

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم

# الرياضيات

الأدبي والشرعي  
الفترة الاولى

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين  
وزارة التربية والتعليم



مركز المناهج

mohe.ps | mohe.pna.ps | moche.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

+970-2-2983250 فاكس | هاتف | +970-2-2983280

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

# المحتويات

|    |                     |                                 |
|----|---------------------|---------------------------------|
| ٤  | Rate Of Change      | ( ١ - ١ ) متوسط التغير          |
| ١٠ | First Derivative    | ( ٢ - ١ ) المشتقة الأولى        |
| ١٤ | Derivative Rules    | ( ٣ - ١ ) قواعد الاشتقاق        |
| ٢٠ | Extreme Values      | ( ٤ - ١ ) القيم القصوى للإقتران |
| ٢٥ | Indefinite Integral | ( ٥ - ١ ) التكامل غير المحدود   |
| ٣١ | Definite Integral   | ( ٦ - ١ ) التكامل المحدود       |
| ٣٨ | Chapter Exercises   | ( ٧ - ١ ) تمارين عامة           |

التفاضل والتكامل

## الوحدة المتمازجة للفترة الأولى التفاضل والتكامل Differentiation and Integration

يتوقع من الطلبة بعد دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين على توظيف مبادئ التفاضل والتكامل في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. إيجاد متوسط التغير للاقتران ق(س).
٢. التعرف على مفهوم المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٣. استخدام قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق(س).
٤. تحديد مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) في مجاله.
٥. تعيين القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) في مجاله وتحديد نوعها.
٦. التعرف على مفهوم التكامل.
٧. إيجاد التكامل غير المحدود.
٨. استخدام خصائص التكامل المحدود في إيجاد التكاملات المختلفة.

## متوسط التغير

## تعريف



إذا كان  $v = q(s)$  اقتراناً، وتغيرت  $s$  من  $s_1$  إلى  $s_2$  فإن:

التغير في قيمة  $s = s_2 - s_1$ ، ويرمز له بالرمز  $\Delta s$

التغير في قيمة  $v = v_2 - v_1 = q(s_2) - q(s_1)$  ويرمز له بالرمز  $\Delta v$

## مثال (١)



إذا كان  $v = q(s) = 2s^2 - 5$ ، وكانت  $s_1 = 1$ ،  $\Delta s = 2$ ، فما قيمة التغير في قيمة  $v$ ؟

الحل:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$2 = s_2 - 1$$

$$s_2 = 3$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = q(s_2) - q(s_1) = q(3) - q(1)$$

$$= (2(3)^2 - 5) - (2(1)^2 - 5) \quad (\text{لماذا؟})$$

$$= 13 - 3$$

$$= 10$$

أناقش: ما التغير في قيمة  $v$  عندما يكون قيمة التغير في  $s$  يساوي ١؟ (في المثال ٢)

## تعريف



إذا كان  $v = q(s)$  اقتراناً، وتغيرت  $s$  من  $s_1$  إلى  $s_2$  فإن:

$$\text{متوسط التغير للاقتران } q(s) = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{q(s_2) - q(s_1)}{s_2 - s_1}, \quad s_2 \neq s_1$$

## مثال (٢)

أحسب متوسط التغير في الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> + ٥، عندما تتغير س في [٣، ٥].

**الحل:**

$$ق(٣) = ٥ + ٣^٢ = ١٤$$

$$ق(٥) = ٥ + ٥^٢ = ٣٠$$

$$متوسط التغير للاقتران = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٥) - ق(٣)}{٥ - ٣} = \frac{٣٠ - ١٤}{٢} = ٨$$

## مثال (٣)

إذا كان ه(س) = ٢ق(س) + ٤، وكان متوسط تغير الاقتران ق(س) على [٣، ٧] يساوي ١٠، أجد متوسط التغير للاقتران ه(س) على الفترة ذاتها.

**الحل:**

$$١٠ = \frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣} = \text{متوسط التغير للاقتران ق(س)}$$

$$\frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣} = \frac{ه(٧) - ه(٣)}{٧ - ٣} = \text{متوسط التغير للاقتران ه(س)}$$

$$٢٠ = ١٠ \times ٢ = \frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣} \times ٢ = \frac{ق(٧) - ق(٣)}{٧ - ٣} =$$

## تمارين ومسائل (١ - ١)

١ أجد متوسط التغير في كل من الاقترانات الآتية عندما تتغير س من س<sub>١</sub> إلى س<sub>٢</sub>.

$$س_١ = ٢، س_٢ = ٥$$

$$أ) ه(س) = س^٢ + ٢$$

$$س_١ = ١، س_٢ = ٦$$

$$ب) ل(س) = \sqrt{٢ + س}$$

٢ إذا كان ق(٣) = ٨، وكان متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س<sub>١</sub> = ٣ إلى س<sub>٢</sub> = ٥ يساوي -٢، أجد ق(٥).

٣ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = س<sup>٢</sup> - ٥ س في [١، ٣] يساوي -٩، أجد قيمة الثابت ب.

٤ إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في [٢، ٤] يساوي ٥، أجد متوسط تغير الاقتران ه(س) = ٣ق(س) - ٢ في تلك الفترة.

# المشتقة الأولى

## تعريف \*

إذا كان  $ص = ق(س)$  معروفاً عند  $س = م$ ، وكانت  $ن$  هنا  $\frac{ق(م+هـ) - ق(م)}{هـ}$  موجودة، فإن  $ق(س)$  يكون قابلاً للاشتقاق عند  $س = م$  وتسمى المشتقة الأولى للاقتزان  $ق(س)$  عند  $س = م$ .

ويرمز لها بالرمز  $ق'(م)$  أو  $\frac{دص}{دس} \big|_{س=م}$  أو  $ص'|_{س=م}$

قاعدة (١): إذا كانت  $ص = ق(س) = م$ ، حيث  $م$  عدد حقيقي، فإن  $ق'(س) = \frac{دص}{دس} = صفر$ .

قاعدة (٢): إذا كانت  $ص = م + س$ ، حيث  $م$ ،  $ب$  عددان حقيقيان، فإن  $ق'(س) = \frac{دص}{دس} = م$ .

## مثال (١)

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية: أ)  $ق(س) = ٩٨$  ب)  $ص = ٥س$

الحل: أ)  $ق(س) = ٩٨$  (اقتزان ثابت) إذن:  $ق'(س) = صفر$ .

ب)  $ص = ٥س$  (اقتزان خطي) إذن:  $ق'(س) = \frac{دص}{دس} = ٥$

قاعدة (٣): إذا كان  $ق(س) = س^n$ ، فإن  $ق'(س) = ن س^{n-1}$ ، حيث:

$ن$  عدد حقيقي،  $ن \neq ٠$ ،  $س \neq ٠$ .

## مثال (٢)

أجد مشتقة الاقتزان  $ق(س) = س^٥$  عند النقطة  $(٢، -٣٢)$ .

الحل:  $ق'(س) = س^٥ = ٥س^٤$  ومنها  $ق'(٢) = ٥(٢-)^٤$

$$٨٠ = ١٦ \times ٥ =$$

\* تعريف المشتقة الأولى للعلم فقط.

## نشاط (٢)



إذا كان  $ق(س) = \sqrt[3]{س^2}$  فلايجاد  $ق(-٨)$ :

$$ق(س) = \sqrt[3]{س^2} = \sqrt[3]{س^2} \quad \text{لماذا؟} \quad \text{ومنها} \quad ق(س) = \sqrt[3]{س^2} = \sqrt[3]{س^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{س^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{س^2}} \quad \text{ومنها} \quad ق(-٨) = \frac{1}{\sqrt[3]{(-٨)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{٦٤}} = \frac{1}{٤}$$

**قاعدة (٤):** إذا كان  $ق(س)$  اقترانا قابلاً للاشتقاق، وكان  $س$  عدداً حقيقياً،  $س \neq ٠$ ، فإن الاقتران  $ه(س) = \frac{1}{ق(س)}$  هو اقتران قابل للاشتقاق، وتكون  $ه(س) = \frac{1}{ق(س)}$ .

## مثال (٣)



إذا كان  $ه(س) = ق(س)$ ، وكان  $ق(٦) = ١$ ، فما قيمة  $ه(٦)$ ؟

**الحل:**  $ه(س) = ق(س)$  إذن  $ه(٦) = ق(٦) = ١$  ومنها  $ه(٦) = ١$  ومنها  $١ = ١ - ١ = ٠$

## تمارين ومسائل (١ - ٢)



أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند قيمة  $س$  المقابلة لكل منها:

عند  $س = ١٠٠$

$$أ) ق(س) = \sqrt[5]{٢ - س}$$

عند  $س = ١$

$$ب) ق(س) = \sqrt[5]{س^3}$$

عند  $س = ١ -$

$$ج) ق(س) = س^3$$

أجد  $ق(س)$  لكل من الاقترانات الآتية:

$$أ) ق(س) = \frac{٦٤}{س^٥} ، س \neq \text{صفر} \quad ب) ق(س) = (٠,٠٣)^س \quad ج) ق(س) = س^٥$$

$$إذا كان ص = ٦ ق(س)، وكان ق(٥) = ٧، أجد قيمة \frac{ص}{س} عند س = ٥$$

$$إذا كان ق(س) = س^٢، وكان ق(٢) = ٦٠، فما قيمة الثابت س؟$$

# قواعد الاشتقاق

**قاعدة (١)\*:** إذا كان  $ق(س)$  و  $هـ(س)$  اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان  $ك(س) = ق(س) \pm هـ(س)$  فإن:  
 الاقتران  $ك(س)$  يكون قابلاً للاشتقاق، ويكون  $ك'(س) = ق'(س) \pm هـ'(س)$ .  
 وبلغة أخرى:  $ق(س) + هـ(س) = (ق + هـ)'(س)$

## مثال (١)

إذا كان  $ق(س) = ٥س^٢$ ، وكان  $هـ(س) = ٤س^٣$ ، أجد:

أ)  $ق(س) + هـ(س)$       ب)  $ق(س) - هـ(س)$

**الحل:**  $ق'(س) = ١٠س$ . كما أن:  $هـ'(س) = ١٢س^٢$

أ) بحسب القاعدة:  $ق(س) + هـ(س) = (ق + هـ)'(س)$

ومنها:  $ق(س) + هـ(س) = ١٠س + ١٢س^٢$  (لماذا؟)

ب)  $ق(س) - هـ(س) = ١٠ - ١٢س^٢$

$هـ'(س) = ١٢س^٢ = ١٢$

وبما أن  $ق(س) - هـ(س) = (ق - هـ)'(س)$

فإن:  $ق(س) - هـ(س) = ١٠ - ١٢س^٢ = (١٠ - ١٢س^٢)'$

## نشاط (١)

إذا كان  $ق(س) = ٢س - ٧$ ،  $ك(س) = ٣س^٢ + ٢$ ،  $م(س) = ٣س + ٢$ ، فإن:

$ك'(س) = ٩س$        $م'(س) = ٣$

$ق'(س) = ٢ - ٧ = -٥$

ومنها:  $ق(س) - ك(س) = \dots$

**قاعدة (٢):** إذا كان ق(س)، ه(س) اقترانين قابليين للاشتقاق عند س = ١ فإن:

$$ق(س) \times ه(س) = ق(س) \times ه(س) + ق(س) \times ه(س).$$

وبالكلمات: مشتقة حاصل ضرب اقترانين = الاشتقاق الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاشتقاق الثاني × مشتقة الاقتران الأول

## مثال (٢)

إذا كان ق(س) = (٣س<sup>٢</sup> - ٥س) ه(س) = (٧ - ٤س) فإن ق(س) تساوي:

ق(س) = الاشتقاق الأول × مشتقة الاقتران الثاني + الاشتقاق الثاني × مشتقة الاقتران الأول

$$ق(س) = (٣س^٢ - ٥س) (٤ - ٧) + (٧ - ٤س) (٦ - ٥س)$$

$$\text{ومنها } ق(٢) = (٣(٢)^٢ - ٥(٢)) (٤ - ٧) + (٧ - ٤(٢)) (٦ - ٥(٢))$$

$$١٥ - = (٧ \times ١ -) + (٤ - \times ٢) =$$

**قاعدة (٣):** إذا كان ق(س)، ه(س) اقترانين قابليين للاشتقاق، وكان ه(س) ≠ ٠ عند س = ١ فإن:

$$\left( \frac{ق}{ه} \right)' = \frac{ق(س) \times ه'(س) - ه(س) \times ق'(س)}{ه(س)^٢}$$

$$\text{مشتقة ناتج قسمة اقترانين} = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

## مثال (٣)

$$\frac{٩}{٨} = \frac{٣ - ٤س}{٢ - ٦س} ، س \neq ٣ ، \text{أتحقق أن ق(١) = } \frac{٩}{٨}$$

$$\text{الحل: } ق(س) = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{\text{مربع المقام}}$$

$$ق(س) = \frac{(٢ - ٦س) (٤ - ٣س) - (٣ - ٤س) (٢ - ٦س)}{(٢ - ٦س)^٢}$$

$$ق(١) = \frac{٩}{٨} = \frac{١٨}{١٦} = \frac{(٢)(١ - ٤) - (٤ - ٣)(٢ - ٦)}{(٢ - ٦)^٢}$$

## تمارين ومسائل ( ١ - ٣ )



١ بالاعتماد على البيانات في الجدول

المجاور أحسب ما يأتي:

|      |      |      |       |
|------|------|------|-------|
| ق(٥) | ق(٥) | ق(٥) | هـ(٥) |
| ٩    | ٢    | ٣    | ١-    |

أ ( ق + ٢ هـ ) (٥)

ب ( ٣ ق - ٤ هـ ) (٥)

ج (  $\frac{ق}{هـ}$  ) (٥)

د ( ق × هـ ) (٥)

٢ إذا كان ق(س) = س<sup>٢</sup> + ٧ ، هـ(س) = ٣ - ٢ س ، أجد:

أ ( ق + هـ ) (١)

ب (  $\frac{ق}{هـ}$  ) (س)

ج  $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$

د ( ق × هـ ) (٢)

هـ ق (٢) × هـ (٢)

و ( س<sup>٢</sup> × ق(س) ) (٢-)

٣ إذا كان ( ق × هـ ) (٧) = ١٢ ، ق(٧) = ٣ ، ق(٧) = ٦ ، هـ(٧) = ٣ أجد هـ (٧)

٤ إذا كان ( ق ÷ هـ ) (٩) = ٣ ، ق(٩) = ٥ ، ق(٩) = ١٢- ، هـ(٩) = ٣- أجد هـ (٩)

أجد هـ (٩) ، علماً بأن هـ(س) ≠ صفر

٥ إذا كان ق(س) = س<sup>٢</sup> + ٦ س - ٥ ، وكان ق(٣) = ٠ ، فما قيمة الثابت ؟

٦ إذا كان ق(س) = س<sup>٢</sup> - ٢ س + ٣ ، هـ(س) = س<sup>٢</sup> - ٢ ، وكان ( ق × هـ ) (١) = ٨ ، أجد قيمة الثابت أ.

٧ إذا كان ق(س) =  $\frac{س - ٥}{٦ - ٤ س}$  ، وكان ق(١) =  $\frac{١}{٢}$  ، فما قيمة الثابت ؟

## القيم القصوى للإقتران

### تعريف



يكون الاقتران  $Q(s)$  متزايداً على الفترة  $[a, b]$ ، إذا كان: لكل  $s_1 < s_2$ ، فإن  $Q(s_1) < Q(s_2)$ .  
 ويكون  $Q(s)$  متناقصاً على الفترة  $[a, b]$ ، إذا كان: لكل  $s_1 < s_2$ ، فإن  $Q(s_1) > Q(s_2)$ .  
 لأي عددين  $s_1, s_2 \in [a, b]$ .

نظرية: إذا كان  $Q(s)$  معرفاً على الفترة  $[a, b]$ ، فإن  $Q(s)$  يكون:

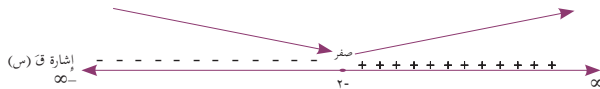
- (١) متزايداً في الفترة  $[a, b]$ ، إذا كانت  $Q(s) < 0$  لكل  $s$  في الفترة  $[a, b]$ .
- (٢) متناقصاً في الفترة  $[a, b]$ ، إذا كانت  $Q(s) > 0$  لكل  $s$  في الفترة  $[a, b]$ .
- (٣) ثابتاً في الفترة  $[a, b]$ ، إذا كانت  $Q(s) = 0$  لكل  $s$  في الفترة  $[a, b]$ .

### مثال (١)



أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $Q(s) = s^2 + 4s - 7$ ،  $s \in \mathbb{R}$

**الحل:** نجد  $Q'(s)$  فتكون:  $Q'(s) = 2s + 4$  نضع  $Q'(s) = 0$  ومنها:  $2s + 4 = 0$  إذن  $s = -2$   
 أبحث في إشارة  $Q'(s)$  في جوار  $s = -2$



من إشارة  $Q'(s)$  في الشكل المجاور، يكون الاقتران  $Q(s)$  متزايداً على الفترة  $[-2, \infty)$ ، ويكون متناقصاً في الفترة  $(-\infty, -2]$ .

### أتعلم



١.  $Q'(a) = 0$  صفراً.
٢. يغير  $Q(s)$  من سلوكه حول  $s = a$  من التزايد إلى التناقص أو العكس.

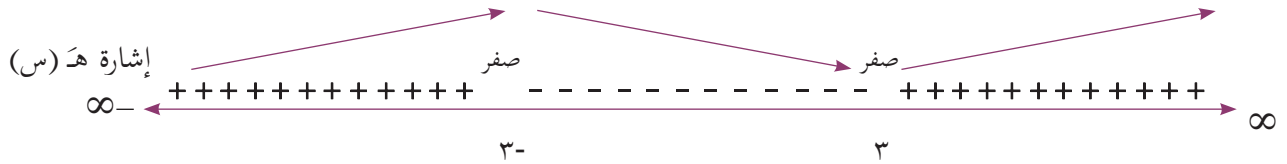
## مثال (٢)



أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران هـ(س) = س<sup>٢</sup> - ٢٧س، س ∃ ح، إن وجدت، وأحدد نوعها.

**الحل:** هـ(س) = س<sup>٢</sup> - ٢٧س = ٠ (لماذا) ؟

٣ (س<sup>٢</sup> - ٩) = ٠ ومنها (س - ٣) (س + ٣) = ٠ = س = ٣ أو س = -٣ (لماذا) ؟



من إشارة هـ(س) يتضح أن الاقتران هـ(س) قد غيّر من سلوكه، حول س = -٣ من التزايد إلى التناقص.

إذن للاقتران هـ(س) قيمة عظمى محلية عند س = -٣، وقيمتها هـ(-٣) = ٥٤. كما أن هـ(س) غيّر سلوكه من التناقص إلى التزايد حول س = ٣. إذن للاقتران هـ(س) قيمة صغرى محلية عند س = ٣ وقيمتها هـ(٣) = -٥٤.

## تمارين ومسائل ( ١ - ٤ )



١ إذا كان ق(س) = س<sup>٣</sup> + ٦س - ١، س ∃ ح، أجد:

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) على ح.

ب) القيم القصوى للاقتران ق(س)، وأحدد نوع كل منها.

٢ ما قيمة الثابت جـ في الاقتران ق(س) = ٥ - جـ س - س<sup>٢</sup>، والتي تجعل ق(٢) قيمة عظمى محلية.

٣ ما فترات التزايد والتناقص للاقتران هـ(س) = (س + ٢) × (٢ - س - ٤).

٤ أحدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ك(س) =  $\frac{١}{٣} س^٣ + ٢ س^٢ - ٥ س - ٥$ ، س ∃ ح، وما القيم القصوى (العظمى والصغرى) للاقتران ك(س)؟ وما نوع كل منها؟

٥ أبين أنه لا يوجد للاقتران ع(س) = س<sup>٢</sup> + ٢ قيم قصوى في مجاله.

## ورقة عمل

السؤال الأول: اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية:

١ إذا كان ق(س) =  $\sqrt[3]{5}$  ، فما قيمة ق(١)؟

- أ. -٤      ب. ٤      ج. ٢      د. -٤,٥

٢ إذا كان متوسط متغير الاقتران ص = ق(س) على فترة ما يساوي  $\frac{3}{4}$  وكانت  $\Delta$  ص = ٩ ، فما قيمة  $\Delta$  ص -  $\Delta$  س؟

- أ. ٤      ب. -٤      ج. ١٢      د. -٣

٣ إذا كان ق(٤) = ٧ ، ق(٤) = ٢ ، هـ(٤) = -٨ = ٢ هـ(٤) ، فما قيمة  $(\frac{ق}{هـ})(٤)$ ؟

- أ.  $\frac{٣-}{٤}$       ب.  $\frac{٦-}{٤}$       ج.  $\frac{٣-}{٨}$       د.  $\frac{٣-}{١٦}$

٤ إذا كان ق(٢) = صفر ، ق(٢) = -٧ ، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية وحيدة على مجاله فما أصغر قيمة للاقتران ق(س)؟

- أ. ٢      ب. -٢      ج. ٧      د. -٧

السؤال الثاني: أجد ق(س) فيما يأتي:

١. ق(س) = (٢-٣س٣) (٢٧س٢ - ٣س + ١) عند س = ١

٢. ق(س) =  $\sqrt[3]{س^٢ - \frac{٢}{٧-٣س}} + ٥$  ، عندما س = ١٠

# التكامل غير المحدود

## نشاط (١)



إذا كان  $ق(س)$  اقتراناً، حيث أن مشتقته  $ق'(س) = ٢س$ ، فإن قاعدة  $ق(س)$  يمكن أن تكون:

$$ق_١(س) = س^٢.$$

$$ق_٢(س) = س^٢ + \text{---}$$

$$ق_٣(س) = س^٢ + \frac{١}{٣} \quad \text{إذن الصورة العامة للاقتزان هي } ق(س) = \text{---}$$

## تعريف



إذا كان  $ق(س)$  اقتراناً مشتقته الأولى  $ق'(س)$ ، فإن التكامل غير المحدود للاقتزان  $ق(س)$  بالنسبة لـ  $س$  يساوي  $ق(س) + ج$ ، ويرمز لعملية التكامل بالرمز  $\int$ ، وبصورة عامة فإن:

$$\int ق'(س) دس = ق(س) + ج، \text{ حيث ج عدد حقيقي.}$$

## مثال (١)



إذا كان  $ق'(س) = ٦س$  فإن  $\int ق'(س) دس = ق(س) = ٣س^٢ + ج$ ، حيث ج عدد حقيقي.

## قواعد التكامل غير المحدود:

قاعدة (١):  $\int س^١ دس = س^٢ + ج$ ، حيث  $١$ ، ج عددان حقيقيان.

## مثال (٢)



أجد  $\int ٩ دس$  **الحل:**  $\int ٩ دس = ٩س + ج$

قاعدة (٢):  $\int س^n دس = \frac{س^{n+1}}{n+1} + ج$ ، حيث  $n$ ، ج عددان حقيقيان،  $n \neq -١$

### مثال (٣)



$$\left[ s^3 s = s + \frac{s^{1+3}}{1+3} = s + \frac{s^4}{4} \right]$$

### مثال (٤)



أجد قاعدة الإقتران ق(س) الذي مشتقته ق(س) =  $\sqrt[4]{s^3}$  ، علماً بأن ق(١) = ١

$$\begin{aligned} \text{ق(س)} &= \left[ \text{ق(س)} s \right] = \left[ \sqrt[4]{s^3} s \right] = s + \frac{s^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} = s + \frac{s^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} \\ \text{لكن ق(١)} &= ١ ومنها ج = \frac{3}{7} . \text{اذن قاعدة الاقتران ق(س)} = \frac{3}{7} + \frac{s^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} \\ \text{ق(س)} &= \frac{3}{7} + \sqrt[4]{s^7} \frac{4}{7} \end{aligned}$$

قاعدة (٣): إذا كان ق(س) ، ه(س) إقترانين قابلين للتكامل فإن:

$$\left[ \text{ق} \pm \text{ه} \right] s = \text{ق(س)} s \pm \text{ه(س)} s$$

### مثال (٥)



أجد  $\left[ s^3 s \right]$

**الحل:**  $\left[ s^3 s \right] = \left[ s^3 s + s s \right]$

$$= s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{4}$$

قاعدة (٤): إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل، وكان ع(س) = ك. ق(س)، حيث ك عدد حقيقي، ك ≠ ٠،

فإن:  $\left[ \text{ع(س)} s \right] = \text{ك. ق(س)} s = \text{ك. ق(س)} s$

## مثال (٦)



أحسب:  $\left[ {}^6_2 s \right]$

الحل:  $\left[ {}^6_2 s \right] = \left[ {}^6_2 s^2 \right]$

$$= \frac{s^2}{3} \times 6 + 2s = 2s^2 + 2s$$

## تمارين ومسائل (١ - ٥)



أحسب كلاً من التكمالات الآتية:

(ج)  $\left[ \sqrt[7]{s} \right]$

(ب)  $\left[ s^{\frac{2}{5}} \right]$

(أ)  $\left[ (s^3 + s^2 - s - 5) \right]$

(و)  $\left[ (s^{4002}) \right]$

(هـ)  $\left[ (s^6 + s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1) \right]$

(د)  $\left[ (s^6 + \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2}) \right]$

٢ إذا كان  $Q(s) = (s^3 + s^2 - s - 5)$ ، أجد  $Q(1)$ .

٣ إذا كان  $Q(s) = s^3 + s^2 + s + 1$ ، أجد  $Q(s)$ .

٤ إذا كان  $V = (s^3 + s^2)$ ، أجد  $\frac{dV}{ds}$ .

# التكامل المحدود

## أولاً: التكامل المحدود

### تعريف

التكامل المحدود: إذا كان  $q(s)$  اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:  $\int_a^b q(s) ds = Q(s) \Big|_a^b = Q(b) - Q(a)$ ، حيث  $a$ : الحد الأدنى،  $b$ : الحد الأعلى،  $a, b$  عدنان حقيقيان.

### مثال (١)

أحسب قيمة:  $\int_0^2 (s^2 + 5) ds$

الحل:  $\int_0^2 (s^2 + 5) ds = \left[ \frac{s^3}{3} + 5s \right]_0^2 = \left( \frac{8}{3} + 10 \right) - (0) = 14\frac{2}{3}$

### مثال (٢)

إذا كانت  $v = \int_0^3 s^2 ds$ ، فإن  $\frac{dv}{ds} = ?$  (لماذا؟).  
الحل:  $\int_0^3 \frac{dv}{ds} ds = \int_0^3 s^2 ds = v \Big|_0^3 = v(3) - v(0) = v(3) - 0 = v(3)$  (لماذا؟)

### أتعلم

مشتقة التكامل المحدود تساوي صفرًا دائماً.

### مثال (٣)



إذا كان  $\int_b^6 (4s + 3) ds = 90$  فما قيمة الثابت ب؟

**الحل:**  $\int_b^6 (4s + 3) ds = (2s^2 + 3s) \Big|_b^6$  (لماذا؟)  $= (2(6)^2 + 3(6)) - (2b^2 + 3b)$

$$90 = (2(6)^2 + 3(6)) - (2b^2 + 3b)$$

$$90 = (2(6)^2 + 3(6)) - (2b^2 + 3b) \quad \text{إذن: } 0 = 2b^2 + 3b \quad \text{أو} \quad b = \frac{-3}{2} \quad \text{(لماذا؟)}$$

ملاحظة: تنطبق جميع قواعد التكامل غير المحدود على التكامل المحدود.

### ثانياً: خصائص التكامل المحدود

#### خاصية (١)



$$\int_b^b q(s) ds = 0 \quad \text{صفر، حيث: } b \text{ عدد حقيقي}$$

#### مثال (٤)



$$\int_3^3 (4 - s) ds = 0 \quad \text{صفر، لأن الحد الأعلى يساوي الحد الأدنى.}$$

#### خاصية (٢)



$$\int_m^b q(s) ds = \int_m^p q(s) ds + \int_p^b q(s) ds$$

### مثال (٥)



إذا كان  $\int_1^4 (س) ق س = ٩$  فما قيمة  $\int_1^4 (٢ق(س) + ٧) س$  ؟

**الحل:**  $\int_1^4 (٢ق(س) + ٧) س = \int_1^4 ٢ ق(س) س + \int_1^4 ٧ س$

$$= ٢ \int_1^4 ق(س) س + \int_1^4 ٧ س$$

$$= (٢-)(٩) + (٧-)(٢٨) \quad (\text{لماذا؟})$$

$$= ١٨- - ٢١ = ٣٩-$$

### خاصية (٣)



إذا كان  $\int_a^b ق(س) س$  معروفاً على الفترة  $[أ، ب]$ ، وكان  $ج$  عدد حقيقي بحيث  $أ < ج < ب$ ، فإن:

$$\int_a^b ق(س) س = \int_a^ج ق(س) س + \int_ج^ب ق(س) س . \text{ وتسمى هذه الخاصية خاصية الإضافة.}$$

### مثال (٦)



إذا كان  $\int_2^3 ق(س) س = ٢$ ، وكان  $\int_2^6 ق(س) س = ٤$ ، فما قيمة  $\int_3^6 ق(س) س$  ؟

**الحل:**  $\int_3^6 ق(س) س = \int_2^6 ق(س) س - \int_2^3 ق(س) س$

$$= ٤ - ٢ = ٢$$

$$\text{اذن: } \int_3^6 ق(س) س = \int_2^6 ق(س) س - \int_2^3 ق(س) س = ٤ - ٢ = ٢$$

## تمارين ومسائل ( ٦ - ١ )



١ أحسب كل من التكاملات التالية:

$$\int_{-2}^1 (1 + s) \, ds \quad \text{ب) } \int_2^0 (s^2 - 7) \, ds \quad \text{ج) } \int_1^4 (s + \sqrt{s}) \, ds$$

٢ إذا كان  $\int_{-2}^2 (s) \, ds = s^3 - 2s^2 + s + ج$ ، فما قيمة  $\int_{-2}^2 (s) \, ds$ ؟

٣ إذا كان  $\int_1^0 (3s) \, ds = ١٢$ ، ما قيمة  $\int_0^1 (س + ٢س - ١) \, ds$ ؟

٤ إذا كان  $\int_3^0 (س + ٢) \, ds = ١٢$ ، فما قيمة الثابت ب؟

٥ إذا كان  $\int_{-1}^0 ٦س \, ds = \text{صفر}$ ، فما قيمة/قيم الثابت ج؟

٦ إذا كان  $\int_{-1}^0 (س) \, ds = ١٣$ ،  $\int_0^{-1} (س) \, ds = ٧$ ، فما قيمة:  $\int_{-1}^0 (٢ق(س) - ه(س)) \, ds$ ؟

٧ إذا كان  $\int_2^7 (س) \, ds = ٣$ ، وكان  $\int_3^7 (س) \, ds = -٩$ ، فما قيمة  $\int_2^3 (س) \, ds$ ؟

# تمارين عامة

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة:

١. إذا كان  $ق(س) = \frac{٢}{س}$  ،  $س \neq ٠$  ، فما قيمة  $ق(١)$ ؟

- أ- ٨ (ب) ٨ (ج) ٢ (د) -٢

٢. إذا كان متوسط التغير في الاقتران  $ق(س)$  يساوي  $\frac{٣}{٢}$  ، وكان  $\Delta س = ٦$  ، فما قيمة  $\Delta ص$  ؟

- أ- ٩ (ب) ٣ (ج) ١٨ (د) ٦

٣. إذا كان  $ق(س) = (١-س٢)$  (٢س) ؛ فما قيمة  $ق(١)$  ؟

- أ- ٨ (ب) ١٠ (ج) ١٨ (د) -٧

٤. إذا كان  $ق(س) = \frac{١ + س٣}{س - ٢}$  ،  $س \neq ٢$  ، فما قيمة  $ق(٣)$  ؟

- أ- ٣٧ (ب) -٣٧ (ج) ١٠ (د) ١

٥. إذا كان  $ق(٧) = -٥$  ،  $هـ(٧) = ٢$  ،  $ق(٧) = ٣$  ،  $هـ(٧) = -١$  فما قيمة  $(٢ق٣ \times هـ٧)$  ؟

- أ- ٦٦ (ب) -٦ (ج) ٦ (د) -١٨

٦. إذا كان للاقتران  $ق(س)$  قيمة عظمى محلية عند النقطة  $(١٠، ٥)$  ، فما قيمة  $ق(-١٠)$  ؟

- أ- ٥ (ب) -١٠ (ج) صفر (د) ٣

٧. إذا كان  $ق(س) = س٥ - س٣ - س٤ + ج$  ، فما قيمة  $ق(٢)$  ؟

- أ- ١٢ (ب) ٤ (ج) -٢ (د) ٨

٨. إذا كان  $Q(s) = \int_1^9 (5s^2 + 3s - 2) ds$ ، فما قيمة  $Q(8)$ ؟

- (أ) ٢٤ (ب) ٤٤ (ج) صفر (د) ٢

٩. إذا كان  $\int_0^7 Q(s) ds = 6$ ،  $\int_0^1 Q(s) ds = 4$ ، فما قيمة  $\int_1^7 (3Q(s) + 2) ds$ ؟

- (أ) ٣٢ (ب) ٩ (ج) ٣٣ (د) ٣

١٠. إذا كان  $Q(s) = \int_3^0 (2s - 6) ds$ ، فما قيمة  $Q(4)$ ؟

- (أ) صفر (ب) ٥ (ج) ٣ (د) -٤

السؤال الثاني: إذا كان  $Q(s) = 3s - 6$ ، وكانت  $Q(2) =$  صفر، أجد قيمة الثابت ج؟

السؤال الثالث: إذا كان  $Q(s) = \int_b^0 (2s + 1) ds = 24$ ، أجد قيمة / قيم الثابت ب ؟

السؤال الرابع: إذا كان  $H(s) = 4s^2 - 8s + 1$ :

(أ) فما فترات التزايد والتناقص للاقتران  $H(s)$ ؟

(ب) ما القيم القصوى المحلية للاقتران  $H(s)$ ، وما نوعها؟

## إختبار ذاتي

السؤال الأول: اختر رمز الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية:

١ إذا كان  $\frac{٤س - ١}{٥س + ٥} = (س)$  ، فما قيمة  $\frac{١}{٥}$  ؟

أ.  $\frac{٦-}{٥}$  . ب.  $\frac{٦}{٥}$  . ج.  $\frac{٦-}{٢٥}$  . د. صفر

٢ إذا كان  $ك(س) = ق(س) - هـ(س)$  ، وكان  $ك(٩) = ٧$  ،  $ق(٩) = ٢$  فما قيمة  $هـ(٩)$  ؟

أ. ١- . ب. ١ . ج. ٥- . د. ٥

٣ إذا كان  $ص = \left[ \frac{٢}{٤} (٩س + ٧) دس \right]$  فما قيمة  $\frac{دص}{دس}$  ؟

أ. ٤ . ب. ٣٦ . ج. ١٠٨ . د. صفر

٤ إذا كان  $\left[ \frac{٧}{٢} ق(س) دس \right] = ١٨-$  ، وكان  $\left[ \frac{٢}{١} ق(س) دس \right] = ٩$  ، ما قيمة  $\left[ \frac{٧}{١} ق(س) دس \right]$  ؟

أ. ٦- . ب. ٦ . ج. ٩- . د. ٩

٥ إذا كان  $\left[ \frac{٨}{٤} هـ(س) دس \right] = ٣٠$  فما قيمة  $\left[ \frac{٨}{٤} ق(س) دس + (٣ - س) دس \right]$  ؟

أ. ٢٤ . ب. صفر . ج. ١٢ . د. ٧

٦ إذا كان  $م = \left[ \frac{٩}{٢-} ق(س) دس \right]$  ، وكان  $ق(٢-) = ١٥-$  ،  $ق(٩) = ٣$  فما قيمة  $م$  ؟

أ. صفر . ب. ١٨- . ج. ١٨ . د. ١٢-

٧ إذا كان  $ق(س) = ٤س - ٥$  ،  $هـ(١) = ٣$  ،  $هـ(١) = ٨-$  ، فما قيمة  $(ق \times هـ٢)(١)$  ؟

أ. ٦١- . ب. ٦٤ . ج. ٨ . د. ٦٧-

٨ ما قيمة  $\left[ \frac{٣}{٢} \pi دس \right]$  ؟

أ.  $\pi$  . ب.  $\pi٥$  . ج. صفر . د. ١

٩ ما قيمة  $\int_9^9 \frac{3s^2 - 9s}{\sqrt{s^2 - 2}} ds$  ؟

د. ٥٤

ج. ٩

ب. صفر

أ. ٩

السؤال الثاني: إذا كان  $\int_1^2 (3 - s) ds = 3 - 7s + 2s^2 - s^3$  ، فما قيمة  $\int_1^2 (3 - s) ds$  ؟

السؤال الثالث: إذا كان  $\int_1^4 (2 - s) ds = 9$  ،  $\int_1^4 (2 - s) ds = 8$  ، فما قيمة  $\int_1^4 (2 - s) ds + \int_1^4 (2 - s) ds$  ؟

السؤال الرابع: إذا كان متوسط تغير الإقتران  $Q(s)$  على  $[7, 9]$  يساوي ٥- ، فما قيمة متوسط تغير الإقتران  $K(s) = 2 + Q(s)$  على  $[7, 9]$  علماً بأن  $Q(7) = 40$  ؟

السؤال الخامس: يوضح الرسم أدناه إشارة  $Q(s)$  اعتمد عليه في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ. متى يكون الإقتران  $Q(s)$  متزايداً؟

ب. متى يكون للإقتران  $Q(s)$  قيمة صغرى محلية في مجاله؟

ج. هل تعتبر النقطة  $(3, Q(3))$  نقطة قيمة صغرى محلية للإقتران  $Q(s)$  ؟ لماذا؟

