثبات تكافؤ عبارتين رياضيتين، ويتم ذلك بكتابة قيم الصواب الممكنة لكل من العبارتين، وملاحظة القيم المتناظرة لهما:

مثال ١ : أتأمل جدول الصواب للعبارتين: ~ (ف ∧ ن) ، ~ ف ∨ ~ ن

ف	ن	ف ∧ ن	~ (ف ∧ ن)	~ ف	~ ن	~ ف ∨ ~ ن
ص	ص	ص	خ	خ	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	ص	ص
خ	ص	خ	ص	ص	خ	ص
خ	خ	خ	ص	ص	ص	ص

ألاحظ أن قيم صواب العبارتين المتناظرة في الجدول هي ذاتها، فأقول: إن العبارتين متكافئتان، وأكتب ذلك بالرموز ~ (ف ∧ ن) ≡ ~ ف ∨ ~ ن

والتكافؤ السابق يوضح لنا كيف ننفي العبارة المركبة (ف ∧ ن) ، حيث يتم ذلك بنفي مركبتيها، وتحويل أداة الربط ∧ إلى ∨ ، فعند قولنا ليس صحيحاً أن «الفول من البقوليات والزعتر نبات طبي» فإن ذلك يعني: إما أن الفول ليس من البقوليات أو أن الزعتر ليس نباتاً طبياً.

تعريف: تكون العبارتان الرياضيتان المركبتان متكافئتين، إذا كان لهما نفس قيم الصواب المتناظرة في جدول صوابهما.

مثال ٢ : أبين تكافؤ أو عدم تكافؤ العبارتين ف ∨ ~ ن ، ~ ف ∧ ن باستخدام جدول الصواب

الحل :

ف	ن	~ ن	ف ∨ ~ ن	~ ف	~ ف ∧ ن
ص	ص	خ	ص	خ	خ
ص	خ	ص	ص	خ	خ
خ	ص	خ	خ	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص	خ

ألاحظ أن قيم الصواب المتناظرة للعبارتين ليست نفسها، لذا ف ∨ ~ ن لا تكافئ ~ ف ∧ ن

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ١ : إليك العبارتين التاليتين:

ف: الوطن عزيز، ن: الحرية غالية

- أعبر عن ف ← ن ، ~ ن ← ~ ف بالكلمات

- أملأ الفراغات اللازمة في جدول الصواب الآتي:

ف	ن	ف ← ن	~ ن	~ ف	~ ن ← ~ ف
ص	ص	ص			
ص	خ	خ			
خ	ص	ص			
خ	خ	ص			

-ماذا ألاحظ على قيم الصواب المتناظرة للعبارتين ف ← ن ، ~ ن ← ~ ف ؟

ألاحظ أن ف ← ن ≡ ~ ن ← ~ ف وهذا يوصلني إلى التعريف الآتي:

تعريف: المعاكس الإيجابي للعبارة الرياضية ف ← ن هو ~ ن ← ~ ف

مثال ٣ : أكتب المعاكس الإيجابي لكل مما يأتي:

١ إذا ساد العدل أمن المجتمع.

٢ إذا كان العدد ١٧ أولياً فإن مجموعة قواسمه ليست ثنائية.

٣ (س - ٢) من عوامل $س^{٣} - ٨$ ، إذن $س^{٣} - ٨ = (س - ٢)(س^{٢} + ٤)$

الحل :

١ إذا لم يأمن المجتمع لم يسد العدل.

٢ إذا كانت مجموعة قواسم العدد ١٧ ثنائية فإنه ليس أولياً.

٣ إذا كان $س^{٣} - ٨ \neq (س - ٢)(س^{٢} + ٤)$ فإن (س - ٢) ليس من عوامل $س^{٣} - ٨$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثال ٤ : أثبت أن العبارتين ف ← ن ، ~ ف ∨ ن متكافئتان.

الحل : بتكوين جدول الصواب المناسب، وملاحظة قيم الصواب المتناظرة للعبارتين السابقتين:

ف	ن	ف ← ن	~ ف	~ ف ∨ ن
ص	ص	ص	خ	ص
ص	خ	خ	خ	خ
خ	ص	ص	ص	ص
خ	خ	ص	ص	ص

بما أن قيم الصواب المتناظرة للعبارتين: ف ← ن ، ~ ف ∨ ن

∴ ف ← ن ≡ ~ ف ∨ ن

ومن التكافؤ السابق أتوصل إلى أن: نفي العبارة الرياضية الشرطية إذا كان فإن هو ف وليس ن أي تثبيت مقدمتها ونفي تاليها.

ثانياً: إثبات تكافؤ العبارات الرياضية دون استخدام جداول الصواب

تعلمنا في الدرس السابق كيفية إثبات تكافؤ عبارتين، باستخدام جدول الصواب الخاص بهما، حيث توصلنا إلى أنه إذا تشابهت قيم الصواب المتناظرة لعبارتين رياضيتين، فإنهما تتكافآن، والسؤال الآن: هل هذه هي الطريقة الوحيدة التي تمكننا من إثبات ذلك؟ والإجابة طبعاً لا، حيث نستطيع إثبات ذلك باستخدام مجموعة من الخصائص، أو من العبارات التي تم إثبات تكافئها عن طريق الجدول وسواه.

وإليك خواص العمليات ~ن ، ∧ ، ∨ وهي تعبر عن أزواج من العبارات الرياضية المتكافئة، وتساعد في إثبات تكافؤ عبارات رياضية دون اللجوء إلى جدول الصواب:

١ ~ (~ف) ≡ ف — نفي النفي (النفي المتكرر)

٢ ~(ف ∧ ن) ≡ ~ ف ∨ ~ن ، ~(ف ∨ ن) ≡ ~ ف ∧ ~ن — قانونا دي مورغان

٣ (ف ∨ ن) ≡ (ن ∨ ف) ، (ف ∧ ن) ≡ (ن ∧ ف) — خاصية التبديل

٤ (ف ∧ ن) ∧ م ≡ ف ∧ (ن ∧ م) ، (ف ∨ ن) ∨ م ≡ ف ∨ (ن ∨ م) — خاصية التجميع

٥ ف ∧ (ن ∨ م) ≡ (ف ∧ ن) ∨ (ف ∧ م)، ف ∨ (ن ∧ م) ≡ (ف ∨ ن) ∧ (ف ∨ م) — خاصية التوزيع

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط بيتي: أبين صحة القوانين السابقة باستخدام جداول الصواب.

مثال ١ : أثبت أن ~ (ف ← ن) ≡ ف ∧ ~ ن دون استخدام جداول الصواب.

الحل : نعلم أن ف ← ن ≡ ~ ف ∨ ن

~ (ف ← ن) ≡ ~(~ ف ∨ ن)

≡ ~(~ ف) ∧ ~ ن لماذا؟

≡ ف ∧ ~ ن لماذا؟

ونستنتج من هذا التكافؤ كيفية نفي العبارة الشرطية ف ← ن

نفي العبارة الرياضية الشرطية إذا كان ف فإن ن: هو ف و ليس ن أي بتثبيت مقدمتها ونفي تاليها.

مثال ٢ : أنفي ما يأتي:

١ **إذا كان ق(س) اقتران تناظر فإن (ق o ق$^{-١}$)(س) = س**

٢ **(٤ + ٥ = ٩) إذن (٣ ≤ ٥ < ٧).**

الحل : ١ **ق(س) اقتران تناظر و (ق o ق$^{-١}$) (س) ≠ س**

٢ **(٤ + ٥ = ٩) و (٣ < ٥ أو ٥ ≤ ٧)**

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثال ٣ : أثبت أن (ف ∨ ن) ← ن ≡ ف ← ن

الحل :

(ف ∨ ن) ← ن ≡ ~(ف ∨ ن) ∨ ن لماذا؟

≡ (~ف ∧ ~ن) ∨ ن لماذا؟

≡ (~ف ∨ ن) ∧ (~ن ∨ ن) لماذا؟

≡ (~ف ∨ ن) ∧ ص لماذا؟

≡ ~ف ∨ ن لماذا؟

≡ ف ← ن لماذا؟

تمارين ومسائل ١-٤

١ أبين تكافؤ أو عدم تكافؤ العبارات الرياضية الآتية باستخدام جداول الصواب:

١ ف ← ~ن ، ~ف ∧ ن

٢ (ف ∧ ن) ← ~ف ، ~ف ∨ ~ن

٢ أكتب المعاكس الإيجابي للعبارات الرياضية الآتية:

١ (٣ ∋ ط) ← (√٢ ∋ ص)

٢ إذا كان التدخين مضراً بالصحة أو الفواكه مفيدة فإن السمك عالي القيمة الغذائية.

٣ أنفي العبارات الرياضية الآتية:

١ إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فإنه حاد الزوايا.

٢ المنطق من فروع الرياضيات إذن الرياضيات لغة العلوم.

٣ ٢ < √٥ ≥ ٣

٤ أثبت تكافؤ ما يأتي دون استخدام جداول الصواب:

١ أثبت أن ~(ف ← ~ن) ≡ ف ∧ ن

٢ ف ← (ف ∨ ~ن) ≡ (ف ∧ ن) ← ف

٣ (~ف ∨ ن) ← (ف ∧ ~ن) ≡ ~(ف ← ن)

٤ ف ← (ن ∧ ~م) ≡ (ف ← ن) ∧ (ف ← ~م)

٥ (ف ← ن) ∨ (م ← ل) ≡ (ف ∧ م) ← (ن ∨ ل)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين عامة (١)

١ أضع دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ إذا كانت ف عبارةً رياضيةً صائبةً، ن عبارةً رياضيةً صائبةً، ما العبارة الرياضية المركبة الصائبة فيما يأتي؟

أ) ف ← ~ن ب) ن← ~ف جـ) ف ∧ ~ن د) ف ∨ ~ن

٢ ما نفي العبارة الرياضية (٣ + ٤ ≠ ٧) ∧ (٥ ≥ ١) ؟

أ) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ ≥ ١) ب) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ < ١)

جـ) (٣ + ٤ ≠ ٧) ∨ (٥ ≥ ١) د) (٣ + ٤ = ٧) ∨ (٥ > ١)

٣ ما الجملة التي تمثل عبارة رياضية فيما يأتي؟

أ) عدد يقل عن س بـ ١ ب) يا عالماً بحالي

جـ) شكراً لك د) الصفر عدد زوجي.

٤ ما العبارة الرياضية الصائبة فيما يأتي؟

أ) -٣ ∃ ص ← ٣ عدد نسبي ب) -٣ ∃ ص ↔ -٣ ∉ ح

جـ) -٣ ∃ ص ↔ -٣ > -٥ د) -٣ ∃ ص ∧ -٣ ∉ ح

٥ ما العبارة الرياضية التي تكافئ ف فيما يأتي؟

أ) ~ف ب) ف ∧ ~ف جـ) ~(ف ← ~ف) د) ف ∨ ~ف

٦ ما المعاكس الإيجابي للعبارة الرياضية ~ف ← ن ؟

أ) ~ف ← ~ن ب) ~ن ← ~ف جـ) ~ن ← ف د) ف ← ن

٢ ما قيم صواب كل مما يأتي:

أ) (٢ ≥ ١) ↔ (٦ = ٣٢) ب) (٢ > ١) ∨ (٦ ≠ ٣٢) جـ) (٦ ≠ ٣٢) ← (٢ > ١)

٣ أوضح تكافؤ أو عدم تكافؤ كل زوج من العبارات الرياضية الآتية:

أ) ف ← ن ، ن ← ف ب) ف ← ن ، ~ ف ← ~ن جـ) ف ← ن ، ~ن ← ~ف

٤ أثبت صحة العبارات الرياضية الآتية دون استخدام جداول الصواب:

أ) (ف ← ن) ∨ (ف ← م) ≡ ف ← (ن ∨ م)

ب) ~ف ∨ (ن ∧ ~م) ≡ ~((ف ← ن) ← (ف ∧ م))

٥ إذا كان (ف ← ن) ∧ ن عبارة رياضية صائبة ، (ف ↔ ن) خاطئة، أجد قيم صواب كل من ف ، ن.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مشروع الوحدة:

فكرة المشروع:	المنحى:	القضية:
قرارٌ منطقيٌّ لمستقبلٍ أخضر	METS (S ,T ,E ,M)	لاستدامة البيئية واتخاذ القرار الرشيد

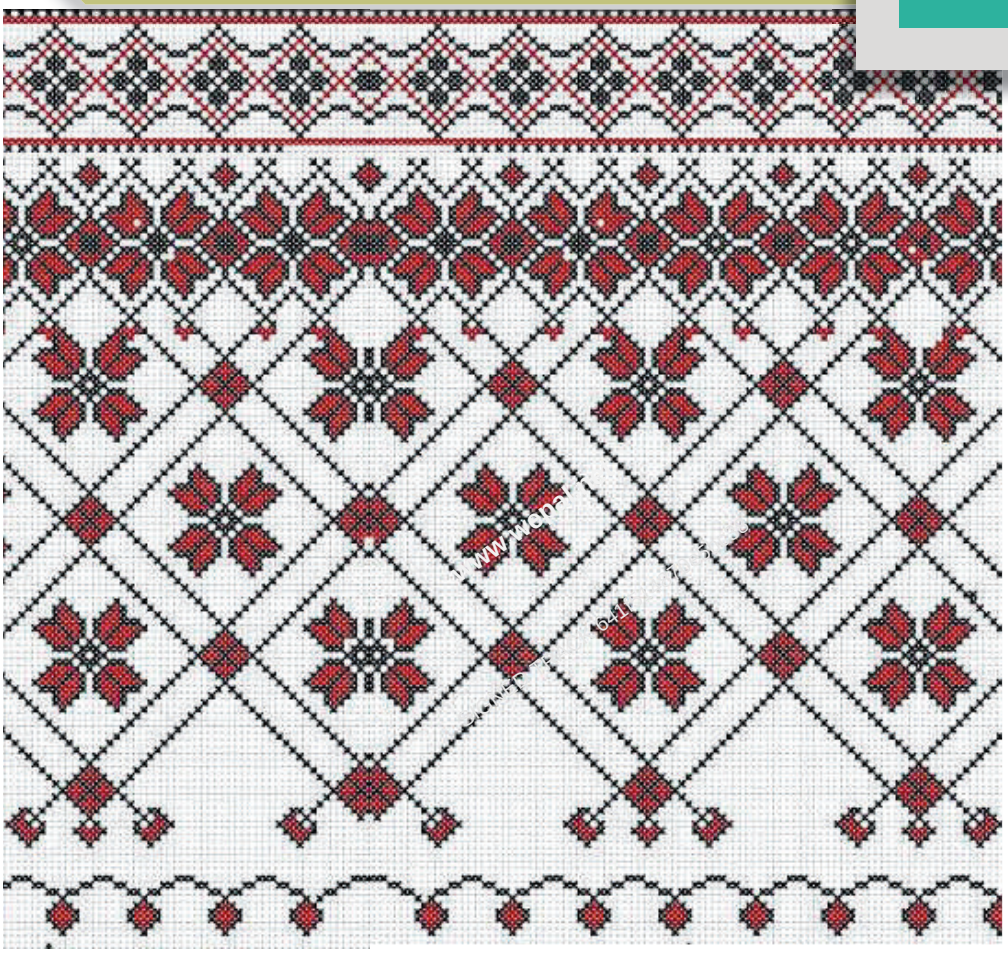
تعتزم مدرسة إنشاء حديقة مدرسية، وتحتاج إلى نظام يساعد في اتخاذ قرار تشغيل نظام الري أو إيقافه اعتمادًا على مجموعة من المعطيات، مثل: رطوبة التربة، واحتمال هطول المطر، ودرجة الحرارة. بالتعاون مع مجموعتك، صمِّم نموذجًا يعتمد على مبادئ المنطق الرياضي لاتخاذ القرار الصحيح، ثم اختبر كفاءته في مواقف مختلفة. قدّم بالتعاون مع مجموعتك تقريراً أمام معلمك وزملائك نموذج لاتخاذ القرار، مدعوم بجداول الصواب، وعرض آلية عمل النظام المقترح.

مهام المشروع:

الكفاية المستهدفة	المهمة
فهم المشكلات والمثابرة على حلها	١- حدِّد بالتعاون مع مجموعتك العوامل التي تؤثر في قرار تشغيل نظام الري أو إيقافه.
التفكير الكمي والتجريدي	٢- صُغ بالتعاون مع مجموعتك هذه العوامل في صورة عبارات رياضية، ثم كوِّن منها عبارات مركبة باستخدام أدوات الربط المناسبة.
استخدام للأدوات والتكنولوجيا بذكاء	٣- أنشئ بالتعاون مع مجموعتك جداول الصواب للتحقق من صحة قواعد اتخاذ القرار، وبرِّر اختيارك لها. بناء الحجج الرياضية ونقدها ية ٤- استخدم بالتعاون مع مجموعتك أداة رقمية مناسبة لرسم مخطط اتخاذ القرار أو للتحقق من صحة الجداول المنطقية.
اتخاذ القرار الرياضي المسؤول	٥- اختبر بالتعاون مع مجموعتك النظام في حالات واقعية مختلفة، ثم ناقش النتائج وحدد مدى فاعليته في اتخاذ القرار.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الاقترانات ورسومها البيانية
(Functions and Their Graphs)



مطرزات فلسطينية

تشتهرُ فِلسطينُ بِمطرّزاتِها التي قد تظهرُ فيها رسوماتٌ تشبه مُنحنياتٍ لاقتراناتٍ متعددة، أتأمّلُ اللوحةَ، وأصفُ جمالَ المُطرّزاتِ.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات بأنواعها المختلفة في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- استخدام التحويلات الهندسيّة في رسم منحنى اقترانٍ ما، في المستوى الديكارتي.
- تحديد إشارةِ بعض الاقترانات.
- حلّ المتباينات من الدرجة الثّانية بمتغيِّرٍ واحد.
- تمثيل اقترانٍ متعددِ القاعدة بيانيّاً.
- تعرف إلى الاقتران الأسي والاقتران اللوغارتمي.

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

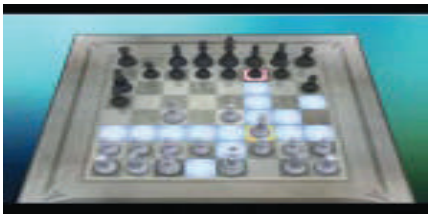
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمثيل الاقترانات باستخدام الإنسحاب (Translation)

نشاط ١

شاركتْ فِلَسطينُ في بطولة العالم للشّطرنجِ في النرويج مع ١٧٨ دولةً، حيث انتقلت فلسطينُ من المرتبة رقم ١٦٣ إلى المرتبة ١٠٣ على مستوى العالم؛ إذْ تفوّقتْ على دولٍ عربيّةٍ متميّزةٍ في هذه اللعبة، وحصلتْ على مكانةٍ دَوْليّة فيها.

تتحركُ أحجارُ الشّطرنجِ وَفْقَ قواعد محدّدة.

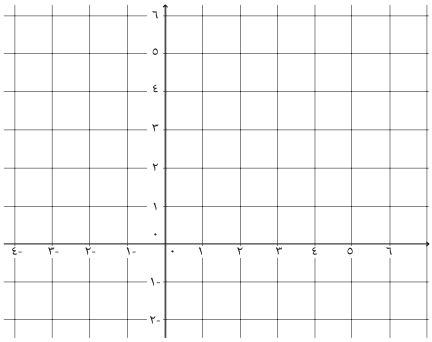


- يتحرّكُ الملكُ بمقدار وحدةٍ واحدةٍ في جميع الاتجاهات.
- يتحركُ الفيلُ .....
- تتحركُ القلعةُ .....
- يتحركُ الوزيرُ .....

تُسمَّى مثلُ هذه الحركاتِ في المستوى تحويلاتٍ هندسيّةً.

نشاط ٢

أُعيّنُ النّقاط: أ (٢ ،١)، ب (-٣، -١)، جـ (-٥، ٢)، ثمّ أرسمُ المثلث أ ب جـ في المستوى الديكارتي.



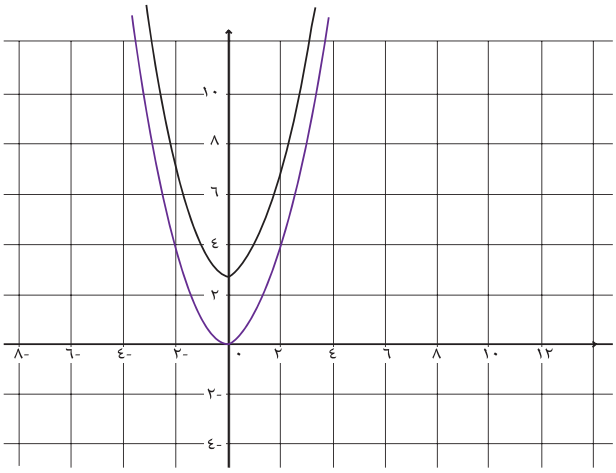
- صورة النقطة أ (١،٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: أَ (٤،٢).
- صورة النقطة ب (-٣، -١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: بَ (.....، .....).
- صورة النقطة جـ (-٥، ٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى الأعلى هي: جَ (.....، .....).
- أرسمُ المثلثَ أَ بَ جَ في المستوى الديكارتي.

ألاحظُ أنّ: النقطةَ(س،ص) بعد انسحابها ٣ وحدات إلى الأعلى هي: النقطة (س،ص+٣).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٣

في الشكل المجاور ، أنظرُ إلى منحنى الاقتران
ق(س) = س^{٢}، س ∈ ح،
ومنحنى الاقتران
ل(س) = س^{٢} + ٣



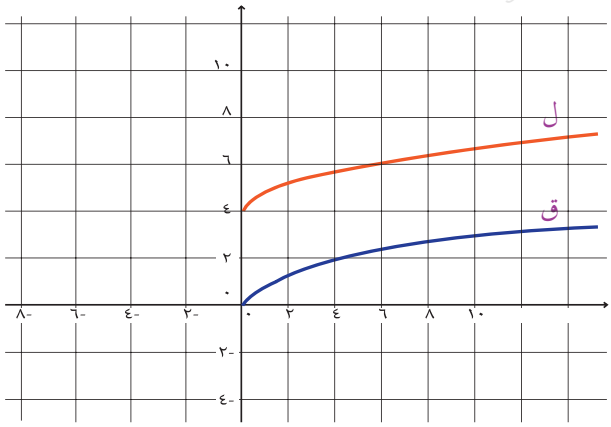
ألاحظ أنّ: منحنى ل(س) هو انسحاب لمنحنى ق(س) بمقدار ..... للأعلى.

- أمثّلُ بيانيّاً منحنى الاقتران: هـ(س) = س^{٢} − ٤ .

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ل(س) = ق(س) + جـ هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة إلى الأعلى إذا كانت جـ > صفر ، وانسحاب بمقدار | جـ | وحدة إلى الأسفل إذا كانت جـ < صفر.

نشاط ٤

أنظرُ إلى منحنى الاقتران: ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، س ≥ صفر ومنحنى ل في الشكل الآتي:



منحنى الاقتران ل هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق بمقدار .....

- قاعدة الاقتران ل هي: .....

أمثّلُ بيانيّاً منحنيات الاقترانات الآتية:

- ك(س) = $\sqrt{\text{س}}$ − ٢
- هـ(س) = $\sqrt{\text{س}}$ + ١

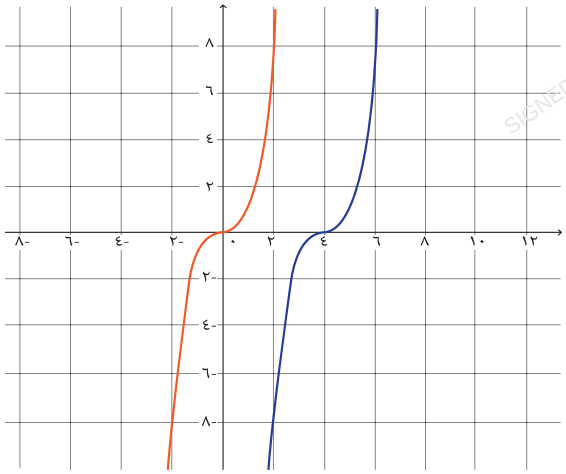
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



نشاط ٥

أعيّنُ النقاط: أ(٣ ، ١)،
ب(-١ ، -١)، جـ(-٢ ، ٠)،
د(٢ ، ٢)، وأرسمُ الشكل الرباعي
أ ب جـ د في المستوى
الديكارتي:

- صورة النقطة أ (٣ ، ١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: أَ(٦ ، ١).
- صورة النقطة ب (-١ ، -١) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: بَ(....، .....).
- صورة النقطة جـ (-٢ ، ٠) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: جـَ(..... ، .....).
- صورة النقطة د (٢ ، ٢) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي: دَ(..... ، .....).
- أرسمُ الشكل الرباعي أَ بَ جـَ دَ في المستوى الديكارتي.
- ألاحظ أن النقطة(س،ص) بعد انسحابها ٣ وحداتٍ إلى اليمين هي النقطة: (س+٣،ص).



نشاط ٦

اعتماداً على منحنى
ق(س) = س^{٣} ، س ∈ ح
ومنحنى الاقتران:
ل(س)= (س − ٤)^{٣}

منحنى الاقتران ل هو انسحاب لِـ ..... بمقدار ..... وحدات.

أمثّلُ منحنيات الاقترانات: هـ(س)=(س + ٥)^{٣} ، ك(س)=(س + ٣)^{٣} − ٢، في المستوى الديكارتي.

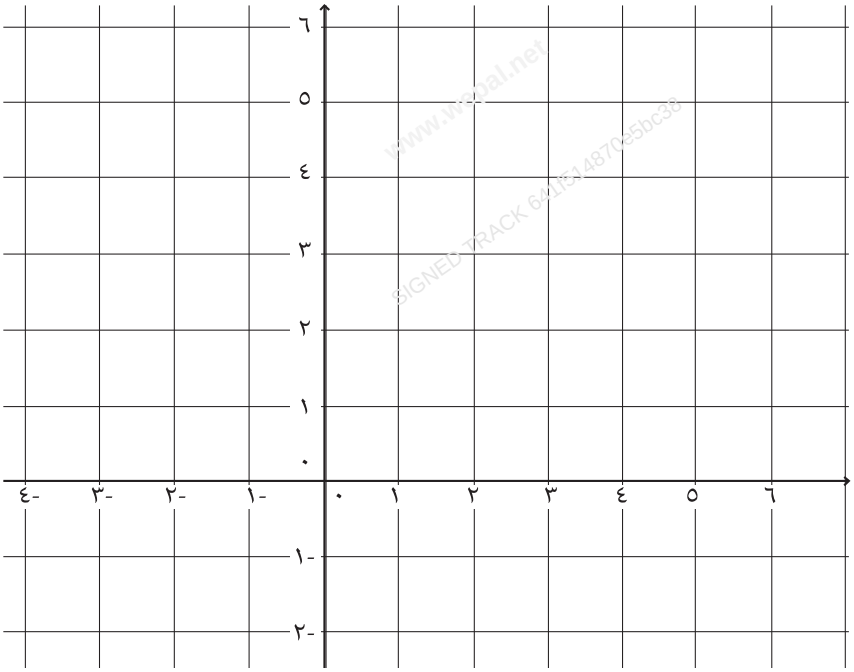
أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(س + جـ) هو انسحاب إلى اليسار لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار جـ وحدة، إذا كانت جـ > صفر ، وانسحاب الى اليمين بمقدار | جـ | وحدة، اذا كانت جـ < صفر.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



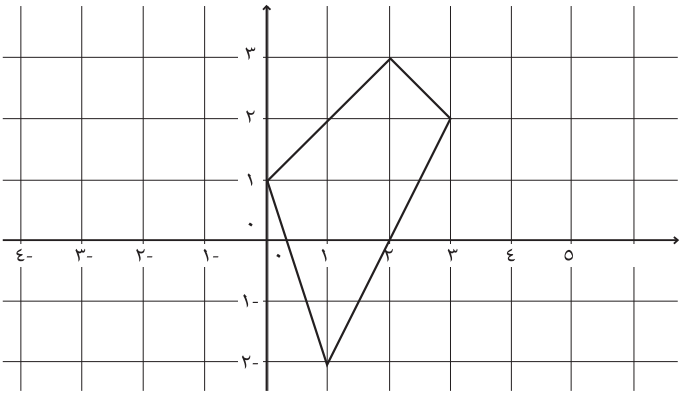
أستخدمُ طريقة إكمالِ المربع؛ لمعرفة التحويلاتِ الهندسيّةِ التي أُجرِيَت على منحنى الاقتران: ق(س) = س^{٢} + ٤س ، ثم أرسمُه، باستخدام تلك التحويلات.

- أجدُ المقدار: ($\frac{\text{معامل س}}{٢}$)^{٢} = ($\frac{٤}{٢}$)^{٢} = ...
- أكتبُ قاعدة الاقتران بالصورة: ق(س) = (س^{٢} + ٤س + ...) − .....
- ومنها: ق(س) = (س + ...)^{٢} − ..... ، (لماذا)؟
- أصِفُ بالكلمات التحويلات الهندسيّة الناتجة .....
- أرسمُ منحنى الاقتران ق في المستوى الديكارتي.

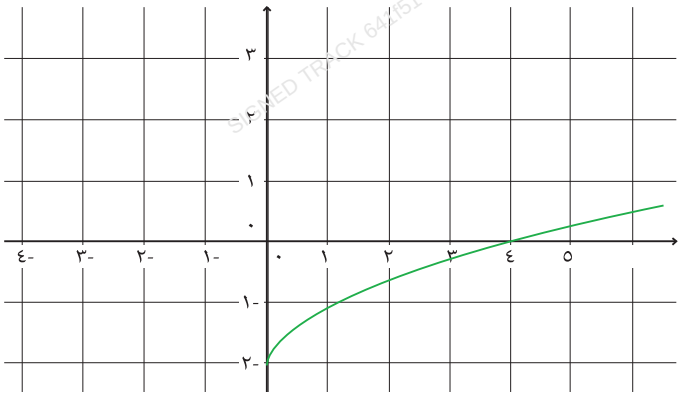


الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(١) أرسمُ الشكلَ الرباعيّ المرسومَ في المستوى الديكارتي بعد انسحابه وَحدتين إلى اليسار، ومن ثم ٣ وَحداتٍ إلى الاسفل.



(٢) بالاعتماد على منحنى ص = ق(س) ، س ≥ ٠ الممثّلِ في المستوى الديكارتي، أمثل منحنى كل من الاقترانات الآتية في المستوى نفسه



أ) هـ(س) = ق(س) − ٥

ب) ل(س) = ق(س + ٤)

جـ) د(س) = ق(س − ١) + ٣

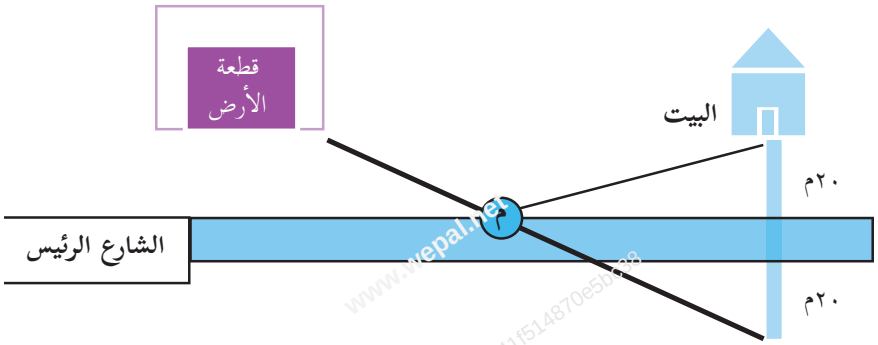
(٣) باستخدام طريقة إكمال المربع، أرسمُ منحنى الاقتران: هـ(س) = س^{٢} − ١٠ س + ٢٧ ، اعتماداً على منحنى ق(س) = س^{٢}

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمثيل الاقترانات باستخدام الإنعكاس
(Reflection)

نشاط ١

تهتـمُّ وِزارةُ الزراعـةِ بشـقِّ طُـرقٍ زراعيّـةٍ فـي القـرى الفِلسـطينيّةِ؛ لزيـادة الاهْتمـام بالأراضـي والثروة الزراعيّة. طلـب مُـزارعٌ مـن الـوِزارة مساعدتَه في شـقِّ طريقٍ بين بيته وقطعة الأرض التي يملكُها ويربطه مع الشارع الرئيس، فذهب مهندسُ البلديّة لمُعاينةِ الموقع، وارتأى أنْ تُشَقَّ الطريقُ، كالمخطّط الذي يظهرُ في الشكل.



أناقش

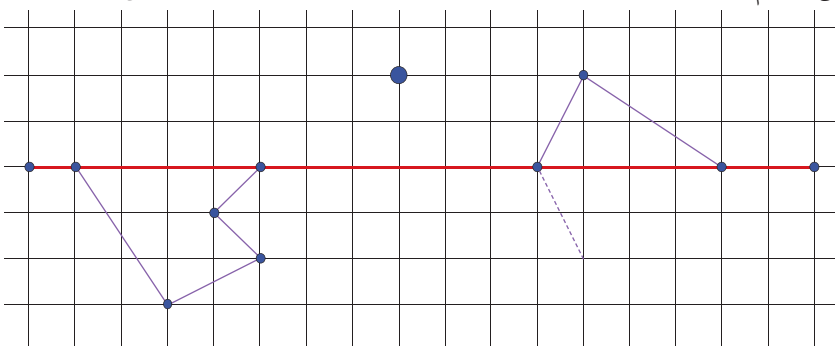
المخطّطَ الذي رسمه المهندس.

أفكر

لماذا أصبحت التكاليفُ أقلَّ ما يمكنُ، عند تحديد موقع النقطة م على الشارع،كما تراه في المخطط؟

نشاط ٢

أُكملُ رسمَ الأشكال الآتية، باعتبار الخطِّ الأحمر محورَ انعكاس:



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أتذكّرُ انعكاس النقطة أ (س،ص) في محور السينات هي النقطة أ´ (س،-ص).

أُكملُ الجدول الآتي:

نشاط ٣

س	٢	١	٠	١-	٢-
ق(س) = س^{٣} + ١			١		٧-
- ق(س) = - (س^{٣} + ١)	٩-				

- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى الديكارتي، وأمثّلُ منحنى الاقتران ق(س).
- أُعيّنُ النّقاطَ من الجدول في المستوى نفسه، وأمثّلُ منحنى الاقتران -ق(س).

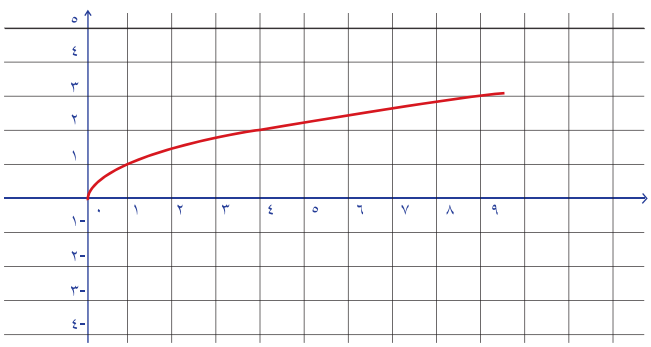
أُلاحظُ أنّ:.....

أتعلّمُ: منحنى الاقتران -ق(س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور السينات.

نشاط ٤

يُمثّلُ الشكلُ الآتي منحنى الاقتران:

ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، س $\geq$ صفر .

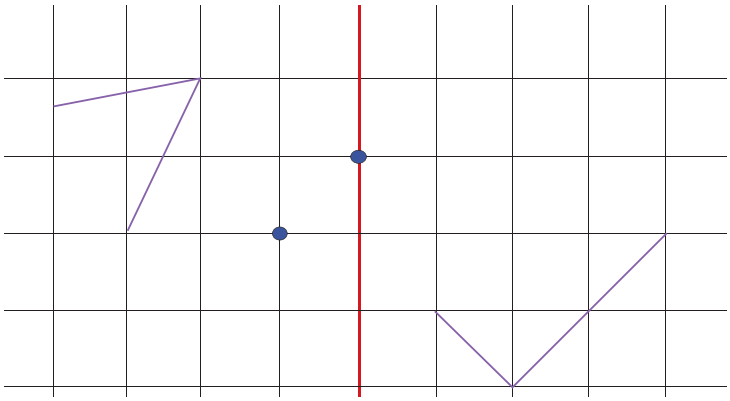


أُمثّلُ منحنى الاقتران ل(س) = $-\sqrt{\text{س}}$ على المستوى نفسه.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٥

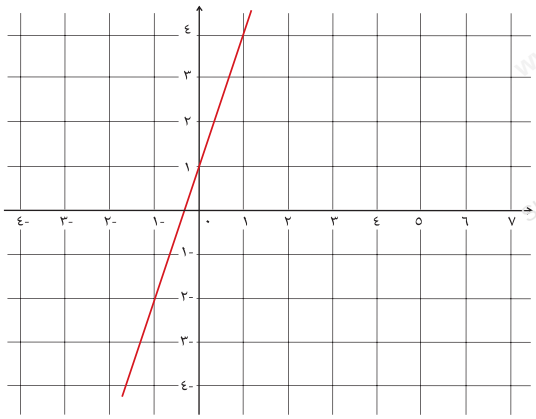
أُكملُ رسمَ الأشكالِ الآتية، باعتبار الخطِّ الأحمرِ محورَ انْعكاس:



أتذكّرُ انعكاس النقطة أ (س،ص) في محور الصادات هي النقطة أَ (-س،ص).

نشاط ٦

يُمثّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقتران
ق(س) = ٣س + ١
أُكملُ: بالاعتماد على القاعدة، يكون
ق(-س) = ٣(-س) + ١ = ...



س	٣	٠	-١
ق(-س)		١	

بالاعتماد على الجدول، أمثّلُ منحنى الاقتران ق(-س) في المستوى الديكارتي.

أتعلّمُ: منحنى الاقتران ق(-س) هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) في محور الصادات.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٢-٢

(١) أكتبُ الزوجَ المرتّبَ الذي يمثّلُ التحويلات الهندسيّةِ على النقطة (٣، -٤)، في الحالات الآتية:

أ) انعكاس في محور الصادات.

ب) انعكاس في محور السينات.

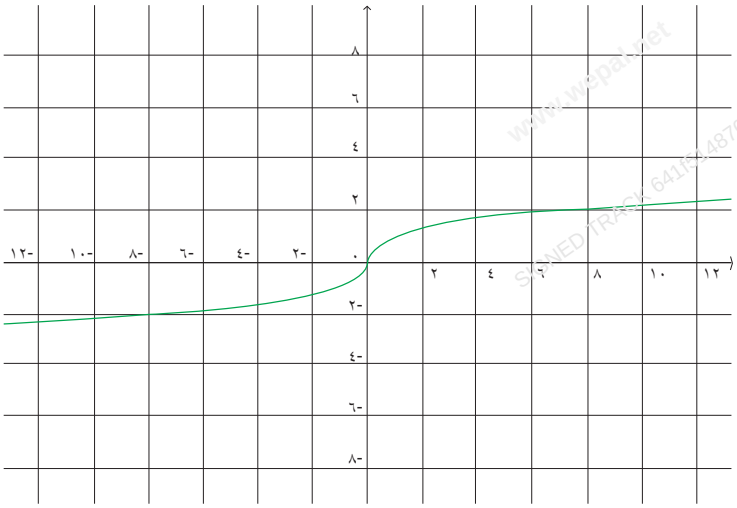
(٢) أصِفُ بالكلمات التحويلاتِ الهندسيّة الآتية على منحنى ق(س):

أ) ق(-س)

ب) -ق(س) + ١

جـ) ق(س − ٢) + ٣

(٣) اعتماداً على منحنى ق(س) المرسوم، أرسمُ منحنيات الاقترانات الآتية:



أ) ق(-س) − ١

ب) -ق(س) + ١

جـ) -ق(-س)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

إشارة الاقتران (Function's Sign)

نشاط ١

تهتمُّ وِزارةُ التجارةِ والصناعةِ بتحسين الوضع الاقتصادي، ودعم التجارة في فِلسطينَ.
أبـو ياسـين تاجـرُ أحذيـةٍ، ينـال خصميّـاتٍ علـى المسـتحقات المترتبـة عليـه؛ نظـراً لالتزامـه بواجباته تجاه الوزارة، طلب أبو ياسين من محاسب المَحالِّ التجاريّة تزويدَه بالوضع الماليّ لإحداها خلال السنة السابقة، فقدّم له المحاسبُ الوضعَ الماليّ كما في الجدول الآتي:

الشهر	كانون ثاني	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	تشرين أول	تشرين ثاني	كانون أول
الوضع المالي	−	+	+	+	٠	−	−	+	+	+	٠	−

- الأشهر التي ربح المحلّ فيها هي: .....
- الأشهر التي خسر فيها المحلّ هي: .....
- ماذا نستنتج عن الوضع المالي في شهريّ: أيار، تشرين ثاني ؟

أناقش

هل الجدول يعطي صورة شاملة عن الوضع المالي للمحلّ ؟

أولاً: إشارة الاقتران الثابت

نشاط ٢

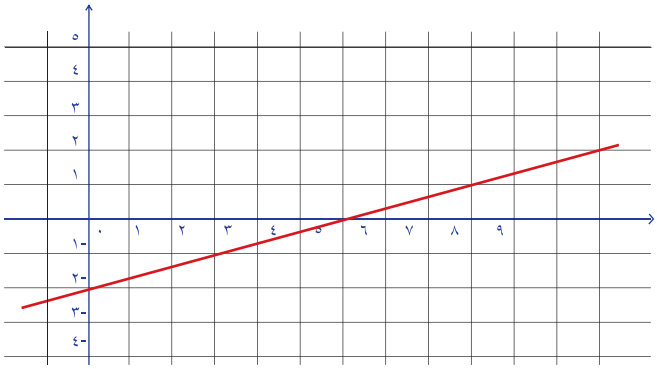
أُعطي أمثلةً على اقترانات ثابتة.

- ق(س)= ١٢، وإشارته موجبة.
- ق(س)= -π، وإشارته سالبة.
- ل(س)= -٢٣، وإشارته .....
- ك(س)= .....، وإشارته موجبة.
- هـ(س)= .....، وإشارته .....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران الثابت ق(س) = جـ ، جـ ∋ ح، هي إشارة جـ نفسها.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

ثانياً: إشارة الاقتران الخطّي





يبين الشكل المجاور منحنى اقتران خطي ،
قاعدته ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س − ٢

- نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات هي: (....،....).
- صفر الاقتران هو: .....
- الفترة التي وقع فيها المنحنى فوق محور السينات هي: .....، وتكونُ إشارتُه .....
- الفترة التي وقع فيها المنحنى تحت محور السينات هي: ..... ، وتكونُ إشارتُه .....
- أعيّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد:



أتعلم: إشارة الاقتران الخطي ق(س) = أ س + ب ، س ∈ ح، أ ≠ صفر هي نفس إشارة معامل س ، لكلّ س أكبر من صفر الاقتران، وعكس إشارة معامل س، لكلّ س أصغر من صفر الاقتران.

يُمكنُ توضيحُ ذلك على خط الأعداد:

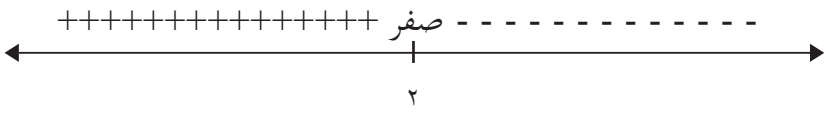


الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثال(١): أعيّنُ إشارة الاقتران ق(س) = ٤ − ٢س

الحلّ: صفر الاقتران = ٢، إذن: يقطعُ منحنى الاقتران محورَ السينات في النقطة (٢، ٠).

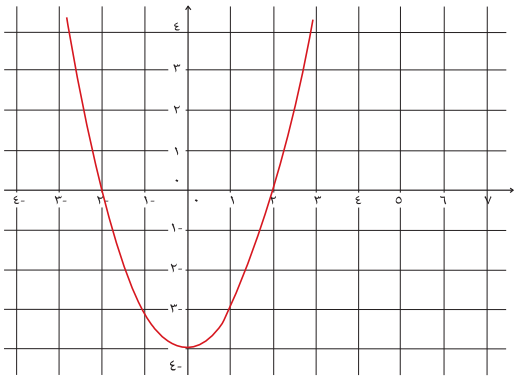
- إشارة الاقتران (+) موجبة "عكس إشارة معامل س"، لكلّ س < ٢.
- إشارة الاقتران (−) سالبة "إشارة معامل س نفسها"، لكلّ س > ٢.
- أعيّنُ الإشارة على خط الأعداد الآتي:



- يُمكنُ كتابةُ الحلّ بالصورة: ق(س) < صفر (موجبا)، في الفترة]−∞، ٢[

ق(س) > صفر (سالبا)، في الفترة]٢، ∞[

ق(س) = صفر ،عندما س= ٢.

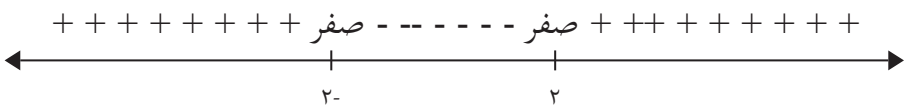


ثالثا: إشارة الاقترانِ التربيعيّ

نشاط ٤

أتأمل منحنى الاقتران المرسوم ق(س) = س^{٢} − ٤،

وإشارة الاقتران الموضّحة على خط الأعداد:



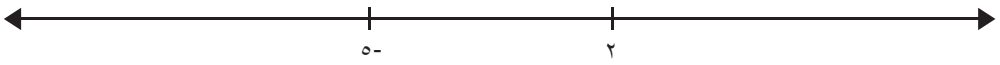
- يقطع المنحنى محور السينات في النقطتين: (.....، .....) ، (.....، .....)
- يقع منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة .....
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة .....
- إشارة الاقتران موجبة في الفترة .....، بينما إشارته سالبة في الفترة .....
- أصفار الاقتران هي: .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٥

أعيّنُ إشارة الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = س^{٢} + ٣س − ١٠

- أصفار الاقتران هي: .....
- أرسم خط الأعداد، وأعيّنُ عليه أصفار الاقتران.



- ق(-٦) = ٣٦ + -١٨ − ١٠= ٨ > صفر (قيمة موجبة).

ق(-٧) =.....

ق(-٣) = ٩ + -٩ − ١٠ = -١٠ < صفر (قيمة سالبة).

ق(١) = ...

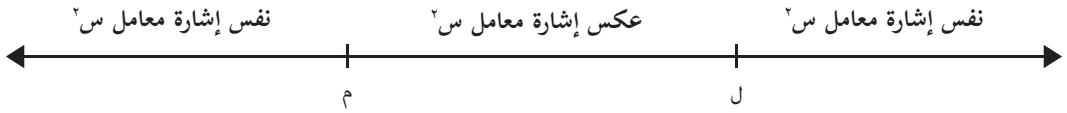
ق(٤) = ١٦ + ١٢ − ١٠ = ١٨ > صفر (قيمة موجبة).

ق(٦) = ...

- أعيّنُ إشارةَ الاقتران على خط الأعداد.
- أكتبُ الفتراتِ التي فيها يكون ق(س) موجباً، والفتراتِ التي يكون فيها الاقتران سالباً.

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ تكون عكس إشارة معامل س^{٢} بين صفريّ الاقتران، وما عدا ذلك فهي إشارة معامل س^{٢}.

ويُمكنُ توضيحُ ذلك بالشكل؛ حيث ل،م هما صِفرا الاقتران ق ، ل > م :



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٦

أعيّنُ إشارةَ الاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ١ − س^{٢}

- أصفار الاقتران هي: .....
- إشارة معامل س^{٢} هي: .....
- إشارة الاقتران موجبة (عكس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة .....
- إشارة الاقتران سالبة (نفس إشارة معامل س^{٢}) في الفترة .....

- أرسمُ خطّ الأعداد، وأعيّنُ عليه إشارة الاقتران:

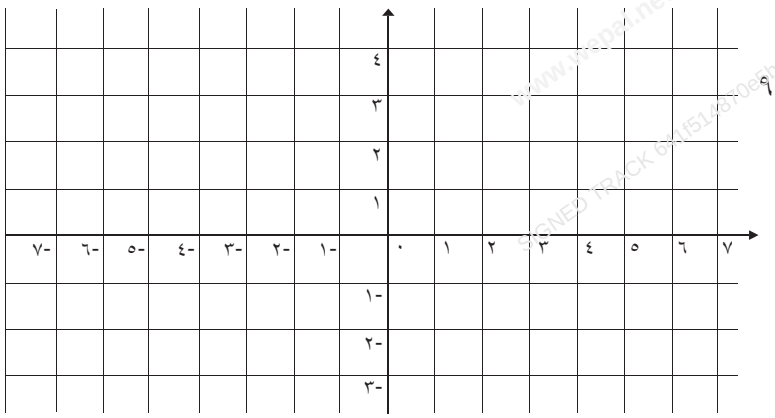


- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة .....
- يقعُ منحنى الاقتران تحت محور السينات في الفترة .....

نشاط ٧

أرسمُ منحنى الاقتران:

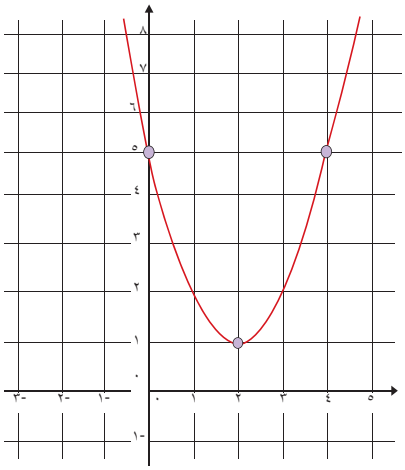
ق(س) = س^{٢} + ٦ س + ٩



- أصفار الاقتران هي: .....
- إشارة معامل س^{٢} هي: .....
- أُعيّنُ إشارة الاقتران على خط الأعداد.
- يقعُ منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة .....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ: هي إشارة معامل س^{٢} ، إلّا عند صفر الاقتران، إذا كان له صفر واحد فقط.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



نشاط ٨

أتأمّلُ منحنى الاقتران في الشكل المجاور ،
ثمّ أُجيبُ عن الأسئلة التي تليه:

- هل قطع المنحنى محور السينات ؟
- يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات في الفترة.....
- أعيّنُ إشارة ق(س) على خط الأعداد وأكتب قاعدته.....

أتعلّمُ: إشارة الاقتران التربيعيّ هي إشارة معامل س^{٢}، إذا لم يقطعْ منحناهُ محورَ السينات.

أفكر

ما العلاقةُ بين مُميّز العبارة التربيعية (ب^{٢} − ٤ أ جـ) المرافقة للاقتران التربيعي وإشارته ؟

رابعا: إشارة الاقتران النسبيّ

يُسمّى الاقترانُ ق اقتراناً نسبيّاً إذا كانت قاعدتُه على الصورة الآتية:

$$ق(س) = \frac{ل(س)}{م(س)}$$ حيث ل،م كثيرا حدود ، م(س) ≠ صفر.

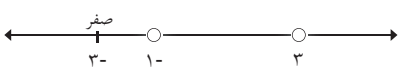
نشاط ٩

أُعيّنُ إشارة الاقتران: $ق(س) = \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ ، س ≠ ٣ ، -١

أعيّنُ إشارةَ البسطِ (س + ٣)، كاقترانٍ خطيّ على خطّ الأعداد:

أعيّنُ إشارةَ المقامِ (س^{٢} − ٢س − ٣)، كاقترانٍ تربيعيّ على خطّ الأعداد

أُعيّنُ إشارةَ الاقترانِ النسبيّ ق على خطّ الأعداد:



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أعيّنُ إشارةَ الاقترانِ ق الذي قاعدته: ق(س)= $\frac{٥}{١ + س}$ ، س ≠ −١

- إشارة البسط هي ....
- أُعيّنُ إشارةَ البسط على خطّ الأعداد: ⟷
- أُعيّنُ إشارةَ المقام (س+١) على خط الأعداد: ⟷
- أُعيّنُ إشارةَ الاقتران النسبي ق على خط الأعداد: ⟷

تمارين ومسائل ٢-٣

(١) أُعيّنُ إشارةَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

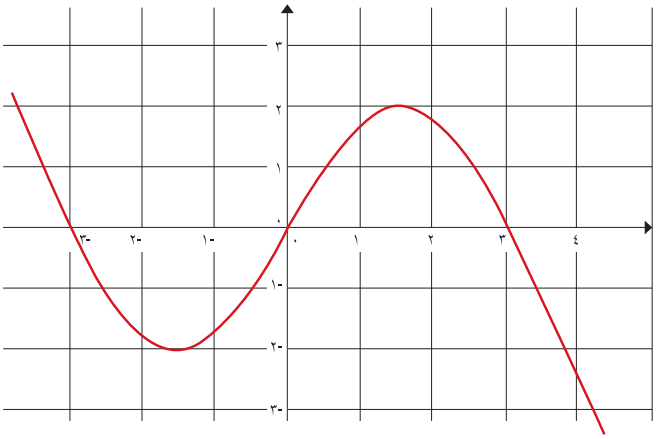
أ) هـ (س) = ٤ − س

ب) ع (س) = -٤ − ٤س − س^{٢}

جـ) م (س) = $\frac{-١}{س}$ ، س ≠ صفر

د) ك (س) = $\frac{س^{٢} + ٦س + ٥}{س - ٤}$ ، س ≠ ٤

(٢) أُعيّنُ إشارةَ الاقتران ق على الفترة [-٣ ، ٤]:



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

حلُّ المُتباينات (Solving Inequalities)

نشاط ١

السياحةُ الداخليّةُ في فلسطينَ من مصادر الدخل. عرضتْ شركةُ سياحةٍ وسفرٍ عُروضاً للسفر في الصيف، في العَرْضِ الأوّل، يدفعُ الشخصُ مبلغَ ٧٠ ديناراً، و٢٠ ديناراً، عن كلّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق. وفي العَرضِ الثّاني يدفعُ الشخصُ مبلغَ ١٠٠ دينارٍ، و١٥ ديناراً، عن كلّ ليلةٍ يبيتُها في الفندق.



درسَ أمينٌ العرضيْن، واختارَ العرضَ الثّاني:

- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ليلتيْن، فإنّهُ يدفعُ: ١٣٠ ديناراً
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٥ ليالٍ، فإنّهُ يدفعُ: .....دينار
- إذا أقامَ أمينٌ في الفندق ٩ ليالٍ، هل كان العرض الذي اختاره أفضل من العرض الأول ؟
- ما أقل عدد ممكن من الليالي يقيم أمينٌ في الفندق؛ ليكونَ العرضُ الذي اختاره أقلَّ تكلفةً ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٢

أَحلُّ المُتباينَةَ: ٢(س – ١) > ٣، وأُمثِّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد.

- أُطبقُ خواص التباين: ٢س – ٢ > ٣ .
- أَحلُّ المتباينة: ٢س > ..... اذن س > .....
- مجموعةُ الحلّ هي: .....
- أُمثّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد:
- الفترةُ التي تُمثّلُ مجموعةَ الحلّ هي: .....

نشاط ٣

لَدى مُزارعٍ حديقةٌ منزليّةٌ مِساحتُها ٣٥٠ م٢، ولَديْهِ سياجٌ من الأسلاك طولُهُ ٦٠ م.
استخدمَ المزارعُ كاملُ هذا السياجَ لتسييجِ جزءٍ مستطيلِ الشكلِ من حديقتِه، لا تقِلُّ مِساحتُه عن ٢٠٠ م٢، أُكملُ:

محيط المستطيل= ٢س + ٢ص ، حيث: س = طول المستطيل ، ص = عرض المستطيل.

إذن: ..... + ... = ٦٠

ص= (٣٠ – س)

مِساحة المستطيل= س × ص

أحلُّ المتباينة: س (٣٠ – س) ≤ .....

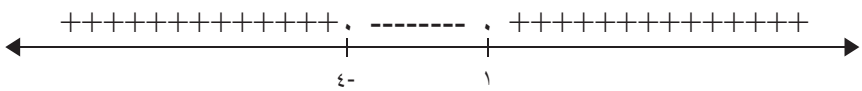
الأبعادُ المُمْكنةُ للجزء الذي تمّ تسييجُهُ من الحديقة:

س: .....

ص: .....

مثال(١): ما مجموعةُ حلّ المتباينة: س٢ + ٣س > ٤ ؟

- س٢ + ٣س – ٤ > صفر (لماذا)
- س٢ + ٣س – ٤= (س – ١) (س + ٤)



مجموعةُ حلّ المتباينة هي:] -٤ ، ١ [، ويمكنُ كتابتُها: -٤ < س < ١

أتعلّمُ: يُمكنُ كتابةُ مجموعةِ الحلّ على شكل فترة، أو باستخدام علاقات الترتيب > أو <

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أحلُّ المتباينة: س^{٢} + س − ١٢ ≥ صفر .

أُحدّدُ إشارةَ العبارة: س^{٢} + س − ١٢، وأُعيّنُ ذلك على خطّ الأعداد:



مجموعةُ حلِّ المتباينةِ وَفقَ إشارتها (≥ صفر) هي: .....

أكتبُ مجموعةُ الحلّ بطريقة أخرى: .....



أحلُّ المتباينةَ: س^{٢} − ٦س + ٩ < صفر.

أُعيّنُ إشارةَ العبارة: س^{٢} − ٦س + ٩، وأعيّنُ ذلك على خطّ الأعداد:



مجموعة حلّ المتباينةِ وفقَ إشارتها (< صفر) هي: .....

أكتبُ مجموعةُ الحلّ بطريقة أخرى: .....

تمارين ومسائل ٤-٢

(١) ما مجموعةُ حلّ المتباينات الآتية؟

أ) ٢ (س + ١) ≥ ٣ (س − ١)

ب) س^{٢} + س + ١ > صفر

(٢) ما هي الأعداد التي مربعُ كل منها أصغرُ من العدد نفسه ؟

(٣) أكتبُ المتباينةَ من الدرجة الثانية التي تظهرُ مجموعةُ حلّها على خطّ الأعداد الآتي:



(٤) محلٌ لبيعِ الفطائر حدّدَ ربحَهُ بالعلاقة:

الربح = -١٠٠ (س − ١,٧٥)^{٢} + ٣٠٠ ، حيثُ س سعرُ بيعِ الفطيرةِ الواحدة، فكم ديناراً يربحُ صاحبُ المحلّ (يزيد الربح كلما كان سعر الفطيرة أقل):

أ) إذا باع الفطيرة بسعر ١,٥ دينار.

ب) إذا باع الفطيرة بسعر ٣,٧٥ دينار.

جـ) ما السعرُ الذي يُمكنُ أنْ يبيعَ به الفطيرةَ؛ ليكونَ ربحُه أكثرَ من ٢٧٥ ديناراً ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



تُشجّعُ وِزارةُ التربيةِ والتعليمِ الرّحْلاتِ الترفيهيّةِ والعلميّةِ، ليقومَ الطلبةُ بزيارة الأماكنِ الأثريّةِ، والتعليميّةَ، والترفيهيّةِ في فلسطينَ، ومن الأماكنِ الترفيهيّةِ التي يزورُها الطلبةُ مدنَ الملاهي، التي تعملُ على اجتذاب الزائرين، بإعلان خصميّات على سعر تذاكر الدخول. عمدَتْ إحدى مدن الملاهي إلى نشر الإعلان الآتي للزائرين:

مجموع سعر التذاكر (بالدينار)	عدد الأفراد
عدد الأفراد × ١٠	١ ≤ عدد الأفراد < ٥
(عدد الأفراد × ٥) + ٢٠	٥ ≤ عدد الأفراد < ١٠
(عدد الأفراد × ٣) + ٤٠	١٠ ≤ عدد الأفراد < ٤٠
١٥٠	٤٠ ≤ عدد الأفراد

- المبلغُ الذي تدفعُهُ عائلةٌ مكوّنةٌ من ٤ أفراد = ...
- المبلغُ الذي تدفعُه عائلةٌ مكونةٌ من ٨ أفراد = ...
- المبلُغ الذي تدفعُه مجموعةٌ مكوّنةٌ من ١٨ طالباً = ...
- المبلغُ الذي يدفعُهُ ٥٥ طالباً = ...
- المبلغُ الذي تدفعُه كلُّ مجموعةٍ من الأشخاص يتغيّرُ بتَغيُّرِ .....

تُسمى مثل هذه العلاقة اقتراناً متعدد القاعدة

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٢

من الأمثلة على الاقترانات متعددة القاعدة:

١) $ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، \quad س \leq ١ \\ ٢س & ، \quad س > ١ \end{cases}$

٢) $ق(س) = \begin{cases} ٢س & ، \quad س \geq -٥ \\ ٤ & ، \quad -٥ > س > ٥ \\ س - ٣ & ، \quad س \leq ٥ \end{cases}$

٣) أعطِ مثالاً لاقتران متعدد القاعدة

تمثيلُ الاقترانات متعددة القاعدة بيانيّاً:

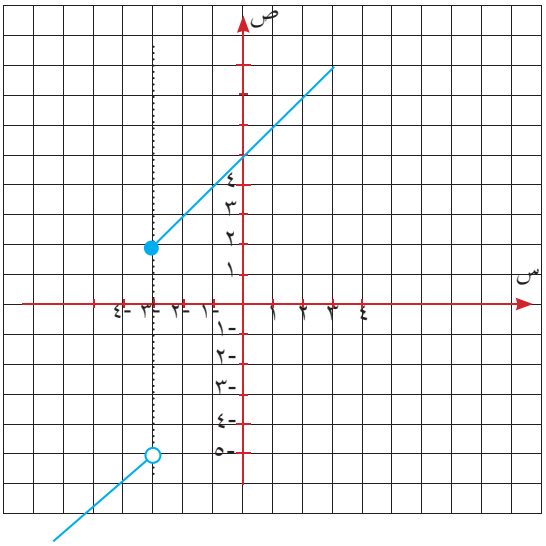
نشاط ٣

أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: $ق(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، \quad س > -٣ \\ س + ٥ & ، \quad س \leq -٣ \end{cases}$

أُكملُ الجدولَ الآتي:

س	٨-	٦-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	٣	٥
ص		٨-		٢			٥		

- أعيّنُ النقاطَ في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

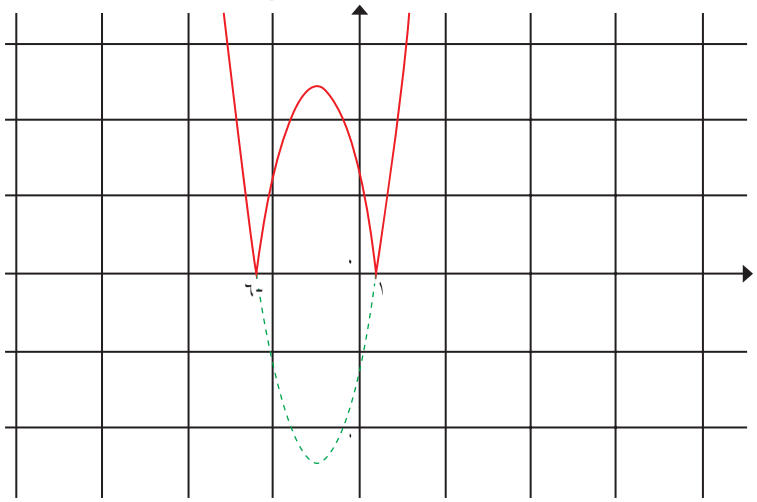
نشاط ٤ أمثّلُ بيانيّاً الاقترانَ الذي قاعدتُه: ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ٥ & ، \quad س \geq -٣ \ * \\ ٢س & ، \quad -٣ < س < ١ \\ س^{٢} & ، \quad س \leq ١ \end{cases}$

أكملُ الجدولَ الآتي:

س	-٨	-٦	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص		-٧		-١		-٢		١				

أعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران:

مثال: أُمثّلُ بيانياً الاقتران ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٥س - ٦ & ، \quad س \geq -٦ \\ -(س^{٢} + ٥س - ٦) & ، \quad -٦ < س < ١ \\ س^{٢} + ٥س - ٦ & ، \quad س \leq ١ \end{cases}$



* عند التمثيل البياني لاقتران متعدد القاعدة يتم تعويض نقطة التحول في القاعدتين ونضع دائرة مفتوحة عند القاعدة التي لا تنتمي إليها النقطة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٢-٥

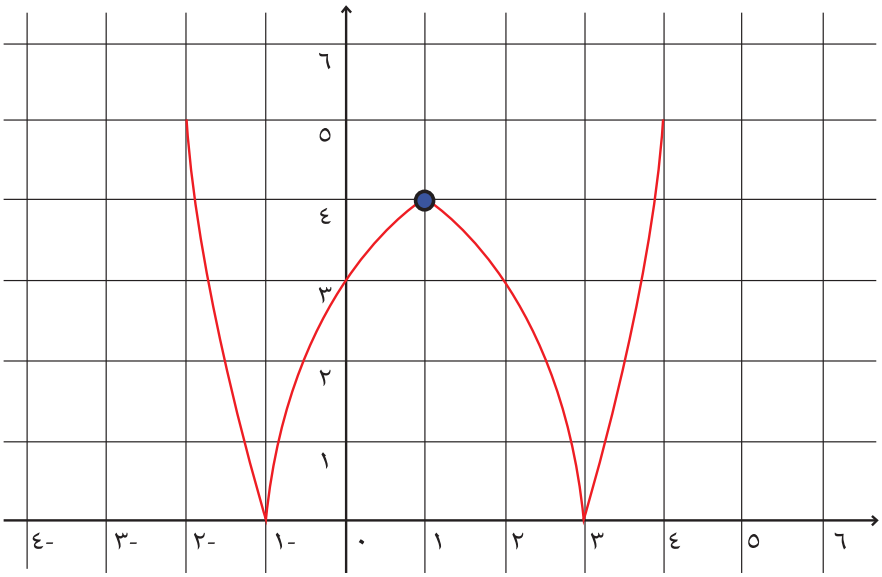
(١) أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٣ & ، \quad س < -٤ \\ س & ، \quad -٤ \leq س \leq ٢ \\ -س + ٦ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، \quad س > \text{صفر} \\ س^{٢} & ، \quad س \leq \text{صفر} \end{cases}$$

(٢) للاقتران الذي يظهرُ منحناه في المستوى الديكارتي أدناه:

- ما إحداثيّاتُ نقطةِ الرأس؟ وما معادلةُ محور تماثُل المنحنى؟



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

اقتران القيمة المُطْلقة* (Absolute Value)

نشاط ١

المحافظة على جسمٍ سليمٍ تساعد في بناء عقلٍ سليم، والكتلة عند أبناء الجيل الواحد تكون متقاربةً بالمعدل، فكانت كتلة ليلى (٦٠كغم)، وكتلة مها (٥٥كغم)، وعند إيجاد الفرق بين كتلتيْهما يكون الفرق المطلق يساوي:



|٦٠ − ٥٥| = |٥٥ − ٦٠| = ...

هناك كميّاتٌ لا يمكن أنْ تكون إلّا على صورةٍ واحدة، وهي الصورة الموجبة. أعط أمثلةً أخرى لكميّاتٍ لا يمكن أن تكون إلّا موجبة: ....

نشاط ٢

أجد ناتج ما يأتي:

| -٣ | = ... ، | ٤ | = ... ، | -$\frac{١}{٢}$ | = ...

| ٤ − ٣ | = ... ، | -١ − ٤- | = ... ، | ٠ − ١٢ | = ...

تعريف

يُسمّى الاقتران المكتوب على صورة ق(س) = | س | **اقترانَ القيمةِ المُطْلَقة**، ويمكن كتابة الاقتران ق(س)، دون استخدام رمز القيمة المُطلقة، كما يأتي:

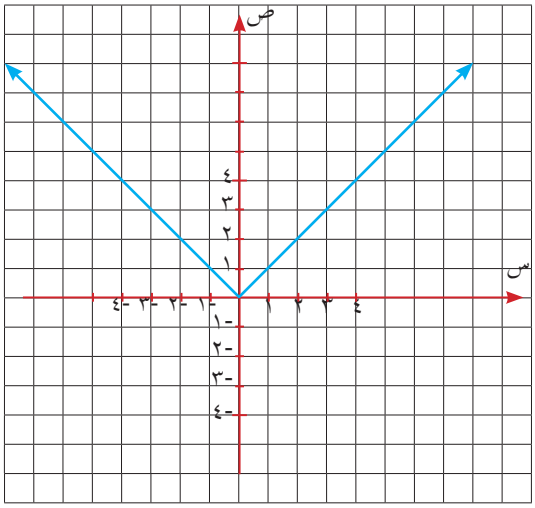
$$\text{ق(س)} = |\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geqslant \text{صفر} \\ -\text{س} & ، \text{س} < \text{صفر} \end{cases}$$

* يعتبر اقتران القيمة المطلقة من الاقترانات متعددة القاعدة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٣

عند تمثيل الاقتران ق(س) = | س | في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل:



أجب عمّا يلي:

أ) مجال الاقتران هو ح.

ب) مدى الاقتران هو .....

جـ) أرسم محور التماثل.

د) أحدّد صفر الاقتران .....

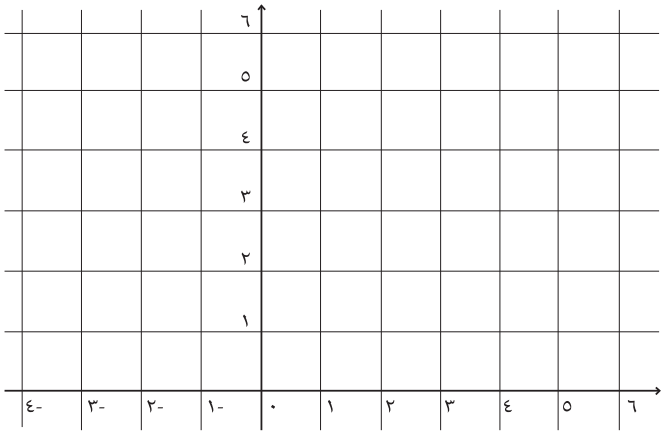
هـ) هل الاقتران واحد لواحد؟ لماذا؟

نشاط ٤

أُعيدُ تعريف الاقتران ق(س) = | س − ٣ |، دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم أمثله بيانياً:

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} - ٣ \geq \text{صفر} \\ -(\text{س} - ٣) & ، \quad \text{س} - ٣ > \text{صفر} \end{cases}$$

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} \geq ٣ \\ -\text{س} + ٣ & ، \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$$



مجال ق(س): .....

مدى ق(س): .....

منحنى ق(س) = | س − ٣ |

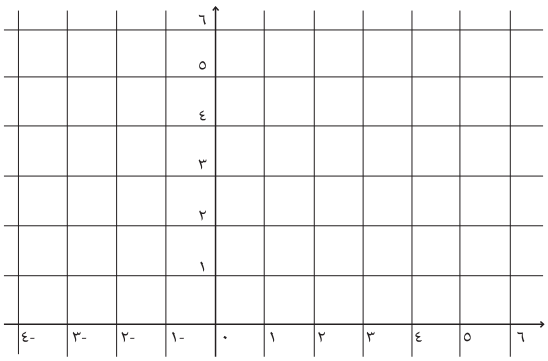
انسحاب لمنحنى | س | ..... وحدة إلى .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٥

أمثل باستخدام التحويلات الهندسية ق(س)= | س | + ١

منحنى ق(س) هو انسحاب لمنحنى | س | بمقدار ..... إلى .....

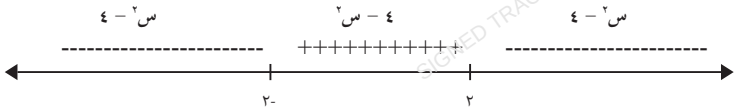


نشاط ٦

أعيد تعريف ق(س) = | ٤ − س^{٢} | ثم أمثله بيانياً.

$$| ٤ - س^{٢} | = \begin{cases} ٤ - س^{٢} & ، \quad ٤ - س^{٢} \leq ٠ \\ س^{٢} - ٤ & ، \quad ٤ - س^{٢} > ٠ \end{cases}$$

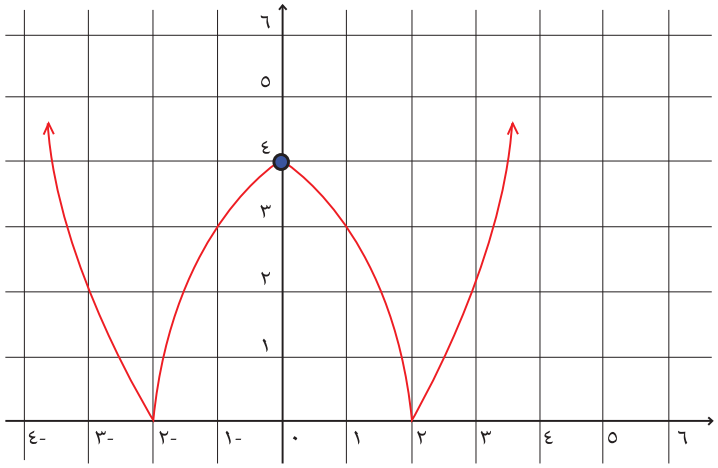
لحل المتباينات نبحث في إشارة ٤ − س^{٢}



٤ − س^{٢} = (٢ − س) (٢ + س)

$$| ٤ - س^{٢} | = \begin{cases} ..... & ، \quad س < -٢ \\ ٤ - س^{٢} & ، \quad -٢ \leq س \leq ٢ \\ س^{٢} - ٤ & ، \quad س > ..... \end{cases}$$

التمثيل:



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٢-٦

(١) إذا كان: ق(س) = |س − ٣|، هـ (س) = |٢ − ٣س|، أجد:

ق(٢) ، ق(-٥) ، هـ (-١) ، هـ (٠) ، ق ($\frac{٢}{٣}$)

(٢) ١) أُعيدُ تعريف الاقترانات الآتية، دون استخدام رمز القيمة المطلقة وأمثلها بيانياً:

أ) ق(س) = |٣س + ٢|　　ب) ق(س) = |٤ − س|

جـ) ق(س) = -|٣س + ٣|　　د) ق(س) = |١ − $\frac{١}{٢}$ س|

٢) أجد مجال ومدى وأصفار الاقترانات السابقة.

(٣) أُمثّل منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية باستخدام التحويلات الهندسية:

أ) ق(س) = |س + ٢|

ب) ق(س) = -|س|

جـ) ق(س) = -|س − ٣| + ٢

(٤) أُعيد تعريف كل من ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = | ٥س − س^{٢} |

ب) ق(س) = | س^{٢} − ٥س + ٦ |

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



لِضمانِ حقوقِ العمّالِ والموظفين، ضِمْنَ قانونِ الضمان الاجتماعي، شجّعَ الرئيسُ الفِلَسطينيُّ إنشاءَ الجمعيّاتِ الاستهلاكيّةِ، والتموينيّة؛ لتشجيعِ الشراءِ، واستهلاكِ الموادِّ التموينيّةِ الوطنيّة. تمنحُ هذه الجمعياتُ زبائنَها نقاطَ شراءٍ، إذْ تقومُ الجمعيّةُ بتسجيلِ عددِ نقاطِ شراء، بحيث يساوي العددَ الصحيحَ من قيمةِ مشترياتِ الزبونِ من الموادّ التموينيّة الوطنيّة، دون اعتبارٍ لمنازل الأجزاء العشريّةِ من تلك القيمةِ، وتُحفظُ تلك النّقاطُ في ملفٍّ خاصٍّ بالزبون، وفي نهاية كلِّ شهرٍ تقومُ الجمعيّةُ بإعطاءِ الزبونِ وثيقةً تتضمَّنُ عددَ النّقاطِ الممنوحةِ له، ليقومَ باستبدالها ببعض المشتريات من الجمعية.

أُكملُ الجدولَ الآتيَ بنقاطِ شراءِ زبونٍ في أحد الأسابيع:

قيمة المشتريات	١١٧,٤	٢٥٠,٥	٢٥٠,٨	١٢٠	١٢٠,٦	٢٩,٩	٣٢٤,٨	٣٥,٥	٣٥,١	٨٥,٩
عدد نقاط الشراء				١٢٠					٣٥	

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

تعريف: أكبرُ عددٍ صحيحٍ للعدد الحقيقيّ س: هو أكبرُ عددٍ صحيحٍ أقلّ من أو يساوي العددَ س، ويُرمَزُ له بالرّمز [ ].



أكملُ الجدولَ الآتي :

[٢٢,٥]	[٥٩,٩]	[٣٢]	[-٧,٣]	[-٢٧]	[-١,٦]	[٦٨]	[-١٨,٥]	[-٠,٧]
٢٢			-٨			٦٨		

أتعلّمُ: لكلِّ س $\in$ ح ، [س] = ن ، حيث ن $\geq$ س $>$ ن + ١ ، ن $\in$ ص.

إذا كان ق(س) = [أ س + ب] ، فإنّ [أ س + ب] = ن ، حيث ن $\geq$ أ س + ب $>$ ن + ١.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثال (١): أحلُّ المعادلة: [٢س + ١] = ٧

الحلّ: ٧ ≤ ٢س + ١ < ٨

٦ ≤ ٢س < ٧ ومنها ٣ ≤ س < ٣,٥



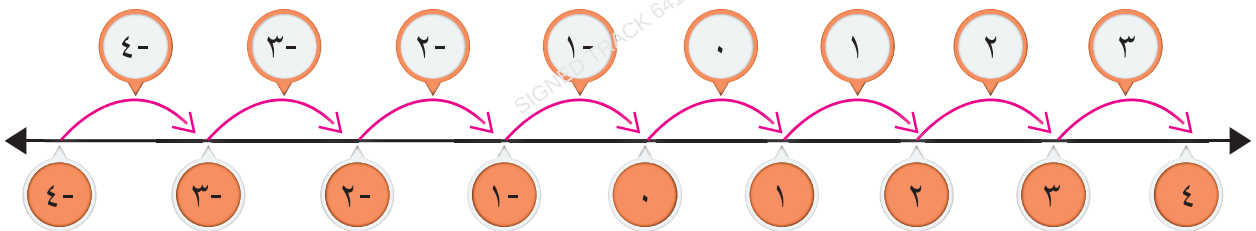
أحلُّ المعادلة: [١ − ٢س] = ١ و أمثّلُ مجموعةَ الحلّ على خطّ الأعداد

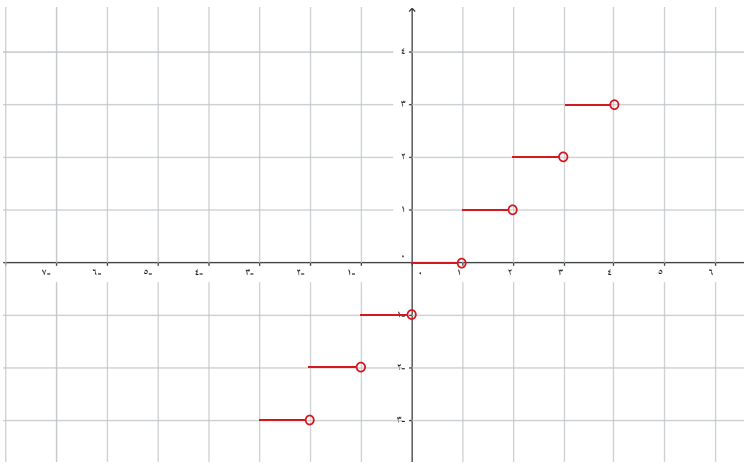
- أضعُ المعادلةَ على شكلِ متباينةٍ بالصورة .....
- أحلُّ المتباينة الناتجة.

مثال (٢): أكتبُ ق (س) = [س]، باعتباره اقتراناً متعدّدَ القاعدة، ثمّ أمثّلُهُ في المستوى الديكارتي.

الحل: أصفارُ الاقتران هي: [س] = صفر: صفر ≤ س < ١

طولُ الفترةِ الجزئيّة: صفر ≤ س < ١ يساوي ١





$$ق(س) = \begin{cases} \vdots \\ -٢ \text{ ، } -٢ \leq س < -١ \\ -١ \text{ ، } -١ \leq س < ٠ \\ ٠ \text{ ، } ٠ \leq س < ١ \\ ١ \text{ ، } ١ \leq س < ٢ \\ ٢ \text{ ، } ٢ \leq س < ٣ \\ \vdots \end{cases}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

ألاحظُ: . نظراً لشكل منحنى الاقتران في المستوى يُطلَقُ عليه الاقتران السُّلَمي

. يسمى المقدارُ $\frac{١}{|\text{معامل س}|}$ طول درجة الاقتران



أكتبُ الاقتران: ق(س) = [٢س]، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة، في الفترة [-١ ، ١]

- طول الدرجة = $\frac{١}{٢}$
- أصفار الاقتران: [٢س] = صفر إذن صفر $\geq$ ٢س $>$ ١
- أكتبُ ق(س) باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة = ...
- أمثّلُ منحنى الاقتران بيانيّاً.



أكتبُ الاقتران الذي قاعدته: ق(س) = [٣ $-$ $\frac{١}{٢}$ س] ، في الفترة [-٢ ، ٧] ، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة، ثمّ أمثّلُهُ بيانيّاً في المستوى الديكارتي.

- طول درجة الاقتران ق = ...
- أصفار الاقتران: [٣ $-$ $\frac{١}{٢}$ س] = صفر $\Leftarrow$ صفر $\geq$ ٣ $-$ $\frac{١}{٢}$ س $>$ ١

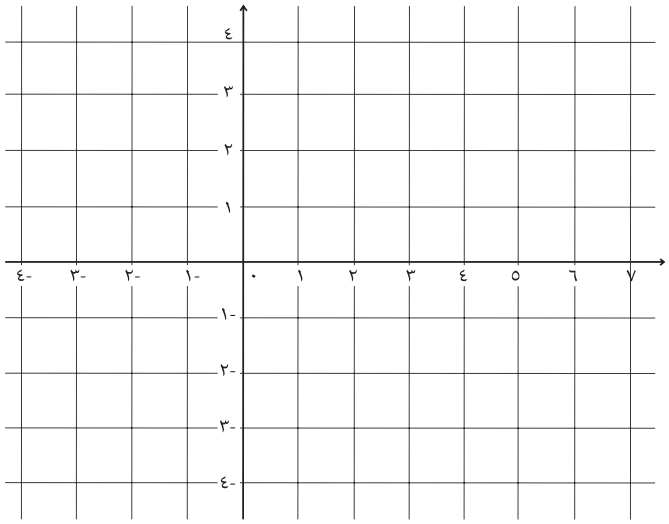
وعليه: ..... $>$ س $\geq$ .....

. أكتبُ الاقتران ق(س)، باعتباره اقتراناً متعددَ القاعدة:

ق(س) = $\begin{cases} \vdots \\ ١ \ ، \ ٢ > س \geq ٤ \\ ٠ \ ، \ ٤ > س \geq ٦ \\ -١ \ ، \ ٦ > س \geq ٧ \end{cases}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

- أُمثلُ منحنى الاقتران، في المستوى الديكارتي.



أتعلّمُ: الاقتران ق(س) = [-س] هو انعكاس للاقتران ق(س) = [س] في محور الصّادات.

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٢-٧

(١) أحلُّ المعادلات الآتية:

أ) [٣س + ١] = ٤

ب) [٣ − ٢س] = -٤

(٢) أمثل كلٍّ من الاقترانات الآتية ؟

أ) ق(س) = [١٠ − ٥س]

ب) هـ(س) = [س − ٣]

جـ) ق(س) = [$\frac{١}{٣}$ س + ٢]

(٣) أتحقّقُ من خطأ العبارات الآتية، بأمثلةٍ عددية:

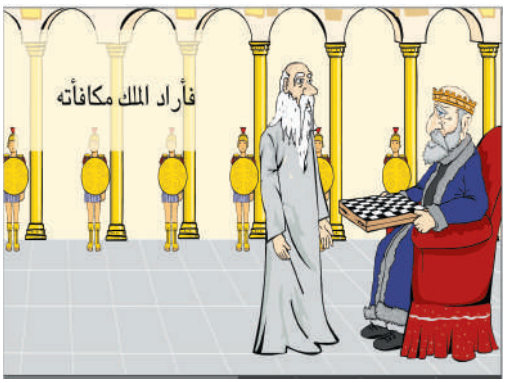
أ) جـ × [أ] = [جـ × أ] ، حيث أ ، جـ أعداد حقيقيّة.

ب) [س + ١,٥] = [س] + ١,٥

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ١

يُحكى أنّ حكيماً قدّم رقعةَ شطرنج هديةً إلى ملك بلاد الفرس، فأراد الملكُ مكافأتَه. فطلب الحكيمُ أنْ تكونَ مكافأتَه مَلءَ مربعاتِ رقعةِ الشطرنجِ بالقمح؛ بحيثُ يضعُ حبّةً في الخانة الأولى، وحبتيْنِ في الخانة الثانية، وأربعَ حبّاتٍ في الخانة الثالثة وهكذا، ضحك الملكُ وحاشيتُه من طلب الحكيم المتواضع.



أُكملُ: عددُ حبّاتِ القمحِ في الخانة الرابعة = ٨

عدد حبات القمح في الخانة الخامسة = ...

عدد حبّاتِ القمح في الخانة السادسة = ...

- إذا علمت أنّ الكيلوغرام من القمح يحتوي على ٧٠٠٠ حبةٍ تقريباً. أُقدّرُ كميّةَ القمحِ التي طلبها الحكيم. هل نتوقّعُ أن يتمكّنَ الملكُ من مكافأةِ الحكيم؟ أُفسّرُ إجابتي.

أتعلم: يُسمّى الاقترانُ اقتراناً أسّيّاً إذا كان على الصورة: ق(س) = $أ^{س}$ ، أ ≠ ١ ، أ > ٠ ، س ∈ ح

أناقش

لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٢

أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أُسّيٌّ ؟

ألاحظُ انّ: ق(س) = ٢^{س} اقترانٌ أسّيٌّ؛ لأنّ .....

بينما هـ(س) = (-٣)^{س} ليس اقتراناً أسياً؛ لأن الأساس أ = -٣ < ٠.

وعليه فإنّ: ل(س) = س^{٢} هو اقترانٌ .....؛ لأنّ المتغير ليس أساً.

م(س) = $(\frac{١}{٦})^{س}$ هو اقترانٌ .....؛ لأنّ .....

نشاط ٣

أمثّلُ الاقترانَ: ق(س) = ٢^{س} ، س ∈ ح في المستوى الديكارتي.

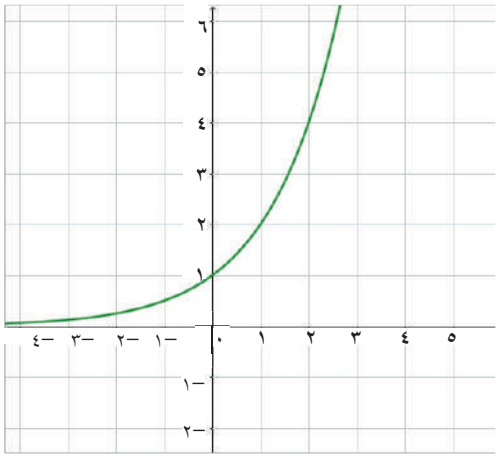
أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	
ق(س)	٨			١	$\frac{١}{٢}$		$\frac{١}{٨}$

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

- أعيّنُ النّقاطَ من الجدول السابق في المستوى الديكارتي،

وألاحظُ شكل منحنى الاقتران:



من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران، أتعلّمُ أهم خصائص منحنى الاقتران الأسّي (أ > ١):

١) مدى الاقتران الأسّي هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (ح +).

٢) منحنى الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ١).

٣) كلّما زادت قِيمُ س تزداد قيمَ ص المُناظِرةُ لها.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



هل يقطعُ منحنى الاقتران ق محور السينات؟



أُكملُ الجدولَ الآتيَ لقِيَم س ، ص للاقتران هـ(س) = ٣^{س}، ثمّ ارسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢		٠	١-	٢-	
هـ (س)			٣			$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

- أدوِّن ملحوظاتي حول منحنييّ الاقترانين هـ(س)= ٣^{س} و ق(س) = ٢^{س}



أُكملُ الجدولَ الآتيَ لِقيَمِ س ، والاقتران ق(س) ، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.

س	٣	٢	١		١-		٣-
ق(س)= $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$	$\frac{١}{٨}$			١	٢	٤	

أعيّنُ النقاطَ على المستوى الديكارتي، وأرسم منحنى الاقتران.

- ألاحظُ من الرسم أنّ: منحنى ق(س) = ٢^{س} هو انعكاس لمنحنى الاقتران هـ(س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ في محور الصادات، أوضح ذلك جبريّاً.
- من التمثيل البياني للاقتران في النشاط السابق، ألاحظُ أهمَّ خصائص الاقتران الأسّي:

ق(س) = ا^{س} ، ٠ < ا < ١ وهي:

١) مدى الاقتران الأسّي هو: .....

٢) يقطعُ منحنى الاقتران محورَ الصادات في النقطة: .....

٣) كلما زادت قيم س، فإنّ قيمَ ص المناظِرَةَ لها .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٦

أمثّلُ منحنى الاقتران هـ(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ بيانيّاً على المستوى الديكارتي.

أدوّنُ ملحوظاتي حول منحنييّ الاقترانين: هـ(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ و ق(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

أمثّلُ الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢ في المستوى الديكارتي.

نشاط ٧

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٣	٢		٠			٢-	٣-
ص= ق(س)	٢٩		٥		$٢\frac{١}{٣}$	$٢\frac{١}{٩}$		

- أعيّنُ النقاطَ في الجدول السابق على المستوى الديكارتي، وأرسمُ منحنى الاقتران.
- **ألاحظُ أنّ:** الاقتران ق(س) = $٣^{س}$ + ٢هو انسحاب لمنحنى الاقتران هـ(س) = $٣^{س}$ وَحدتين إلى الأعلى.

أتعلّمُ: يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلاتِ الهندسيّةِ التي تعلمتُها على الاقتران الأسّي.

الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ

الاقتران الأسّي الطبيعي: هو اقترانٌ أسّيٌّ يكون أساسُه العددَ هـ ، حيثُ هـ عددٌ غيرُ نسبي له أهمية خاصة في الرياضيات ويسمى العدد النيبيري نسبة إلى (John Napier) ويساوي تقريباً ٢,٧١٨٢٨

نشاط ٨

إذا كان ل(س) = $هـ^{س}$ ، أجدُ قيمةَ ما يأتي، مُقرّباً لأقربِ منزلتيْن عشريتيْن، باستخدام الآلة الحاسبة.

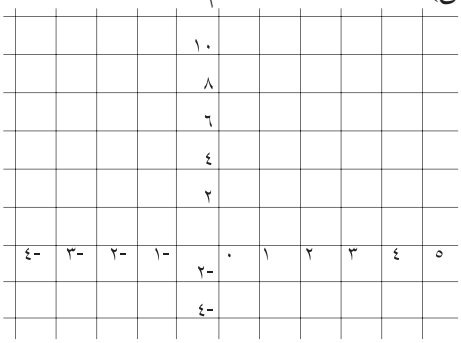
أ) ل(٢) = $هـ^{٢}$ = ٧,٣٩

ب) ل(٤) + ٢ = $هـ^{٤}$ + ٢ = ...

نشاط ٩

أكملُ الجدولَ الآتيَ لقيم س ، ق(س) للاقتران ق(س) = $هـ^{س}$، باستخدام الآلة الحاسبة، ثمّ أرسمُ منحنى الاقتران:

س	٣	٢	١	$\frac{١}{٢}$	٠	١-
ق(س)		٧,٣٩		١,٦٥		



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٢-٨

(١) أيٌّ من الاقترانات الآتية يُعَدُّ اقتراناً أُسّيّاً ؟ مع بيان السبب.

أ) ق(س) = ٥^{س}

ب) م(س) = ٤$^{-س}$

جـ) هـ(س) = ٢س^{٣}

د) ص = (-٢)^{س}

هـ) ص = $(\frac{٢}{٣})^{س}$

(٢) أمثّلُ منحنى الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي، وأجدُ مدى كل اقتران منها:

أ) ص = ٣^{س} − ٢

ب) ص = ٥ − ٢^{س}

جـ) ص = ٤$^{-س}$

د) ص = -$(\frac{١}{٤})^{س}$

(٣) استخدمُ منحنى ق(س) = هـ^{س}، والتحويلات الهندسيّة المناسبة لرسم الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = هـ$^{-س}$

ب) ق(س) = ٣ − هـ^{س}

جـ) ق(س) = هـ$^{(س-١)}$

(٤) أجدُ قيمةَ كلٍّ من: أ ، ب لمنحنى ق(س) = أ(٣)^{س} + ب، الذي يمرُّ بالنقطتين: (١،٣) ، (٠،٢).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(٥) أُدخِلتْ سيدةٌ مجمّعَ فلسطينَ الطبيّ في مدينة رام الله، لارتفاع نسبة الالتهاب في جسمها. أُعطِيتْ جَرْعةٌ من البنسلين في الدم. لوحظ أن ٦٠٪ من جَرْعة البنسلين فقط بقيت في الدم بعد مرور ساعةٍ على تناولها. وعند متابعة حالتها لوحظ أنّ جسمَها يُدمّرُ البنسلينَ بالنّمطِ نفسِه، وفي نهاية كلِّ ساعة يتبقى فقط ٦٠٪ من البنسلين الموجود في نهاية الساعة السابقة.

إذا أُعطيَتِ السيدة ٣٠٠ ملغرام من البنسلين الساعة الثامنة صباحاً، أُكملُ الجدول الآتي (بعد نقله إلى دفتر الإجابة)، لحساب كمية البنسلين في الدم نهايةَ كلّ ساعة، خلال الفترة بين الثامنة والحادية عشرة صباحاً:

الساعة	٨:٠٠ صباحاً	٩:٠٠ صباحاً	١٠:٠٠ صباحاً	١١:٠٠ صباحاً
البنسلين (ملغرام)	٣٠٠			

أُمثلُ البيانات السابقة في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ الشكل الناتج.

SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



يستخدمُ مشفى المُطّلِع في مدينة القدس مادة اليود (١٣١) المشعة في تشخيص أمراض الغدة الدرقية، عِلماً بأنّ المادةَ تخسرُ نصفَ كتلتِها خلال ٨ ايام (تسمى هذه الفترة فترة عمر النصف). فإذا حصل المشفى على ٢غم من اليود (١٣١)، أجيب عما يأتي:

أكملُ الجدولَ الآتي:

عدد الأيام	٨ أيام	١٦يوماً	
مقدار المادة المتبقية			$\frac{١}{٤}$ غم



تبقّى من المادة بعد مضي ٢٠ يوماً ..... تقريباً.

يلزم من الوقت كي تصبحَ كتلتها ٠,٠٠١ غم ..... تقريباً.



أجدُ قيمةَ ما يأتي:

لـو$_{٤}$ ٦٤ = ...

لـو$_{١٠}$ ١٠٠ = ...

لـو$_{٨}$ ١ = ... لـو$_{٣}$ ٣ = ...، لـو$_{٧}$ $\frac{١}{٤٩}$ = ...

أتعلم: الاقتران على الصورة ق(س) = لـو$_{أ}$ س ، حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س > ٠ يُسمّى اقتراناً لوغاريتميّاً.



لماذا أ > ٠ ، أ ≠ ١ ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



ملحوظة: من اللوغاريتمات الأكثر شيوعاً اللوغاريتم ذو الأساس ١٠، ويُسمّى اللوغاريتم العادي، ويُكتبُ عادةً على الصورة ص= لوس ، س > ٠ (لا يُكتبُ له الأساس ١٠).

وإذا كان الأساسُ العدد هـ يُسمّى اللوغاريتم الطبيعي، ويُكتب على الصورة: ق(س) = لـوهس.



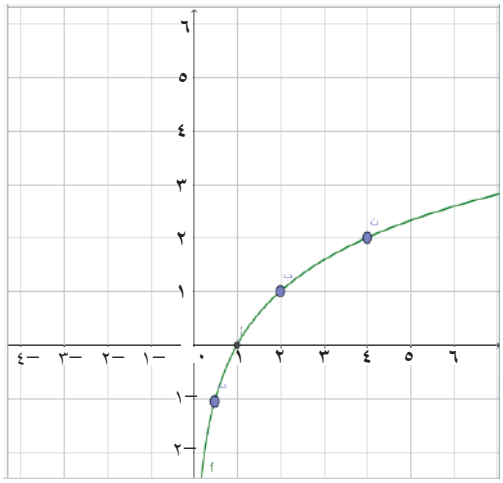
أكوّنُ جدولاً لقيم س ، ق(س) المناظرة لها، للاقتران ق(س) = لـوس، ثم أرسمُ منحنى الاقتران.
٢

س	٨	٤		١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	
ق(س) = لـوس ٢	٣		١			٢-	٣-

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f5148 e5bc38

أتذكرُ أنّ: لـو $\frac{١}{٤}$ = ٢- لأن ٢$^{-٢}$ = $\frac{١}{٢^{٢}}$ = $\frac{١}{٤}$.
٢

أعيّنُ النقاط في المستوى البياني، وأرسمُ منحنى الاقتران ، كما هو في الشكل (٢-٣):



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

من منحنى الاقتران ص= لـوس ، ألاحظُ خصائصَ الاقتران ص= لـوس، حيث أ > ١ :

- مجال الاقتران اللوغاريتمي هو: ..... ومداه هو: .....
- نقطة (أو نقاط) تقاطع منحنى الاقتران مع محوريّ الإحداثيات هي: .....
- كلما زادت قيمُ س فإنّ قيمَ ص المناظِرة لها .....



أرسم منحنى ص = ٢^س على المستوى المرسوم عليه منحنى الاقتران ص= لـوس ثم أقارنُ بين منحنييّ الاقترانين.



أمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = لـوس – ١ في المستوى الديكارتي ، وأقارنُ منحناه مع منحنى الاقتران هـ(س) = لـوس.

أكملُ الفراغاتِ في الجدول الآتي:

س	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$
ق(س) = لـوس – ١	٣ – ١ = ٢	١			-٢	

أرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ أنّ منحنى ق(س) = لـوس – ١ ، هو انسحابٌ لمنحنى الاقتران هـ(س) = لـوس وَحدةً واحدةً إلى الأسفل.

أتعلّمُ: بشكلٍ عام، يُمكنُ تطبيقُ جميعِ التحويلات الهندسيّة التي تعلمتها على الاقتران اللوغاريتمي.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أكوِّنُ جدولاً لقِيَمِ س ، ق(س) المناظِرةِ لها للاقتران ق(س) = لـوس ، ثم أرسمُ منحناه:
$\frac{١}{٢}$

س	٨	٤	٢	١		$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$
ق(س) = لـوس $\frac{١}{٢}$		-٢		٠	١		

من منحنى الاقتران ق(س) = لـوس ، أستنتجُ خصائصَ الاقتران ص= لـوس، حيث ٠ < أ < ١.
$\frac{١}{أ}$

- ألاحظُ أنّ: الاقتران ق(س) = لـوس، هو اقترانٌ مجالُه ..... ، ومداه .....
$\frac{١}{٢}$
- تقلُّ قيمُ ق(س) كلّما زادت قيمُ س المناظِرةُ لها، ويمرُّ منحناه في النقطة (١ ، ٠).



ما العلاقةُ بين منحنى ق(س) = لـوس ومنحنى هـ (س) = لـوس؟ أتحقّقُ من العلاقة التي توصلتُ إليها جبريّاً.
$\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٢}$



أكوّن جدولاً لقيم س ، هـ(س) المناظرة لها للاقتران هـ(س) = لـوس، ثم أرسمُ منحنى هذا الاقتران على منحنى ق(س) = لـوس ، وأقارنُ بينهما.
$\frac{١}{٣}$ $\frac{١}{٢}$

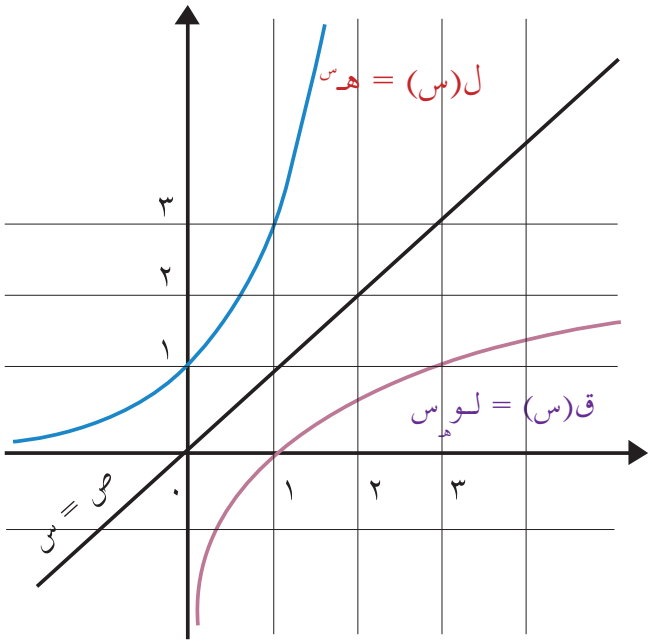
س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	
هـ(س) = لـوس $\frac{١}{٣}$	-٢				٢	٣

مثال(١): بالاعتماد على منحنى الاقتران الأسّيّ الطبيعيّ ل(س) = هـ^{س} ، وخصائص منحنى الاقتران اللوغاريتمي، أرسمُ منحنى الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي ق(س) = لـوس

الحلّ: عرفت من النشاط السابق أن منحنى الاقتران ق(س) = لـوس ، هو انعكاسٌ لمنحنى ص = هـ^{س} في المستقيم ص = س.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نرسم منحنى ل(س) = هـ^{س} ، ثم نرسمُ انعكاسَه في الخط المستقيم ص = س ، فيكون لدينا منحنى الاقتران، كما هو في الشكل المجاور.



www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38



أجدُ مجالَ كلٍّ من الاقترانات الآتية:

- ق(س) = لـو$_{٢}$ (س – ٣)
- هـ(س) = لـو$_{٣}$ (س^{٢} – ١)

مجال الاقتران اللوغاريتمي هو ح$^{+}$، فإن مجال ق(س) معرّفٌ عندما س – ٣ > ٠

مجال ق(س) هو : .....

أما مجال هـ (س) فهو معرّفٌ عندما س^{٢} – ١ > ٠

وعليه فإن: مجال هـ (س) هو : .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٢-٩

(١) احسب قيمة ما يأتي:

أ) لـو$_{٣}$ ٧٢٩

ب) لـو$_{٠,٠٤}$

جـ) لـو$_{٠,٠٠٠١}$

(٢) مستعيناً بالتحويلات الهندسية ومنحنى الاقتران ق(س) = لـو$_{٢}$س، أمثّلُ الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) هـ(س) = لـو$_{٢}$س − ١

ب) ل(س) = لـو$_{٢}$ (س + ٢)

جـ) م(س) = -لـو$_{٢}$ (س + ١)

(٣) أجدُ مجال كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = لـو$_{هـ}$ (٥س − س^{٢})

ب) ق(س) = لـو$_{٢}$ $\sqrt{٢س - ٣}$

(٤) بدأ عالمٌ تجربته بـ ٥٠٠٠٠٠٠ خليةٍ، ولاحظ أنّ ٤٥٪ من الخلايا تموت كلَّ دقيقة. كم تستغرق من الزمن حتى يصبح عددها أقلَّ من ١٠٠٠ خلية؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين عامّة (٢):

السؤال الأول:

أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قاعدة الاقتران الناتجة من انسحاب منحنى ق(س) وَحدتين إلى اليسار، ثم وَحدتين إلى الأعلى ؟

أ) ق(س) + ٤ ب) ق(س) − ٤ جـ) ق(س + ٢) + ٢ د) ق(س − ٢) + ٢

(٢) ما صورة منحنى ق(س) المعكوس في محور السينات، من منحنيات الاقترانات الآتية ؟

أ) ق(-س) ب) -ق(-س) جـ) -ق(س) د) ق(س − ١)

(٣) ما طول درجة الاقتران ق(س) = [٣ − ٢س] ؟

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) ٢ د) ١

(٤) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ نسبيّ ؟

أ) $\frac{٣}{\sqrt{س}}$ ب) $\frac{س^{\frac{٢}{٣}} - ١}{س}$ جـ) $\frac{١}{س}$ د) $\sqrt{\frac{س - ١}{س}}$

(٥) أيٌّ من الاقترانات الآتية اقترانٌ أسّيٌّ ؟

أ) $\left(\frac{-١}{٣}\right)^{س} - ٢$ ب) $س^{٣}$ جـ) $(-هـ)^{س}$ د) $٥^{س}$

(٦) أيُّ الاقترانات الآتية ليس اقتراناً لوغاريتمياً ؟

أ) ق(س) = $لـوس_{\frac{١}{٣}}$ ب) ق(س) = لـوس

جـ) ق(س) = $لـوس_{هـ}$ د) هـ(س) = $لـوس_{١}$

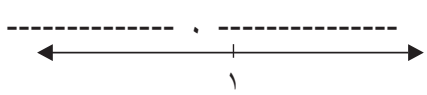
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(٨) محور تماثل ق(س) = | ١٠ − ٢س | ، هو الخط المستقيم:

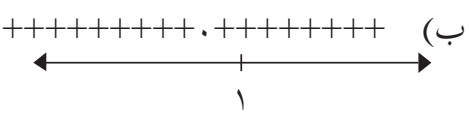
أ) س = ٥ ب) س = -٥ جـ) ص = ٥ د) ص = -٥

(٩) أيٌّ من الآتية خطُّ إشارة الاقتران ق(س) = (س − ١) (١ − س) ؟

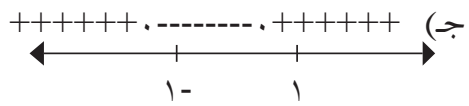
أ)



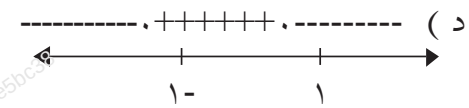
ب)



جـ)



د)



(١٠) ليكن: ق(س) = |٣س + ٤| فما قيمة ق(-٣) ؟

أ) -٥ ب) ٣ جـ) ٥ د) ١٣

السؤال الثاني:

أدرسُ سلوك الاقتران ق(س) = لـو (٢س + ٣) من حيث : مجاله ، ومداه ، وكل من مقطعيه السيني والصادي .

السؤال الثالث:

أُمثّلُ منحنياتِ الاقتراناتِ الآتيةَ بيانيّاً مستعيناً بالتحويلات الهندسية الملائمة:

أ) ت(س) = س^{٢} + ٣ ب) هـ(س) = (س + ٣)^{٣}

جـ) ل(س) = - (س^{٣} − ١) د) ك(س) = س^{٢} + ٦س + ٦

هـ) ع(س) = $\sqrt{\text{س} - ٤}$ ، س ≤ ٤

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

السؤال الرابع:

أبحثُ في إشارة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ل(س) = س^{٢} + ٣س + ٢

ب) م(س) = ٨ − ٢س

جـ) ق(س) = $\frac{\text{ل(س)}}{\text{م(س)}}$، م(س) ≠ صفر.

السؤال الخامس:

أجدُ مجموعةَ حلّ المتباينة: (س − ١)^{٢} − ٤ ≤ صفر، ثم أُمثّلُها على خطّ الأعداد.

السؤال السادس:

أكتبُ الاقترانات الآتية، باعتبارها اقتراناتٍ متعدّدةَ القاعدة ثم أمثلها في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = | ٦ + ٢س |

ب) ل(س) = | س^{٢} − ٢٥ |

جـ) ك(س) = [$\frac{١}{٢}$ س − ٣]

د) ع(س) = [٥ − $\frac{١}{٣}$س]

السؤال السابع:

طارق صاحب محلات لبيع الملابس الرياضية، طلب من محاسب محلاته تزويده بعلاقة رياضية تربط ربحه السنوي بسعر القطعة. وبعد دراسة الوضع لاحظ المحاسب أن المحل يبيع عدداً أكبر من القطع عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير حسب المعادلة:

ص = -١٥س^{٢} + ٦٠٠س + ٥٠ حيث س سعر الزي الرياضي بالدينار.

- جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر ٢٥ دينار.
- جد ربح التاجر إذا باع الزي الرياضي بسعر ٤٢ دينار.
- حدد مجال الأسعار التي تحقق ربحاً للتاجر.
- ما هو السعر الذي يحقق للتاجر أعلى ربح.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مشروع الوحدة:

فكرة المشروع:	المنحى:	القضية:
سباقٌ مع العدوى	METS (M ,E ,T ,S)	الصحة العامة والوقاية من الأمراض

تزداد سرعة انتشار الأمراض المعدية باختلاف طبيعة المرض والإجراءات الوقائية المتبعة. بالتعاون مع مجموعتك، اطَّلع على بيانات منشورة في موقع منظمة الصحة العالمية (OHW) حول أحد الأمراض المعدية، وحدِّد نمط انتشاره، ثم مثِّل البيانات باستخدام الاقتران المناسب، وحلِّل النتائج، واستنتج أثر الإجراءات الوقائية في الحد من انتشار العدوى. قدِّم بالتعاون مع مجموعتك تقريرًا وعرضًا أمام معلمك وزملائك حول نتائج المشروع.

مهام المشروع:

الكفاية العامة	المهمة
فهم المشكلات والمثابرة على حلها	حدِّد بالتعاون مع مجموعتك مرضًا معديًا، واجمع بيانات عن انتشاره من موقع منظمة الصحة العالمية (OHW).
التفكير الكمي والتجريدي	مثِّل بالتعاون مع مجموعتك البيانات باستخدام الاقتران المناسب، وحدد سبب اختيارك له.
بناء الحجج الرياضية	حلِّل بالتعاون مع مجموعتك التمثيل البياني، واستنتج نمط انتشار المرض، واستند إلى البيانات في تبرير استنتاجاتك.
استخدام الأدوات بذكاء	استخدم بالتعاون مع مجموعتك أداة رقمية لرسم التمثيل البياني والتحقق من دقته
النمذجة الرياضية واتخاذ القرار	اقترح بالتعاون مع مجموعتك إجراءات تحد من سرعة انتشار العدوى، مستندًا إلى نتائج التحليل الرياضي.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

٣ الوحدة

الهندسة: الدائرة



تأمّلْ صورةَ المسجدِ العُمريّ في مدينةِ غزّة، ولاحظ الأشكالَ الهندسيّةَ (الدائرة) الواردةَ فيها، ومدى الدّقّةِ والإتقانِ في بناءِ المسجد .كيف يمكنُ تحديدُ مركزِ النّافذةِ الدائريّة؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف معادلة الدائرة والمماسات والزوايا في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. التعرّف إلى معادلة الدائرة.
٢. إيجاد معادلة الدائرة.
٣. التعرّف إلى الزّوايا المحيطيّة، والزوايا المركزيّة.
٤. استنتاج العلاقةِ بين الزاويتيْن المركزيّة والمحيطيّة المشتركة في القوس نفسه.
٥. استنتاج العلاقةِ بين الزاويتيْن المحيطيّتيْن المشتركتيْن في القوس نفسه.
٦. أن يتعرف على مماس الدائرة.
٧. أن يتعرف الزاوية المماسية في الدائرة.
٨. أن يستنتج العلاقة بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.
٩. التعرفّ إلى الشكل الرباعيّ الدائريّ.
١٠. استنتاج بعضِ خصائصِ الشكل الرباعيّ الدائريّ.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (١): تربيةُ الخيولِ والاعتناء بها إرثٌ عربيٌّ أصيلٌ، ومن طُرقِ التعاملِ معَ الخيولِ أن يقومَ الرَجُلِ بمسكِ طَرْفِ حبلٍ يمتدُّ إلى رسنِ الحصانِ الّذي يدورُ ببعدٍ ثابتٍ عن الرَجُلِ.



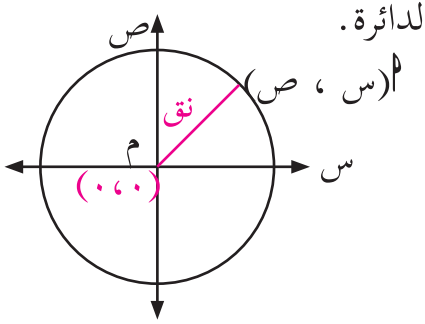
- ما شكلُ المسارِ الناتجِ من حركةِ الحصانِ حولَ الرَجُلِ؟
- ماذا يُمثّل موقعُ قدمي الرَجُلِ بالنسبةِ للمسارِ؟
- ماذا يُسمّى البعدُ الثابتُ بينَ موقعِ الرَجُلِ ومسار الحصانِ؟

نلاحظ أنّ: المسار الذي يشكّله الحصانُ من دورانه حول نقطةٍ ثابتةٍ (موقع الرَجُلِ) هو دائرة مركزها النقطة الثابتة ونصف قطرها ———.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٢): يُمثّل الشكل المجاور دائرةً مركزُها نقطةُ الأصل م،

والنقطة أ(س ، ص) تقع على الدائرة، م أ هو نصفُ قطرِ الدائرة.



باستخدام قانون المسافة بين نقطتين، فإنّ:

م أ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

م أ = $\sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

م أ = ———— ، ولكن: م أ = نق

بتربيع الطرفيْن أحصل على المعادلة : ————

أَتَعَلَّم : الصورة العامّة لمعادلة الدائرة، التي مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠)، ونصف قطرها نق هي: $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

مِثال (١): أكتبُ معادلةَ الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٤ سم.

الحل: معادلة الدائرة: $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

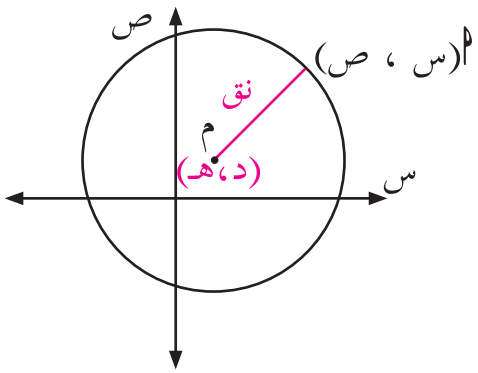
$س^٢ + ص^٢ = ٤^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ١٦$

نشاط (٣): لإيجاد معادلةِ الدائرة في الشكل المجاور، حيث: م مركز الدائرة

نصف قطر الدائرة هو م أ، والنقطة ————

تقع على الدائرة التي مركزها م.



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

طول م ٢ باستخدام قانون المسافة بين نقطتين:

م ٢ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

م ٢ = ــــــــــــــــــــــــــــ ، ولكن: م ٢ = هو نصف قطر

ومنها: نق = ــــــــــــــــ

بتربيع الطرفيْن أحصل على المعادلة : ــــــــــــــــــــــــــــ

أتعلّم : الصورة العامّة لمعادلة الدائرة التي مركزُها النقطة (د ، هـ)، ونصف قطرها نق هي : **(س – د)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢**

مِثال (٢): أكتبُ معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٢ ، ١)، وطول نصف قطرها ٣ سم.

الحل:

معادلة الدائرة: (س – د)^٢ +(ص – هـ)^٢ = نق^٢

(س – ٢)^٢ +(ص – ١)^٢ = ٣^٢

ملاحظة: عند فكّ الأقواس في معادلة الدائرة السابقة نحصل على الصورة:

س^٢ – ٤ س + ٤ + ص^٢ – ٢ ص + ١ = ٩

س^٢ – ٤ س + ص^٢ – ٢ ص + ٥ = ٩

س^٢ – ٤ س + ص^٢ – ٢ ص = ٤

نشاط (٤): عند فكّ الأقواس في المعادلة التي على الصورة:

(س – د)^٢ + (ص – هـ)^٢ = نق^٢

نحصل على: س^٢ – ــــــــ + د^٢ + ص^٢ – ــــــــ + هـ^٢ = نق^٢

س^٢ – ــــــــ + د^٢ + ص^٢ – ــــــــ + هـ^٢ – نق^٢ = صفر

بفرض أنّ: -د = ل ، -هـ = ك، د^٢ + هـ^٢ – نق^٢ = جـ

تنتج الصورة : ــــــــــــــــــــــــــــ

ماذا تلاحظ على معامل س^٢، معامل ص^٢ ؟

هل يوجد الحدُّ س ص في المعادلة؟

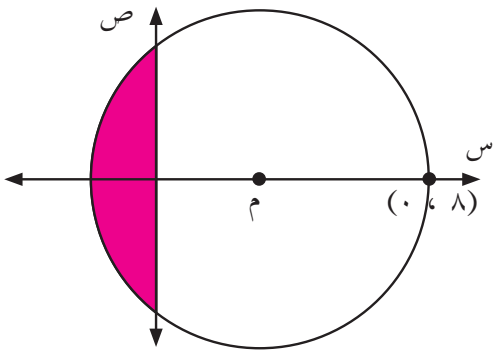
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أتعلّم : الصورة القياسيّة لمعادلة الدائرة هي : $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل\ س + ٢ك\ ص + جـ = ٠$

ويكون فيها مركزُ الدائرة (-ل ، -ك) ، نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$

لاحظ أنّ : $ل^{٢} + ك^{٢} - جـ >$ صفر

نشاط (٥): كان الفلاح الفلسطيني يستغل منطقة من أرضه لعمل بيدر عليها، كما هو ممثل في الشكل المظلل، أذا مُثلت معادلة الدائرة: $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٢س = ٣٢$



أجد مركز ونصف قطر الدائرة.

نحوّلُ المعادلة: $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٢س = ٣٢$ إلى الصورة القياسيّة لمعادلة الدائرة

$٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٢س - ٣٢ =$ صفر

نقسم طرفيّ المعادلة على ٢، فتصبح: ———————

٢ل = ——— ، ومنها ل = ———

٢ك = صفر، ومنها ك = صفر

نق = $\sqrt{(-٣)^{٢} + (٠)^{٢} - (-١٦)}$ = $\sqrt{٢٥}$

نق = ٥ وحدات

مركز الدائرة: (،)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٣-١:

س١ أجدُ معادلةَ الدائرة في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي:

أ) مركزُها (٠،٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٥سم.

ب) مركزُها (-٣ ،٢)، وطولُ قطرِها ٦سم.

جـ) مركزُها (- ٢ ، -٧)، وتمرُّ في النقطة (٤، -٨).

س٢ أجدُ مركز الدائرة، وطول نصف قطرها في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي :

أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ١ = ٠$

ب) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٤٢$

جـ) $٦س^{٢} + ٦ص^{٢} = ٣٦$

د) $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س = ١٤$

س٣ أيّ المعادلاتِ الآتية معادلةَ دائرة؟

أ) $س^{٢} - ص^{٢} = ٣٦$

ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س = ٩$

جـ) $٨س^{٢} + ٨ ص^{٢} + ٢س ص = ١٠$

د) $س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٥ = ٠$

هـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٣ص = ٠$

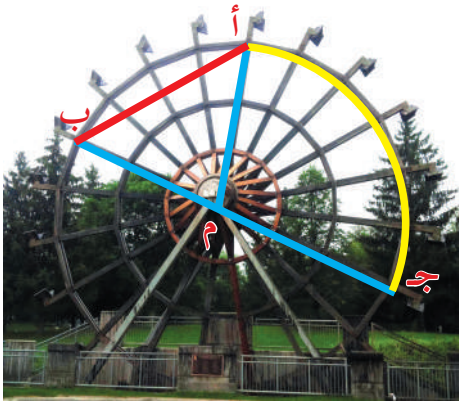
س٤ أجد قيمة ك التي تجعل نصف قطر الدائرة الآتية ٥ وحدات:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٢ك ص - ١٢ =$ صفر

س٥ رسم معلم التربية الرياضية في إحدى المدارس الفلسطينية دائرة في وسط ملعب كرة القدم. افترض المعلم أن الدائرة مرسومة في مستوى ديكارتي مركزها (-٢ ، ٤) ، ونصف قطرها ٦ م. ما معادلتها؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (١): المحافظة على عمارةِ الأرض، والاعتناء بها من ضرورات بقائنا عليها، فـ«على هذه الأرض ما يستحقّ الحياة» .اعتمد الفلّاح قديماً على قوّةِ دفعِ المياه الناتجة من دولاب المياه لتحريك طاحونة القمح، تأمّل دولابَ المياه في الشكل المجاور، ثم أجبْ:



في الدائرة التي مركزها م.

تُسمّى القطعةُ أ م نصفَ قطرِ الدائرة،

بينما القطعة ب جـ _____

أجـ قوس في الدائرة.

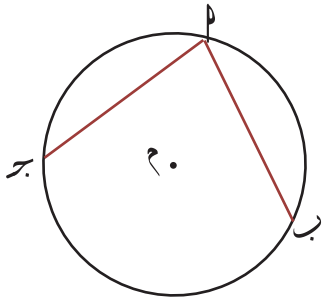
أذكرُ أسماءَ أربعِ زوايا في الشكل المجاور: _____، _____، _____، _____

ألاحظ: موقع رأس الزّوايا في الشكل السابق.

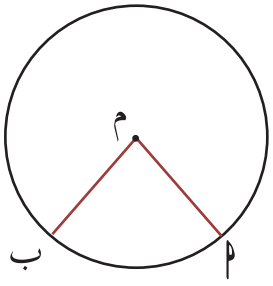
تعريف

الزاوية المركزيّة: هي الزاوية التي يقع رأسُها في مركز الدائرة، وضلعاها أنصافُ أقطارٍ في الدائرة.

الزاوية المحيطيّة: هي الزاوية التي يقع رأسُها على الدائرة، وضلعاها أوتارٌ في الدائرة.

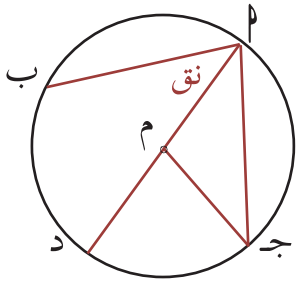


الزاوية ب أ جـ (محيطيّة)



الزاوية أ م ب (مركزيّة)

نشاط (٢): في الشكل المجاور دائرة مركزها م :



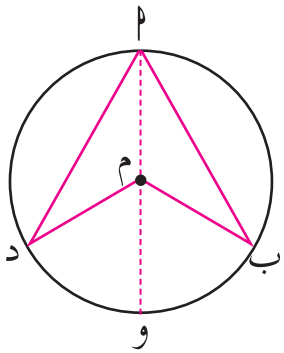
تُسمّى الزاويةُ جـ م د زاويةً _____، لماذا؟

تُسمّى الزاويةُ أ م د زاويةً مركزيّة، لماذا ؟

أذكرُ أسماءَ زاويتيْن محيطيّتيْن _____ ، _____ .

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٣): في الشكل المقابل، إذا كانت م مركز الدائرة، وكان ∠ ب أ م = ٣٠°، ∠د أ م = ٣٥° أجد: ∠ب م د .



الزاوية ب م و خارجة عن المثلث أ ب م

إذن: ∠ ب م و = ∠ أ ب م + ∠ ب أ م

ولكن : ∠ أ ب م = ∠ ب أ م؛ لأنّ _____

ومنه : ∠ ب م و = _____ = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

لإيجاد: ∠ د م و = ٢ × _____

= ٢ × _____ = _____

∠ ب م د = ∠ ب م و + ∠ و م د

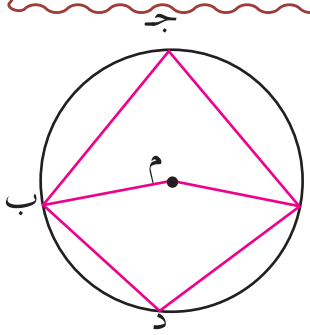
= ٦٠° + _____ = _____

وينتج أنّ: ∠ ب م د = ٢ × ∠ _____

لاحظ أنّ: الزاويةَ ب م د زاويةٌ مركزيّةٌ، والزاويةَ ب أ د زاويةٌ محيطيّةٌ، مرسومتان على القوس نفسه، ما العلاقة بين قياس الزاويتيْن؟

أتعلّم : قياسُ الزاويةِ المركزيّة تساوي ضعفَي قياسِ الزاوية المحيطيّة المشترِكة معها في القوس نفسه.

نشاط (٤): تحيط بمدينة القدس (العاصمة) العديد من القرى، إذا مثل الشكل المجاور مواقع القرى (أ ، ب ، جـ ، د) بالنسبة للقدس (م)، وكان ∠ أ م ب = ١٥٠°



أجد: ∠ أ جـ ب، ∠ أ د ب.

بما أنّ الزاوية أ م ب _____، والزاوية أ جـ ب _____ مشتركتان في القوس أ د ب

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

إذن: ∠ م ب = _____ ∠ جـ ب

∠ جـ ب = $\frac{١}{٢}$ × _____ = _____

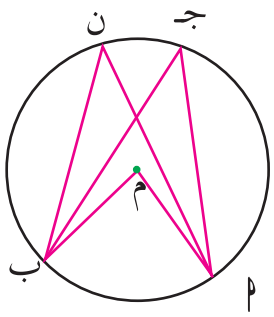
∠ م ب المنعكسة = ٣٦٠° − ١٥٠° = ٢١٠°

زاوية م ب المنعكسة مركزيّة على القوس _____، وزاوية د ب محيطيّة مشتركة معها في القوس _____

إذن: ∠ م ب المنعكسة = ٢ ∠ د ب

∠ د ب = _____ = _____

نشاط (٥): أتأمّلُ الشكل المجاور، فيه م مركز الدائرة، وقياس الزاوية م ب = ٨٠°، أجدُ: قياس الزاوية ن ب، وَ قياس الزاوية جـ ب



∠ جـ ب = _____ لماذا ؟

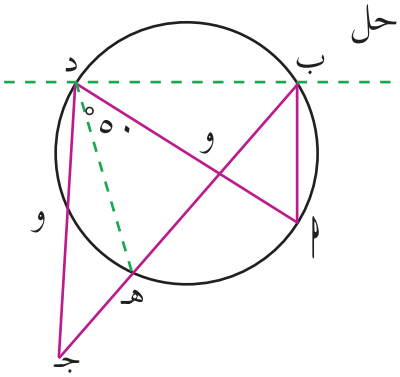
∠ ن ب = ٤٠°

ما العلاقة بين الزاويتيْن: جـ ب ، ن ب ؟

أتعلّم : أي زاويتان محيطيّتان مرسومتان على قوس واحد في الدائرة متساويتان في القياس.

نشاط (٦): تمثل الدائرة في الشكل المجاور المنطقة الخطرة التي يحظر على السفن الاقتراب منها.

خط الساحل



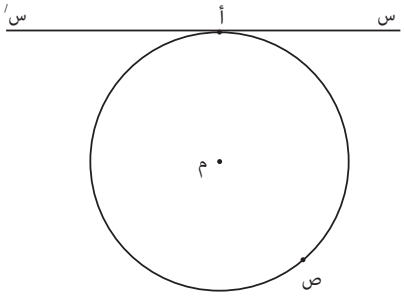
النقطة جـ تمثل موقع سفينة في البحر.

تسمى الزاوية د هـ ب زاوية الخطر

∠ أ ب هـ = _____ لأنها مرسومة _____

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٧): إرسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة س فقط.

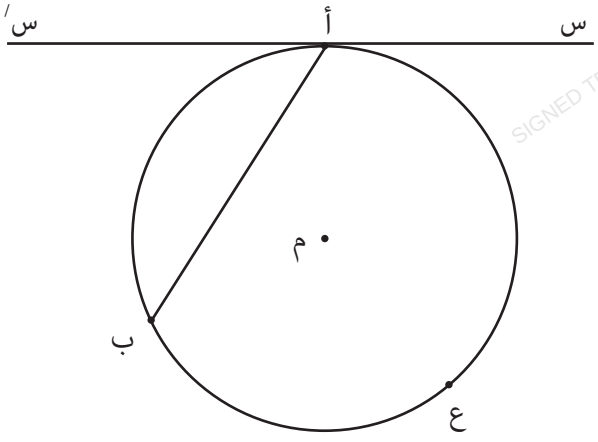


يسمى المستقيم أس أو ..... أو .....

إرسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة ص فقط.

أَتَعَلَّم : مماس الدائرة هو المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة تُعرف بنقطة تماسه معها (نقطة تماس).

نشاط (٨): الشكل المرسوم جانباً يمثل دائرة مركزها م ، فيها س س/ مماس للدائرة في النقطة أ.



أب وتر في الدائرة.

تُسمى الزاوية س/ أب زاوية مماسية

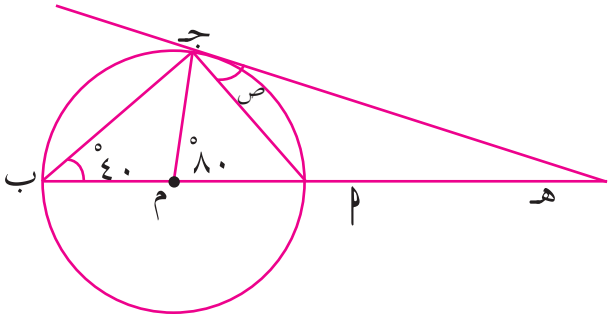
الزاوية المماسية هي .....

نشاط (٩): الأدوات: ورق A4 ، قلم ، فرجار ، مسطرة ، منقلة.

- ارسم دائرة مركزها م (كل مجموعة ترسم دائرة نصف قطرها مختلف عن الآخرى).
- اختر نقطة على الدائرة مثل أ وارسم منها مماس.
- ثم ارسم وتر يمر بالنقطة أ مثل أب، ارسم زاوية محيطية على الوتر من الجهة الأخرى (ليس في جهة المماس)
- قم بقياس الزاوية المماسية والزاوية المحيطية التي رسمتها وسجل ملاحظاتك

- ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

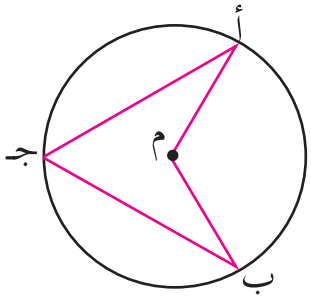


نشاط (١٠): في الشكل المجاور أجد قياس الزاوية المشار اليها بالرموز (م مركز الدائرة)

∠ ص = ...، مماسية ومحيطية على نفس القوس.

ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس؟

تمارين ومسائل ٣-٢:

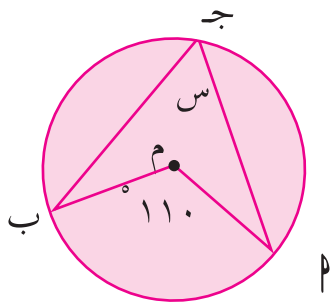


س١ الشكل المجاور فيه م مركز الدائرة، فإذا كان قياس ∠ (أ م ب) = ١٣٠°، أجدُ ∠ (أ جـ ب).

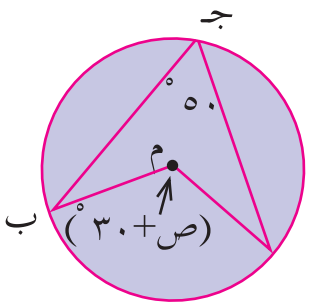
س٢ أبيّنُ أنّ قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على قطر الدائرة تساوي ٩٠°.

س٣ أجدُ قيمةَ المجهولِ في الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة:

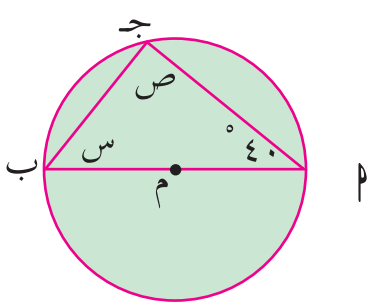
١



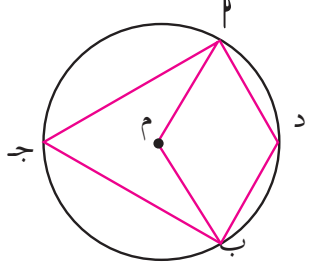
٢



٣



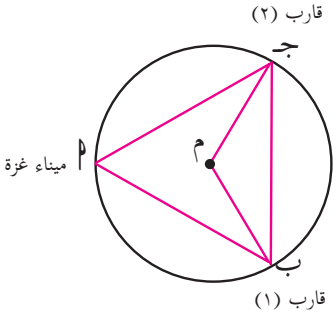
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



س٤ في الشكل المجاور دائرة مركزها م، فيها :

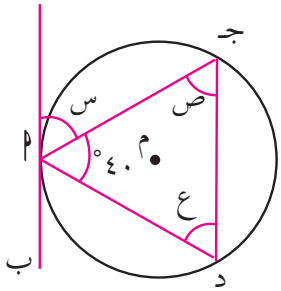
ق (أ د ب) = ١٤٠°

أجد: ق (أ م ب) المنعكسة، وق (أ جـ ب) .

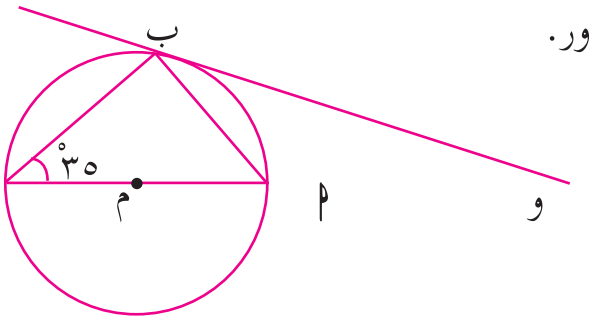


س٥ يعاني الصيادون من ضيق مساحة الصيد المخصصة لهم بسبب إجراءات الاحتلال، انطلق قاربا صيد من ميناء غزة كما في الشكل المجاور، إذا كانت الدائرةُ مركزها م، وفيها ق (م ب جـ) = ٣٠°

أجد ق (ب أ جـ).



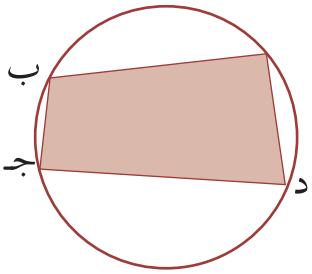
س٦ في الشكل المجاور أ ب مماس للدائرة أجد قياس جميع الزاويا المشار اليها بالرموز حيث م مركز الدائرة.



س٧ أجد قياس الزاوية و ب أ في الشكل المجاور.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (١): يتكوّن الزيّ التراثيّ الشعبيّ في فلسطين من أثوابٍ مطرّزةٍ يدويّاً، بخيوط الحرير أو الصوف، ويتّخذ التطريزُ تصاميمَ وأشكالاً مختلفةً من منطقة إلى أخرى، تتكون من أشكالٍ هندسيّةٍ، ورسوماتٍ، إذا أحطنا الشكل الرباعي في المطرّزة بدائرة، بحيث تمرُّ بجميع رؤوسه، فماذا نُسمّي هذا الشكل؟



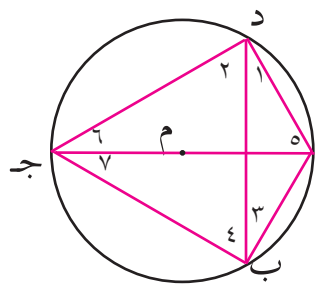
في الشكل المقابل رؤوس الشكل الرّباعيّ _____

تقع على الدائرة التي مركزها م، فيُسمّى الشكل

أ ب جـ د شكلًا رباعيّاً دائريّاً.

أَتَعَلَّم : الشكل الرباعيّ الدائريّ: هو شكلٌ رباعيّ تقع رؤوسُه الأربعة على الدائرة.

نشاط (٢): أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ دائرةٍ مركزها م، أجدُ مجموعَ قياسِ الزاويتيْن المتقابلتيْن د، ب.



∠ ٦ = ∠ ٣ (محيطيّتان على قوس واحد)

∠ ٤ = _____ لماذا؟

لكن ∠١ + ∠٢ + ∠ ٥ + ∠٦ = _____ (مجموع زوايا المثلث)

إذن: ∠١ + ∠٢ + ∠٣ + ∠٤ = ١٨٠°

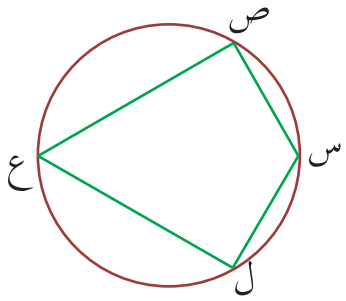
إذن: مجموع قياس الزاويتيْن د، ب = _____

أُفكّر وأُناقش أبحث عن طرق أخرى لحل النشاط.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أتعلّم : كلُّ زاويتيْن متقابلتيْن في الشكل الرباعيّ الدائريّ متكاملتان (مجموعهما ١٨٠ °).
إذا كان مجموعُ زاويتين متقابلتين في شكلٍ رباعيّ = ١٨٠ °، فإنّ هذا الشكل رباعيٌّ دائريّ.

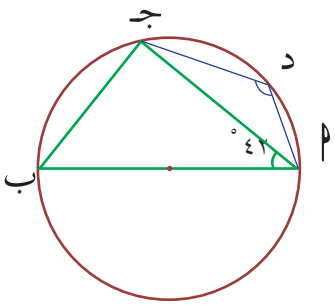
نشاط (٣): في الشكل المقابل يسُمّى الشكلُ س ص ع ل ---------- . لماذا؟



إذا كان ∠ ع = ٧٠ °

ومنه ∠ س = ———— . لماذا؟

نشاط (٤): أ ب جـ د شكلٌ رباعيّ دائريّ، فيه: الضلع أ ب قطر في الدائرة.



أجد: ∠ (أ د جـ) ،إذا كان ∠ (جـ أ ب) = ٤٢ °

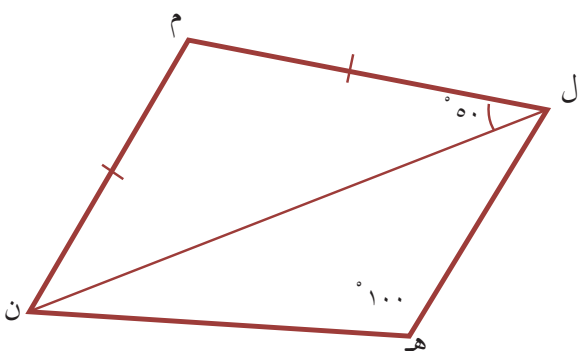
∠ (أ جـ ب) = ———— . لماذا؟

المثلث أ ب جـ فيه:

∠ (أ ب جـ) = ———— – (٤٢ ° + ٩٠ °) = ————

ومنه: ∠ (أ د جـ) = ١٨٠ ° – ٤٨ ° = ١٣٢ °. لماذا؟

نشاط (٥): اقترح أحد مصممي البرامج الحاسوبية النموذج المرفق كتصميم لساحة مدرسة العودة (الشكل التخطيطي) هل الشكل ل م ن هـ رباعيّ دائريّ؟ لماذا؟



∠ (م ن ل) = ———— . لماذا ؟

∠ م = ٨٠ °.لماذا ؟

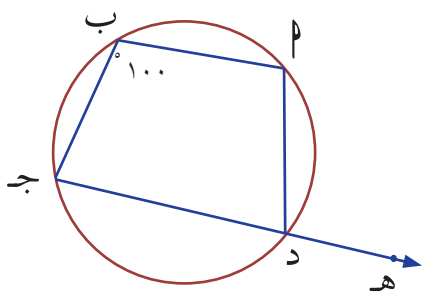
الشكل ل م ن هـ شكلٌ رباعيّ، فيه زاويتان متقابلتان، مجموع قياسهما = ١٨٠ °

إذن الشكل ل م ن هـ شكلٌ رباعيّ دائريّ.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أُفكّر وأُناقش هل كلُّ معيّنٍ شكلٌ رباعيّ دائريّ؟

نشاط (٦): في الشكل المقابل أجد ∠ أ د هـ .



∠ أ د جـ = ٨٠°، لماذا ؟----------

∠ أ د هـ = ---------- . لماذا؟

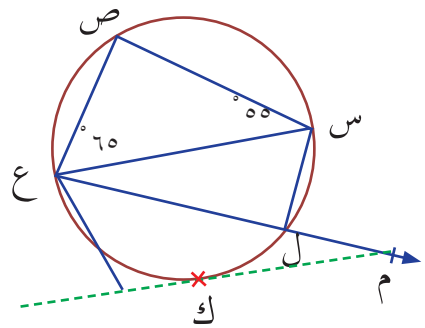
∠ أ د هـ تقع على امتداد أحدِ أضلاع الشكل الرباعيّ والضلع المجاور له. ماذا تُسمّى أ د هـ بالنسبة إلى الشكل الرباعي أ ب جـ د؟

تعريف

إذا مُدّ أحدُ أضلاع الشكل الرباعيّ على استقامته، فإنّ الزاويةَ المحصورةَ بين امتداد الضلع والضلع المجاور له تُسمّى **الزاويةَ الخارجةَ** عن الشكل الرباعي.

وقياس الزاوية الخارجة للشكل الرباعي الدائري = قياس الزاوية الداخليّة المقابلة للمجاورة لها.

نشاط (٧): في الشكل المقابل أجد ∠ س ل م.

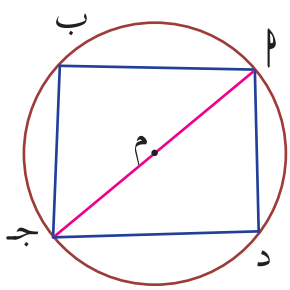


∠ (س ص ع) = ----------

الزاوية (س ل م) تُسمّى زاوية ---------- عن الشكل الرباعي الدائري.

∠ (س ل م) = ----------

ملاحظة: إذا كانت إحدى زوايا الشكل الرباعي الدائري قائمةً، فإنّ قُطرَ الشكل الرباعي المقابل لهذه الزاوية القائمة هو قطر الدائرة.

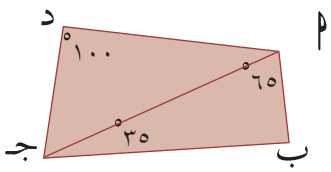


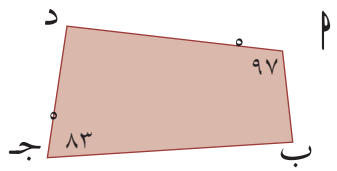
في الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ د ∠ أ ب جـ = ٩٠°

ومنه أ جـ قطر في الدائرة، وهو قطر الشكل الرباعي.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

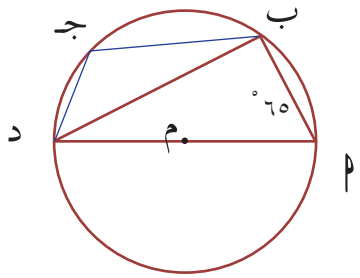
س١ أبيّنُ أيّ الأشكال الآتية تمثل شكلًا رباعيّاً دائريّاً.





س٢ أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ دائريّ، فيه قياس الزاوية ب د جـ = ٣٠°،

أجد قياس الزاوية ب جـ د ، وقياس الزاوية أ ب جـ.

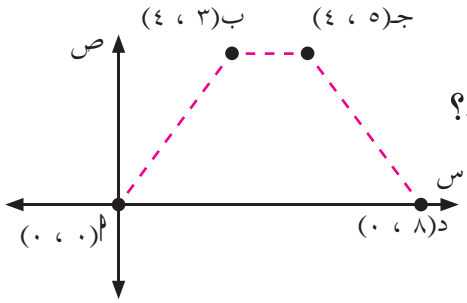


www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

س٣ أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ دائريّ، فيه: ∠أ = ٤ س + ٢٠°، و∠جـ = ٣ س + ١٣°،

أجد قيمةَ س بالدرجات، ثم أجدُ قياسيّ كلٍّ من زاوية أ وزاوية جـ .

س٤ في يوم الأرض وعلى لوحة كرتونية، مثّلت هند مواقع لأربعة قرى فلسطينية مهجرة، كما في الشكل المجاور.



أ) ما اسم الشكل الهندسي الذي يصل بين النقاط؟

ب) أبين أن الشكل هو رباعي دائري؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين عامة (٣)

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) ما طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٦٤$ ؟

أ) ٥سم ب) ٢سم جـ) ٦٤سم د) ٨ سم

٢) قياس زاوية مركزيّة في دائرة مركزها م =١٠٠°، فما قياس الزاوية المحيطيّة المشتركة معها في القوس؟

أ) ١٠° ب) ٥٠° جـ) ١٠٠° د) ٢٠°

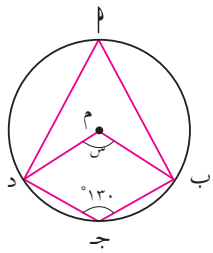
٣) ما العلاقة بين كلّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري؟

أ) مجموعهما ٣٦٠° ب) متساويتين جـ) متكاملتين د) متتامتين

٤) ما قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على قطر الدائرة؟

أ) ٩٠° ب) ٣٠° جـ) ٦٠° د) ٨٠°

٥) في الشكل المجاور:



إذا كان م مركز دائرة، فيها ∠ (ب جـ د) = ١٣٠°، فما قيمة س؟

أ) ٥٠° ب) ١٠٥°

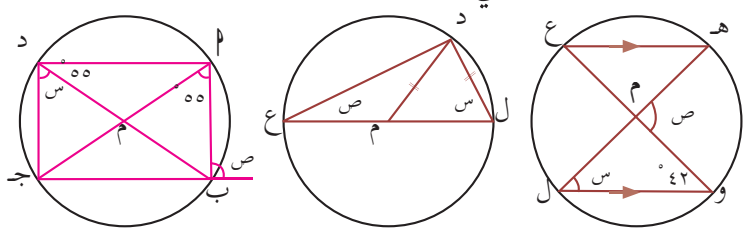
جـ) ٢٣٠° د) ١٠٠°

س٢ أجد معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

أ) مركزها (-٥،١) ، وتمرّ بالنقطة (٢، ٤)

ب) نهايتا قطرٍ فيهما النقطتان: أ(٧ ، ١٢) ، ب(-٥ ، -٤)

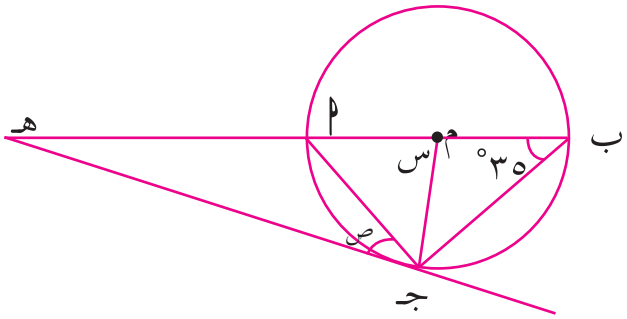
س٣ أجد قياسات الزوايا المجهولة في الأشكال الآتية:



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

س٤ ا ب جـ د شكلٌ رباعيّ دائريّ، مرسوم داخل دائرة مركزها م، إذا كان ا ب قطراً في الدائرة، وكان قياس الزاوية ب ا جـ = ٤٠°، أجد قياس الزاوية ا د جـ .

س٥ في الشكل المجاور أجد قياس الزوايا المشار إليها بالرموز.



س٦ أقيّم ذاتي: أصف قدرتي على أداء المهارات الواردة خلال هذه الوحدة بكتابة أحد التقديرات الآتية (مرتفع، متوسط، دون المتوسط) أمام كل مهارة من المهارات الواردة في صفحة ٩١.

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مشروع الوحدة:

فكرة المشروع:	المنحى:	القضية:
دوَّارٌ أكثر أماناً	METS (M ,E ,T ,S)	السلامة المرورية

تسهم الدوارات المرورية في تنظيم حركة المركبات وتقليل الحوادث إذا صُممت بصورة مناسبة. بالتعاون مع مجموعتك، ادرس تصميم أحد الدوارات في منطقتك، ووظِّف خصائص الدائرة في اقتراح تطويرات تسهم في تحسين انسيابية الحركة ورفع مستوى السلامة. قدِّم بالتعاون مع مجموعتك تقريرًا وعرضًا موجزًا أمام معلمك وزملائك حول التصميم المقترح.

مهام المشروع:

الكفاية العامة	المهمة
فهم المشكلات والمثابرة على حلها	١- حدِّد بالتعاون مع مجموعتك أحد الدوارات المرورية، ووثِّق المشكلات التي تواجه مستخد ميه .
التفكير الكمي والتجريدي	٢- بالتعاون مع مجموعتك قم بقياس الأبعاد اللازمة، ووظِّف مفاهيم الدائرة في تحليل التصميم.
بناء الحجج الرياضية	٣- برِّر بالتعاون مع مجموعتك مقترحات التطوير باستخدام العلاقات الهندسية.
استخدام الأدوات والتكنولوجيا بذكاء	٤- استخدم بالتعاون مع مجموعتك برنامج رسم هندسي لإعداد نموذج للتصميم المقترح.
النمذجة الرياضية واتخاذ القرار	٥- قدِّم بالتعاون مع مجموعتك توصيات لتحسين السلامة المرورية استنادًا إلى نتائج التحليل.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الوحدة الرابعة ٤

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions



www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

تُعَدُّ أيّامُ الحصادِ من أجملِ الأيّامِ الصيفيّة التي يطولُ فيها شروق الشّمسِ.
استخدم خصائصَ الاقتراناتِ المثلثية في تحديد عدد ساعات شروق الشّمس طوالَ أيّامِ السّنة. حاولْ معرفةَ عددِ ساعاتِ شروقِ الشّمسِ في يومُ ١٠/حزيران.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات المثلثية في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١- التعرُّف إلى مفهوم الزوايا الموجّهة.
٢- التعرُّف إلى مفهوم قياسي الزاوية: الستيني والدائري.
٣- التحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري وبالعكس.
٤- التعرُّف إلى الوضع القياسي للزاوية، والزوايا المتكافئة.
٥- تمثيل منحنيات الاقترانات الدورية (المثلثية) بيانيّاً.
٦- إثبات متطابقاتٍ مثلثيّة.
٧- حلّ معادلاتٍ مثلثيّة.

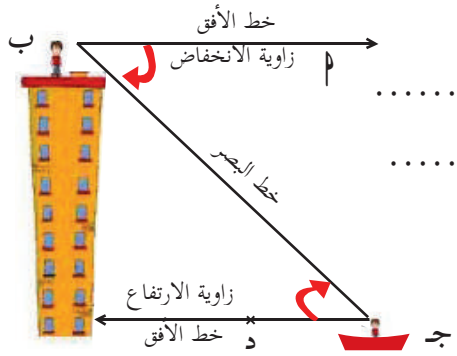
www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الزّاوية في الوضع القياسي
The Angle in Standard Position

نشاط ١

يراقب شخص من منارة على شاطئ غزة، صيّاداً في قاربه في البحر. يصنع خطُّ البصرِ بينهما مع خطّي الأفق لكلٍّ منهما زاويتين: إحداها تُسمّى زاويةَ الارتفاع، و الأخرى تُسمّى زاويةَ الانخفاض.



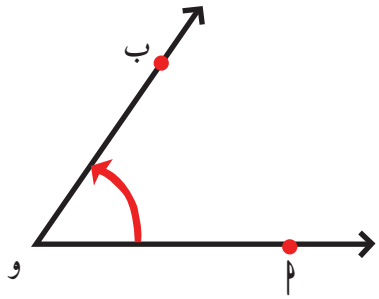
زاوية الانخفاض في الصورة هي: .....، وضلعاها هما: .....، .....

زاوية الارتفاع في الصورة هي: .....، وضلعاها هما: .....، .....

ألاحظ العلاقة بين قياس زاوية الارتفاع، وقياس زاوية الانخفاض.

نشاط ٢

في الشكل المجاور



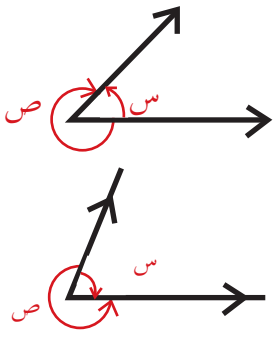
- ضلع الابتداء للزاوية أ و ب هو: .....
- ضلع الانتهاء لها هو: ..... ، لماذا ؟ .....
- اتّجاه حركة ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء هو: .....
- تُسمّى زاوية أ و ب زاويةً موجّهة.

أتعلّم: الزاوية الموجّهة: هي زاويةٌ يتحدّد اتّجاهُها باتّجاه دوران ضلع الابتداء لينطبقَ على ضلع الانتهاء، وتكون الزاويةُ الموجّهة زاويةً موجبةً إذا كان اتّجاه الدوران عكس عقارب الساعة، وتكون الزاويةُ الموجّهة سالبةً إذا كان اتّجاه الدوران مع عقارب الساعة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٣

في الشكل المجاور:

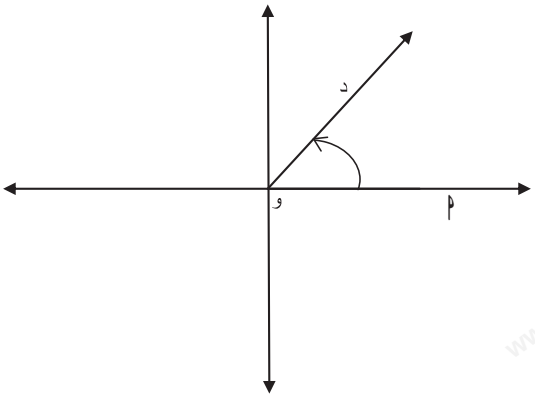


∠س = ٦٠°،

∠ص = ...

∠ص = ٨٢٠°، ∠س = ...

نشاط ٤



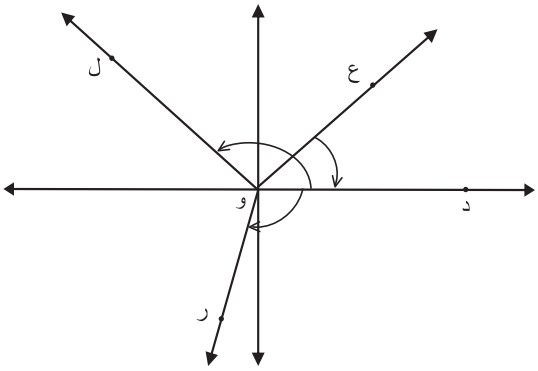
أُسمّي الزاوية الموجّهة في الشّكل .....

ضلع الابتداء لها هو $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، ضلع الانتهاء لها هو: .....، رأس الزاوية هو: .....

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

أتعلّم: تكون الزاويةُ في الوضع القياسي إذا كان رأسُها نقطةَ الأصل، وانطبق ضلعُ الابتداء على محور السّينات الموجب.

نشاط ٥



في الشكل المجاور: الزاوية الموجهة ع و د ليست في وضعٍ قياسيّ؛ لأنّ .....

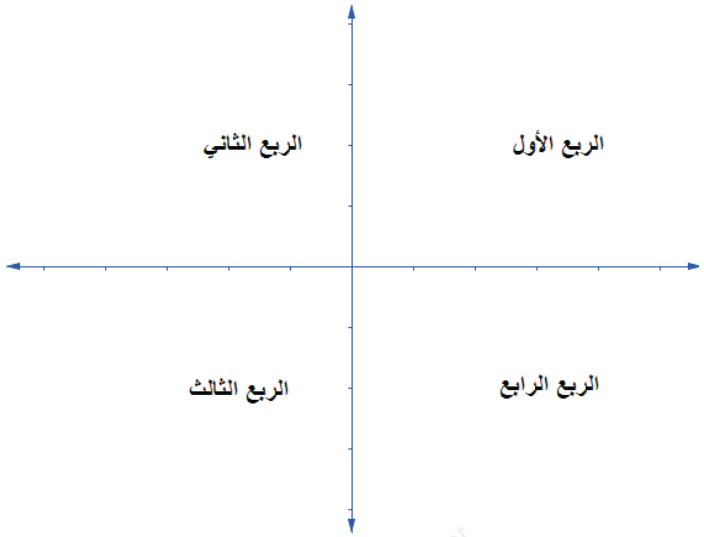
- الزاوية الموجّهة ..... في الوضع القياسي؛ لأنّ .....
- الزاوية الموجّهة د و ر في .....، لأنّ .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



محورا الإحداثيّات يقسمان المستوى إلى ..... أرباع

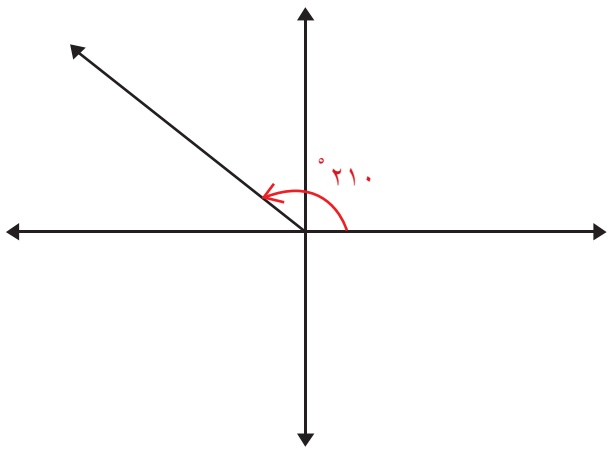
تُرتَّبُ الأرباع باتّجاه .....



www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

أستنتج أنّ:

- إذا كانت ق(∠هـ) زاويةً في الوضع القياسيّ، وكان ٠° < ق(∠هـ) < ٩٠°، فإنّ ضلع انتهائها يقع في الرّبع الأوّل.
- إذا كانت ق(∠هـ) في الوضع القياسيّ، وكان ..... < ق(∠هـ) < .....، فإنّ ضلعَ انتهائها يقع في الرّبع الثاني.



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٧

أرسمُ الزّوايا التي قياسها ٢١٠° ، ٢٢٥° ، -٣٠٠° ، -٦٠° في الوضع القياسي، ثم أحدّدُ الربع الذي تقع فيه:

تقع الزّاوية التي قياسها ٢١٠° في الربع .....

بينما تقع الزّاوية التي قياسها ٢٢٥° في الربع .....

تقع الزّاوية التي قياسها −٣٠٠° في الربع .....

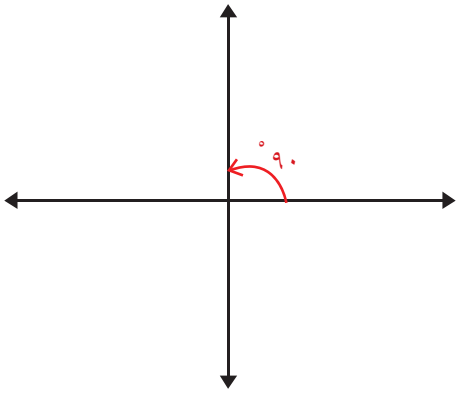
تقع الزّاوية -٦٠° في الربع .....

أتعلّم: عند رسم زاويةٍ في الوضع القياسي فإنّ ضلعَ انتهائها يحدّدُ موقعَها في المستوى الديكارتي.

نشاط ٨

أرسمُ الزّوايا التي قياسها:

٩٠°، ١٨٠°، -٩٠°.



ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ٩٠° على محور .....

بينما ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ١٨٠° على .....، أما ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها -٩٠° فينطبق على .....

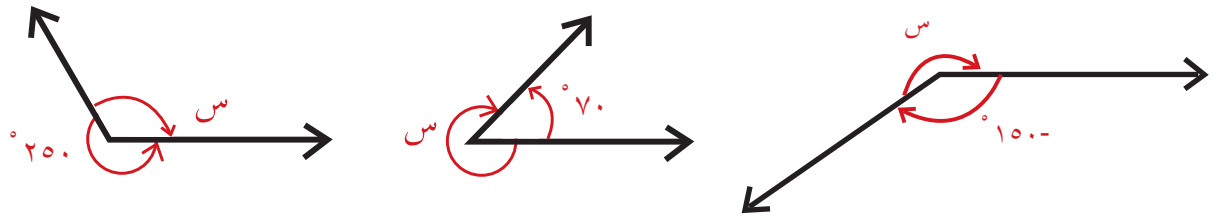
تُسمّى الزّاوية التي في الوضع القياسي، وينطبق ضلعُ انتهائها على أحد المحاور الإحداثيّة زاويةً رُبعيّةً.

أعطِ ثلاثة أمثلة لزوايا ربعيّة: .....، .....، .....

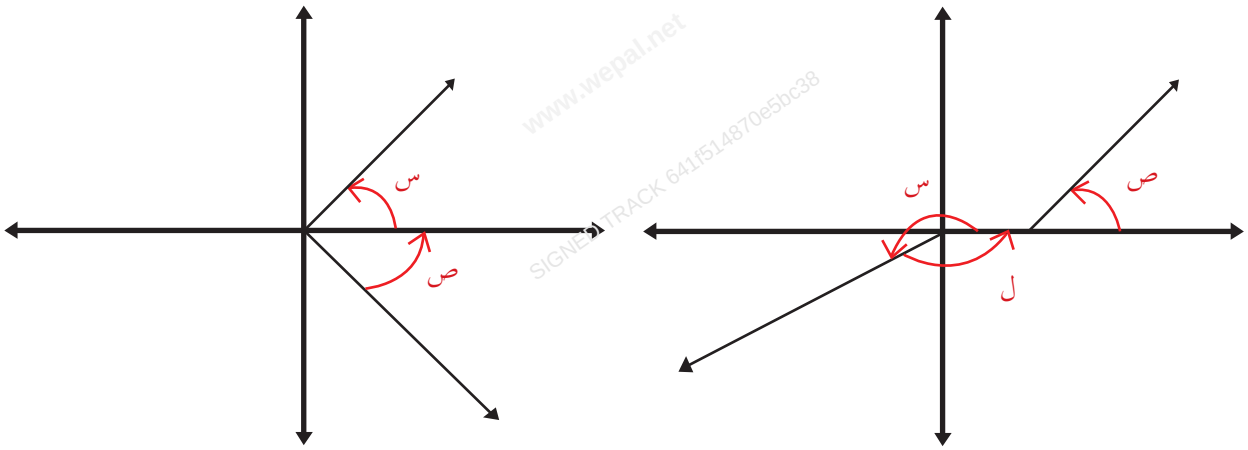
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٤-١:

(١) ما قيمةُ س التي تُمثّل قياس الزاوية في كلٍّ من الأشكال الآتية:



(٢) أميّزُ الزّوايا التي في الوضع القياسي:



(٣) أُحدّدُ الرّبع من المستوى الذي تقع فيه الزّوايا الآتية:

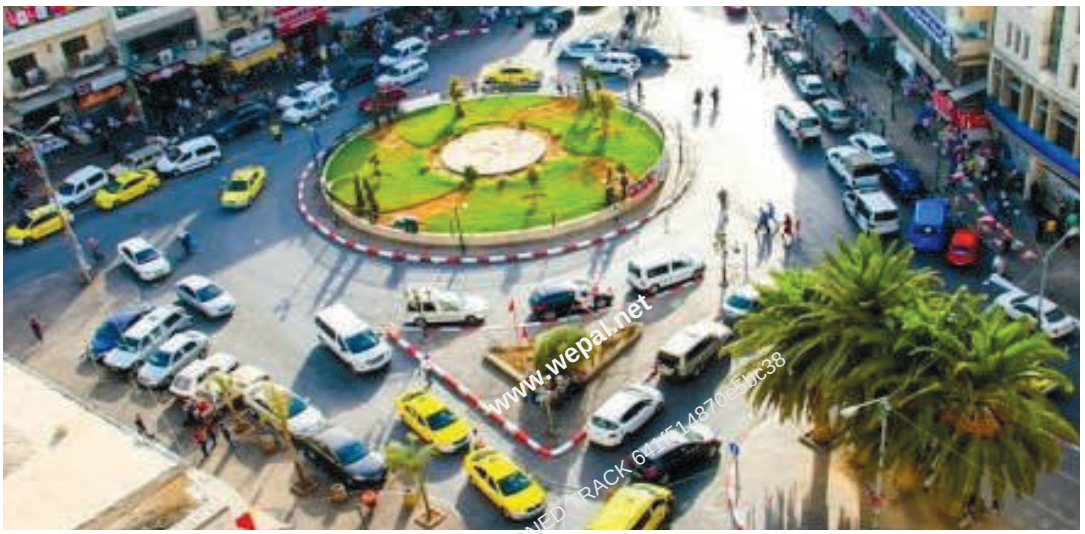
١٢٠-° ، ١٣٠° ، ٢٥٠-° ، ٣٢٠° ، ٤٥٠°

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

قياس الزوايا
Angles and their Measurements

نشاط ١

تعيش المدن الفلسطينيّة أزمةً مروريّةً خانقة؛ مما يعرقلُ عمل طواقمِ الدّفاعِ المدني والإسعاف، ويؤخّرُ المواطنين عن أعمالهم يوميّاً؛ لذلك ارتأت البلديّات إنشاءَ الدواوير عند مفترقات الطّرق، ومداخل المدن.


www.wepal.net
SIGNED - RACK 641f514870e5bc38

عند حركة جسمٍ في مسارٍ دائريٍّ، فإنّ الزّاويةَ المركزيّةَ تتغيّر مع الزمن حسب العلاقة:

$$\text{السرعة الزاوية } (\omega) = \frac{\text{السرعة الخطيّة للجسم (ع)}}{\text{نصف قطر المسار الدائري (نق)}}$$

إذا سارت سيّارةٌ حول دوّارٍ، نصفُ قطرِه ٠,٠٠٥كم، وأشار عدّاد السيّارة إلى سرعةٍ خطيّة ٣٠ كم/ساعة. أجدُ معدل تغيّر الزاوية المركزية بالدقيقة (السرعة الزاوية للسيارة).

$\omega = \frac{ع}{نق}$ ، ع ، نق: أعداد تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة.

ω ينتمي إلى .....؛ لأنّ ناتج قسمة عددَيْن حقيقيّين هو عددٌ حقيقي، ويُسمّى التغير في القياسَ الدائريّ للزاوية، ووحدته راديان/دقيقة.

٣٠ كم / ساعة = ... كم/دقيقة.

$\omega = \frac{٠,٥}{٠,٠٠٥}$ = ... راديان/دقيقة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٢

في الشّكل المجاور، تمّ تقسيمُ الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوياً في الطّول، فإنّ الزاوية المركزيّة التي تقابل كلَّ قوسٍ، قياسها ١°، والزاوية التي تقابل ٥٠ قوساً يكون قياسها .....°.

والدرجة الواحدة تقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الدقيقة، وتُكتَبُ على الصورة: ١° = (...)′



والدقيقة الواحدة تُقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الثانية، وتُكتَبُ على الصورة: ١′ = ٦٠″

الزّاوية ٣٢,٦° = ٣٢° و ٠,٦ × ٦٠′ = (...)′

= ٣٢° ٣٦′

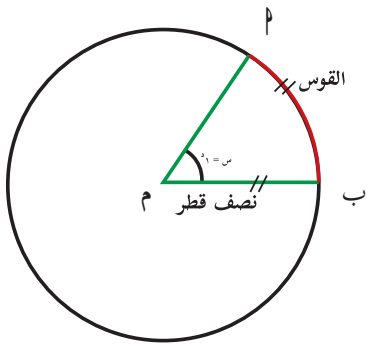
يُسمّى قياسُ الزّاوية بالدرجات والدقائق والثواني القياسَ الستيني للزّاوية.

أفكر

لماذا سُمِّي القياسُ الستيني بهذا الاسم؟

نشاط ٣

في الشكل المجاور، دائرةٌ مركزها م ونصفُ قطرِها وحدة واحدة.



طول القوس أ ب = طول نصف قطر الدائرة

طول القوس الذي يقابل الزاوية المركزية التي قياسها (س) في الشكل = ...

أتعلم: يكون قياس الزاوية س بالقياس الدائري = ١ راديان (naidaR) ونرمز له بالرمز ١ᶜ

تعريف: الزّاوية النصف قطريّة: هي زاويةٌ مركزيّةٌ في دائرةٍ يقابلها قوسٌ طولُه يساوي طولَ نصفِ قطرِ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز (١ᶜ)، وهي وحدة قياس الزاوية بالقياس الدائري للزّوايا.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



ما هو القياس الدائري إذا كانت الزّاويةُ مرسومةً في دائرةٍ نصف قطرها نق ≠ ١ ؟



محيط الدائرة = ٢ نق π ⟵ محيط دائرة الوحدة = ...

الدورة الكاملة = ٣٦٠° يقابلها ٢ π ᵈ

π ᵈ يقابلها ..... درجة ⟵

باستخدام التقريب (π = ٣,١٤) نستنتج أنّ: ١ ᵈ = ٥٧,٣ °

أُكمل: ٣ ᵈ = ...° ، ١,٥ ᵈ = ...°



أوّلاً: أُحوّلُ قياس الزّوايا الآتية من درجات إلى زاوية نصف قطرية (راديان):

٩٠° ، ١٢٠° ، -٢٢٥ °

- ٩٠° :

للتحويل من درجات إلى دائري: π ᵈ يقابلها ١٨٠°

٩٠ درجة ⟵ هـ بالتقدير الدائري

هـ = $\frac{٩٠^\circ}{١٨٠^\circ}$ × π ᵈ = $\frac{١}{٢}$ π ᵈ

- ١٢٠° = $\frac{١٢٠^\circ}{١٨٠^\circ}$ × π ᵈ = ...

- -٢٢٥° = ...

ثانياً: أُحوّل قياس الزّوايا من دائري إلى درجات:

$\frac{٥}{٦}$ π ᵈ ، $\frac{٣}{٤}$ π ᵈ ، - $\frac{١٥}{١٨}$ π ᵈ

للتحويل من دائري إلى درجات: π ᵈ يقابلها ١٨٠°

$\frac{٥}{٦}$ π ᵈ ⟵ س بالدرجات.

س = $\frac{٥}{٦}$ π ᵈ × $\frac{١٨٠^\circ}{\pi^d}$ = ١٥٠°

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

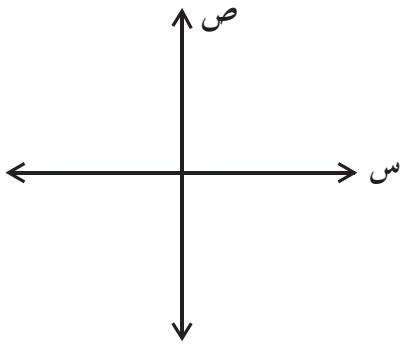
زاوية قياسها = $\frac{٣}{٤}\pi$ ᵈ = $\frac{٣}{٤}\pi$ ᵈ × $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$ = ... °.

زاوية قياسها = - $\frac{١٥}{١٨}\pi$ ᵈ = ... °.

زاوية قياسها ٢ ᵈ: باستخدام (π=٣,١٤) ، ٢ ᵈ = ... °

أُكملُ الجدول الآتي:

س°	٣٠	٤٥	٩٠	١٣٥	١٥٠	١٨٠	٢٤٠		٣٠٠	٣١٥		١٢٠-
هـ ᵈ		$\frac{\pi}{٤}$				π		$\frac{\pi٣}{٢}$			π-	



نشاط ٦

- أرسمُ الزاويا الآتية في الوضع القياسيّ:

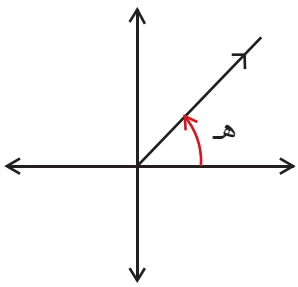
١٢٠ ° ، -٢٤٠ ° ، ٥٠ ° ، ٤١٠ °

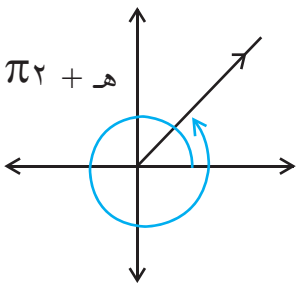
ماذا ألاحظ.....؟

أتعلم: يُقال لزاويتيْن أنّهما متكافئتان: إذا كان لهما ضلع الابتداء نفسه، وضلع الانتهاء نفسه.

في الشكل المجاور:

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٢π





الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

وبشكلٍ عام:

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٢ن π ، ∢ هـ بالقياس الدائري.

∠هـ تكافئ ∠هـ + ن ٣٦٠° ، ∢ هـ بالقياس الستيني ، حيث ن عدد صحيح.

نشاط ٧

أجدُ ثلاث زوايا مكافئة لكلٍّ من الزوايا التي قياسها: ٦٠°، $\frac{\pi}{٤}$ ᵈ.

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° = ٤٢٠°، ن = ١

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × ٢ = ...، ن = ٢

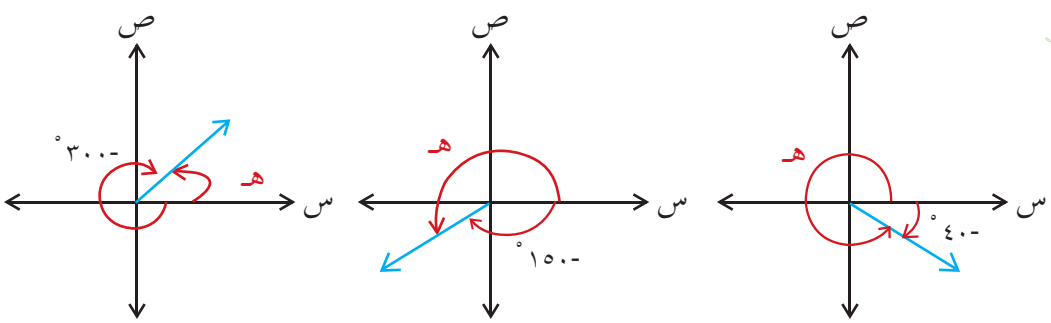
الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × -١ = ...، ن = ...

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ ᵈ تكافئ ..... عندما ن = ١

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ ᵈ تكافئ $\frac{-٧\pi}{٤}$ ᵈ عندما ن = ...

نشاط ٨

أجدُ قياسَ الزّاوية هـ في كلٍّ من الأشكال الآتية:



∢ هـ = ... ∢ هـ = ... ∢ هـ = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٤-٢

(١) أ) أحوّل القياسات الآتية من الدرجات إلى راديان:

٢٤٠° ، -٩٠° ، ٤٢٠° ، -١٣٥°

ب) أحوّل القياسات الآتية من راديان إلى درجات:

$\frac{\pi ٥}{٦}$ ، $\frac{\pi ٢}{٣}$ ، $\frac{\pi ١١-}{١٢}$ ، $\frac{\pi -}{٤}$ ، ٢,٥ د

(٢) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها ٥٠°.

(٣) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د

(٤) أعطِ زاويتيْن: قياس إحداهما موجب، والآخر سالب، مكافئتين لكلٍّ من الزّوايا التي قياسها:

-٢٠٠° ، ١٢٠° ، $\frac{\pi ٢}{٣}$ د ، $-\frac{\pi}{٤}$ د

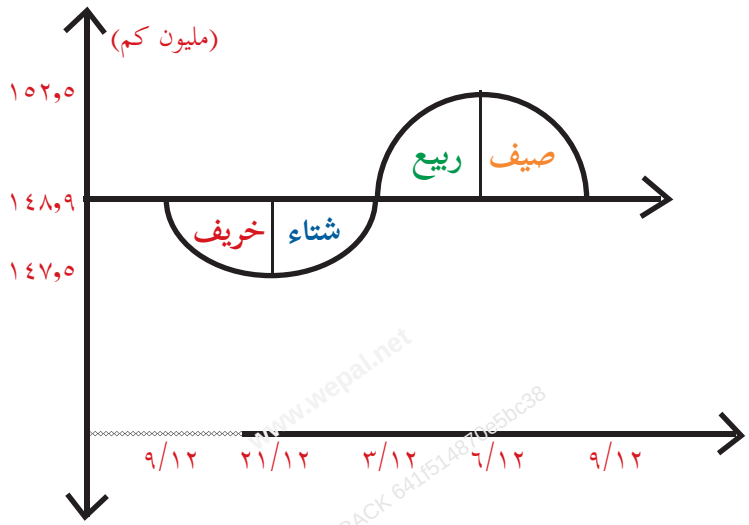
(٥) درّاجة هوائيّة قُطر عجلتها ٩٠سم، تسير بسرعةٍ خطيّةٍ مقدارها ٢٥كم/ساعة، ما معدّل تغيّر الزّاوية المركزيّة لعجلة الدراجة في الثانية ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

نشاط ١

إنّ حركة الأرض حول الشمس تتّخذ اقتراناً دوريّاً، وعليه يَسهُلُ علينا دراسةُ الظواهر الطبيعيّة التي تحدث في فصول السنة كافّةً، التي تنتج عن هذه الحركة.

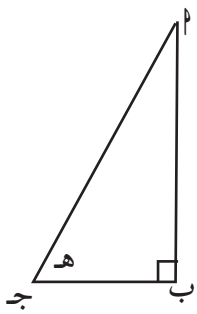


- أبعد ما تكون الأرض عن الشمس يوم ..... ويقدر بعدها ١٥٢ مليون كم
- أقرب ما تكون الأرض إلى الشمس يوم ..... ويقدر بعدها .....
- يوم الانقلاب الشتوي هو .....
- يوم الاعتدال الخريفي هو .....
- يبدأ الربيع يوم ..... وينتهي يوم .....

نشاط ٢

في المثلث القائم الزاوية أ ب جـ ، النسب المثلثية للزاوية الحادة التي قياسها هـ

جاهـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ ، جتاهـ = ... ، ظاهـ = ...



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



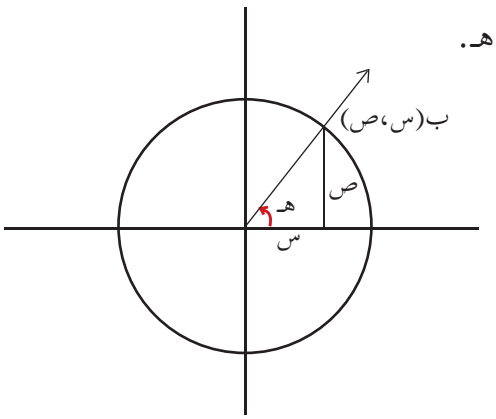
هل يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا التي قياسها أكبر من ٩٠°، أو قياسها سالب؟

أتعلّم: الدائرةُ التي مركزُها نقطةُ الأصل، وطولُ نصفِ قطرها وحدة واحدة، تُسمَّى دائرةَ الوحدة.

معادلة دائرة الوحدة: $س^{٢} + ص^{٢} = ١$



لتكنْ هـ زاوية في الوضع القياسي، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص). أجدُ النسب المثلثيّة الأساسيّة للزّاوية هـ.



جاهـ = $\frac{ص}{١}$ = ص ، جتاهـ = ...،

ظاهـ = ...

بشكلٍ عام: إحداثيّات النقطة ب (جتاهـ ، جاهـ).

أتعلّم: إذا قطع ضلعٌ انتهاءِ الزاوية هـ في الوضع القياسي دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص)، فإنّه يمكن تعريفُ الاقترانات المثلثية جاهـ = ص ، جتاهـ = س، ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠ وتُسمّى هذه الاقترانات، الاقترانـاتِ المثلثية الأساسيّة للزّاوية هـ.

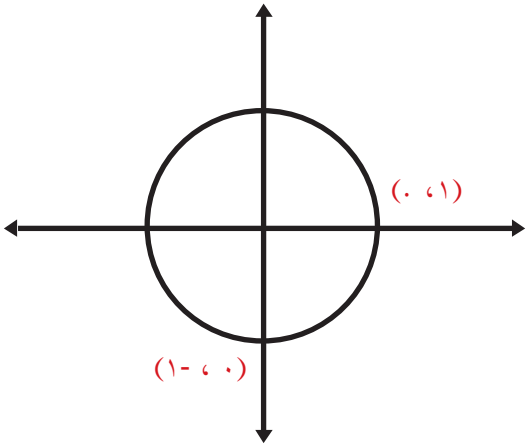


العلاقة من ٢ ⟵ ب (س ، ص) تشكل اقتراناً هـ ∋ ٢ حيث ٢ هي مجموعة الزوايا في الوضع القياسي.

ملاحظة: إذا كانت النقطة ب (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة،

فإن -١ ≤ س ≤ ١، و -١ ≤ ص ≤ ١ ، وعليه فإن -١ ≤ جتاهـ ≤ ١ و -١ ≤ جاهـ ≤ ١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



نشاط ٤

أجدُ الاقترانات المثلثية للزّوايا الربعيّة:
٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°.

- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١،٠)، وينتج جا٠°= ..... ، جتا٠°=..... ، ظا٠°= .....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٩٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.... ، ....)، وينتج جا٩٠°= ..... ، جتا٩٠°=..... ، ظا٩٠°= .....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ١٨٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.... ، ....)، وينتج جا١٨٠°= ..... ، جتا١٨٠°=..... ، ظا١٨٠°= .....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٢٧٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.... ، ....)، وينتج جا٢٧٠°= ..... ، جتا٢٧٠°=..... ، ظا٢٧٠°= .....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٣٦٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.... ، ....)، وينتج جا٣٦٠°= ..... ، جتا٣٦٠°=..... ، ظا٣٦٠°= .....
- أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزّاوية الربعية (س°)	جاس	جتاس	ظاس
صفر	صفر		
٩٠°			
١٨٠°		١-	صفر
٢٧٠°			
٣٦٠°		١	٠

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٥

إذا قطع ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها هـ° دائرةَ الوحدة في النقطة أ $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، \frac{١}{٢})$ فإنّ:

- جاهـ = $\frac{١}{٢}$ ؛ لأن الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها هو .....

جتا هـ = ... ؛ لأنّ: .....

ظاهـ = ...

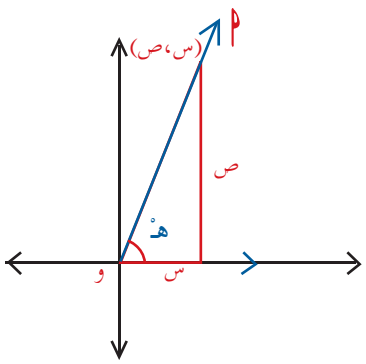
نشاط ٦

- أرسم دائرة الوحدة
- أرسم زاويةً قياسها هـ° في الوضع القياسي
- نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع الدائرة هي النقطة أ (س ، ص).

- تكون إشارةُ س موجبةً، إذا وقعت النقطة أ في الربع .....، أو الربع ..... من المستوى.
- تكون إشارةُ ص موجبة، إذا وقعت النقطة أ في الربع .....، أو الربع .....من المستوى.

أتعلَّمُ: تتحدد إشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه.

إذا كانت هـ زاويةً في الوضع القياسي، النقطة أ (س ، ص) تقع على ضلع انتهائها، بعد النقطة أ (س ، ص) عن نقطة الاصل = ...



جاهـ، جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$

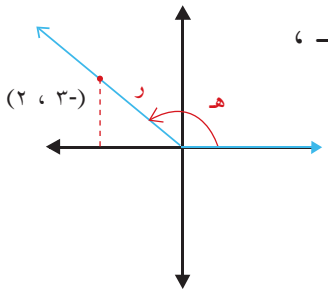
جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$

ظاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ صفر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٧

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقتراناتِ المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:

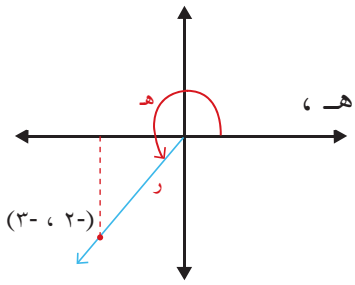


ر = $\sqrt{(٢)^{٢} + (-٣)^{٢}}$ = ...

جاهـ = ..., جتاهـ = ..., ظاهـ = ...

نشاط ٨

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقتراناتِ المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:



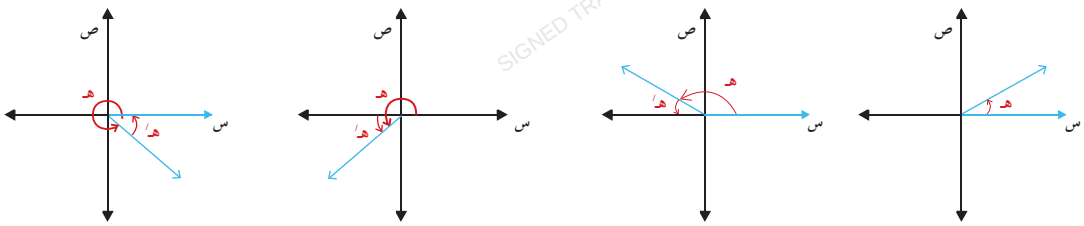
ر = ...

جاهـ = ... ، جتاهـ .....

ظاهـ = ...

نشاط ٩

لكلِّ زاويةٍ قياسها هـ درجة في المستوى زاويةُ اسنادٍ قياسها هـَ درجة، أُكمل:



هـَ = هـ | هـَ = ... | هـَ = ١٨٠° – هـ | هـَ = ...

أتعلم: زاوية إسناد الزاوية (هـ): هي الزّاوية الحادّة (< هـَ) الناتجة من إتحاد ضلع انتهاء الزاوية (< هـ) ومحور السينات.

قيمُ الاقترانات المثلثيّة لزاويةِ الإسناد هي ذاتها قيمُ الاقترانات المثلثيّة للزّاوية الأساسيّة، بينما تحدّدُ إشارة تلك القيمة موضعَ ضلع انتهاء الزّاوية الاساسيّة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أتذكّر قيمَ الاقتراناتِ المثلثيّة للزّوايا الخاصّة، وأُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية (س)	جاس	جتاس	ظاس
٣٠°	٠,٥		
٤٥°			١
٦٠°			$\sqrt{٣}$



أوّلاً: أجد قيمة جا ١٢٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ١٢٠° تقع في الربع .....

إشارة جا١٢٠° موجب.

قياس زاوية الإسناد هـ = ١٨٠° − ١٢٠° = ...

جا١٢٠° = جا٦٠° =

ثانياً: أجد قيمة جتا ٢٤٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٤٠° تقع في الربع .....

إذن: إشارة جتا ٢٤٠°.....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جتا٢٤٠° = - جتا.....° = ...



أجدُ جا ٢٢٥°

الزّاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٢٥° تقع في الربع ..... ، إشارة جا ٢٢٥° هي:.....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جا ٢٢٥° = ... = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

• أجدُ جا -٣٠°

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها -٣٠° تقع في الربع ..... ،

إشارة جا -٣٠° هي: .....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

جا -٣٠° = ... = ...

• أجد ظا $\frac{\pi ٣}{٤}$ ᵈ

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها $\frac{\pi ٣}{٤}$ ᵈ تقع في الربع ..... ،

إشارة ظا $\frac{\pi ٣}{٤}$ ᵈ هي: .....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ... ، إذن: ظا $\frac{\pi ٣}{٤}$ ᵈ = ... = ...



أجد قيمة ٢جا ٣٠°جتا ٣٠° وأقارنه بقيمة جا ٦٠°

٢جا ٣٠°جتا ٣٠° = ٢ × ..... × ..... = ...

جا ٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

أجد:

• ٢جا ٤٥°جتا ٤٥° = ٢ × ..... × ..... = ...

• جا ٩٠° = ... ماذا تلاحظ؟ ماذا تلاحظ؟

أستنتج أن: جا٢أ = ٢جاأجتاأ



أجد قيمة جا $\frac{\pi}{٨}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$

جا $\frac{\pi}{٨}$ جتا $\frac{\pi}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ × .... = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ١٥

أجد قيمة جتا^{٢}٣٠° ـ جا^{٢}٣٠° وأقارنه بقيمة جتا٦٠°

جتا^{٢}٣٠° ـ جا^{٢}٣٠° = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$ ـ (...)^{٢}

جتا٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

نشاط ١٦

أجد ناتج جتا^{٢}١٥° ـ جا^{٢}١٥° دون استخدام الحاسبة

جتا^{٢}٥١° ـ جا^{٢}٥١° = جتا..... = ...

نشاط ١٧

θ زاوية منفرجة بحيث جتاθ = $-\frac{٤}{٥}$ ، أجد قيمة جتا٢θ.

باستخدام المتطابقة جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١

جا$^{٢}\theta$ + $(\frac{-٤}{٥})^{٢}$ = ١

جا$^{٢}\theta$ = ...

جاθ = $\pm\frac{٣}{٥}$ ، الزاوية θ منفرجة، وتقع في الربع .....

اذن جاθ = ...

لإيجاد قيمة جتا٢θ = جتا$^{٢}\theta$ ـ جا$^{٢}\theta$ نعوض قيمة جتاθ ، جاθ وينتج

جتا٢θ = $(\frac{-٤}{٥})^{٢}$ ـ $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ = ...

ما قيمة جتا٤θ ؟

أستنتج أن: جتا٢θ = جتا$^{٢}\theta$ ـ جا$^{٢}\theta$ ، جتا٢θ = ٢جتا$^{٢}\theta$ ـ ١ ، جتا٢θ = ١ ـ ٢جا$^{٢}\theta$

أفكر

أكتب علاقة مناسبة لكل من جا٤θ ، جتا٤θ بدلالة جاθ، جتاθ

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٤-٣

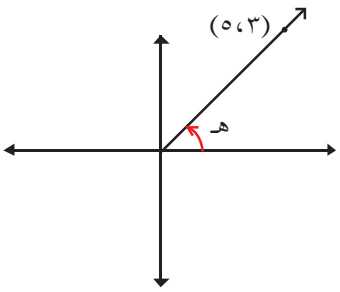
(١) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة لقياسات الزّوايا الآتية:

-٩٠° ، ٤٥٠° ، $\pi_{د}$٥

(٢) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة للزاوية هـ ، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة:

أ ($\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$) ، ب (-١ ، ٠) ، جـ ($-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

(٣) ما قيمةُ جا هـ ، جتا هـ، ظا هـ في الشّكل المجاور؟



(٤) أحدّدُ إشارةَ ما يأتي:

جتا -١٣٥° ، ظا ٨٤٠° ، جتا $\frac{٢\pi_{د}}{٣}$ ، ظا $\frac{٣\pi_{د}}{٤}$

(٥) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة

أ) ٢جتا^{٢} ٢٢,٥° − ١

ب) ١ − ٢ جا^{٢} $\frac{\pi_{د}}{٦}$

جـ) ٦جا $\frac{\pi_{د}}{٢١}$ جتا $\frac{\pi_{د}}{٢١}$

(٦) أجدُ قياسَ زاوية الإسناد للزّوايا التي قياساتها ما يأتي:

٢٢٥° ، $\frac{٢\pi_{د}}{٣}$ ، -١٥٠° ، $\frac{٣\pi_{د}}{٤}$ ، ٢١٠°

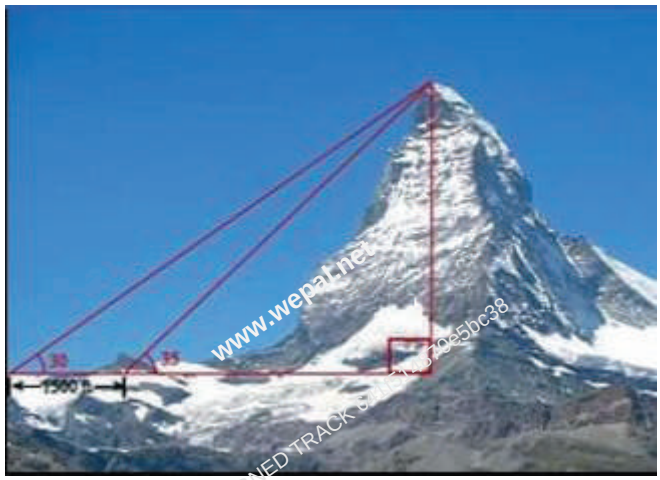
(٧) أجدُ قيمة ما يأتي، دون استخدام الآلة الحاسبة:

جا ٣٣٠°، ، ، جا -٣٠٠°

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(٨) θ زاوية منعكسة بحيث جاθ = - $\frac{٥}{١٣}$ ، أجد قيمة جتا٢θ ، جا٢θ ، جتا٤θ .

(٩) لإيجاد ارتفاع قمة جبل قام مجموعة من الطلبة بقياس زاوية ارتفاعها من نقطة معينة على سطح الأرض فكانت ٣٠°، سار الطلاب مسافة أفقية باتجاه الجبل مقدارها (١٥٠٠) قدم ثم قاموا بقياس زاوية ارتفاع قمته مرة ثانية فكانت ٥٣° كما هو موضح بالشكل. أجدُ ارتفاع قمة الجبل



الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمثيل الاقترانات المثلثية بيانيّاً
Graphing Trigonometric Functions

نشاط ١

طريق وادي النار هي الرئةُ التي يتنفّس بها أهالي جنوب الضّفة الغربيّة، والتي تصل بين شمالها وجنوبها. حيث إنّ قوات الاحتلال ترفضُ تزويدَها بالكهرباء، فقد بادر مجموعةٌ من طلبة الجامعات الفلسطينيّة إلى تصميم خلايا شمسيّة تقوم بتحويل الطاقة الشمسيّة إلى طاقةٍ كهربائيّة مستمرة، يتمّ تحويلُها إلى تيارٍ متردّدٍ، تتغيّر قيمتُه مع الزّمن، الذي يمكن استخدامُه في إنارة المنطقة ليلاً.


www.wepal.net
SIGNED-TRACK 641f514870e5bc38

ويمكن التعبير عن تغير التيار بالنسبة للزمن ($ز$) بالثانية بالعلاقة $ت(ز) = أ \text{ جا } \frac{\pi ٢}{ح} ز$

حيث $أ$ هي أقصى حدّ للتيار بالأمبير، $ح$ هي الزمن الدوري للتيار بالثانية.

إذا كانت العلاقة التي تربط التيار الكهربائي مع الزمن، $ت(ز) = ٢ \text{ جا } (١٠\pi ز)$، فإنّ الزمن الدوري للتيار $= \frac{\pi ٢}{١٠\pi} =$ ، أقصى حدٍّ للتيار المسموح = ...، $ح =$ .....

- قيمة التيار عند $ز = ٠,١$ ث تساوي: $ت(٠,١) = ٢ \text{ جا}(١٠\pi \times ٠,١) =$ ..... أمبير
- قيمة التيار عند $ز = ٠,٠٥$ ث تساوي .....

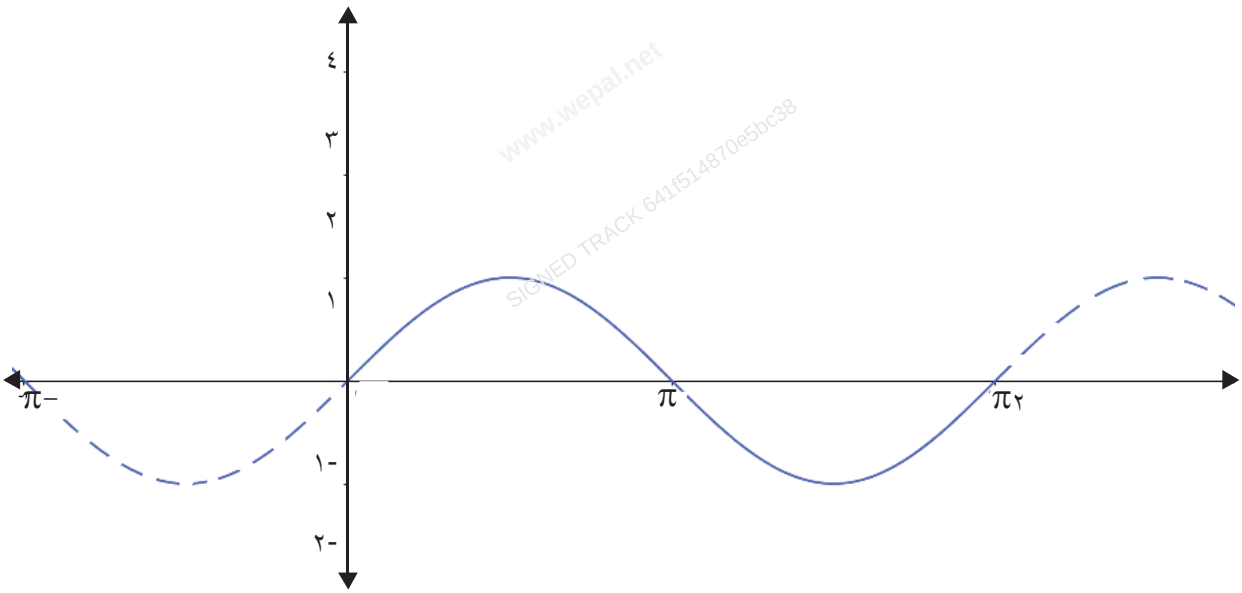
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٢

أُمثّلُ الاقتران ق(س)= جاس في المستوى الديكارتي، أكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi٢}{٣}$	π	$\frac{\pi٥}{٤}$	$\frac{\pi٣}{٢}$	$\frac{\pi١١}{٦}$	$\pi٢$
ق(س)= جا س		-١	...	...	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	...	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	...	-١	...	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران:



أُلاحظ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه.

- بما أنّ الزّوايا المتكافئة لها النسبُ المثلثيّةُ المناظرة نفسها، فإنّ منحنى ق(س) =جا س يكرّرُ نفسه في فتراتٍ متساوية، طولُ كلٍّ منها $\pi٢$. ومثل هذه الاقترانات تُسمّى اقتراناتٍ دوريّةً، ومقدار دورة هذا الاقتران = $\pi٢$
- مجال الاقتران ق(س) =جا س هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة ح، ومداه هو [-١، ١]
- أكبرُ قيمةٍ للاقتران = ... وأصغر قيمةٍ له = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

• مثل هذه الاقترانات لها سعةٌ، وتُعرف سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$

وعليه فإنّ: سعة الاقتران ق(س) = جا س = $\frac{١ - (-١)}{٢}$ = ١



أُمثّل الاقتران: ق(س) = جتاس في المستوى الديكارتي، س ∈ ح .
أُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جتا س	-١	...	...	...	...	...	٠	$-\frac{١}{٢}$	-١	...	...	...	

أُعيّن النقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه:

• مجال الاقتران ق(س) = جتا س هو .....، ومداه .....

• أكبر قيمةٍ للاقتران = ...، وأصغر قيمةٍ له = ...

• الاقتران ق (س) = جتا س اقتران دوري، دورته = ...

• سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$ = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

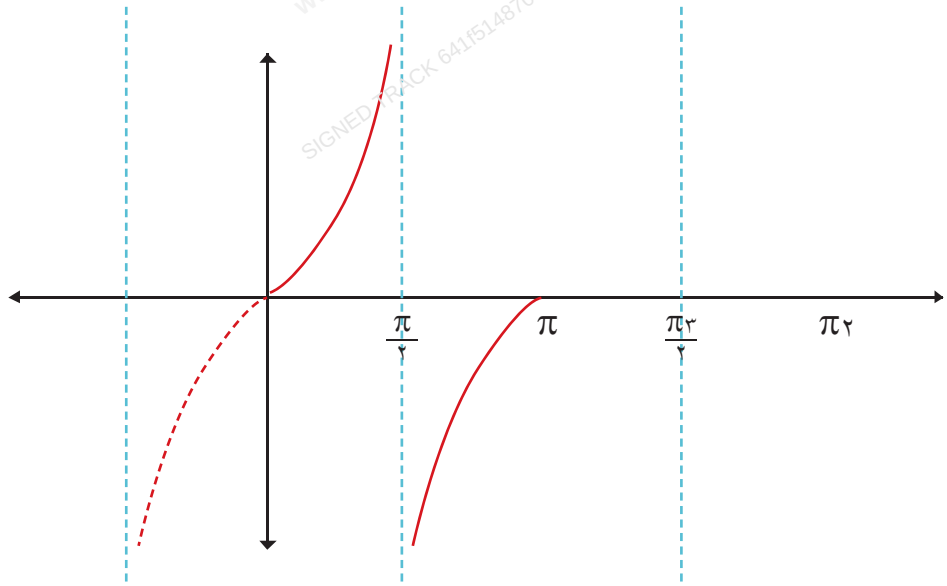
نشاط ٤

أمثل الاقتران ق(س) = ظا س في المستوى الديكارتي.

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi٢}{٣}$	π	$\frac{\pi٤}{٣}$	$\frac{\pi٣}{٢}$	$\frac{\pi١١}{٦}$	$\pi٢$
ق (س) = ظا س	...	...	صفر	...	١	...	...	...	...	$\sqrt{٣}$	...	$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأُكملُ رسم منحنى الاقتران.



ألاحظ شكل المنحنى، وأُدوّن خصائصه:

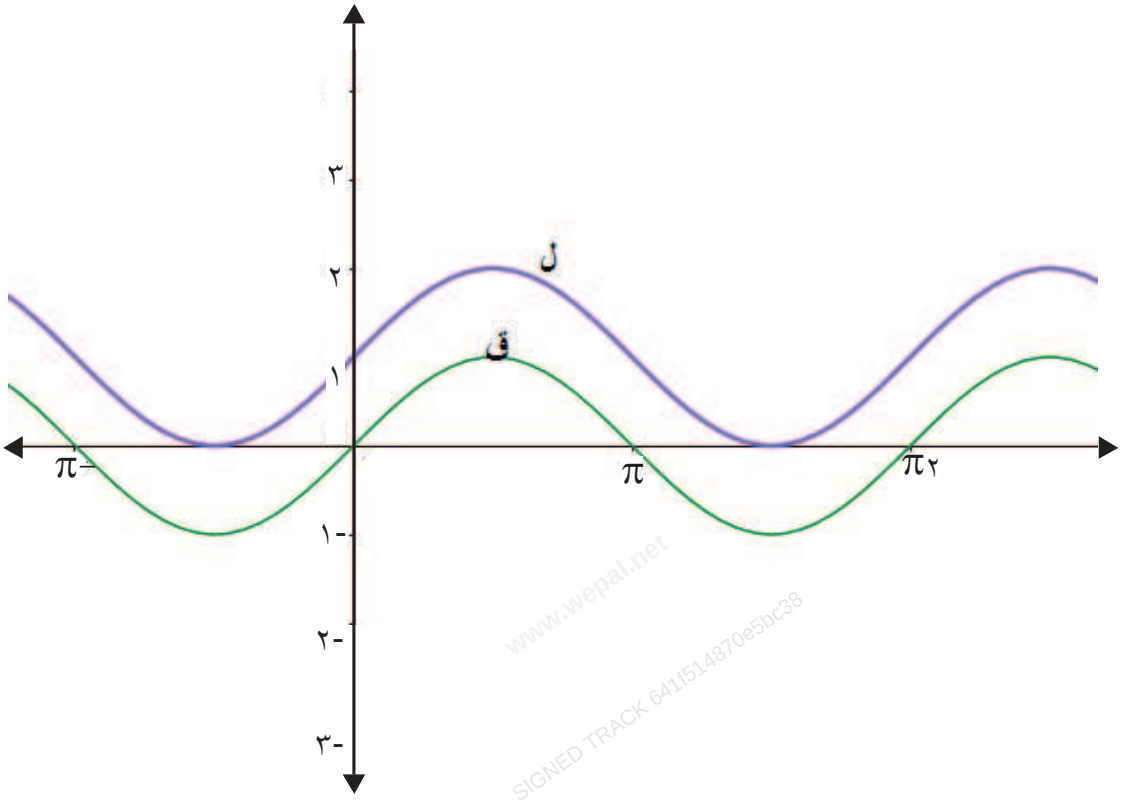
مجال ق(س) = ظاس هو مجموعةُ جميع الأعداد الحقيقيّة، ما عدا .....، ومداه هو: ح

دورته = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ٥

اعتماداً على منحنى الاقتران ق(س)= جا س، ومنحنى الاقتران ل (س) = جا س + ١



أُلاحظ أنّ: منحنى الاقتران ل(س) هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار ..... إلى .....

سعة الاقتران .....، دورته .....

ومداه .....

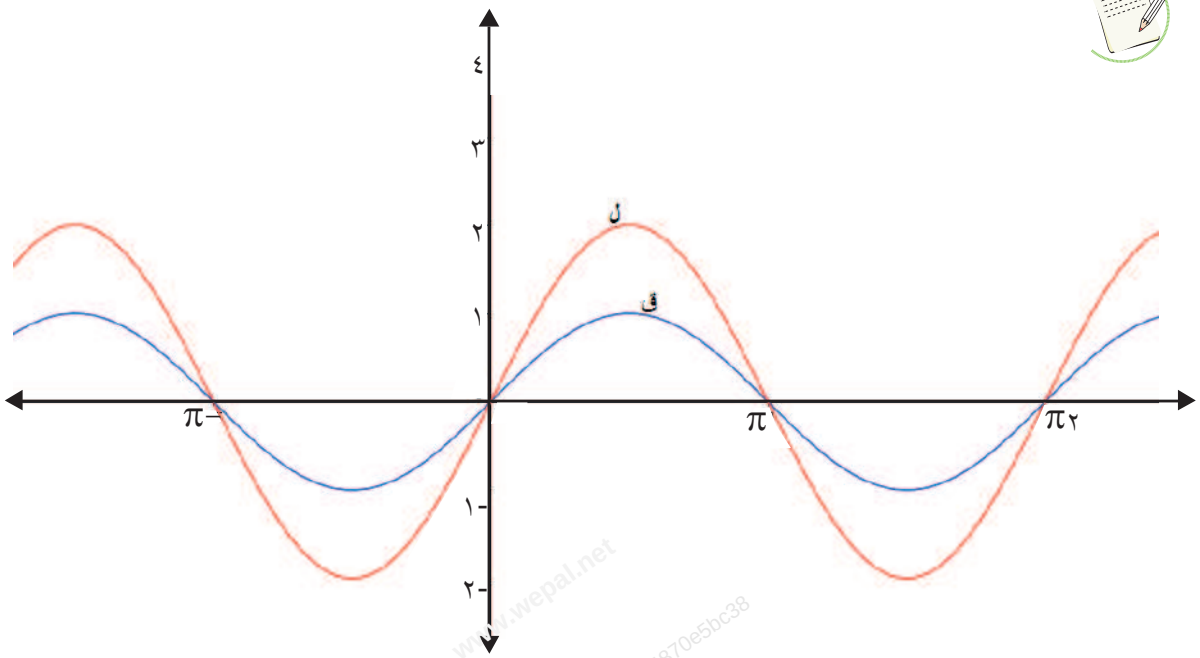
باستخدام التحويلات الهندسيّة أرسمُ منحنيات الاقترانات الدورية الآتية:

أ) ق(س) = جاس _ ١ ب) ق(س) = -جاس جـ) ق(س) = جا(-س).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



اعتماداً على منحنى الاقتران ق(س) = جا س، أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = ٢جا س، ثم أجدُ دورته وسعته.



من الرسم: دورة الاقتران ل = ...

القيمة العظمى هي ٢، والقيمة الصغرى هي: .....

السعة = ...

مدى الاقتران هو: .....



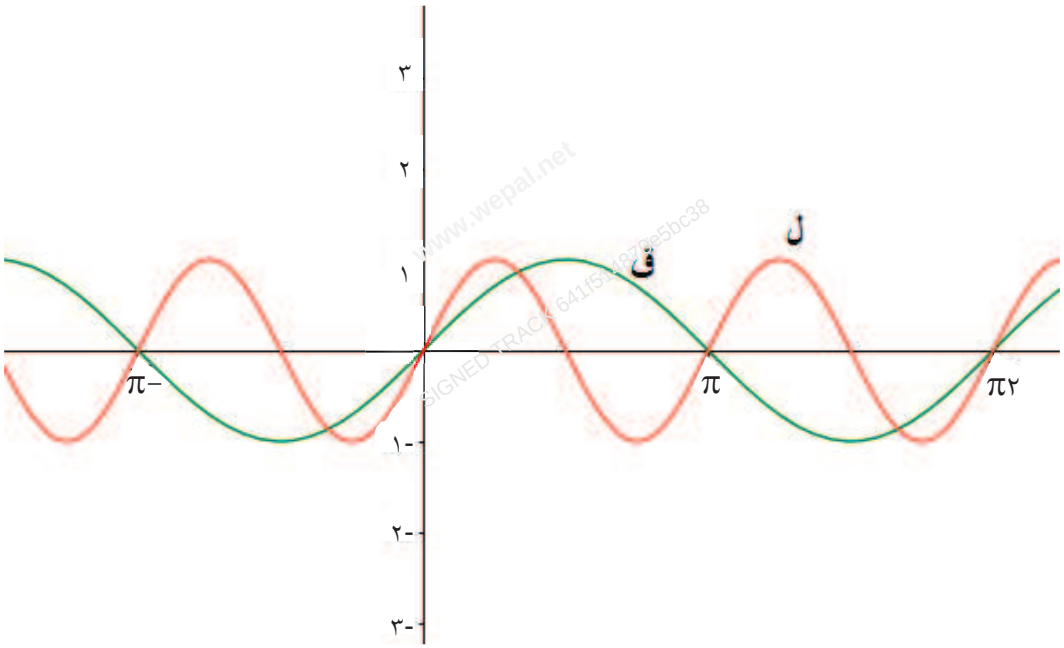
أُمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = حاس، ل(س) = جا٢س على المستوى البياني نفسه، ثم أجدُ السّعة والدورة لِلاقتران ل(س).

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	صفر	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ل (س)= جا٢س	...	صفر	...	...	...	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	١	...	...	...

أُعيّنُ النّقاط في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ التمثيل البياني للمنحنى:



من التمثيل البياني لمنحنى ل(س)، ألاحظُ أنّ دورة الاقتران ل(س) هي: .....

بينما سعته =.....

مدى الاقتران ل =.....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أستنتج: الاقتران الدوري ق(س) = أ جا (ب س) + جـ ، او الاقتران هـ(س) = أ جتا (ب س) + جـ

حيث: أ ، ب ، جـ أعداد حقيقيّة ، أ ، ب ≠ .

فتكون: دورة الاقتران = $\frac{\pi ٢}{|ب|}$

سعة الاقتران = | أ |

مدى الاقتران = [- | أ | + جـ ، | أ | + جـ]



لديك الاقتران ق(س) = ٢ جتا $\frac{س}{٢}$ – ٣، أجدُ دورته، سعته، ومداه، دون تمثيله بيانيّاً.

دورة الاقتران = $\frac{\pi ٢}{|ب|}$ = ...

سعة الاقتران = ...

مجال الاقتران = ...

مدى الاقتران = ...

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل٤-٤

(١) أُمثّلُ منحنيات الاقترانات المثلثية الآتية:

- ق(س) = جا س + ٢
- ل(س) = جتا ٢س _ ١
- م(س) = جتا (-س)
- ع(س) = ظاس + ١
- ك(س) = جا (س + π)

(٢) أجدُ: أكبرَ قيمة وأصغرَ قيمة (إن وجدت)، السعة، الدورة لكلٍّ من الاقترانات الواردة في السؤال الأوّل.

(٣) أجدُ: دورة، وسعة، ومدى الاقتران: ق(س) = -٣ جتا ($\frac{س}{٢}$)، دون تمثيله بيانيّاً.

(٤) أ) أرسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جا (س + $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

ب) أرسمُ منحنى الاقتران ق(س) = جاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جتا (س – $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

(٥) يتحرك سطح البحر بين ارتفاع وانخفاض مرة كل نصف يوم تقريباً، وتعرف هذه الظاهرة بالمد والجزر وتنشأ عن قوى جذب القمر والشمس. إذا كان أقصى ارتفاع للماء هو ٢٠م، وأقل انخفاض هو ١٠م، وكان تغير ارتفاع الماء خلال ساعات اليوم يأخذ شكل اقتران الجيب. أكتب قاعدة الاقتران التي تعبر عن مستوى ارتفاع وانخفاض مستوى الماء مع الزمن، وأُمثله بيانيّاً.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ١

شارك في سباق فِلَسطينَ الوطنيّ حوالي ٦٠٠٠ متسابقٍ، من دول العالم كافّةً؛ حيث اشتمل السباق على رسائل وطنيّة عدّة، أهمّها التركيز على الواقع الفلسطينيّ بمنع حريّةِ الحركة، وإقامة جدار الضم والتوسع بين محافظات الوطن، الذي تبعه ممارساتٌ عديدة تنافي المواثيق الدّوْليّة لحقوق الإنسان.

عندما يكون المتسابقُ ضمنَ مسارٍ مُنحنٍ عليه أنْ يحافظ على اتّزانه، وذلك بالميل بزاوية قياسها = هـ؛ بحيث تكون العلاقة: ظا هـ = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جـ ر}}$ ، حيث: س: سرعة المتسابق تلك اللحظة، جـ: تسارُع الجاذبيّة الأرضيّة = ٩٫٨م/ث^{٢}، ر: نصف قطر المسار الدائري.



ويمكن كتابةُ تلك العلاقة بالصّورة: جاهـ = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{جـ ر}}$ جتا هـ

- أبيّنُ أنّ الصورة الأولى للعلاقة تكافئ الصورة الثانية لها.
- زاوية ميل لاعب يجري بسرعة ٢٠م/ث في مسار دائري نصف قطره = ٤٠م، هي .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أرسمُ المستوى الديكارتي

- أرسمُ دائرةً، مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها وحدة واحدة (دائرة الوحدة).
- أرسم زاويةً، قياسها هـ في الوضع القياسي.
- أعيّنُ نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية هـ مع الدائرة: ب (س ، ص)
- جا هـ = ... ، جتا هـ = ...،
- ب (س ، ص) = ب (..... ، .....)

معادلة دائرة الوحدة س^{٢} + ص^{٢} =١، النقطة ب تقع على الدائرة، إذن: تحقّقُ معادلتها وينتج أنّ:
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، مثل هذه العلاقة صحيحة لأيّة زاوية هـ، وتُسمّى متطابقة.
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

أتعلّم: المتطابقة المثلثيّة هي معادلة بمتغير تحتوي اقتراناً مثلثياً، وتكون صائبة لجميع قيم المتغيّر.

أستنتج أنّ: جا^{٢} هـ = ١ – جتا^{٢} هـ ، جتا^{٢} هـ = ١ – جا^{٢} هـ ، وضّح ذلك.



زاويةٌ قياسها س درجة بحيث جا س = $\frac{٣}{٥}$ ، أجدُ جتا س، ظا س.

- جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١
- $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ + جتا^{٢} س = ١
- جتا^{٢} س = ١ – ..... = ... ،
- جتا س = ...
- ظا س = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



باستخدام المتطابقة جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، أثبت أنّ:

- ظا^{٢}هـ + ١ = قا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.

نقسم طرفيّ المتطابقة على جتا^{٢}هـ.

وينتج أنّ: .....، حيث إنّ جتاهـ ≠ ٠

- ظتا^{٢}هـ + ١ = قتا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.
- نقسم طرفيّ المتطابقة المعطاة على ..... وينتج أنّ: .....

..... ، حيث إنّ جا هـ ≠ ٠



أثبتُ صحّة المتطابقة $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{١ – جتا س}}$ = ١ + جتا س ، جتا س ≠ ١

الطرف الأيمن = ...

أضربُ البسط والمقام في (١ + جتا س)

أستبدل (١ – جتا^{٢} س) بـ جا^{٢} س

أختصرُ البسط والمقام بالقسمة على جا^{٢} س

أقارنُ النتيجةَ بالطرف الأيسر من المتطابقة الأصليّة.



أثبتُ صحّة المتطابقة: جتا^{٢}هـ – جا^{٢}هـ = ١ – ٢جا^{٢}هـ

الطرف الأيمن: من المتطابقة جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١، ينتج أنّ: جتا^{٢} هـ = ١ – جا^{٢} هـ

(١ – جا^{٢} هـ) – جا^{٢} هـ = ... = الطرف الأيسر / وهو المطلوب.



أثبت أنّ: $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{هـ}}$ = ظا^{٢}هـ

الطرف الأيمن: $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{هـ}}$ = $\frac{\text{قا}^{٢}\text{هـ}}{\text{قتا}^{٢}\text{هـ}}$ = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

ملاحظة: لإثبات صحّة المتطابقة، يمكن البدءُ بأحد الطرفيْن، والوصول إلى الطرف الآخر، ويمكن البدءُ بكلا الطرفين، والوصول إلى مقداريْن متساوييْن.



أجدُ قيمة الصواب للجملة المفتوحة: ٢ جا س – ١ = صفر، عندما س = ٠ ، $\frac{\pi}{٦}$

نعوّض س = ٠ في الجملة المفتوحة ٢ جا ٠ – ١ = -١ ≠ ٠ إذن: خاطئة.

نعوّض س = $\frac{\pi}{٦}$ في الجملة المفتوحة ٢ جا $\frac{\pi}{٦}$ – ١ = ٠ إذن: صائبة.

تسمى الجملة المفتوحة التي تحتوي اقتراناً مثلثياً وتكون صائبة لبعض القيم الحقيقية معادلة مثلثية.

أتذكّر: إذا كان س ، ص قياسيْن لزاويتيْن متتامتيْن فإنّ: جاس = جتا ص.



أحلّ المعادلة المثلثيّة: جا (٢س + ٣٠) = جتا ٤س ، صفر ≤ س ≤ ٩٠°.

٢س + ٣٠ + ٤س = ...

٦س = ...، إذن س = ...°

مثال(١): حلّ المعادلة ٢ جا س – ١ = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢ π

- ٢ جا س – ١ = صفر ⟵ ٢ جا س = ١ ⟵ جا س = $\frac{١}{٢}$
- إذن: زاوية الإسناد = ٣٠°
- بما أنّ: جاس قيمة موجبة ⟵ تقع الزاوية في الربع الأوّل (س = ٣٠°) ، أو تقع في الربع الثاني (س = ١٨٠° – ٣٠° = ١٥٠°)

مجموعة الحل = { $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi ٥}{٦}$ }

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أجدُ مجموعة حلّ المعادلة:

جتا^{٢}س + ٢جتاس − ٣ = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢ π

جتا^{٢}س + ٢جتاس − ٣ = صفر

(جتاس +....) (جتا س − .....) = صفر

إذن: جتا س + ٣ = صفر ⟵ جتا س = -٣ (تُرفض)، لماذا ؟

أو جتا س = ... ⟵ س = ... أو س = ... ⟵ مجموعة الحلّ = ...



أجدُ مجموعةَ حلّ المعادلة:

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢ π

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، ⟵ (جا س) (... − ...) = صفر

إذن: جا س = صفر، س زاوية ربعية، ⟵ س = صفر، ⟵ أو س =.... ، أو س = ...

جتاس − $\frac{١}{٢}$ = صفر ، جتا س = ...، زاوية الإسناد = ...

جتا س قيمة موجبة ⟵ تقع الزاوية في الربع .....، أو الربع .....

إذن: س = ...، أو س = ...

مجموعة الحل= .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٤-٥

(١) أثبتْ صحّةَ المتطابقات الآتية:

أ) (جا س + جتا س)^{٢} = ١ + جا٢س

ب) $\frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} = \left(\frac{١ - \text{جتاس}}{\text{جا س}}\right)^{٢}$

جـ) $\frac{١ - \text{جتا}٢\text{هـ}}{١ + \text{جتا}٢\text{هـ}} = \text{ظا}^{٢}\text{هـ}$

(٢) ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية، حيث :صفر ≤ س ≤ ٢ π ؟

أ) ٢ جتا^{٢} س ـ ١ = صفر

ب) ٢ جا^{٢} س + جا س = صفر

جـ) ظا^{٢} س + ١ = ٢

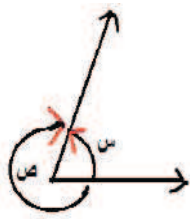


(٣) عُلِّق جسم في نهاية زنبرك يهتز فوق سطح منضدة، إذا كان ارتفاع الجسم عن سطح المنضدة يُعطى بالعلاقة ع = ٢٠ – ٤جتا ٢ π ن ، حيث ن الزمن بالثواني، ع الارتفاع بالسنتيمتر.

متى يكون ارتفاع الجسم = ١٦ سم ؟

بعد كم ثانية يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



السؤال الأوّل:

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قيم س ، ص الممكنة في الشكل المجاور؟

أ) (٦٠° ، ٣٠٠°) ب) (٦٠°، -٣٠٠°) جـ) (-٦٠° ، ٣٠٠°) د) (-٦٠°، -٣٠٠°)

(٢) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاوية ربعيّة ؟

أ) ١٢٠° ب) ١٩٠° جـ) ٣٠٠° د) ٣٦٠°

(٣) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاويةٍ مكافئةٍ للزاوية التي قياسها ٥٣١° ؟

أ) -٢٢٥° ب) ٢٢٥° جـ) -١٣٥° د) ٤٥°

(٤) ما قياس زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها ٢٠٠°:

أ) ١٦٠° ب) -٦٠° جـ) ٢٠° د) -٢٠°

(٥) زاوية قياسها $(\frac{\pi ٣}{٥})^{د}$ ، ما قيمة قياسها بالدرجات؟

أ) ٢١٦° ب) ٥٤° جـ) ١٠٨° د) ٣٤,٤°

(٦) زاوية قياسها ٣١٥°، ما قياسها بالراديان؟

أ) $\frac{\pi ٧}{٨}$ ب) $\frac{\pi ٧}{٤}$ جـ) $\frac{\pi ٣١٥}{٣٦٠}$ د) $\frac{\pi ٤}{٧}$

(٧) إذا كان ظاس= $\frac{٦}{٨}$ ، فما قيمةُ جا س ؟

أ) ٦ ب) $\frac{٣}{٥}$ جـ) $\frac{٨}{١٠}$ د) ٨

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(٨) ما سعة الاقتران: ق(س) = ٢جتا ٣س − ١ ؟

أ) ٢ ب) ٣ جـ) -١ د) ١

(٩) ما دورة الاقتران: ل(س) = ٣جا ٢س + ١ ؟

أ) $\pi ٢$ ب) π جـ) $\pi(\frac{٢}{٣})$ د) $\pi(\frac{٣}{٢})$

السؤال الثاني:

ما قيمة ما يأتي:

أ) جا -٢٤٠° ب) جتا - $\frac{\pi ٧}{٤}$ جـ) ظا ٣٣٠° د) جا ٤٠٥° ؟

السؤال الثالث:

أُبيّنْ خطأً كلٍّ من العبارات الآتية:

أ) جتا (س + ص) = جتا س + جتا ص

ب) جا ٢س = ٢ جاس

جـ) ظا $\frac{٢}{٣}$ س = $\frac{\text{ظا ٢س}}{٣}$

السؤال الرابع:

أثبتْ صحّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

أ) جا س + جتا س = $\frac{\text{٢جا}^{٢} \text{ س} - ١}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$

ب) جتا^{٢} س + (ظاس جتاس)^{٢} = ١

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س)= ٣جا ($\frac{٢}{٣}$ س)

ب) هـ(س)= ٢ – جتا (-س)

جـ) ل(س)= ظاس – ١

د) ك(س)= جتا (س – $\frac{\pi}{٢}$)



أُقيّمُ ذاتي:

المهارة	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
تحويل من التقدير الستيني الى التقدير الدائري وبالعكس			
تحديد الزاوية المكافئة لزاوية ما			
تمثيل اقترانات مثلثية بيانيا			
اثبت متطابقة مثلثية			



فكرةٌ ريادِيّة:

تستطيع السفينة الدخول الى الميناء فقط إذا كان مستوى المياه لا يقل عن ٨م نتيجة حركة المد والجزر.
تُحْدِث حركة المد والجزر تغيراً يومياً على مستوى ارتفاع الماء حسب العلاقة:

ع = ٥جا ($\frac{\pi}{٦}$ س) + ٨ ، حيث س هي المدة الزمنية المنقضية بعد منتصف الليل بالساعات، ع ارتفاع الماء بالأمتار.

أ) كم مرة يبلغ فيها عمق المياه في الميناء ٨م تماماً في اليوم ؟

ب) أرسم مخططاً يبين كيف يتغير ارتفاع الماء خلال اليوم، ثم أقدّر عدد الساعات في اليوم التي تستطيع السفينة الدخول الى الميناء. ما هو أقصى ارتفاع وانخفاض للماء خلال اليوم ؟

جـ) أناقش المخاطر التي تتعرض لها البضائع إذا اعتمد الميناء تفريغ الحمولة الساعة ١٢ ليلاً كل يوم.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مشروع الوحدة:

فكرة المشروع:	المنحى:	القضية:
نحو طاقةٍ شمسيةٍ أكثر كفاءة	METS (M ,E ,T ,S)	الطاقة النظيفة

تؤثر زاوية ميل الألواح الشمسية في كمية الطاقة التي يمكن إنتاجها. بالتعاون مع مجموعتك، ابحث عن زاوية الميل المناسبة في فلسطين، ووظِّف الاقترانات المثلثية في تفسير أثرها في كفاءة إنتاج الطاقة، ثم قدِّم بالتعاون مع أفراد مجموعتك تصميماً مقترحًا مدعومًا بالحسابات.

مهام المشروع:

الكفاية العامة	المهمة
فهم المشكلات	١- حدِّد بالتعاون مع مجموعتك المشكلة المرتبطة باختيار زاوية ميل الألواح الشمسية.
التفكير الكمي والتجريدي	٢- وظِّف بالتعاون مع مجموعتك النسب والاقترانات المثلثية في حساب زاوية الميل المناسبة.
بناء الحجج الرياضية	٣- فسِّر بالتعاون مع مجموعتك أثر زاوية الميل في كفاءة إنتاج الطاقة.
استخدام الأدوات والتكنولوجيا بذكاء	٤- استخدم بالتعاون مع مجموعتك أداة رقمية لمحاكاة تغير زاوية الميل.
اتخاذ القرار الرياضي المسؤول	٥- قدِّم بالتعاون مع مجموعتك توصية بأفضل زاوية ميل مدعومة بالنتائج.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الوحـــدة ٥

المصفوفات
Matrices



يعتبر النخيل من الثّروات الزراعية الرئيسة في كثير من مناطق فلسطين، ويحرص المزارعون على زراعته في صفوفٍ وأَعمدة.... أُناقش أهمية هذا النمط بالزراعة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف المصفوفات والعمليات عليها في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

١. التّعرف إلى المصفوفة وعناصرها.
٢. إيجاد ناتج جمع مصفوفتيْن وطرحهما.
٣. إيجاد ناتج ضرب مصفوفتيْن.
٤. إيجاد النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.
٥. حلّ معادلات مصفوفيّة باستخدام النظير الضربيّ.
٦. حلّ نظام من المعادلات الخطيّة باستخدام قاعدة كريمر.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (١)

يقوم جهاز الإحصاء المركزيّ الفلسطينيّ بإجراء التعداد السكانيّ العام مرة واحدة كل ١٠ سنوات؛ بهدف توفير البيانات الحقيقية حول شتى مناحي حياة الفرد الفلسطينيّ، ويقوم الجهاز بتحديث سنوي للبيانات من خلال دراسة عينات من كل المحافظات.

كانت بيانات جهاز الإحصاء المركزيّ حول عدد السكان في بعض المحافظات الفلسطينية حتى نهاية العام ٢٠١٢م (لأقرب ألف) كالآتي: القدس ٣٩٧ ألف، أريحا ٤٨ ألف، غزة ٥٧٠ ألف، أما في عام ٢٠١٤م فتمَّ تحديث هذه البيانات كالآتي: القدس ٤١٢ ألفاً، أريحا٥١ ألفاً وغزة ٦٦٧ ألفاً.

عدد سكان القدس عام ٢٠١٢م يساوي _____ .

عدد سكان أريحا عام ٢٠١٤م يساوي _____.

عدد سكان غزة عام ٢٠١٢م يساوي _____.

www.wepal.net SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

أُنظِّم هذه البيانات في صفوف وأعمدة كالآتي:

	عدد السكان عام ٢٠١٢م	عدد السكان عام ٢٠١٤م
القدس	_____	_____
أريحا	_____	_____
غـــــزّة	_____	_____

كيف يمكن ترتيب هذه البيانات في منظومة أُخرى؟

تعريف

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية على هيئة صفوف عددها (م) وأعمدة عددها(ن)، محصورة بين قوسين من النوع [ ]، ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية، وتكون المصفوفة من **الرتبة** م × ن.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٢)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٦ & -٨ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٧ & -٤ \\ ١٠ & ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٠ \\ ٥ \end{bmatrix}$

أ) رتبة المصفوفة أ تساوي ٣×٢. (لماذا؟)

ب) رتبة المصفوفة ب تساوي_____.

جـ) رتبة المصفوفة جـ تساوي_____.

د) يقع العدد٦ في تقاطع الصف الثالث والعمود الثاني في المصفوفة أ، ولذلك يسمى **المدخلة** $أ_{٢٣}$

■ **أُفكر:** أُسمِّ المدخلة التي قيمتها -٨ في المصفوفة أ.

أتعلـــم

يسمّى كل عدد في المصفوفة أ مدخلة، ويرمز له بالرمز $أ_{ي هـ}$، حيث:

(ي): الصف الذي تقع فيه المدخلة، (هـ): العمود الذي تقع فيه المدخلة.

مثـال (١)

إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٦ \\ ٩ & ٣ \\ ٧ & -٨ \end{bmatrix}$، فأجيبُ على الأسئلة الآتية:

أ) ما رتبة المصفوفة أ؟

ب) ما قيمة كل من المدخلات الآتية: $أ_{٢١}$، $أ_{١٢}$، $أ_{٢٣}$؟

جـ) أُسمِّ المدخلة التي قيمتها ٣ في المصفوفة أ.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الحلّ:

أ) رتبة المصفوفة أ = ٣ × ٢.

ب) المدخلة $أ_{٢١}$ = ٦، المدخلة $أ_{١٢}$ = ٩، المدخلة $أ_{٢٣}$ = -٨

جـ) المدخلة $أ_{٢٢}$ = ٣. (لماذا)؟

نشاط (٣)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٨ \\ ١ & -٦ & ٩ \end{bmatrix}$ ، فإن:

رتبة المصفوفة أ تساوي _____.

$أ_{٢١}$ = ٣

$أ_{١٢}$ = _____.

$أ_{٢١}$ - $أ_{١٢}$ = _____.

نشاط (٤)

أَكتبُ جميع المصفوفات الممكنة، بحيث يكون عدد مدخلاتها أربعة، وقيمة كل منها صفر.

أ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ب= _____.

جـ = _____.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أتعلـــم

من أنواع المصفوفات:

- **مصفوفة الصف:**

هي المصفوفة التي تتكوَّن من صف واحد فقط، و(ن) من الأعمدة، وتكون رتبتها ١×ن.

- **مصفوفة العمود:**

هي المصفوفة التي تتكوَّن من عمود واحد فقط، و(م) من الصفوف، وتكون رتبتها م×١.

- **المصفوفة المربعة:**

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة ويساوي (ن)، وتسمى المصفوفة مربعة من الرتبة النونية.

- **المصفوفة الصفرية:** هي المصفوفة التي تكون كل مدخلة فيها تساوي صفراً، ويرمز لها بالرمز**(و).**

SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (٢)

ما رتبة كل من المصفوفات الآتية؟ ومانوعها.

$$س = \begin{bmatrix} ٢ & -٩ & ٠,٥ \end{bmatrix} \quad ، \quad ص = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \\ ٩ \end{bmatrix} \quad ، \quad ع = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٩ & -١ & ٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} .$$

الحلّ:

١) رتبة س = ١×٣، وهي مصفوفة صف.

٢) رتبة ص= ٣×١، ص مصفوفة عمود.

٣) ع مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة.

٤) رتبة و= ٢×٣، وهي مصفوفة صفرية.

تعريف

تتساوى المصفوفتان أ، ب إذا كان لهما الرتبة نفسها، وكانت جميع مدخلاتهما المتناظرة متساوية.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (٣)

أبين فيما إذا كانت المصفوفتان متساويتان في كل من الحالات الآتية:

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ١ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ١ \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ١ & ٣ \\ ٨ & ٧ & ١ \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٩ \end{bmatrix} ، \quad ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٩ \end{bmatrix} ؟$$

الحلّ:

١) المصفوفتان أ، ب متساويتان؛ لأن لهما الرتبة نفسها، ومدخلاتهما المتناظرة متساوية.

٢) المصفوفتان س، ص غير متساويتين، لأن رتبة س= ٣×١ أما رتبة ص = ١×٣

مثـال (٤)

إذا كانت أ= $\begin{bmatrix} ٤ & س+٢ \end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix} ٤ & -٩ \end{bmatrix}$ ، فما قيمة س التي تجعل أ = ب؟

الحلّ:

بما أن $\begin{bmatrix} ٤ & س+٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٩ \end{bmatrix}$

إذن س+٢ = -٩

وبحلّ المعادلة ينتج أن س= -١١.

أناقش

إذا كان: $\begin{bmatrix} س^{٢} & ص+١ \\ ٤ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ س+٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أُبيّن أنّ س=٢، ص=٢.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل (٥ - ١)

١ ينتج مصنع للأواني الزجاجية ثلاثة أشكال من الصحون: المربع، المستطيل، والدائريّ. فإذا كان لهذا المصنع فرعين أحدهما في الخليل، والآخر في رام الله، وكان عدد الصحون التي ينتجها كل فرع يومياً كما يأتي:

الخليل: ٥٠٠ صحنٍ مربع الشكل، ٤٧٠ صحنٍ مستطيل الشكل، ٢٣٠ صحناً دائري الشكل.

رام الله: ٤٠٠ صحنٍ مربع الشكل، ٢٥٠ صحنٍ مستطيل الشكل، ١٨٠ صحناً دائري الشكل. أكتبُ البيانات السابقة على شكل مصفوفة من الرتبة ٢×٣.

٢ إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & -٨ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٤ & \frac{١}{٢} & ١ \end{bmatrix}$، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٨ \end{bmatrix}$:

أ) فما رتبة كل من المصفوفات السابقة؟

ب) ما نوع كل منها؟

جـ) ما قيمة كل من المدخلات الآتية: جـ$_{٢١}$، أ$_{١٢}$، ب$_{٣١}$ ؟

٣ أجدُ قيم الثابتين ب، جـ فيما يأتي:

أ) $\begin{bmatrix} ٤-ب & ٥ \\ ٧ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ١ + جـ & ٧ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٣ب - ٢ \\ جـ + ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٨ \\ ٧ \end{bmatrix}$

جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٦ & ٩ \\ ٨ & ٥ & ب^{٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ & ١ \\ ٨ & ٥ & ب \end{bmatrix} جـ^{٢}$

٤ أجدُ قيمة س، ص حيث:

$\begin{bmatrix} س+ص & ٥ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ س - ٢ص & ٤ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(٥ - ٢) العمليات على المصفوفات



أولاً: جمع المصفوفات:

نشاط (١)

تمتاز بعض المحافظات الفلسطينية

عن غيرها بالنشاط السياحيّ، ويعتبر عدد العاملين

في الفنادق أحد مؤشرات القوة الاقتصادية لهذا القطاع.

المصفوفتان أ = $\begin{bmatrix} ١٩٠ \\ ١٠٢ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٣١٠ \\ ٢٥٠ \end{bmatrix}$ تمثلان أعداد

العاملين في الفنادق خلال عام ٢٠١٢م، بحسب بيانات جهاز الإحصاء المركزي.

تمثل المصفوفة أ عدد العاملين في الفنادق شمال فلسطين. فيما تمثل المصفوفة ب عدد العاملين في الفنادق جنوب فلسطين.

الصف الأول في كلا المصفوفتين يمثل عدد الذكور، فيما يمثل الصف الثاني عدد الإناث من العاملين في الفنادق.

عدد العاملين الذكور في جميع فنادق فلسطين عام ٢٠١٢م =١٩٠+٣١٠ = ٥٠٠ عامل.

عدد العاملات في جميع فنادق فلسطين عام ٢٠١٢م =_____.

تمثل المصفوفة جـ أعداد العاملين(ذكوراً وإناثاً) في جميع فنادق فلسطين .

جـ = $\begin{bmatrix} ٥٠٠ \\ ___ \end{bmatrix}$

تعريف

إذا كانت أ، ب مصفوفتين كل منهما من الرتبة نفسها م ×ن فإن مجموع المصفوفتين أ + ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م ×ن، وتكون كل مدخلة في المصفوفة جـ مساوية لمجموع المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين أ، ب ،أي أن: جـ$_{ي هـ}$ = أ$_{ي هـ}$ + ب$_{ي هـ}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٢)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ & ٢ \\ ٩ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٤- \\ ٥ & ٩- \end{bmatrix}$ فإنّ:

رتبة $أ = ٢ \times ٣$

رتبة ب = _____.

أناقش

هل يمكن إجراء العملية أ+ب؟ أُفسِّر _____.

www.wepal.net SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

مثال (١)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ٢- \\ ٤ & ١ & ٣ \\ ٨- & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ١- & ١ & ٩ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ١٠ & ٣- & ٤ \end{bmatrix}$ ، أجد أ + ب (إن أمكن).

الحلّ:

بما أن رتبة المصفوفة أ = رتبة المصفوفة ب، فإنه يمكن إجراء عملية الجمع كالآتي.

$$أ + ب = \begin{bmatrix} ٨ & ٥ & ٢- \\ ٤ & ١ & ٣ \\ ٨- & ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ١ & ٩ \\ ٣ & ٣ & ٣ \\ ١٠ & ٣- & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ + ١- & ٥ + ١ & ٢- + ٩ \\ ٤ + ٣ & ١ + ٣ & ٣ + ٣ \\ ٨- + ١٠ & ٤ + ٣- & ٥ + ٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٧ & ٦ & ٧ \\ ٦ & ٤ & ٧ \\ ٢ & ١ & ٩ \end{bmatrix}$$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٣)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ & ٩ \\ ٦ & ٣ & ١- \end{bmatrix}$

$أ + ب =$ _____ .

$ب + أ =$ _____ .

ماذا تلاحظ؟

أتعلـــم

عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية.

نشاط (٤)

إذا كانت $ع = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧- & ٨ \end{bmatrix}$، $هـ = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ٠ \end{bmatrix}$، $جـ = \begin{bmatrix} ٥- & ١١ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix}$

أ) $(ع + هـ) + جـ = \left(\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٧- & ٨ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ٠ \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} ٥- & ١١ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٨ \\ ١١- & ١١ \end{bmatrix}$

ب) $ع + (هـ + جـ) =$ _____

أقارن بين النتيجتين.

أتعلـــم

عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٥)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$، $و = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن:

$$أ + و = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

و + أ = ــــــــــــــــــ ٠ ماذا تُلاحظ؟

أتعلم

المصفوفة الصفرية (و) هي المصفوفة المحايدة لعملية جمع المصفوفات.

ثانياً: ضرب المصفوفات بعدد ثابت:

www.wepal.net SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٦)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$، فإن:

أ) $أ + أ + أ = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} =$ ــــــــــــــــــ

ب) $(أ٣) = \begin{bmatrix} ٣\times٦ & ٣\times٤ & ٣\times٣ \\ ٣\times١ & ٣\times٣ & ٣\times٧ \end{bmatrix} =$ ــــــــــــــــــ

٣) أُقارنُ بين الإجابتين.

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن، وكان جـ عدداً حقيقياً فإن جـ أ مصفوفة من الرتبة م×ن، حيث تكون كل مدخلة فيها مساوية للمدخلة المناظرة لها في المصفوفة أ مضروبة بالثابت جـ. أي أن: $جـ(أ_{ي هـ}) = (جـ أ)_{ي هـ}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (٢)

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٧ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٦ \\ ٣ & ٨ & ٤ \end{bmatrix}$ أَجدُ كل مما يأتي:

أ) ٧س　　ب) $\frac{٣}{٥}$ ص

الحلّ:

أ) ٧س = $\begin{bmatrix} ٤٢ & ٣٥ & ٢٨ & ٢١ \\ ٧ & ٢٨ & ٤٩ & ٧ \end{bmatrix}$.

ب) $\frac{٣}{٥}$ ص = $\begin{bmatrix} ٠ & \frac{٣}{٥} & \frac{١٨}{٥} \\ \frac{٩}{٥} & \frac{٢٤}{٥} & \frac{١٢}{٥} \end{bmatrix}$

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

أناقش

هل يمكن إجراء العملية الآتية : س+ (-ص)؟

ثالثاً: طرح المصفوفات:

تعريف

إذا كانت أ، ب مصفوفتين من الرتبة نفسها م×ن، فإن ناتج طرح المصفوفتين:

أ - ب = جـ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م×ن. وتكون كل مدخلة في جـ مساويةً لناتج طرح المدخلتين المناظرتين لها في المصفوفتين أ، ب،

أي أن: جـ$_{ي هـ}$ = أ$_{ي هـ}$ - ب$_{ي هـ}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (٣)

أجد ناتج ما يأتي (إن أمكن) :

١) $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٢- \\ ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٩ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ٥ \\ ٣- & ٧ & ٨ \end{bmatrix}$.

الحلّ:

١) $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٨ \\ ١٠- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ - ٤ \\ ٢- - ٦ \\ ٩ - ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢- \\ ٩ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$

٢) لايمكن إجراء عملية الطرح لأن رتبتي المصفوفتين غير متساويتين.

www.wepal.net/641f514870e5bc38
SIGNED TRACK

مثـال (٤)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٤- & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ ، أجد ما يأتي:

١) $أ + ب$ ٢) $ب + أ$

الحلّ:

١) $أ + ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٤- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٢) $ب + أ = \begin{bmatrix} ٣- & ٣ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

ماذا تلاحظ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أتعلـــم

إذا كانت أ، ب مصفوفتين حيث: أ + ب = ب + أ = و، فإن ب هي النظير الجمعيّ للمصفوفة أ،
وتكون ب = -أ

نشاط (٧)

اعتادت شركة مطاحن القمح الفلسطيني رصد مبيعاتها (بالطن) من الطحين البلدي والطحين الأبيض والنخالة مرة كل ٤ شهور، في خطي الإنتاج التابعين لها.

تمثل المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥٠ & ٦٠ \\ ٢٠ & ٢٠ \\ ١٠ & ١٠ \end{bmatrix}$، مبيعات الشركة خلال شهري كانون ثاني وشباط من العام ٢٠١٨م من خطي الانتاج معاً.

وتمثل المصفوفة جـ = $\begin{bmatrix} ١١٠ & ١٣٠ \\ ٦٠ & ٥٠ \\ ٣٠ & ٣٠ \end{bmatrix}$، مجمل مبيعات الشركة في الأشهر الأربعة الأولى من العام ٢٠١٨م من خطي الانتاج معاً.

- أُعبّر عن المصفوفة س التي تمثل مبيعات شهري آذار ونيسان معاً بدلالة المصفوفتين أ، جـ _____.

- أجد المصفوفة س التي تمثل مبيعات الشركة خلال شهري آذار ونيسان= _____.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (٥)

أَحلّ المعادلة المصفوفيّة الآتية: $س + ٣ \begin{bmatrix} ٢ & ٥- \\ ٣- & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ:

باستخدام خاصية ضرب المصفوفات بعدد حقيقيّ فإن:

$$س + \begin{bmatrix} ٦ & ١٥- \\ ٩- & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$$

وبإضافة النظير الجمعيّ للمصفوفة $\begin{bmatrix} ٦ & ١٥- \\ ٩- & ٣- \end{bmatrix}$ إلى طرفي المعادلة ينتج:

$$س + \begin{bmatrix} ٦ & ١٥- \\ ٩- & ٣- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦- & ١٥ \\ ٩ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦- & ١٥ \\ ٩ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$س + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ١٨ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$ (لماذا؟)

إذن: $س = \begin{bmatrix} ٥- & ١٨ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

مثـال (٦)

أَحلّ المعادلة المصفوفيّة الآتية: $٣س - \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ١١ & ٠ \end{bmatrix} = س + \begin{bmatrix} ٧- & ٨ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ:

$$٣س - س = \begin{bmatrix} ٧- & ٨ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٩ & ١٢ \\ ١١ & ٠ \end{bmatrix}$$ (لماذا؟)

$$٢س = \begin{bmatrix} ٢ & ٢٠ \\ ١٢ & ٢ \end{bmatrix}$$،

ومنها $س = \begin{bmatrix} ١ & ١٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل (٥ - ٢)

١ إذا كان عدد طالبات الفروع: الأدبيّ والريادي والزراعيّ في مدرسة فاطمة الزهراء للبنات ٣٢، ٢٥، ٢٢ على الترتيب، عدد طلاب المدرسة الهاشميّة للذكور في نفس الفروع ٣٠، ٢٠، ١٦ على الترتيب. أجيبُ عن الأسئلة الآتية:

أ) أُنظّم بيانات كل مدرسة في مصفوفة عمود.

ب) ما مجموع طلبة الفرع الزراعيّ في كلا المدرستين؟

جـ) أكتبُ المصفوفة التي تمثل الزيادة في عدد الطالبات في جميع الفروع عن عدد الطلاب في كلا المدرستين؟

٢ إذا كانت المصفوفة جـ = ٢أ + ب، وكانت المدخلة $أ_{٢٥}$ = ٩، والمدخلة $ب_{٢٥}$ = -٨، فما قيمة المدخلة $جـ_{٢٥}$؟

٣ إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٨ & ٣ & ٢ & ٦ \\ ٦ & ٥ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$، ص = $\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٨ \end{bmatrix}$، ع = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$

أجدُ ما يأتي (إن أمكن):

أ) س + ص ب) ٣س - ٤ص جـ) ٥ص - س د) س - ٢ع هـ) ٢ص - ٣و$_{٢×٤}$

٤ أجدُ ناتج ما يأتي ٣ $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ − ٤ $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٣ & ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

٥ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ ٤ & ١ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ٨ & ١ \\ -٢ & ٧ \end{bmatrix}$، أجدُ المصفوفة س حيث: ٢س = أ - ٣ب

٦ أحلّ كلاً من المعادلات المصفوفيّة الآتية:

أ) س + ٣ $\begin{bmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٨ \\ -٤ & ١ \end{bmatrix}$

ب) ٢(س + $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$) = س − ٢ $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

جـ) -٢س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ − $\begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ٥ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

ضرب المصفوفات (٥ - ٣)



نشاط (١)

تعتبر تجارة السيارات من المشاريع الرائجة في فلسطين في السنوات الأخيرة. يعرض أحد المعارض ثلاثة أنواع من السيارات. تمثل المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ ٤ & ٦ & ٦ \end{bmatrix}$ أعداد السيارات التي تم باعها المعرض في العامين ٢٠١٥م و ٢٠١٦م.

أما المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \\ ٨ \end{bmatrix}$ فتمثّل أسعار تلك السيارات (لأقرب ألف دينار) في ذلك المعرض من كل نوع.

مجمل مبيعات عام ٢٠١٥م = (٥×٥) + (٦×٦) + (٨×٧) = ١١٧ ألف دينار، (لماذا؟)

مجمل مبيعات العام ٢٠١٦م = _____.

المصفوفة جـ تمثل مجمل المبيعات في العامين ٢٠١٥م، و٢٠١٦م، جـ = $\begin{bmatrix} ___ \\ ___ \end{bmatrix}$

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م×ن، ب مصفوفة من الرتبة ن×هـ، فإن:

$أ_{م×ن} \cdot ب_{ن×هـ} = جـ_{م×هـ}$، حيث: $جـ_{ي هـ} = أ_{ي ١} . ب_{١ هـ} + أ_{ي ٢} . ب_{٢ هـ} + ... + أ_{ي ن} . ب_{ن هـ}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (١)

أَجدُ ناتج ضرب المصفوفتين أ ، ب في كل من الحالات الآتية:

١) $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٣ \\ ٣ & -٤ & ٠ \\ ٥ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -٣ & ١ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$

٢) $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{bmatrix}$

الحلّ: ألاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة أ = عدد صفوف المصفوفة ب

$$أ \cdot ب = \begin{bmatrix} (٣ \times ٥) + (١ \times ١) + (٠ \times ٦) & (٢ \times ٣) + (١ \times -٣) + (٠ \times ٠) \\ (٠ \times ٠) + (-٤ \times ١) + (٠ \times ٥) & (٠ \times ٣) + (-٤ \times -٣) + (٠ \times ٢) \\ (١ \times ٥) + (٢ \times ١) + (٦ \times ٠) & (١ \times ٣) + (٢ \times -٣) + (٦ \times ٢) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ١٤ & ١٢ \\ ٣٧ & -٤ \end{bmatrix}$$

٢) لا يمكن إجراء عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة أ ≠ عدد صفوف المصفوفة ب.

نشاط (٢)

إذا علمت أن أ، ب مصفوفتان حيث: $أ_{٤\times٣} \cdot ب_{٥\times٤} = جـ_{\quad}$، فإن رتبة المصفوفة جـ تساوي _____.

نشاط (٣)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن:

$$أ \cdot ب = \begin{bmatrix} (٣ \times ٢) + (٤ \times ٠) & (٣ \times ٥) + (٤ \times ١) \\ (١ \times ٢) + (٢ \times ٠) & (١ \times ٥) + (٢ \times ١) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١٩ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$$

ب . أ = _____. ماذا تلاحظ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أتعلـــم

عملية ضرب المصفوفات ليست تبديليّة.



مثـال (٢)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١٠ & ٢ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ٥- & ١٠ \end{bmatrix}$ أجد أ . ب؟

الحلّ:

أ . ب = $\begin{bmatrix} (١٠ \times ٢) + (٢- \times ١٠) & (٥- \times ٢) + (١ \times ١٠) \\ (١٠ \times ١) + (٢- \times ٥) & (٥- \times ١) + (١ \times ٥) \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$



مثـال (٣)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ أجد ناتج كل من ١) أ . ب ٢) ب . أ؟

الحلّ:

أ . ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$

ب . أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ١٠- \\ ٨ & ٢- \end{bmatrix}$ ماذا تلاحظ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

أتعلـــم

المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات من الرتبة الثانية، ويرمز لها بالرمز **م**$_٢$، ويطلق عليها أيضاً اسم **مصفوفة الوحدة**.

نشاط (٤)

إذا كانت أ $= \begin{bmatrix} ٥ & -١٠ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن:

أ . (ب + جـ) $= \begin{bmatrix} ٥ & -١٠ \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ٢٩ & ١١ \end{bmatrix}$

أب + أجـ = _____

ماذا ألاحظ؟

أتعلـــم

تتوزع عملية ضرب المصفوفات على عملية الجمع، بحيث تكون عمليتا الجمع والضرب معرفتان.

■ **أُفكر:** إذا كانت: أ $= \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب $= \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ ٥ & -٢ \end{bmatrix}$ ، جـ $= \begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ -٣ & -٥ \end{bmatrix}$ أبيِّن أَن:

(أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل (٥ - ٣)

١ أجد ناتج ضرب المصفوفات فيما يأتي (إن أمكن):

أ) $\begin{bmatrix} ٧ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ -٢ & ٤ & -٥ \\ ١ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ -٥ & ٤ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٥ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}$

٢ كانت مبيعات محل تجاريّ من أربعة أنواع من أجهزة الحاسوب أ، ب، جـ، د في أول شهرين من عام ٢٠١٨م ممثلة في المصفوفة س = $\begin{bmatrix} ١٠ & ١٧ & ١٥ & ١٢ \\ ٢٠ & ١٠ & ٢٠ & ١٦ \end{bmatrix}$، وكان ثمن الأجهزة ٤٥٠ دينار، ٣٠٠ دينار، ٥٠٠ دينار ، ٤٠٠ دينار، على الترتيب. استخدم المصفوفات لإيجاد المصفوفة التي تمثل مبيعات المحل من الأجهزة في الشهرين.

٣ إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٥ & -٧ \\ ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٦ \end{bmatrix}$ ، أجد ما يلي:

أ) ٥(أ . ب) ب) (٥أ) . ب جـ) أ . (٥ب)

٤ إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & أ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ب \end{bmatrix}$ ما قيمة كل من الثابتين أ، ب؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(٥ - ٤) النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

أولاً: المحددات: (Determinants)

نشاط (١)

يصنّفُ الخبراءُ الاقتصادَ الفلسطيني، بأنه في وضع المخاطرة. ويعود ذلك بشكل رئيسي إلى الإجراءات التي يقوم بها الاحتلال الإسرائيلي والتي تعيق نمو هذا الاقتصاد. لذا فإن المشاريع الصغيرة ذات رأس المال المحدود، والربح البسيط، تقلل من مخاطرة المستثمر.

يُتاجر أبو عارف بالأعلاف. اشترى خلال شهر أيلول ٢٠٠ كيساً من الأعلاف بسعر ١٠ دنانير للكيس الواحد، وباع منها ١٩٢ كيساً بسعر ١٣ ديناراً للكيس الواحد.

تنظم المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢٠٠ & ١٠ \\ ١٩٢ & ١٣ \end{bmatrix}$ بيانات تجارة أبو عارف خلال شهر أيلول.

- مجمل سعر البيع المتوقع لو أن أبو عارف باع جميع الأكياس= ٢٠٠ × ١٣=٢٦٠٠ دينار.
- مجمل سعر التكلفة لِما تم بيعه فعلاً من أكياس العلف =_____.
- الفرق بين سعر البيع المتوقع وسعر التكلفة لِما تمَّ بيعه=_____.

تعريف

إذا كانت $أ$ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، فإن **محدد المصفوفة** $أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$ هو عدد حقيقيّ ويرمز له بالرمز $|أ|$ حيث $|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} \times أ_{٢١})$.

مثال (١)

أجد محدد كل من المصفوفات الآتية: ١) $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٣ \end{bmatrix}$ ٢) $ب = \begin{bmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الحلّ:

١) $|أ| = (أ_{١١} \times أ_{٢٢}) - (أ_{١٢} \times أ_{٢١})$.

$|أ| = (٣ \times -٣) - (١ \times ٩)$

$= -٩ - ٩ = -١٨$

٢) $|ب| = \begin{vmatrix} ٨ & ١٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$|ب| = (ب_{١١} \times ب_{٢٢}) - (ب_{١٢} \times ب_{٢١})$.

$= (٨ \times ٣) - (١٢ \times ٢)$

$= ٢٤ - ٢٤$

= صفر

www.wepal.net
SSID:TRACK:641f514870e5bc38

تعريف

تُسمى المصفوفة التي محددها يساوي صفر بالمصفوفة **المنفردة**.

مثال (٢)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س-١ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أَجدُ قيمة س التي تجعل أ مصفوفة منفردة.

الحلّ:

بما أن أ مصفوفة منفردة فإن محدد $|أ| = ٠$

ومنها (س-١) × ٢ − ٢ × ٣ = صفر ومنها: ٢س-٢-٦ = صفر

٢س-٨=صفر

إذن س=٤.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (٣)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، أجد كل مما يأتي:

١) $|أ|$ ٢) $|أ٣|$ ٣) $|أ|^{٢}(٣)$

الحلّ:

١) $|أ| = (١\times٣) - (٢\times١)$

$= ٢ - ٣ = -١$

٢) $أ٣ = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ومنها $|أ٣| = (٣\times٦) - (٣\times٩)$

$= ١٨-٢٧= -٩$

٣) $|أ|^{٢}(٣) = -١ \times ٩ = -٩$ ماذا تُلاحظ؟

أتعلـــم

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، ك عدد حقيقي ،فإن $|ك\ أ| = ك^{٢}|أ|$

نشاط (٢)

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكانت $|أ٥| = -٥٠$ ، فإن:

$|أ| =$ _____ . $|أ|٧ =$ _____ .

ثانياً: النظير الضربيّ للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

تعريف

إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة من الرتبة الثانية، فإن المصفوفة ب من الرتبة الثانية تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة أ إذا كان أ . ب = ب . أ = $م_{٢}$، حيث $م_{٢}$ المصفوفة المحايدة.

ويرمز للنظير الضربيّ للمصفوفة أ بالرمز $أ^{-١}$، أي أن أ . $أ^{-١}$ = $أ^{-١}$. أ = $م_{٢}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مثـال (٤)

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٨ & ٢ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣,٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، أبيّن أن المصفوفة ب هي النظير الضربيّ للمصفوفة أ.

الحلّ:

إذا كانت المصفوفة ب هي النظير الضربيّ للمصفوفة أ ، فإنّ أ . ب = ب . أ = م$_٢$

أ . ب = $\begin{bmatrix} -٨ & ٢ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣,٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (لماذا؟)

كما أن: ب . أ = $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ -٣,٥ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -٨ & ٢ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (لماذا؟)

إذن ب هي النظير الضربيّ للمصفوفة أ.

■ **أُفكر:** هل يوجد نظير ضربي للمصفوفة س= $\begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -٣ & ٦ \end{bmatrix}$ ، لماذا؟

أتعلـــم

المصفوفة المنفردة ليس لها نظير ضربي.

مثـال (٥)

أحدد أي من المصفوفات الآتية لها نظير ضربي وأيها لا؟

١) أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix}$ ٢) ب= $\begin{bmatrix} ٨ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

الحلّ:

١) |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١٢ − ٧ = ٥ ، إذن المصفوفة أ ليست منفردة، ويوجد لها نظير ضربيّ.

٢) |ب| = $\begin{vmatrix} ٨ & ٤ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١٦ − ١٦ = ٠ ومنها ب مصفوفة منفردة وليس لها نظير ضربّي.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تعريف

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{bmatrix}$ ، حيث $|أ| \neq$ صفر، فإن: $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix}$

مثال (٦)

أجد النظير الضربيّ للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}$ (إن أمكن).

الحلّ:

$|أ| = (أ_{11} \times أ_{22}) - (أ_{12} \times أ_{21})$

$|أ| = (١ \times -٤) - (-٢ \times ١) = -٢$ ، اذا يوجد للمصفوفة أ نظير ضربي

$أ^{-1} = \frac{-١}{٢} \begin{bmatrix} -٤ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٠,٥ & ١ \\ ٠,٥ & -١ \end{bmatrix}$

نشاط (٣)

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$، فإن: $|أ| = (٢ \times ٣) - (٥ \times ١) = ٦ - ٥ = ١$

ومنها: $أ^{-1} = \frac{١}{|أ|} \begin{bmatrix} أ_{22} & -أ_{12} \\ -أ_{21} & أ_{11} \end{bmatrix} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$|أ^{-١}| =$ _____ ، $(أ^{-١})^{-١} =$ _____ ماذا تُلاحظ؟

أتعلم

$أ = (أ^{-١})^{-١}$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل (٥ - ٤)

١ أجد قيمة س التي تحقق $\begin{vmatrix} ١٢- & ٥ \\ ٣س & ٣- \end{vmatrix} = ٦$

٢ إذا كان |٤ب| = -٣٢، أجدُ: قيمة |ب| + |٣ب|، حيث ب مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية.

٣ أجد النظير الضربيّ لكل من المصفوفات الآتية (إن أمكن):

$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

SIGNED TRACK 641f514870e5bc38
www.wepal.net

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

(٥ - ٥) حل نظام من معادلتين خطيتين باستخدام قاعدة كريمر

نشاط (١)

تعدّ المشاريع الصغيرة من الأفكار الاستثمارية قليلة المخاطرة، التي تساعد كل من المنتِج والمستهلك، ومن الأمثلة عليها مشروع توزيع المواد التموينية الذي لا يحتاج المستثمر فيه لرأس مال كبير.

يقوم مهند بتوزيع المواد التموينية على المحلات التجاريّة، فإذا أعطى للبقالة الأُولى ٨ صناديق من المعلبات، وصندوقين من العصير وكان ثمنها معاً ٤٠ ديناراً، بينما أعطى البقالة الثانية ٥ صناديق معلبات، و٣ صناديق من العصير مقابل ٣٢ ديناراً، فهل يمكن معرفة ثمن الصندوق الواحد من المعلبات والعصير؟

قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر لحلّ نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، والذي يمكن كتابته بالصورة المصفوفية كالآتي: أ . ع = جـ، حيث:

أ :مصفوفة المعاملات، ع: مصفوفة المتغيرات، جـ: مصفوفة الثوابت، $|أ| \neq$ صفر فيكون:

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} \quad \text{و} \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} \quad \text{حيث:}$$

$أ_{س}$: المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات س فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

$أ_{ص}$:المصفوفة أ بعد استبدال مدخلات عمود معاملات ص فيها بمدخلات مصفوفة الثوابت.

مثال (١)

استخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

س−ص=٤

٥س+٢ص=٦

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الحلّ:

أَكتبُ نظام المعادلات الخطية على شكل معادلة مصفوفيّة:

$$\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

أَفرض $أ = \begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = (٢ \times ١) - (٥ \times ١-) = ٧$

المصفوفة $أ_س = \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

ومنها: $|أ_س| = \begin{vmatrix} ٤ & ١- \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} = (٢ \times ٤) - (٦ \times ١-) = ١٤$

المصفوفة $أ_ص = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$

ومنها: $|أ_ص| = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = (٦ \times ١) - (٥ \times ٤) = ١٤-$

$\therefore س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ ، $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{١٤-}{٧} = ٢-$

إذن الحل : (س،ص) = (٢، -٢)

مثـال (٢)

استخدم قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي: $س - ٥ = ٢ص - ٤س$

$ص + س - ٤ = ٥ + ٣س$

الحلّ: أولاً: أرتب المعادلات في النظام على صورة: أس + ب ص = جـ

فيكون النظام: $٥س - ٢ص = ٥$

$-٢س + ص = ٩$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

ثانياً: أكتبُ نظام المعادلات على شكل معادلة مصفوفيّة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$$

أفرض $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢- \\ ٢- & ١ \end{vmatrix} = (٥ \times ١) - (٢- \times ٢-) = ١$$

$$|أ_س| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢- \\ ٩ & ١ \end{vmatrix} = (٥ \times ١) - (٩ \times ٢-) = ٢٣$$

$$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٥ & ٥ \\ ٢- & ٩ \end{vmatrix} = (٥ \times ٩) - (٥ \times ٢-) = ٥٥$$

ومنها: $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} = \frac{٢٣}{١} = ٢٣$، كما أن : $ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} = \frac{٥٥}{١} = ٥٥$

إذن الحل: (س، ص) = (٢٣، ٥٥).

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

نشاط (٢)

استخدام قاعدة كريمر لحل المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١٠- \end{bmatrix}$$

الحلّ:

أفرض $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١٠- \end{bmatrix}$ $\quad |أ| = ٣- \times ١٠- - ٢ = ٣٠ - ٢ = ٢٨$

$|أ_س| = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١٠- \end{vmatrix} =$ _____ (لماذا)؟ $\quad$ ومنها: $س = \frac{|أ_س|}{|أ|} =$ _____.

$|أ_ص| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} =$ _____ (لماذا)؟ $\quad ص = \frac{|أ_ص|}{|أ|} =$ _____.

إذن الحل:(س ، ص) = (___ ، ___)

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

١ إذا كانت $\mathbf{أ}$ مصفوفة من الرتبة الثانية

وكان $|\mathbf{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $|\mathbf{أ}_{س}| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٩ & ٤ \end{vmatrix}$ ، $|\mathbf{أ}_{ص}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٩ \end{vmatrix}$

أجد قيمة كل من س، ص.

٢ استخدم قاعدة كريمر في حل أنظمة المعادلات الآتية:

أ) ٣س-٤ص=٨

س+ص= ١٢

ب) ٣س-٢ص-١٩=٠

ص+٣س=١٣

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمـــــاريـــن عـــــامـــــة (٥)

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يلي:

١) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩- \\ ٢ & ٨- \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ فما قيمة ٢أ$_{١٢}$ - ب$_{٢١}$ ؟

أ) ٥ ب) ٢ ج) ١ د) ١-

٢) إذا كانت $\begin{bmatrix} ١- & ٣ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ص+س \\ ٢ & \end{bmatrix}$ فما قيمة س، ص على الترتيب؟

أ) (١ ، ٢) ب) (٢ ، ١) ج) (٥ ، ٢) د) (-١، ١)

٣) إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$، فأي من المصفوفات الآتية تمثل (ب$^{-١}$)$^{-١}$ ؟

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٦- \\ ٥ & ١- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٥- & ٦- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

٤) إذا كانت س مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية، وكان |٢س| = ٨ فما قيمة |٣س|؟

أ) ١٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٢

٥) أي من المصفوفات الآتية ليس لها نظير ضربيّ؟

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٤- \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٢- & ٨ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$

٦) إذا كانت ص = $\begin{bmatrix} ١ & جـ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$، ص$^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$ فما قيمة الثابت جـ؟

أ) ٢ ب) ١ ج) ١- د) ٢-

٧)عند حل نظام من معادلتين خطيتين، وُجِدَ أن ص = ٢ ، |أ$_{س}$| = -٣، |أ$_{ص}$| = -٦ ماقيمة س؟

أ) ٣ ب) ١ ج) ١- د) ٣-

٨) إذا كان $\begin{bmatrix} ١ & أ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ \\ ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) ١ د) صفر

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

٩) إذا كانت أ،ب،جـ مصفوفات حيث أ . ب = جـ وكانت $أ_{١\times٣}$ ، $جـ_{٤\times٣}$ فما رتبة المصفوفة ب ؟

أ) ٤×١ ب) ٣×١ ج) ١×١ د) ٣×٤

١٠) ما قيمة س السالبة التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} س & ٨ \\ ٢ & س \end{bmatrix}$ منفردة ؟

أ) -٢ ب) -٤ ج) -٨ د) -١٦

السؤال الثاني: إذا كانت أ . ب= $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٥ \end{bmatrix}$ ، أ . جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، أَجدُ ناتج أ . (ب+جـ).

السؤال الثالث: أَستخدمُ قاعدة كريمر لحل نظام المعادلات الآتي:

٢س+١ = ص ، س-٢ص = ٤

السؤال الرابع: أجدُ قيمة/ قيم س التي تحقق المعادلة الآتية: $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + س^{٢} = \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & س \end{vmatrix}$ ؟

السؤال الخامس: أجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \cdot س = \begin{bmatrix} -١٤ & ٨ \\ -٨ & ٢ \end{bmatrix}$$ ؟

السؤال السادس: أقيّم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

مؤشر الاداء	مستوى الانجاز		
	مرتفع	متوسط	دون المتوسط
تمييز أنواع المصفوفات ومسمياتها الاساسية			
ايجاد محدد المصفوفة			
توظيف خواص المحددات في حل مشكلات حياتية			
حل معادلات مصفوفية بعدة طرق			

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مشروع الوحدة:

فكرة المشروع:	المنحى:	القضية:
قرارٌ ماليٌّ واعٍ	METS (M ,E ,T ,S)	التوعية المصرفية

تسهم الثقافة المصرفية في اتخاذ قرارات مالية سليمة. بالتعاون مع مجموعتك، اجمع بيانات من مواقع البنوك أو سلطة النقد الفلسطينية حول خدمات مصرفية مناسبة للشباب تعزز ثقافة الادخار، والممارسات المصرفية المسؤولة، ثم استخدم المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها، والمقارنة بين البدائل؛ للوصول إلى قرار مالي مدروس. دافع بالتعاون مع أفراد مجموعتك عن قراركم المالي معتمداً حجج منطقية وواقعية.

مهام المشروع:

الكفاية العامة	المهمة
فهم المشكلات والمثابرة على حلها	١- حدِّد بالتعاون مع مجموعتك مشكلة مالية تتطلب المفاضلة بين أكثر من بديل.
التفكير الكمي والتجريدي	٢- نظِّم بالتعاون مع مجموعتك البيانات في صورة مصفوفات مناسبة.
بناء الحجج الرياضية والبراهين	٣- حلِّل بالتعاون مع مجموعتك نتائج العمليات على المصفوفات، وبرِّر القرار المتخذ.
استخدام الأدوات والتكنولوجيا بذكاء	٤- استخدم بالتعاون مع مجموعتك برنامج جداول إلكترونية لإجراء العمليات على المصفوفات.
النمذجة الرياضية واتخاذ القرار الرياضي المسؤول	٥- قدِّم بالتعاون مع مجموعتك توصية مالية تستند إلى نتائج التحليل.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

الوحدة السادسة ٦

طرق العد ونظرية ذات الحدين

Countin Methodes & Binomial theory



بكم طريقة يمكنك بها اختيار زيٍّ من خزانة ملابسك؟ في هذه الوحدة ستكتشف كيف تساعدك الرياضيات على عدّ الاحتمالات الكثيرة بسرعة ودقة باستخدام مبدأ العد.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف طرق العد ونظرية ذات الحدين في الحياة العمليّة من خلال الآتي:

- حساب التباديل الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- حساب التوافيق الرائية لمجموعة تحتوي ن من العناصر.
- استخدام نظرية ذات الحدّين في إيجاد مفكوك مقدار جبري.

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مبدأُ العدّ (Counting Principle)

نشاط ١


www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

يعاني الشعبُ الفلسطينيُّ من إجراءاتِ الاحتلالِ أثناء السفرِ والتنقُّلِ بين المدن الفِلسطينيّةِ، سواء كانت حواجزَ، أو إغلاقَ طُرقٍ، أو غير ذلك من المضايقات اليوميّة.

فإذا أرادَ عليٌّ أنْ يسافرَ من الخليلِ إلى رام الله مروراً بالقدس، علماً أنّ بإمكانِه أنْ يسافرَ من الخليل إلى القدس بإحدى ثلاثِ وسائلِ نقلٍ هي: حافلة، سيارة أجرة، سيّارة خاصة، ومن القدس إلى رام الله بإحدى وسيلتيْن هما: الحافلة، أو سيّارة الأجرة.

- يُمكنُ لعليٍّ السفرُ من الخليل إلى القدس بالحافلة، أو .... ، أو .....
- عددُ الطُّرُقِ التي يُمكنُ أنْ يسافرَ بها = ...
- يمكنُهُ السفرُ من القدس إلى رام الله بواسطة ..... ، أو ..... ، عدد الطُّرقِ = ...
- عددُ الطُّرقِ التي يُمكنُ لعليٍّ أنْ يسافرَ بها من الخليل إلى رام الله مروراً بالقدس =.....×.....=.....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مبدأ العدِّ الأساسيّ:

إذا أمكننا إجراءُ عمليّةً ما على خطواتٍ عددُها ك، بحيث تتمُّ الأولى بطرقٍ عددها $ن_1$، وتتمُّ الثانية بطُرُقٍ عددها $ن_2$، وهكذا حتى الخطوةِ الأخيرةِ التي تتمُّ بطرقٍ عددها $ن_ك$، فإنّ عددَ الطُّرقِ الكليّةِ التي تتمُّ بها هذه العملية هي: $ن_1 \times ن_2 \times ن_3 \times \ldots \times ن_ك$.



يُرادُ تكوينُ مجلسِ إدارةٍ لشركةٍ ما، مكوَّنٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينٍ للصندوقِ، بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ هذا المجلسِ، إذا كان عددُ الأشخاصِ المرشّحين ٥ ؟

لاختيار الرئيسِ، هناك ٥ طرقٍ مختلفة.

لاختيار نائبِ الرئيس، هناك .... طرقٍ مختلفة، لماذا ؟

لاختيار أمينِ الصندوق، هناك .... طرقٍ مختلفة.

عدد الطرق المختلفة لتكوين المجلس= ... × ... × ٣ =... طريقة مختلفة.



كم عدداً مكوّناً من منزلتيْن، يمكنُ تكوينُه من مجموعة الأرقام: { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ } ؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

تتمُّ العمليّةُ في مرحلتين: المرحلةُ الأولى اختيارُ منزلةِ الآحاد، وتتمُّ بـ ... طُرُق، واختيارُ منزلةِ العشراتِ، وتتمُّ أيضا بـ ... طرق. إذن عددُ الطرقِ الكليّة = ... × ... = ١٦ طريقةً.

ب) إذا لم يُسمَحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ... طرق، وعددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشرات ... طرق.

عدد الطرق المختلفة = ... × ... = ١٢ طريقةً، أيّ أنّ: عدد الأعداد المختلفة ١٢ عدداً.

مضروبُ العدد:

بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ لخمسةِ أشخاصٍ أن يجلسوا في خمسةِ أماكنَ في خطٍّ مستقيم؟

حسب مبدأ العدّ: عدد الطرق المختلفة هي ٥ × ... × ... × ... × ... = ١٢٠ طريقةً مختلفةً.

اصطُلِحَ على كتابة حاصلِ الضرب ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ على الصورة ٥! ، وتُقرَأُ مضروب العدد ٥.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تعريف:

إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً، فإنّ مضروبَ العدد ن ، ويُرمَزُ له بالرمز ن!

حيث: ن! = ن(ن − ١)(ن − ٢) .... ٣ × ٢ × ١

٠! = ١



أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ...

ب) $\frac{٥!}{٣!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣!}$ = ... = ٢٠

جـ) $\frac{٨!}{٥!\ ٣!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٥! \times ٣ \times ٢ \times ١}$ = ...

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38



أكتبُ $\frac{ن!}{(ن - ٢)!}$ في أبسط صورة.

$\frac{ن!}{(ن - ٢)!} = \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)!}{(ن - ٢)!}$ = ...

قيمةُ المقدارِ، عندما ن = ٥ تساوي .....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٦-١

١) يقدِّمُ أحدُ المطاعمِ في مدينةِ نابُلْسَ ٣ أنواعٍ من اللّحوم، و ٤ أنواعٍ من الحَلْوى، ونوعيْن من المشروبات. بكم طريقةٍ يمكنُ لأحدِ مرتادي المطعم اختيارَ وجبةٍ مكوّنةٍ من نوعٍ من اللّحومِ، ونوعٍ من الحَلْوى، ومشروبٍ؟

٢) أُلقِيتْ قطعةُ نقدٍ ٣ مرات، فما عددُ النتائجِ الممْكِنةِ؟ أكتبُ النتائجَ في مجموعة.

٣) كم عدداً مؤلّفاً من ثلاث منازل، يمكنُ تكوينُهُ من مجموعة الأرقام: { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }؟

أ) إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ب) إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقمِ في أكثر من منزلة.

٤) أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي :

أ) ٨! − ٤!

ب) $\frac{٧! \times ١٠!}{٥! \times ٩!}$

٥) أكتبُ المقدار: $\frac{(١ + ن)!}{(١ - ن)!}$ ، حيث ن ≥ ١، بأبسط صورة.

٦) بكم طريقةٍ يمكنُ لستةِ أشخاصٍ الجلوسُ على ٨ كراسي، في خطٍّ مستقيم.

٧) إذا كان ن! = ٥٠٤٠ ، فما قيمةُ ن ؟

٨) كم عدداً زوجيّاً يمكنُ تكوينُه من ثلاثِ منازلَ ، من ضمن الأرقام: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ١



لقد خطَتِ الرياضةُ الفِلسطينيّةُ في السنوات الأخيرة خُطُواتٍ واسعةٍ، ولعلّ أبرزَ دليلٍ على ذلك تأهُّلُ منتخَبِ فلسطينَ في كُرةِ السلة لكأسِ أُمَمِ آسيا، في العام ٢٠١٥.

فإذا أرادَ المنتخبُ الوقوفَ على خطٍّ مستقيمٍ، لأخذِ صورةٍ تذكاريةٍ، فإنّ عددَ الطرقِ الكليّةِ للفريق لأخذ الصورة هي: ٥ × ... × ... × ... × ... = ...

أتعلّمُ: عددُ الطرقِ المختلفةِ التي يمكنُ للفريقِ أنّ يقفَ فيها، لأخذِ الصورةِ، هي عددُ الترتيباتِ المختلفةِ للاعبين، وهو ما يُسمّى التباديل.

تعريف:

عددُ تباديل ن من العناصر مأخوذةً جميعاً في كل مرة، هو ن! ، ويُرمَزُ له بالرّمزِ ل(ن،ن)، حيث ن ∈ ص$^{+}$

ل(ن،ن) = ن! = ن(ن − ١)(ن −٢) × .... × ٣ × ٢ × ١

نشاط ٢

أجدُ قيمةَ: ل(٦،٦).

ل(٦،٦) = ٦ × ... × ... × ... × ... × ١ =٧٢٠

ل(٥،٥) = ... ماذا نلاحظ؟

نشاط ٣

أجدُ عددَ الأعداد المكوّنةِ من منزلتيْن، التي يمكنُ تكوينُها من مجموعة الأرقام:
{ ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، إذا لم يُسمحْ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة.

ألاحظُ أنَّ المطلوبَ هو عددُ الترتيباتِ الثنائيّةِ لمجموعةِ الأرقامِ هذه، بشرط عدم التكرار، ويساوي ....×....=....

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

وهذا ما يُسمَّى التباديلَ الثنائيّةَ لمجموعةٍ فيها ٥ عناصر، وبشكلٍ عام، فإنّ عددَ التباديلِ الرائيّةِ لمجموعةٍ مكوّنةٍ من (ن) من العناصر، ويُرمَزُ له بالرمز ل(ن ، ر)، يساوي $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}}$ حيث ن ، ر عددان طبيعيّان، ن ≥ ر



أجدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(٥ ، ٣) = $\frac{\text{٥!}}{\text{(٥ − ٣)!}}$ = ...

ب) ل(ن ، ٣) = $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ٣)!}}$ = ... = ...

أتعلمُ: يمكنُ كتابةُ ل(ن،ر) على الشكل: ن(ن−١)(ن−٢)(ن−٣)...(ن−ر+١).



أتحقّقُ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ١) = $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن − ١)!}}$ = ... = ن

ب) ل(ن ، ٠) = ... = ١

جـ) ل(ن ، ن) = ... = ن!



بكم طريقةٍ يمكنُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من رئيسٍ، ونائبِ رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ من بين سبعة أشخاص ؟

عددُ الطرقِ التي يمكنُ تشكيلُ اللجنةِ بها هي:

ل(٧ ، ٣) = ... × ... × ... = ٢١٠ طرقٍ مختلفة.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل ٦-٢

١) أحسبُ قيمةَ ما يأتي:

أ) ل(٤،٦) ب) $\frac{\text{ل}(٢،٩)}{\text{ل}(٠،٩٠)}$

٢) أرادَ أحمدُ وإخوانُه الثلاثةُ الذهابَ إلى المسجدِ الأقصى، واتفقوا على أنْ يدخلَ كلٌّ منهم من بابٍ مختلفٍ من أبوابِ القدسِ السبعةِ. بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ للإخوةِ الأربعةِ الوصولُ إلى المسجد الأقصى؟

٣) أجدُ قيمةَ ن في كلٍّ ممّا يأتي:

أ) ل(ن ، ٢) = ٥٦

ب) ل(ن ، ٣) = ٢١٠

جـ) ل(ن − ٣ ، ٢) = ٦

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

٤) دُعِيَ خمسةُ رجالٍ وزوجاتُهم الخمسُ لحضور حفلِ تخرُّجِ طلبةِ الثانويةِ العامةِ، في القرية التي يسكنون فيها، بكم طريقةٍ يمكنُ لهم أن يجلسوا على ١٠ كراسي، في خطٍّ مستقيم، بحيث يجلسُ الرجالُ متجاورين، والزوجات متجاورات ؟

٥) إذا كان ل(ن،ر) = ١٢٠، أجدُ قيمَ ن،ر الممكِنةَ. كم حلًّا للسؤال ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نشاط ١



تكثُرُ المعالمُ الأثريّةُ في فلسطينَ، مثل سبَسْطيةَ في نابُلْسَ، وقصرِ هشامٍ في أريحا، أقدمِ مدينةٍ في العالم.

ذهب خمسةُ أصدقاءَ: محمدٌ، ويزنٌ، وخالدٌ، وخليلٌ، وعلاءٌ، من الصفِّ العاشر في رحلة إلى منطقة سبسطيةَ الأثريةَ، وفي موعدِ الغداء اتفقوا على اختيار ثلاثةٍ منهم لإعداد الطعام للجميع، فاقترحَ أحدُهم أنْ يلجأوا إلى القُرعة، وذلك بعد تقسيم المجموعة إلى مجموعات ثلاثيّة مثل: {محمد، يزن، خالد}، {محمد، يزن، خليل}.

- أكملُ باقي المجموعات.....
- هل يمكنُ أنْ تكونَ إحدى المجموعات: يزن، خالد ، محمّد ؟ لماذا ؟
- عدد المجموعات التي يمكنُ تكوينُها..... مجموعة.

تعريف:

عدد التوافيق الرائيّةِ لمجموعة فيها ن من العناصر، ويُرمزُ له بالرّمز:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن،ر)}{!ر} = \frac{!ن}{!ر\,!(ن-ر)} \quad ، \quad ر \leq ن$$

نشاط ٢

لدى معرِضِ سيّاراتٍ ٦ أنواعٍ من السيارات، يريدُ صاحبُ المعرِضِ اختيارَ ٤ منها، لعرضها للزبائن.

أجدُ عددَ الطرقِ التي يمكنُ بها الاختيار.

بما أنّ إعادة الترتيب لا تعطي نتيجة جديدة، أي أنّ الترتيبَ غيرُ مهم.

إذن: عددُ الطرق يساوي $= \binom{٦}{٤} = \frac{!٤ \times ٥ \times ٦}{!٤!٢} = ...$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أحسبُ كلًّا ممّا يأتي:

أ) $\binom{٨}{٤} = \frac{!٨}{!٤!٤} = \ldots.$

ب) $\binom{٦}{١} = \ldots. = ٦$

جـ) $\binom{٥٢}{٠} = \ldots. = ١$

د) $\binom{٢٥}{٢٥} = \ldots..$



أستنتجُ القواعدَ الآتية :

أ) $\binom{ن}{٠} = \frac{!ن}{!٠\ (ن - ٠)!} = \ldots. = ١$

ب) $\binom{ن}{ن} = \ldots. = ١$

جـ) $\binom{ن}{١} = \ldots. = ن$

د) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين ومسائل (٦ - ٣)

١) أحسبُ ما يأتي:

أ) $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٥ \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٤ \end{pmatrix}$ جـ) $\begin{pmatrix} ٧٥ \\ ١ \end{pmatrix}$

٢) أجدُ قيمَ ن في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) $\begin{pmatrix} ن \\ ٢ \end{pmatrix} = ٣$ ب) $\begin{pmatrix} ن \\ ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ن \\ ٩ \end{pmatrix}$

٣) بكم طريقةٍ يمكنُ تكوينُ فريقٍ لكرةِ السّلةِ، يتمُّ اختيارُه من بين ثمانية لاعبين ؟

٤) صفٌّ مكوّنٌ من ٩ طلابٍ، و٧ طالباتٍ، يُرادُ تشكيلُ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ طلابٍ، و٤ طالباتٍ، بكم طريقةٍ مختلفةٍ يمكنُ تشكيلُ اللجنة ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

نظريّةُ ذاتِ الحدّيْن (Binomial Theorem)



تعلمتَ في صفوفٍ سابقةٍ قانونَ التوزيع؛ لذا بإمكانك إيجادَ مفكوكِ كلٍّ من الآتية:

$(أ + ب)^{٢} =$

$(أ + ب)^{٣} =$

$(أ + ب)^{٤} =$

والآن، ماذا لو طُلِبَ منك إيجادُ مفكوكِ $(أ + ب)^{١٥}$ ؟

لاشك أنّك تستطيعُ ذلك وَفقَ ما تعلمتَهُ سابقاً، بضرب المقدار $أ + ب$ في نفسه خمس عشرة مرةً، وهي طريقةٌ طويلةٌ وشاقّةٌ؛ لذا فهناك حاجةٌ لاستخدام نظرية ذات الحدّيْن، لإيجاد مفكوكٍ من هذا النوع.

نظريّة ذات الحدّين:

$$(أ + ب)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} أ^{ن-ر} ب^{ر}$$

$$= \binom{ن}{٠} أ^{ن} ب^{٠} + \binom{ن}{١} أ^{ن-١} ب^{١} + \binom{ن}{٢} أ^{ن-٢} ب^{٢} + ... + \binom{ن}{ن} أ^{٠} ب^{ن}$$

حيث $ن$ عدداً طبيعياً



أجدُ مفكوكَ: $(س + ٢)^{٥}$

$$(س + ٢)^{٥} = \sum_{ر=٠}^{٥} \binom{٥}{ر} س^{٥-ر} ٢^{ر}$$

$= س^{٥} + ٥س^{٤} \times ٢ + ١٠س^{٣} \times ٤ + ١٠س^{٢} \times ٨ + ٥س \times ١٦ + ٣٢$

$= .....$

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



لإيجاد مفكوكِ المقدار: (٢س − ١)^{٣} :

- أكتبهُ على الشكل: (٢س + $^{-}$١)^{٣}.
- أجدُ مفكوك المقدار: (٢س + $^{-}$١)^{٣} = $\binom{٣}{٠}$ (٢س)^{٣} (-١)^{٠} + ... + ...

أستنتجُ:

- عددُ حدودِ مفكوك (أ + ب)^{ن} = ...
- مجموعُ أُس أ وأس ب في أيّ حدٍّ من حدود المفكوك = ...

أتعلّمُ:

- في مفكوك (أ + ب)^{ن} = أ^{ن} + $\binom{ن}{١}$ أ$^{ن-١}$ ب^{١} + $\binom{ن}{٢}$ أ$^{ن-٢}$ ب^{٢} .... + ب^{ن}
- في الحدِّ الأول: قيمة ر تساوي ٠ ، وفي الحد الثاني: قيمة ر تساوي ١، وهكذا ..

أي: ح$_{ر+١}$ = $\binom{ن}{ر}$ أ$^{ن-ر}$ ب^{ر} ، وهذه صورةُ الحدِّ العام.



في مفكوك (٢س + $\frac{١}{٢}$)^{٦}، أجدُ الحدَّ الثالث .

في الحد الثالث تكون قيمةُ ر = ٢

ح$_{٣}$ = $\binom{٦}{٢}$ (٢س)^{٤} ($\frac{١}{٢}$)^{٢} = ١٥ × ١٦ × س^{٤} × $\frac{١}{٤}$ = ...



أجدُ الحدَّ الأوسطَ في مفكوك: ($\frac{٢}{٣}$ ص + ٣)^{٨}

بما أنَّ ن = ٨ ، إذن: عدد الحدود يساوي .....

رتبةُ الحدّ الأوسطِ هي: $\frac{٨}{٢}$ + ١ = ٥

ح$_{٥}$ = $\binom{٨}{٤}$ ($\frac{٢}{٣}$)^{٤} ص^{٤}(٣)^{٤} = ... = ٧٠ × ١٦ص^{٤} = ...

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38



أجدُ قيمةَ المقدار: $(١,٢)^{\circ}$

$(١,٢)^{\circ} = (١ + ٠,٢)^{\circ}$

مفكوك $(١ + ٠,٢)^{\circ} = \ldots\ldots\ldots$

أستخدمُ الآلةَ الحاسبةَ، لإيجاد قيمةِ المقدار$(١,٢)^{\circ}$ ، وأقارنُ بين الإجابتيْن.

تمـارين ومسائل (٦ - ٤)

(١) أجُد مفكوكَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) $(س + ٣)^{٦}$

ب) $(\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٣}{س})^{٤}$ ج) $(٢ - س)^{\circ}$

(٢) أجدُ الحدَّ السابعَ في مفكوك: $(س + \frac{١}{٢})^{١٠}$

(٣) أجدُ الحديْن الأوسطيْن في مفكوك: $(\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٣}{س})^{٧}$

(٤) أستخدمُ مفكوكَ ذاتِ الحديْنِ في إيجاد قيمةٍ تقريبيّةٍ، لأقربِ ٣ منازل عشريّة للمقدار: $(٣,٩٨)^{٣}$

(٥) أجدُ الحدّ الذي يحوي $س^{٣}$ في مفكوك:$(٢س - \frac{١}{٢})^{\circ}$

(٦) أيُّ حدٍّ في مفكوك $(أ + ب)^{٢٥}$ ، له معاملُ الحدّ ٢٣ نفسه ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

تمارين عامّة (٦):

السؤال الأول:

أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

(١) أيُّ من القيمِ الآتية تساوي ل(٨ ، ٢)؟

أ) ٣٠ ب) ٢٧ جـ) ٢٥ د) ٢٤

(٢) إذا كان ٨! = ٦ فما قيمة ل(٢،٨٣) ؟

أ) ١٨ ب) ٢٧ جـ) ٥٤ د) ٧٢

(٣) ما قيمةُ: $\binom{٦}{٣} - \binom{٤}{٢}$ ؟

أ) ٢٠ ب) ١٤ جـ) ٥ د) ٢

(٤) ما معاملُ الحدّ الثامنِ في مفكوك (س + ص)^{٩} ؟

أ) ٧ ب) ٩ جـ) ٣٦ د) ٦٣

(٥) ما الحدُّ الأوسطُ في مفكوك: (٢أ^{٢} – $\frac{١}{٢}$)^{١٠} ؟

أ) ٨٨أ^{٦} ب) -٢٥٢أ^{٥} جـ) ٨٨ د) -٢٥٢

السؤال الثاني

كم عدداً مكوّناً من ٣ منازل، وأصغر من ٣٠٠، يمكنُ تكوينُهُ من الأرقام: ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، إذا سُمِحَ بتكرار الرقم في أكثر من منزلة؟

السؤال الثالث

ما عددُ النواتجِ المُمكنةِ لتجربةِ رَمْيِ حجرِ النّردِ ٣ مرّاتٍ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

السؤال الرابع

أحلُّ المعادلات الآتية :

أ) ٥ ن! = ٣٦٠٠

ب) ٣٠ ن! = (ن + ٢)!

السؤال الخامس

إذا كان $\frac{٥}{(ن - ١)!} + \frac{٣}{(ن - ٢)!} = \frac{٢٠٨}{ن!}$ ، أجدُ قيمةَ ن.

السؤال السادس

أُعبِّرُ عن كلٍّ ممّا يأتي بالصورة ل(ن،ر) :

أ) ٩ × ٨ × ٥ × ٦ × ٧ ب) ٢٥٢٠ ج) ن(ن^{٢} − ٣ن + ٢)

السؤال السابع

أ ، ب ، ج ، د أربعُ نقاطٍ في المستوى، لا تقع أيٌّ ثلاثٍ منها على استقامة واحدة. كم قطعةً مستقيمةً يمكنُ رسمُها بين أي نقطتين من هذه النقاط ؟

السؤال الثامن

يريدُ طلبةُ الصفّ العاشرِ البالغ عددُهم ١٥ طالباً في إحدى المدارس الفلسطينيّةِ اختيارَ لجنةٍ مكوّنةٍ من ٣ أشخاص لتمثيلهم أمام إدارة المدرسة:

أ) بكم طريقةٍ يمكنُ اختيارُ اللجنة.

ب) بكم طريقة يمكن اختيارها إذا تكوّنت من: رئيسٍ، وأمينِ سرٍّ، وعضوٍ ؟

السؤال التاسع

أجدُ مفكوكَ: $(\frac{١}{٢}س - \frac{١}{٣})^{٤}$.

السؤال العاشر

كم قُطراً للشكل الخماسيّ ؟

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

مشروع الوحدة:

فكرة المشروع:	المنحى:	القضية:
كلمةُ مرورٍ لا تُخترق	METS (M ,E ,T ,S)	الأمن السيبراني

تعتمد قوة كلمات المرور على عدد الاحتمالات الممكنة لتكوينها. بالتعاون مع مجموعتك، استكشف أثر عدد الرموز وطول كلمة المرور في زيادة عدد الاحتمالات باستخدام مبادئ العد والتباديل والتوافيق، ثم صمِّم دليلاً مبسطاً يساعد الطّلبة على إنشاء كلمات مرور قوية.

مهام المشروع:

الكفاية العامة	المهمة
فهم المشكلات والمثابرة على حلها	١- حدِّد بالتعاون مع مجموعتك العوامل التي تؤثر في قوة كلمة المرور.
التفكير الكمي والتجريدي	٢- احسب بالتعاون مع مجموعتك عدد الاحتمالات باستخدام مبادئ العد والتباديل والتوافيق.
بناء الحجج الرياضية	٣- قارن بالتعاون مع مجموعتك بين كلمات مرور مختلفة، وبرِّر أيها أكثر أمانًا.
استخدام الأدوات والتكنولوجيا بذكاء	٤- استخدم بالتعاون مع مجموعتك أداة رقمية أو برنامج جداول لإجراء الحسابات وعرض النتائج.
اتخاذ القرار الرياضي المسؤول	٥- صمِّم دليلًا يتضمن توصيات لإنشاء كلمات مرور آمنة تستند إلى نتائج التحليل الرياضي.

الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

المراجع

الجنابي، احمد نصيف (1980):، الرياضيات عند العرب ، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية

الزغلول، عماد (2005)، الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.

فريدريك بل (1986):طرق تدريس الرياضيات:الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان). قبرص:الدار العربية للنشر والتوزي

اللحام ، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق

ريتش، بارنيت (2004) : الجبر الأساسي، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية –القاهرة- مصر

نورة ،دهبي (2008): الرياضيات ، دار الصفاء للنشر و التوزيع- عمان-الأردن

رمضان صبرا، أحمد عثمان، غريب موسى، روز زريقات (1997): الرياضيات العامة، دارالمناهج للنشر و التوزيع - عمان - الأردن

Kline, M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times, Oxford, N.Y

Lamborg.James(2005):Math reference,Wiley ,N.Y

Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y

Friel,Suzan.Rashlin,Sid.Doyle,Dot.& others(2001): Navigating through Algebra in Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume1

Bostock&Perkins(1989) : Advanced Mathematics, volume2

الملتقى التربوي

. https://www.wepal.net

www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38

www.wepal.net
SIGNED TRACK 641f514870e5bc38

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم
د. بصري صالح
م. فواز مجاهد
أ. ثروت زيد
أ. عزام ابو بكر
أ. علي مناصرة
د. شهناز الفار
د. سمية النخالة
م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد
د. محمد صالح (منسقًا)
د. معين جبر
د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي
د. عادل فوارعة
أ. وهيب جبر
د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني
د.سعيد عساف
د. محمد مطر
د. علا الخليلي
د. شهناز الفار
د. علي نصار
د. أيمن الأشقر
أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران
أ. كوثر عطية
د. وجيه ضاهر
أ. فتحي أبو عودة
د. سمية النخالة
أ. أحمد سياعرة
أ. قيس شبانة
أ. مبارك مبارك
أ. عبد الكريم صالح
أ. أحلام صلاح
د. نسرين دويكات
أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم

المشاركون في ورشات عمل كتاب الرياضيات للصف العاشر

أ. إياد دويكات
أ. آنية رضوان
أ. دعاء شتية
أ. مها غانم
أ. هيا رواشدة
أ. رفيق الصيفي
أ. صلاح الترك
أ. رأفت عامر
أ. سهيل شبير
أ. باسم المدهون
أ. منال الصباغ
أ. معزوز ضبابات
أ. محمد غانم
أ. هاشم أبو بكر
أ. أماني شاور
أ. أشجان جبر
أ. راتب نصار
أ. أرواح كرم
أ. محمد الفرا
أ. عبدالله مهنا
أ. وفاء موسى
أ. ابتسام اسليم
أ. عارف السعافين
أ. رانية شريم
أ. ريم العويصات
أ. عهود طه
أ. ميسون جمل
أ. خالد العلامي
أ. منال ضبّاع
أ. شذى جبران
أ. خلود كايد

المشاركون في ورشة إثراء كتاب الرياضيات للصف العاشر

د. أدهم قديمات
د. نسرين دويكات
أ. إيناس زهران عيدة
أ. رائدة عويس
أ. رهام مصلح
أ. سامر أبو الرب
أ. محمد عليان
أ. محمد فايـــز
أ. منال زرينة
أ. نيفين حماد
أ. نهى أبو صفا

SIGNATRACK 641f514870e5bc38
www.wepal.net
الملتقى التربوي
. https://www.wepal.net
www.wepal.net | RESOURCE #115151 | TRACK 641f514870e5bc38