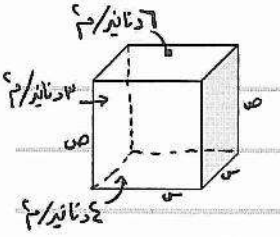
الوحدة الثالثة

تطبيقات عملية على القيم القصوى

ورقة عمل رقم (٢٣)

سنة ١٩٧٨: يراد عمل خزان معدني مقفل على هيئة متوازي مستطيلات سعته: ٤٥ م^3 بحيث تكون كل من قاعدتيه العليا والسفلى مربعة الشكل، فإذا كانت تكاليف المتر المربع الواحد من القاعدة السفلى ٤ دنانير ومن القاعدة العليا ٦ دنانير لكل متر مربع، ومن الجوانب ٣ دنانير لكل متر مربع، أوجد أبعاد هذا الخزان حتى تكون تكاليفه أقل ما يمكن وما هي تكاليفه عندئذ ؟



الحل:

ع = ٤٥ م^3

ت = ٤ × القاعدة السفلى + ٦ × القاعدة العليا + ٣ × الجوانب الأربعة

$\Leftarrow$ ن = ٤ س^2 + ٦ س^2 + ٣ × ٤ س ص

$\Leftarrow$ ت = ١٠ س^2 + ١٢ س ص ← ع = س^2 ص ← ٤٥ = س^2 ص

$\Downarrow$

$\Leftarrow$ ص = $\frac{٤٥}{س^2}$

$\Leftarrow$ ت = ١٠ س^2 + ١٢ س × $\frac{٤٥}{س^2}$ ← ت = ١٠ س^2 + $\frac{٥٤٠}{س}$

ت$'$ = ٢٠ س + $\frac{-٥٤٠}{س^2}$ ← ت$'$ = $\frac{٢٠ س^3 - ٥٤٠}{س^2}$

جذور المشتقة: ت$'$ = ٠ ← ٢٠ س^3 = ٥٤٠ ← س^3 = ٢٧

$\Leftarrow$ س = ٣ متر

عند س = ٣، تكون التكاليف أقل ما يمكن.

أبعاد الخزان: طول ضلع القاعدتين: س = ٣ متر

الارتفاع: ص = $\frac{٤٥}{س^2}$ = $\frac{٤٥}{٩}$ = ٥ متر ← ص = ٥ متر

التكاليف عندئذ: ت = ١٠ س^2 + ١٢ س ص

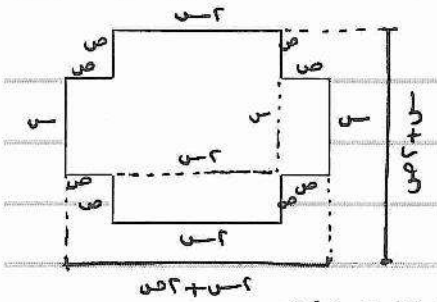
$\Leftarrow$ ن = ١٠ × ٣^2 + ١٢ × ٣ × ٥

$\Leftarrow$ ن = ٩٠ + ١٨٠ = ٢٧٠

$\Leftarrow$ ت = ٢٧٠ دينار

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

سنة ١٩٧٩: صندوق من الصفيح على هيئة متوازي مستطيلات مفتوح من أعلى فإذا كان طول قاعدته مثلي عرضها وكان حجمه ٢٨٨ سم^3، فأوجد أبعاد هذا الصندوق بحيث يكون مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن ؟



الحجم ع = مساحة القاعدة × الارتفاع

ع = (٢ س × س) × ص ← ٢٨٨ = ٢ س^2 ص

$\Leftarrow$ ص = $\frac{١٤٤}{س^2}$

مساحة المجسم المقفول = مساحة قطعة الصفيح − مساحة القطع المحذوفة

م = (٢ س + ٢ ص)(س + ٢ ص) − ٤ ص^2

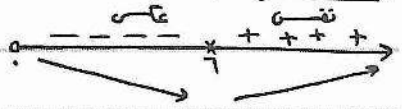
$\Leftarrow$ م = ٢ س^2 + ٤ س ص + ٢ س ص + ٤ ص^2 − ٤ ص^2

$\Leftarrow$ م = ٢ س^2 + ٦ س ص ولكن ص = $\frac{١٤٤}{س^2}$.

$\Leftarrow$ م = ٢ س^2 + ٦ س × $\frac{١٤٤}{س^2}$ ← م = ٢ س^2 + $\frac{٨٦٤}{س}$

م$'$ = ٤ س + $\frac{-٨٦٤}{س^2}$ ← م$'$ = $\frac{٤ س^3 - ٨٦٤}{س^2}$

جذور المشتقة: م$'$ = ٠ ← ٤ س^3 − ٨٦٤ = ٠ ← س = ٦ سم



عند س = ٦، تكون مساحة الصفيح اللازم لصنعه أصغر ما يمكن

أبعاد الصندوق:

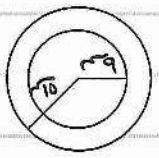
القاعدة: طولها = ٢ س = ٢ × ٦ = ١٢ سم

عرضها = س = ٦ سم

الارتفاع: ص = $\frac{١٤٤}{س^2}$ = $\frac{١٤٤}{٣٦}$ = ٤ سم

سنة ١٩٨٠ + سنة ٢٠٠١: دائرتان لهما نفس المركز م ونصف قطر الصغرى = ٩ سم ونصف قطر الكبرى = ١٥ سم ، فإذا أخذ نصف قطر الصغرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٥ سم / ث بينما أخذ نصف قطر الكبرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره ٤ سم / ث ، فأوجد أكبر مساحة ممكنة بين الدائرتين بحيث لا يتعدى نصف قطر الصغرى عن نصف قطر الكبرى ؟

الحل:



نق الصغرى = ٩ ـــ

نق الكبرى = ١٥ + ٤ ن سم

المساحة بين الدائرتين = مساحة الدائرة الكبرى - مساحة الدائرة الصغرى

$$م = \pi(١٥+٤ن)^٢ - \pi(٩+٥ن)^٢$$

$$م' = ٢\pi(١٥+٤ن)\times٤ - ٢\pi(٩+٥ن)\times٥$$

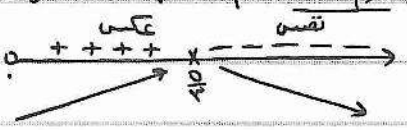
$$م' = ٨\pi(١٥+٤ن) - ١٠\pi(٩+٥ن)$$

$$م' = \pi(١٢٠+٣٢ن) - \pi(٩٠+٥٠ن)$$

$$م' = \pi(١٢٠+٣٢ن-٩٠-٥٠ن)$$

$$م' = \pi(٣٠-١٨ن)$$

جذور المشتقة: $م' = ٠ \Leftarrow ٣٠ - ١٨ن = ٠ \Leftarrow ن = \frac{٥}{٣}$ ث



عند $ن = \frac{٥}{٣}$ ث ، تكون المساحة بين الدائرتين أكبر ما يمكن

وعندئذ تكون قيمة هذه المساحة هي:

$$م = \pi(١٥+٤\times\frac{٥}{٣})^٢ - \pi(٩+٥\times\frac{٥}{٣})^٢$$

$$م = \pi\left((\frac{٦٥}{٣})^٢ - (\frac{٥٢}{٣})^٢\right)$$ ← فرق بين مربعين

$$م = \pi\left(\frac{٦٥-٥٢}{٣}\right)\left(\frac{٥٢+٦٥}{٣}\right)$$

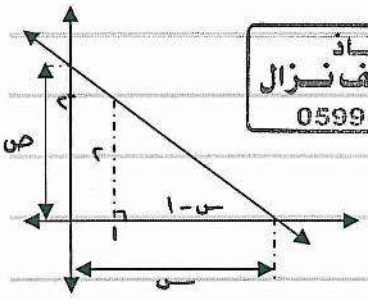
$$م = \pi \times \frac{١٣}{٣} \times \frac{١١٧}{٣}$$

$$م = \pi \times ١٣ \times ١٣$$

$$\Leftarrow م = ١٦٩\pi \text{ سم}^٢$$

سنة ١٩٨١ : مستقيم يمر بالنقطة الثابتة (١ ، ٢) ويقطع محور السينات والصادات في النقطتين م ، ب ، أوجد أصغر مساحة ممكنة للمثلث وم ب الواقع في الربع الأول (حيث و نقطة الأصل) ؟

الحل:



الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$$\Leftarrow م = \frac{س}{٢} \times ص$$

من تشابه المثلثات: $\frac{ص}{س} = \frac{٢}{س-١}$

$$\Leftarrow ص = \frac{٢س}{س-١}$$

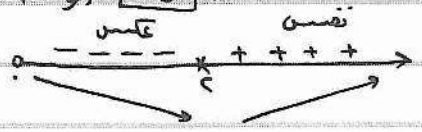
$$\Leftarrow م = \frac{س}{٢} \times \frac{٢س}{س-١} \Leftarrow م = \frac{س^٢}{س-١}$$

$$م' = \frac{(س-١)\times٢س - س^٢\times١}{(س-١)^٢} = \frac{س^٢-٢س}{(س-١)^٢}$$

جذور المشتقة: $م' = ٠ \Leftarrow س^٢ - ٢س = ٠$

$$\Leftarrow س(س-٢) = ٠$$

$\Leftarrow س = ٠$ مرفوضة أو $س = ٢$

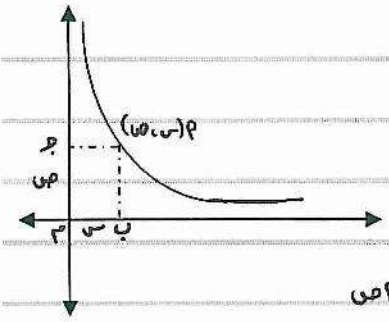


عند س = ٢ ، تكون مساحة المثلث أصغر ما يمكن .

وهي: $م = \frac{س^٢}{س-١} = \frac{٢^٢}{٢-١} =$ ٤ وحدات مربعة

سنة ١٩٨٢: من النقطة أ (س،ص) الواقعة على منحنى ص = $\frac{١}{س}$ ، س > ٠ رسم العمودان أب ، أجـ على المحورين الإحداثيين ، أوجد بعدي المستطيل أ ب م جـ (حيث م نقطة الأصل) بحيث يكون محيطه أصغر ما يمكن ؟

الحل:



المحيط ط = ٢س + ٢ص

النقطة (س، ص) ∈ المنحنى ص = $\frac{١}{س}$.

لذلك فإن المحيط $ط = ٢س + \frac{٢}{س}$ (بتعويض ص بـ $\frac{١}{س}$)

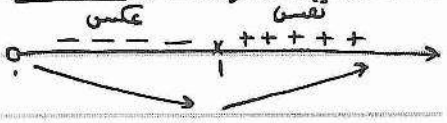
$ط' = ٢ + \frac{-٢}{س^{٢}} \Leftarrow ط' = \frac{٢س^{٢} - ٢}{س^{٢}}$

جذور المشتقة: ط' = ٠ ⇐ ٢س² - ٢ = ٠

⇐ ٢س² = ٢ ⇐ س² = ١

⇐ س = ± ١

س = - ١ مرفوض ⇐ س = + ١



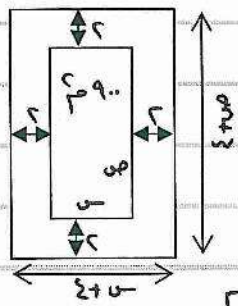
عند س = ١ يكون المحيط أصغر ما يمكن

بعدي المستطيل: س = ١

ص = $\frac{١}{س} = \frac{١}{١} = ١ \Leftarrow$ ص = ١

سنة ١٩٨٣ : يراد إنشاء حديقة مستطيلة الشكل مساحتها ٩٠٠ متر مربع وإحاطتها من جميع الجوانب بطريق خارجي منتظم عرضه ٢ متر. أوجد أبعاد الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق أقل ما يمكن ؟

الحل:



مساحة الحديقة = ٩٠٠ م²

⇐ س ص = ٩٠٠ ⇐ $ص = \frac{٩٠٠}{س}$

المساحة الكلية: م = (س + ٤)(ص + ٤)

$م = (س + ٤)(\frac{٩٠٠}{س} + ٤)$

$م' = (س + ٤) \times \frac{-٩٠٠}{س^{٢}} + (\frac{٩٠٠}{س} + ٤) \times ١$

$م' = \frac{-٩٠٠}{س} + \frac{-٣٦٠٠}{س^{٢}} + \frac{٩٠٠}{س} + ٤ = ٤ - \frac{٣٦٠٠}{س^{٢}}$

$م' = \frac{٤س^{٢} - ٣٦٠٠}{س^{٢}}$

جذور المشتقة: م' = ٠ ⇐ ٤س² - ٣٦٠٠ = ٠

⇐ س² = ٩٠٠ ⇐ س = ٣٠

عند س = ٣٠ ، تكون أبعاد الحديقة التي تجعل المساحة الكلية للحديقة والطريق أقل ما يمكن .

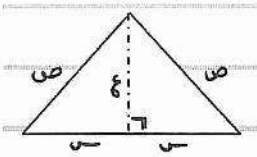
أبعاد الحديقة: س = ٣٠ متر

ص = $\frac{٩٠٠}{س} = \frac{٩٠٠}{٣٠}$ متر ⇐ ص = ٣٠ متر

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

سنة ١٩٨٤ ، إكمال ٢٠١١: سلك طوله ١٢ سم ، ثني ليكون مثلثاً متساوي الساقين، أوجد طول أضلاعه ليكون مساحته أكبر ما يمكن ؟

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812



مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$\Rightarrow م = س\ ع$.

حسب فيثاغورس $\Rightarrow ص^2 = س^2 + ع^2 \Rightarrow ع^2 = ص^2 - س^2$

$\Rightarrow ع = \sqrt{ص^2 - س^2}$

$\therefore \boxed{م = س\sqrt{ص^2 - س^2}}$

طول السلك = ١٢ سم $\Rightarrow$ محيط المثلث = ١٢ سم

$\Rightarrow 2س + 2ص = 12 \Rightarrow س + ص = 6$

$\Rightarrow \boxed{ص = 6 - س}$

$م = س\sqrt{(6-س)^2 - س^2}$

$\Rightarrow م = س\sqrt{36 - 12س + س^2 - س^2}$

$\Rightarrow \boxed{م = س\sqrt{36 - 12س}}$

$م' = س \times \frac{-12}{2\sqrt{36-12س}} + 1 \times \sqrt{36-12س}$

$\Rightarrow م' = \frac{-6س + 36 - 12س}{\sqrt{36-12س}} \Leftarrow \boxed{م' = \frac{36 - 18س}{\sqrt{36-12س}}}$

جذور المشتقة ، $م' = 0 \Rightarrow 36 - 18س = 0$.

$\Rightarrow \boxed{س = 2}$

عند س = ٢ ، تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن .

أطوال أضلاع المثلث:

القاعدة $2س = 2 \times 2 = 4$ سم .

الضلعين الآخرين : $ص = 6 - س = 6 - 2 = 4$ سم .

∴ أطوال أضلاع المثلث : ٤ ، ٤ ، ٤ سم .

سنة ١٩٨٥ : ١. جسم يسير في خط مستقيم وفقاً للعلاقة $ف = ن^4 - 12ن^3 + 8ن^2 - 6ن + 5$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني، أوجد أقل تسارع ممكن لهذا الجسم ؟

الحل:

$ف = ن^4 - 12ن^3 + 8ن^2 - 6ن + 5$

نجد قاعدة التسارع بحساب المشتقة الثانية :

$\frac{ف'}{ن} = 4ن^3 - 36ن^2 + 16ن - 6$

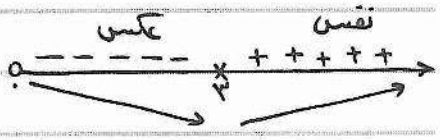
$\boxed{ت = \frac{ف''}{ن} = 12ن^2 - 72ن + 16}$

$\boxed{ت' = 24ن - 72}$

جذور المشتقة:

$ت' = 0 \Rightarrow 24ن - 72 = 0$

$\Rightarrow \boxed{ن = 3ث}$



عند ن = ٣ث ، يكون التسارع أقل ما يمكن .

وعندئذ يكون :

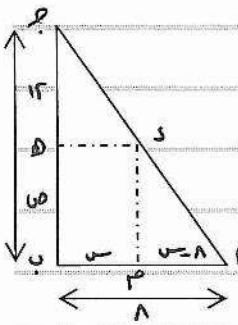
$ت = 12(3)^2 - 72(3) + 16$

$\Rightarrow ت = 108 - 216 + 16$

$\Rightarrow \boxed{ت = -92\ م/ث^2}$

سنة ١٩٨٥: ٢. أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب بحيث أنّ: أ ب = ٨ سم ، ب ج = ١٢ سم . أخذت النقطة د على الوتر أ ج وأنزل منها العمودان د هـ ، د م على الضلعين ب ج ، أ ب على الترتيب، أوجد طولي هذين العمودين اللذين يجعلان مساحة المستطيل د هـ ب م أكبر ما يمكن ؟

الحل:



مساحة المستطيل = س ص

$\Leftarrow$ م = س ص

من تشابه المثلثات :

$\frac{١٢}{٨} = \frac{ص}{٨-س}$

$\Leftarrow ١٢(٨-س) = ٨ص \Leftarrow ص = \frac{١٢}{٨}(٨-س)$

$\Leftarrow ص = ١٢ - \frac{١٢}{٨}س$

$\Leftarrow$ ص = ١٢ − $\frac{٣}{٢}$ س

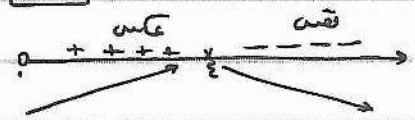
م = س ص $\Leftarrow$ م = س $(١٢ - \frac{٣}{٢}س)$

$\Leftarrow$ م = ١٢ س − $\frac{٣}{٢}س^{٢}$

مَ = ١٢ − ٣ س

جذور المشتقة: مَ = ٠ $\Leftarrow$ ١٢ − ٣س = ٠ .

$\Leftarrow$ س = ٤



عند س = ٤ ، تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن .

طول د هـ = س = ٤ سم .

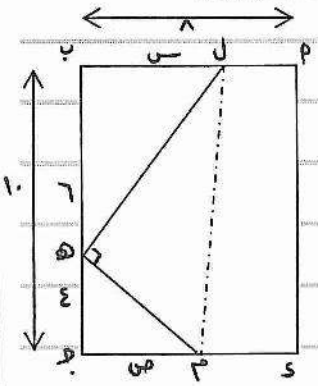
طول العمود د م = ص = ٤ سم .

طول العمود د م = ص = ١٢ − $\frac{٣}{٢}$ × ٤ = ١٢ − ٦ = ٦ سم

سنة ١٩٨٦: أ ب ج د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب ج = ١٠ سم ، هـ نقطة على ب ج بحيث ب هـ = ٦ سم، أخذت نقطتان ل، م على أ ب ، د ج بحيث كان قياس $\measuredangle$ ل هـ م = ٩٠° .

فإذا كان طول ل ب = س سم ، م ج = ص سم ، فأوجد س ، ص اللتين تجعلان مساحة المضلع أ ل هـ م د أكبر ما يمكن ؟

الحل:



الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

مساحة المضلع أ ل هـ م د = مساحة المستطيل − مساحتي المثلثين

م = ٨٠ − $(\frac{٦}{٢}س + \frac{٤}{٢}ص)$

م = ٨٠ − (٣ س + ٢ ص)

$\Leftarrow$ م = ٨٠ − ٣ س − ٢ ص

المثلثان ل ب هـ ، م ج هـ متشابهان لأن $\measuredangle$ ل = $\measuredangle$ م هـ ج ،

$\measuredangle$ ب = $\measuredangle$ ج ، $\measuredangle$ ب هـ ل = $\measuredangle$ م

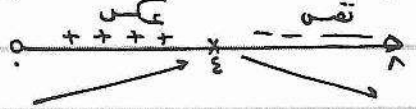
وعليه فإن : $\frac{س}{٦} = \frac{٤}{ص} \Leftarrow$ ص = $\frac{٢٤}{س}$

$\therefore$ م = ٨٠ − ٣ س − ٢ × $\frac{٢٤}{س}$ $\Leftarrow$ م = ٨٠ − ٣س − $\frac{٤٨}{س}$

مَ = − ٣ − $\frac{٤٨}{س^{٢}}$ $\Leftarrow$ مَ = − ٣ + $\frac{٤٨}{س^{٢}}$

$\Leftarrow$ مَ = $\frac{٤٨ - ٣س^{٢}}{س^{٢}}$

مَ = ٠ $\Leftarrow$ ٤٨ − ٣ س^{٢} = ٠ $\Leftarrow$ س^{٢} = ١٦ $\Leftarrow$ س = ٤ سم .

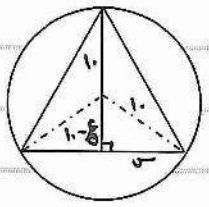


عند س = ٤ ، تكون مساحة المضلع أكبر ما يمكن

ص = $\frac{٢٤}{س}$ = $\frac{٢٤}{٤}$ = ٦ $\Leftarrow$ ص = ٦ سم

سنة ١٩٨٧: ١. أوجد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها: ١٠ سم ؟

الحل:



مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$م = س\ ع$

حسب فيثاغورس ← $(١٠)^٢ = (ع - ١٠)^٢ + س^٢$

← $١٠٠ = ع^٢ - ٢٠ع + ١٠٠ + س^٢$

← $س^٢ = ٢٠ع - ع^٢$ ← $س = \sqrt{٢٠ع - ع^٢}$

$م = س\ ع$ ← $م = ع\sqrt{٢٠ع - ع^٢}$

$م' = ع \times \frac{٢٠ - ٢ع}{٢\sqrt{٢٠ع - ع^٢}} + \sqrt{٢٠ع - ع^٢} \times ١$

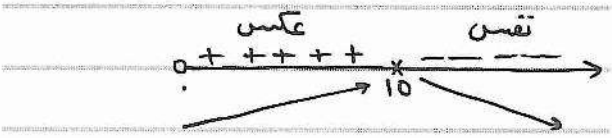
$م' = \frac{١٠ع - ع^٢ + ٢٠ع - ع^٢}{\sqrt{٢٠ع - ع^٢}}$ ← $م' = \frac{٣٠ع - ٢ع^٢}{\sqrt{٢٠ع - ع^٢}}$

جذور المشتقة: $م' = ٠$ ⇐ $٣٠ع - ٢ع^٢ = ٠$

⇐ $٢ع(١٥ - ع) = ٠$

إما $ع = ٠$ مرفوضة

أو $ع = ١٥$ سم



عند ع = ١٥ سم ، تكون مساحة أكبر مثلث يمكن رسمه داخل الدائرة .

وعليه :

$م = ع\sqrt{٢٠ع - ع^٢}$ ⇐ $م = ١٥\sqrt{٢٠ \times ١٥ - ١٥^٢}$

⇐ $م = ١٥\sqrt{٣٠٠ - ٢٢٥}$

⇐ $م = ١٥\sqrt{٧٥}$

⇐ $م = ٣\sqrt{٧٥}$ سم^٢

سنة ١٩٨٧: ٢. جسم يتحرك في خط مستقيم حسب العلاقة $ف = ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٨٠ن$ حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني . أوجد أقل سرعة ممكنة لهذا الجسم ؟

الحل:

$ف = ن^٣ - ١٢ن^٢ + ٨٠ن$

نجد قاعدة السرعة:

$ع = \frac{دف}{دن} = ٣ن^٢ - ٢٤ن + ٨٠$

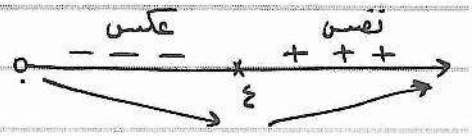
$ع' = ٦ن - ٢٤$

جذور المشتقة:

$ع' = ٠$ ⇐ $٦ن - ٢٤ = ٠$

⇐ $٦ن = ٢٤$

⇐ $ن = ٤$ ث



عند ن = ٤ ث ، تكون السرعة أقل ما يمكن .

وعليه:

$ع = ٣ن^٢ - ٢٤ن + ٨٠$

⇐ $ع(٤) = ٣(٤)^٢ - ٢٤(٤) + ٨٠$

⇐ $ع = ٤٨ - ٩٦ + ٨٠$

⇐ $ع = ٣٢$ م/ث

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

سنة ١٩٨٨ ، ٢٠٠٩: أوجد أقصر مسافة بين النقطة (٠ ، ٦) ومنحنى $س^2 - ص^2 = 16$ ؟

الحل: أقصر مسافة بين النقطة (٠،٦) والمنحنى $س^2 - ص^2 = 16$ هي المسافة بين (٠،٦) والنقطة (س، ص) ∈ المنحنى

المسافة بين (٠،٦) ، (س، ص):

$ف = \sqrt{(س-0)^2 + (ص-6)^2}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{س^2 + (ص-6)^2}$

$\Leftarrow \boxed{ف = \sqrt{س^2 + ص^2 - 12ص + 36}}$

ولكن $س^2 - ص^2 = 16 \Leftarrow \boxed{س^2 = 16 + ص^2}$

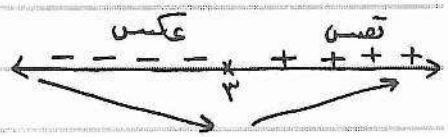
$\therefore ف = \sqrt{16 + ص^2 + ص^2 - 12ص + 36}$

$\Leftarrow \boxed{ف = \sqrt{2ص^2 - 12ص + 52}}$

$ف' = \dfrac{4ص - 12}{2\sqrt{2ص^2 - 12ص + 52}} \Leftarrow \boxed{ف' = \dfrac{2ص - 6}{\sqrt{2ص^2 - 12ص + 52}}}$

جذور المشتقة: $ف' = 0 \Leftarrow 2ص - 6 = 0$

$\Leftarrow \boxed{ص = 3}$



عند $ص = 3$ ، تكون أقصر مسافة بين النقطة (٠،٦) والمنحنى $س^2 - ص^2 = 16$.

وعندئذ تكون:

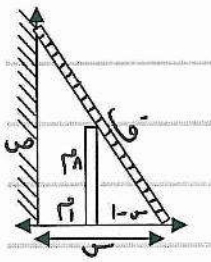
$ف = \sqrt{2ص^2 - 12ص + 52}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 52}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{18 - 36 + 52}$

$\Leftarrow \boxed{ف = \sqrt{34}}$

سنة ١٩٩٢ : جدار ارتفاعه ٨ متر ويبعد ١ متر عن بناية عالية ، أوجد طول أقصر سلم يمكن أن يصل بين الأرض والبناية بحيث يرتكز على الجدار ؟



الحل: حسب فيثاغورس:

$\boxed{ف^2 = س^2 + ص^2} \Leftarrow ف = \sqrt{س^2 + ص^2}$

من تشابه المثلثات:

$\dfrac{ص}{س} = \dfrac{8}{س-1} \Leftarrow \boxed{ص = \dfrac{8س}{س-1}}$

$ف^2 = س^2 + \left(\dfrac{8س}{س-1}\right)^2 \Leftarrow ف^2 = س^2 + \dfrac{64س^2}{(س-1)^2}$

$2ف ف' = 2س + \dfrac{(س-1)^2 \times 128س - 64س^2 \times 2(س-1) \times 1}{(س-1)^4}$

(نقسم البسط والمقام على $(س-1)$) فينتج عنه:

$2ف ف' = 2س + \dfrac{(س-1) \times 128س - 64س^2 \times 2}{(س-1)^3}$

(نقسم طرفي المعادلة على 2 ← فينتج عنه:)

$ف ف' = س + \dfrac{(س-1) \times 64س - 64س^2}{(س-1)^3}$

(نوحد المقامات ونقسم الطرفين على ف فيكون:)

$ف' = \dfrac{س(س-1)^3 + 64س^2 - 64س - 64س^2}{ف(س-1)^3}$

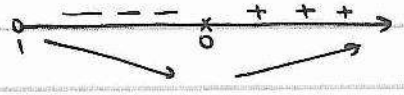
(نخرج س عامل مشترك :)

$ف' = \dfrac{س[(س-1)^3 - 64]}{ف(س-1)^3}$.

جذور المشتقة: $ف' = 0 \Leftarrow س[(س-1)^3 - 64] = 0$

إما $س = 0$ مرفوضة

أو $(س-1)^3 - 64 = 0 \Leftarrow (س-1)^3 = 64 \Leftarrow س - 1 = 4 \Leftarrow \boxed{س = 5}$



عند $س = 5$ ، يكون أقصر سلم يصل بين الأرض والبناية مرتكزاً على الجدار.

$ص = \dfrac{8س}{س-1} = \dfrac{5 \times 8}{5-1} = \dfrac{40}{4} = \boxed{10 \text{ أمتار}} \Leftarrow \boxed{ص = 10 \text{ أمتار}}$

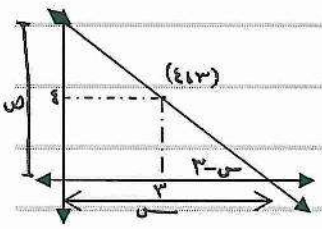
أو ن طول:

$ف = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = \boxed{5\sqrt{5} \text{ متر}}$

نزار يوسف نزال
الأستاذ
0599-334812

سنة ٢٠١١ ، ١٩٩٢: ٢. أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ويقطع من الربع الأول للمستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن ؟

الحل:



مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$\Leftarrow$ $م = \frac{س}{٢} \times ص$

من تشابه المثلثات:

$\frac{ص}{س} = \frac{٤}{س-٣} \Leftarrow$ $ص = \frac{٤س}{س-٣}$

$م = \frac{س}{٢} \times ص \Leftarrow م = \frac{س}{٢} \times \frac{٤س}{س-٣} \Leftarrow$ $م = \frac{٢س^{٢}}{س-٣}$

$م' = \frac{(س-٣)\times ٤س - ٢س^{٢} \times ١}{(س-٣)^{٢}} \Leftarrow$ $م' = \frac{٢س^{٢} - ١٢س}{(س-٣)^{٢}}$

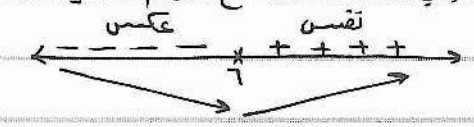
عند المستقيمة، $م' = ٠ \Leftarrow ٢س^{٢} - ١٢س = ٠$

$\Leftarrow ٢س(س-٦) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠$ مرفوضة

أو $س = ٦$

وهي نقطة تقاطعه مع محور السينات (٦،٠)



عند س=٦ تكون مساحة المثلث أصغر ما يمكن.

نجد الميل من النقطتين (٤،٣) (٠،٦)

$م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٠ - ٤}{٦ - ٣} =$ $\frac{-٤}{٣}$

معادلة المستقيم ميله $م = \frac{-٤}{٣}$ ، (٠،٦) هي:

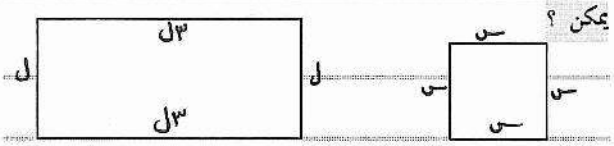
$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$\Leftarrow ص - ٠ = \frac{-٤}{٣}(س - ٦)$

$\Leftarrow ص = \frac{-٤}{٣}س + \frac{٢٤}{٣}$

$\Leftarrow$ $ص = \frac{-٤}{٣}س + ٨$

سنة ١٩٩٣: سلك طوله ٢٨ سم قطع إلى جزئين ثم ثني الجزء الأول ليكون مربعاً وثني الجزء الثاني ليكون مستطيلاً طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه أوجد طول كل من الجزئين إذا كان مجموع مساحتي المربع والمستطيل أقل ما يمكن ؟



الحل: م = مساحة المربع + مساحة المستطيل

$م = س^{٢} + ل \times ٣ل \Leftarrow$ $م = س^{٢} + ٣ل^{٢}$

طول السلك = ٢٨ سم .

طول السلك = محيط المربع + محيط المستطيل

$\Leftarrow ٢٨ = ٤س + ٢(ل + ٣ل)$

$\Leftarrow ٢٨ = ٤س + ٨ل$

$\Leftarrow ٧ = س + ٢ل \Leftarrow$ $ل = \frac{٧ - س}{٢}$

$م = س^{٢} + ٣ل^{٢} \Leftarrow م = س^{٢} + ٣\left(\frac{٧-س}{٢}\right)^{٢}$

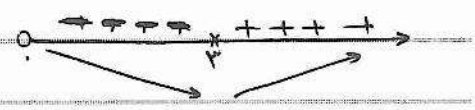
$\Leftarrow م = س^{٢} + \frac{٣}{٤} \times (٤٩ - ١٤س + س^{٢})$

$\Leftarrow م = \frac{٤س^{٢} + ١٤٧ - ٤٢س + ٣س^{٢}}{٤}$

$\Leftarrow م = \frac{٧س^{٢} - ٤٢س + ١٤٧}{٤}$

$م' = \frac{١٤}{٤}س - \frac{٤٢}{٤} \Leftarrow م' = \frac{٧}{٢}س - \frac{٢١}{٢}$

$م' = ٠ \Leftarrow \frac{٧}{٢}س - \frac{٢١}{٢} = ٠ \Leftarrow$ $س = \frac{٢١}{٧} \Leftarrow س = ٣$



عند س=٣ تكون مجموع المساحتين أقل ما يمكن.

طولي الجزئين:

الأول هو محيط المربع = ٤س = ٤ × ٣ = ١٢ سم .

الثاني هو محيط المستطيل: ٨ل = ٨ × $\frac{٧-س}{٢}$

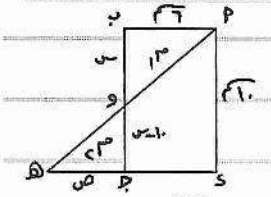
$= ٨ \times \frac{٧-٣}{٢}$

$= ٨ \times \frac{٤}{٢} =$ ١٦ سم

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-934812

سنة ١٩٩٤: ١. أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم مد الضلع د جـ على استقامته إلى هـ ووصل أ هـ ليقطع ب جـ في نقطة و، فإذا كان طول ب و = س سم وطول جـ هـ = ص سم فأوجد قيمتي س ، ص اللتين تجعلان مجموع مساحتي المثلثين أ ب و ، و جـ هـ أقل ما يمكن ؟

الحل:



مساحة المثلث الأول أ ب و = $م_1$ = نصف القاعدة × الارتفاع

$\Leftarrow م_1 = \frac{1}{2} س$ ⟸ $م_1 = 3س$

مساحة المثلث الثاني د هـ و = $م_2$ = نصف القاعدة × الارتفاع

$\Leftarrow م_2 = \frac{ص}{2}(10-س)$

مجموع مساحتي المثلثان هي : $م = م_1 + م_2$

$\Leftarrow م = 3س + \frac{ص}{2}(10-س)$

من تشابه المثلثان أ ب و ، د هـ و بسبب:

(∠أ = ∠هـ بالتبادل ، ∠أ و ب = ∠د و هـ بالرأس ، ∠ب = ∠د = ٩٠°)

فإن: $\frac{س}{6} = \frac{10-س}{ص}$ ⟸ $س ص = 6(10-س)$

$\Leftarrow ص = \frac{6(10-س)}{س}$

$\therefore م = 3س + \frac{6(10-س)}{س} \times \frac{1}{2}(10-س)$

$\Leftarrow م = 3س + \frac{3(10-س)^2}{س} = 3س + \frac{3(100-20س+س^2)}{س}$

بتوحيد المقامات وتوزيع ٣ داخل القوس:

$\Leftarrow م = \frac{3س^2 + 300 - 60س + 3س^2}{س}$ ⟸ $م = 6س - 60 + \frac{300}{س}$

$م' = 6 + \frac{-300}{س^2}$ ⟸ $م' = \frac{6س^2 - 300}{س^2}$

بفرض المشتقة: $م' = 0$ ⟸ $6س^2 - 300 = 0$ ⟸ $س^2 = 50$ ⟸ $س = \sqrt{50}$

عند $س = \sqrt{50}$ يكون مجموع مساحتي المثلثين أقل ما يمكن

$س = \sqrt{50}$ ⟸ $س = 7,07$ سم

$\Leftarrow ص = \frac{6(10-س)}{س} = \frac{6(10-7,07)}{7,07} = 2,49$ سم .

سنة ١٩٩٤: ٢. جسم يسير في خط مستقيم بحيث أنّ بعده (ف) بالأمتار بعد (ن) ثانية يعطى بالعلاقة ف = أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن فإذا كانت السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٠ ، ٢] هي ١٠ م/ث وكانت سرعة الجسم أقل ما يمكن عندما ن = ١ ثانية فأوجد الثابتين : أ ، ب ؟

الحل:

ف = أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = 10$ م/ث في [٠ ، ٢]

$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(2) - ف(0)}{2-0} = \frac{(أ جتا \frac{\pi}{4} \times 2 + ب جا \frac{\pi}{4} \times 2) - (أ جتا \frac{\pi}{4} \times 0 + ب جا \frac{\pi}{4} \times 0)}{2}$

$\Leftarrow \frac{(أ \times 0,7 + ب \times 1) - (أ \times 1 + ب \times 0)}{2} = 10$ م/ث

$\Leftarrow \frac{ب - أ}{2} = 10$ م/ث ⟸ $ب - أ = 20$ ⟸ (١)

ع = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $-\frac{\pi}{4}$ أ جا $\frac{\pi}{4}$ ن + $\frac{\pi}{4}$ ب جتا $\frac{\pi}{4}$ ن

ع = $(\frac{\pi}{4})^2$ أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن − $(\frac{\pi}{4})^2$ ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

ع = ٠ ⟸ $-(\frac{\pi}{4})(أ جتا \frac{\pi}{4} ن + ب جا \frac{\pi}{4} ن) = 0$

⟸ أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن + ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن = ٠

⟸ أ جتا $\frac{\pi}{4}$ ن = − ب جا $\frac{\pi}{4}$ ن

عند ن = ١ ⟸ أ جتا $\frac{\pi}{4}$ = − ب جا $\frac{\pi}{4}$

⟸ $\frac{1}{\sqrt{2}} أ = -\frac{1}{\sqrt{2}} ب$

⟸ أ = − ب ⟸ (٢)

نعوض قيمة أ في المعادلة (١):

ب − أ = ٢٠ ⟸ ب − − ب = ٢٠

⟸ ٢ ب = ٢٠

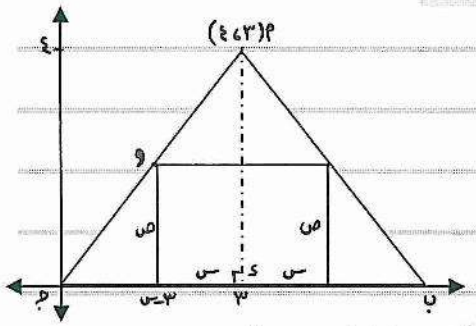
⟸ ب = ١٠

أ = − ب ⟸ أ = − ١٠

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

سنة ١٩٩٥: أ ب جـ مثلث رؤوسه النقط أ (٣ ، ٤)، ب (٦ ، ٠)، جـ (٠ ، ٠) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل المثلث بحيث يقع رأسان من رؤوس المستطيل على القاعدة ب جـ ويقع كل من الرأسين الآخرين على ضلعي المثلث الآخرين ؟

الحل:



مساحة المستطيل = الطول × العرض

$\Leftarrow$ $م = ٢س ص$

من تشابه المثلثان أ د هـ ، أ و هـ :

$\frac{ص}{٣-س} = \frac{٤}{٣} \Leftarrow ص = \frac{٤}{٣}(٣-س)$

$\Leftarrow$ $ص = ٤ - \frac{٤}{٣}س$

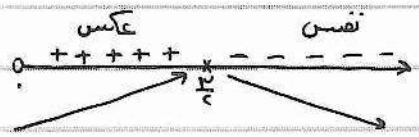
$م = ٢س ص \Leftarrow م = ٢س(٤ - \frac{٤}{٣}س)$

$\Leftarrow$ $م = ٨س - \frac{٨}{٣}س^{٢}$

$م' = ٨ - \frac{١٦}{٣}س \Leftarrow م' = \frac{٢٤ - ١٦س}{٣}$

جذور المشتقة:

$م' = ٠ \Leftarrow ٢٤ - ١٦س = ٠ \Leftarrow س = \frac{٢٤}{١٦} \Leftarrow س = \frac{٣}{٢}$



عند $س = \frac{٣}{٢}$ ، تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

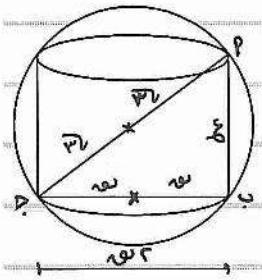
أبعاد المستطيل:

$٢س = ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٣$

$ص = ٤ - \frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٢} \Leftarrow ص = ٤ - ٢ = ٢$

سنة ١٩٩٦: أوجد حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها $(٣\sqrt{٢})$ دسم ؟

الحل:



حجم الاسطوانة $= \pi نو^{٢} ع$

$\Leftarrow$ $ح = \pi نو^{٢} ع$

المثلث أ ب جـ : حسب فيثاغورس

$\Leftarrow (٣\sqrt{٢})^{٢} = ع^{٢} + (٢نو)^{٢}$

$\Leftarrow ٣ \times ٤ = ع^{٢} + ٤نو^{٢} \Leftarrow نو^{٢} = \frac{١٢ - ع^{٢}}{٤}$

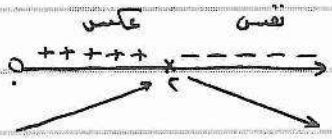
$ح = \pi نو^{٢} ع \Leftarrow ح = \pi (\frac{١٢ - ع^{٢}}{٤}) ع$

$\Leftarrow ح = \frac{\pi}{٤}(١٢ - ع^{٢}) ع$

$\Leftarrow ح = \frac{\pi}{٤}(١٢ع - ع^{٣})$

$\Leftarrow ح' = \frac{\pi}{٤}(١٢ - ٣ع^{٢})$

$ح' = ٠ \Leftarrow ١٢ - ٣ع^{٢} = ٠ \Leftarrow ع^{٢} = ٤ \Leftarrow ع = ٢$



عند ع = ٢ يكون حجم أكبر اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل الدائرة .

ويكون الحجم عندها: $ح = \frac{\pi}{٤}(١٢ \times ٢ - ٢^{٣})$

$\Leftarrow ح = \frac{\pi}{٤}(٢٤ - ٨)$

$\Leftarrow ح = \frac{\pi}{٤} \times ١٦$

$\Leftarrow ح = ٤\pi$ سم^{٣}

نزار يوسف نزال
الأستاذ
0599-834812

سنة ١٩٩٧: أوجد إحداثيي نقطة على منحنى ق(س) = $\sqrt{2س - 1}$ ، بحيث تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٣ ، ٠) ؟

الحل:

ق(س) = $\sqrt{2س-1}$ أقرب ما يمكن الى النقطة (٠،٣)

البعد بين النقطة (٠،٣) و النقطة (س، ص) ∈ منحنى ق(س):

ف = $\sqrt{(س-3)^2 + (ص-0)^2}$ ⇐ ف = $\sqrt{س^2 - 6س + 9 + ص^2}$

(س، ص) ∈ منحنى ق(س) ⇐ ص = $\sqrt{2س-1}$

⇐ $ص^2 = 2س - 1$

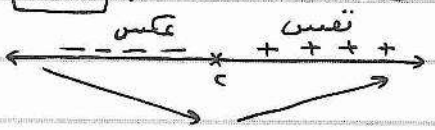
∴ ف = $\sqrt{س^2 - 6س + 9 + 2س - 1}$

⇐ **ف = $\sqrt{س^2 - 4س + 8}$**

$ف' = \frac{2س - 4}{2\sqrt{س^2 - 4س + 8}}$ ⇐ **$ف' = \frac{س - 2}{\sqrt{س^2 - 4س + 8}}$**

جذور المشتقة:

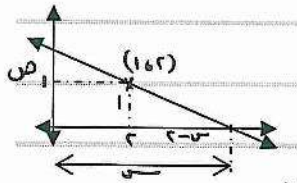
ف' = ٠ ⇐ س - ٢ = ٠ ⇐ **س = ٢**



عند س = ٢ ، تكون المسافة بين النقطة (٠،٣) ومنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{2س-1}$ أقرب ما يمكن.

سنة ١٩٩٨: ١. أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (٢ ، ١) والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول مثلثاً مساحته أقل ما يمكن ؟

الحل:



مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

⇐ **م = $\frac{س}{2}$ × ص**

من تشابه المثلثات: $\frac{ص}{س} = \frac{1}{س-2}$ ⇐ **ص = $\frac{س}{س-2}$**

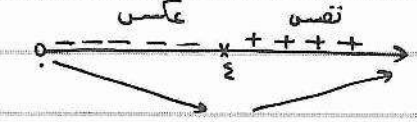
∴ م = $\frac{س}{2}$ × ص ⇐ م = $\frac{س}{2} \times \frac{س}{س-2}$ ⇐ **م = $\frac{س^2}{2س-4}$**

$م' = \frac{(2س-4)\times 2س - س^2 \times 2}{(2س-4)^2}$ ⇐ **$م' = \frac{2س^2 - 8س}{(2س-4)^2}$**

جذور المشتقة: م' = ٠ ⇐ $2س^2 - 8س = ٠$

⇐ ٢س (س - ٤) = ٠

⇐ س = ٠ مرفوضة أو **س = ٤**



عندما س = ٤ ، تكون مساحة المثلث أقل ما يمكن.

صل المستقيم من خلال النقطتين (١،٢) (٠،٤)

(لأن (٠،٤) هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات).

$م = \frac{1-0}{2-4} = \frac{-1}{2}$

معادلة المستقيم الذي ميله م = $-\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة (٠،٤) هي:

ص - ص١ = م (س - س١)

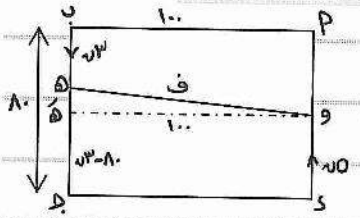
⇐ ص - ٠ = $-\frac{1}{2}$ (س - ٤)

⇐ **ص = $-\frac{س}{2} + 2$**

الأستاذ نزار يوسف نزال 0599-834812

سنة ١٩٩٨: ٢. مستطيل أ ب جـ د فيه أ ب = ١٠٠ سم ب جـ = ٨٠ سم فإذا تحركت نقطة من د باتجاه أ بسرعة منتظمة مقدارها ٥ سم /ث وتحركت نقطة أخرى من ب باتجاه جـ بسرعة منتظمة مقدارها ٣سم/ث. فمتى تكون المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن وما مقدارها عندئذ ؟

الحل:



تكون المسافة أقصر ما يمكن عندما يصبح الشكل د و هـ جـ مستطيل

وعندها يكون : ٥ن = ٨٠ - ٣ن ⇐ ٨ن = ٨٠

⇐ ن = ١٠ ث

حسب فيثاغورس على المثلث و هـ هَ :

ف^{٢} = (١٠٠)^{٢} + (هـ هَ)^{٢} ⇐ ف^{٢} = (١٠٠)^{٢} + (٨٠ - (٣ن + ٥ن))^{٢}

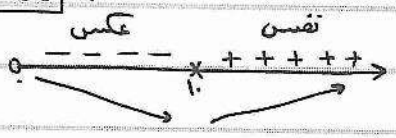
⇐ ف^{٢} = (١٠٠)^{٢} + (٨٠ - ٨ن)^{٢}

⇐ ف = $\sqrt{(١٠٠)^{٢} + (٨٠)^{٢} - ٢ \times ٦٤٠ن + ٦٤ن^{٢}}$

ف' = $\frac{-١٢٨٠ + ١٢٨ن}{٢\sqrt{(١٠٠)^{٢} + (٨٠)^{٢} - ١٢٨٠ن + ٦٤ن^{٢}}}$

ف' = ٠ ⇐ -١٢٨٠ + ١٢٨ن = ٠ ⇐ ١٢٨ن = ١٢٨٠

⇐ ن = ١٠ ث



عندما ن = ١٠ ث ، تكون المسافة أقصر ما يمكن .

وتكون عندها:

ف = $\sqrt{١٠٠٠٠ + ٦٤٠٠ - ١٢٨٠ \times ١٠ + ١٠٠ \times ٦٤}$

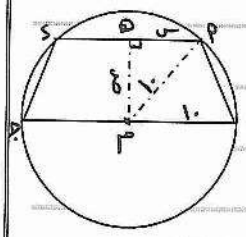
ف = $\sqrt{١٦٤٠٠ - ١٢٨٠٠ + ٦٤٠٠}$

ف = $\sqrt{١٠٠٠٠}$ ⇐ ف = ١٠٠ سم

أي تفسن طول د جـ : مستطيل .

سنة ١٩٩٩: دائرة نصف قطرها ١٠ سم رسم فيها شبه منحرف أ ب جـ د بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة وتنطبق قاعدته الكبرى ب جـ على قطر الدائرة ، أوجد أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف أ ب جـ د ؟

الحل:



نق = ١٠ سم .

⇐ القاعدة السفلى = ١٠ × ٢ = ٢٠ سم

مساحة شبه المنحرف = ½ مجموع القاعدتين × الارتفاع

⇐ م = ½ (٢٠ + ٢س) × ع ⇐ م = ½ (٢٠ + ٢س) × ع

⇐ م = (١٠ + س) × ع

نطبق نظرية فيثاغورس على المثلث أ هـ م ⇐ (١٠)^{٢} = س^{٢} + ع^{٢}

⇐ ع = $\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$

⇐ م = (١٠ + س) $\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$

مَ = (١٠ + س) × $\frac{-٢س}{٢\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}}$ + $\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$ × ١

بعد توحيد المقامات :

⇐ مَ = $\frac{-س(١٠ + س) + ١٠٠ - س^{٢}}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}}$ = $\frac{-١٠س - س^{٢} + ١٠٠ - س^{٢}}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}}$

⇐ مَ = $\frac{-٢س^{٢} - ١٠س + ١٠٠}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}}$

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

لمعرفة المنطقة: مَ = ٠ ⇐ -٢س^{٢} - ١٠س + ١٠٠ = ٠

⇐ س^{٢} + ٥س - ٥٠ = ٠

⇐ (س - ٥)(س + ١٠) = ٠

⇐ س = ٥ ، س = -١٠ مرفوضة .

عندما س = ٥ ، تكون أكبر مساحة لشبه منحرف أ ب جـ د

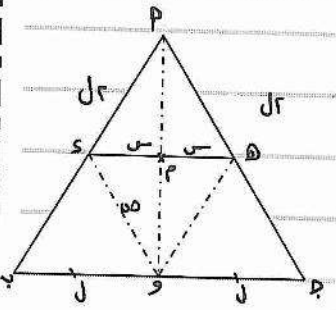
وعندئذ تكون ،

م = (١٠ + ٥) $\sqrt{١٠٠ - ٥^{٢}}$

⇐ م = ١٥ $\sqrt{٧٥}$ ⇐ م = ٣٧٥ سم^{٢}

سنة ٢٠٠٠: أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢ل سم، أخذت النقط د ، هـ ، و على أضلاعه أ ب ، أ ج ، ب ج على الترتيب بحيث كانت القطعة المستقيمة د هـ توازي القاعدة ب ج ، النقطة و هي منتصف ب ج ، أثبت أنّ أكبر مساحة ممكنة للمثلث د هـ و تساوي $\frac{1}{4}$ مساحة المثلث أ ب ج ؟

الحل:



مساحة المثلث د هـ و

م = $\frac{1}{2}$ و هـ × ١ل تقاطع

م = $\frac{1}{2}$ × ٢س × ص

$\Leftarrow$ م = س ص

من تشابه المثلثان أ و ج ، أ م هـ:

$\frac{\text{ل}}{\text{و أ}} = \frac{\text{س}}{\text{م أ}} \Leftarrow$ أ و = $\sqrt{(\text{ل})^2 - \text{ل}^2} = \sqrt{3}\text{ل}$

$\Leftarrow \frac{\text{م هـ}}{\text{و أ}} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} \Leftarrow \frac{\text{و} - \text{ص}}{\text{و أ}} = \frac{\text{س}}{\text{ل}} \Leftarrow \frac{\sqrt{3}\text{ل} - \text{ص}}{\sqrt{3}\text{ل}} = \frac{\text{س}}{\text{ل}}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{\sqrt{3}\text{ل} - \text{ص}}{\sqrt{3}}$

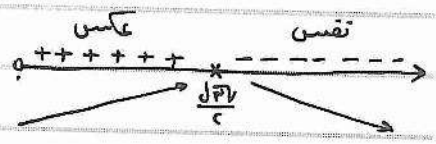
$\Leftarrow \text{س} = \text{ل} - \frac{\text{ص}}{\sqrt{3}}$

م = س ص $\Leftarrow$ م = $(\text{ل} - \frac{\text{ص}}{\sqrt{3}})$ ص

$\Leftarrow$ م = ل ص $- \frac{\text{ص}^2}{\sqrt{3}}$

م = ل $- \frac{2}{\sqrt{3}}$ ص

جذور المشتقة: م = ٠ $\Leftarrow$ ل = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ص $\Leftarrow$ ص = $\frac{\sqrt{3}\text{ل}}{2}$



عند ص = $\frac{\sqrt{3}\text{ل}}{2}$ تكون أكبر مساحة للمثلث د هـ و وهي:

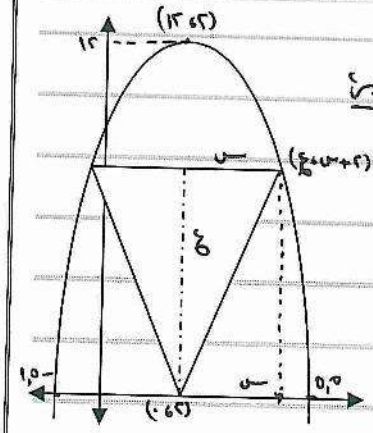
م = ل × $\frac{\sqrt{3}\text{ل}}{2} - \frac{(\sqrt{3}\text{ل})^2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ل}^2 - \frac{3}{4}\text{ل}^2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ل}^2 - \frac{1}{4}\text{ل}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\text{ل}^2$

وبالتالي تساوي ربع مساحة المثلث أ ب ج = $\sqrt{3}\text{ل}^2$

سنة ٢٠٠٢: جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور السينات بحيث يقع رأسه في النقطة (٢ ، ٠) والرأسان الآخران على منحنى الاقتران ف(س) = ٨ + ٤س − س^2 ، (قاعدة المثلث توازي محور السينات)

الحل:



* نرسم منحنى ف(س) = ٨ + ٤س − س^2

احداثيات رأس $(\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} ، \text{ف}(\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}}))$

$\frac{-\text{ب}}{2\text{أ}} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$

ف(٢) = ٨ + ٤×٢ − ٢^2 = ١٢

إذن رأس (٢ ، ١٢)

* نقاط تقاطع المحور لسينات:

ف(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٨ + ٤س − س^2 = ٠

$\Leftarrow$ س^2 − ٤س − ٨ = ٠

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$

إذن س = ١٠- ، ٥٠٥

* مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع $\Leftarrow$ م = س ع

النقطة (٢+س ، ع) ∈ منحنى ف(س)

$\Leftarrow$ ع = ٨ + ٤(٢+س) − (٢+س)^2 $\Leftarrow$ ع = ١٢ − س^2

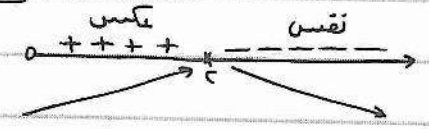
$\Leftarrow$ م = س ع $\Leftarrow$ م = س (١٢ − س^2)

$\Leftarrow$ م = ١٢س − س^3

م$'$ = ١٢ − ٣س^2

جذور المشتقة: م$'$ = ٠ $\Leftarrow$ ١٢ − ٣س^2 = ٠

$\Leftarrow$ س^2 = ٤ $\Leftarrow$ س = ٢



عند س = ٢ ، تكون مساحة أكبر مثلث يمكن رسمه

وعندئذ تكون مساحة المثلث هي:

م = ١٢س − س^3 $\Leftarrow$ م = ١٢×٢ − ٢^3

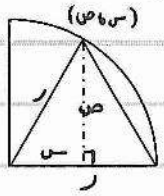
$\Leftarrow$ م = ٢٤ − ٨

$\Leftarrow$ م = ١٦ وحدة مربعة

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

سنة ٢٠٠٣: رسم مثلث داخل ربع دائرة نصف قطرها (ر) بحيث تنطبق قاعدة المثلث على نصف قطر الدائرة ويقع رأسه على محيطها
أثبت أنّ أكبر مساحة لهذا المثلث تساوي $\frac{1}{2}$ ر^2 ؟

الحل:



الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$\Leftarrow$ م = $\frac{1}{2}$ ر × ص

حسب فيثاغورس : ر^2 = س^2 + ص^2

$\Leftarrow$ ص^2 = ر^2 − س^2

$\Leftarrow$ ص = $\sqrt{ر^2 - س^2}$

$\Leftarrow$ م = $\frac{1}{2}$ ر × ص $\Leftarrow$ **م = $\frac{1}{2}$ ر × $\sqrt{ر^2 - س^2}$**

$\dot{م} = \frac{1}{2}$ ر × $\frac{-2س}{2\sqrt{ر^2 - س^2}}$ = $\frac{-رس}{\sqrt{ر^2 - س^2}}$

جذور المشتقة:

$\dot{م}$ = ٠ $\Leftarrow$ −رس = ٠ $\Leftarrow$ **س = ٠** غير ممكن .

عندما س = ٠ تكون أكبر مساحة للمثلث .

وعندئذ تكون المساحة

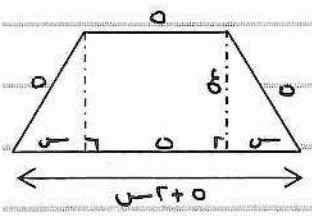
م = $\frac{1}{2}$ ر × $\sqrt{ر^2 - 0}$

$\Leftarrow$ م = $\frac{1}{2}$ ر × ر

$\Leftarrow$ **م = $\frac{1}{2}$ ر^2**

سنة ٢٠٠٤: شبه منحرف فيه ٣ أضلاع متساوية طول كل منها ٥ سم ، أوجد طول الضلع الرابع لتكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن ؟

الحل:



مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع

$\Leftarrow$ م = $\frac{1}{2}$ (٥ + ٢س + ٥) × ع

$\Leftarrow$ م = $\frac{1}{2}$ (١٠ + ٢س) ع $\Leftarrow$ **م = (٥ + س) ع**

حسب فيثاغورس:

٥^2 = ع^2 + س^2 $\Leftarrow$ **ع = $\sqrt{٢٥ - س^2}$**

$\Leftarrow$ **م = (٥ + س) $\sqrt{٢٥ - س^2}$**

$\dot{م}$ = (٥ + س) $\frac{-2س}{2\sqrt{٢٥ - س^2}}$ × ١ + $\sqrt{٢٥ - س^2}$

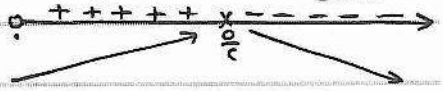
$\Leftarrow$ $\dot{م}$ = $\frac{-٥س - س^2 + ٢٥ - س^2}{\sqrt{٢٥ - س^2}}$ $\Leftarrow$ **$\dot{م}$ = $\frac{-٢س^2 - ٥س + ٢٥}{\sqrt{٢٥ - س^2}}$**

جذور المشتقة:

$\dot{م}$ = ٠ $\Leftarrow$ −٢س^2 − ٥س + ٢٥ = ٠

$\Leftarrow$ (٢س − ٥)(س + ٥) = ٠

$\Leftarrow$ **س = $\frac{٥}{٢}$** ، س = −٥ مرفوضة



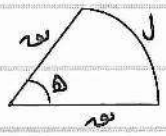
عندما س = $\frac{٥}{٢}$ ، تكون مساحة أكبر شبه منحرف

وعندئذ يكون طول الضلع الرابع هو:

٥ + ٢س = ٥ + ٢ × $\frac{٥}{٢}$ = ٥ + ٥ = **١٠ سم**

سنة ٢٠٠٥: قطاع دائري محيطه ٢٨ سم ، أثبت أنّ مساحته تكون في قيمتها العظمى عندما تكون زاويته المركزية تساوي ٢ راديان ؟

الحل:



مساحة القطاع :

$$م = \frac{1}{2} هـ \, نق^2$$

محيط القطاع $= 28 \Leftarrow 2نق + ل = 28$ $\quad (ل = هـ \, نق)$

$$\Leftarrow 2نق + هـ \, نق = 28$$

$$\Leftarrow (2 + هـ) نق = 28$$

$$\Leftarrow نق = \frac{28}{2 + هـ}$$

$$م = \frac{1}{2} هـ \, نق^2 \Leftarrow م = \frac{1}{2} هـ \left(\frac{28}{2+هـ}\right)^2 = \frac{784}{(2+هـ)^2} \times \frac{1}{2} هـ$$

$$\Leftarrow م = \frac{392 هـ}{(2+هـ)^2}$$

$$م' = \frac{(2+هـ)^2 \times 392 - 392 هـ \times 2(2+هـ) \times 1}{(2+هـ)^4}$$

بتقسيم البسط والمقام على $2+هـ$

$$م' = \frac{(2+هـ) \times 392 - 392 هـ \times 2}{(2+هـ)^3} = \frac{784 + 392 هـ - 784 هـ}{(2+هـ)^3}$$

$$\Leftarrow م' = \frac{784 - 392 هـ}{(2+هـ)^3}$$

جذور المشتقة:

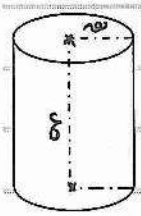
$$م' = 0 \Leftarrow 784 - 392 هـ = 0 \Leftarrow 392 هـ = 784$$

$$\Leftarrow هـ = 2 \text{ راديان}$$

عند $هـ = 2$ راديان تكون مساحة القطاع في قيمتها العظمى.

سنة ٢٠٠٦: جد أقل كمية من الصفيح اللازمة لصناعة علبة على شكل اسطوانة دائرية قائمة مغلقة القاعدتين سعتها 16π سم^3

الحل:



الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

م = مجموع مساحتي القاعدتين + مساحة السطح الخارجي

$$م = 2\pi نق^2 + 2\pi نق ع$$

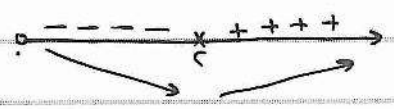
سعتها $= 16\pi$ سم^3 $\Leftarrow \pi نق^2 ع = 16\pi \Leftarrow ع = \frac{16}{نق^2}$

$$م = 2\pi نق^2 + 2\pi نق \times \frac{16}{نق^2} \Leftarrow م = 2\pi نق^2 + \frac{32\pi}{نق}$$

$$م' = 4\pi نق - \frac{32\pi}{نق^2} \Leftarrow م' = \frac{4\pi نق^3 - 32\pi}{نق^2}$$

جذور المشتقة:

$$م' = 0 \Leftarrow 4\pi نق^3 - 32\pi = 0 \Leftarrow نق^3 = 8 \Leftarrow نق = 2 \text{ سم}$$



عند $نق = 2$ سم ، تكون أقل كمية من الصفيح لصناعة العلبة.

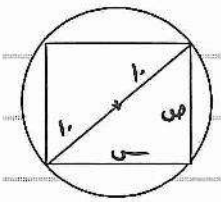
وعندئذ تكون المساحة :

$$م = 2\pi (2)^2 + \frac{32\pi}{2} = 8\pi + 16\pi$$

$$= 24\pi \text{ سم}^2$$

سنة ٢٠٠٧: أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سم ؟

الحل:



مساحة المستطيل $\Leftarrow$ $م = س ص$

حسب فيثاغورس:

$١٠^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} \Leftarrow ص^{٢} = ٤٠٠ - س^{٢}$

$\Leftarrow$ $ص = \sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

$م = س ص \Leftarrow$ $م = س \sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

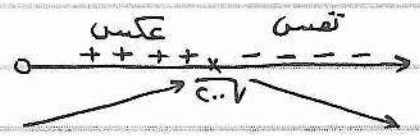
$م' = س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}} + \sqrt{٤٠٠ - س^{٢}} \times ١$

$م' = \frac{-س^{٢} + ٤٠٠ - س^{٢}}{\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}} \Leftarrow$ $م' = \frac{٤٠٠ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}}$

جذور المشتقة:

$م' = ٠ \Leftarrow ٤٠٠ - ٢س^{٢} = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٢٠٠$

$\Leftarrow$ $س = \sqrt{٢٠٠}$



عند $س = \sqrt{٢٠٠}$ تكون مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل الدائرة ...

وعندئذ تصبح المساحة:

$م = س \sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

$\Leftarrow م = \sqrt{٢٠٠} \sqrt{٤٠٠ - ٢٠٠}$

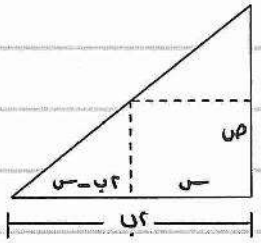
$\Leftarrow م = \sqrt{٢٠٠} \times \sqrt{٢٠٠}$

$\Leftarrow م = ٢٠٠$ سم^{٢}

نزار يوسف نزال
الأستاذ
0599-834812

سنة ٢٠٠٨: معتمداً على الشكل المجاور، جد بعدي المستطيل ذي المساحة الكبرى، الذي يمكن رسمه داخل مثلث قائم الزاوية، بحيث ينطبق أحد أضلاع هذا المستطيل على أحد ضلعي القائمة في المثلث، ورأساه الآخران على ضلعي المثلث الآخرين.

الحل:



من تشابه المثلثات،

$\frac{ب}{ب٢} = \frac{ص}{٢ب - س}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{ص}{٢ب - س} \Leftarrow ٢ص = ٢ب - س$

$\Leftarrow$ $ص = ب - \frac{س}{٢}$

مساحة المستطيل:

$م = س ص \Leftarrow م = س (ب - \frac{س}{٢})$

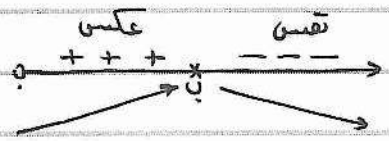
$\Leftarrow$ $م = ب س - \frac{س^{٢}}{٢}$

المشتقة:

$م' = ب - س$

جذور المشتقة: $م' = ٠ \Leftarrow ب - س = ٠$

$\Leftarrow$ $س = ب$



عند $س = ب$ ، تكون مساحة المستطيل الكبرى المرسوم داخل المثلث.

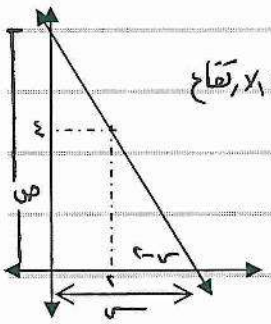
∴ بعدي المستطيل:

$س = ب$

$ص = ب - \frac{س}{٢} = ب - \frac{ب}{٢} = \frac{ب}{٢} \Leftarrow$ $ص = \frac{ب}{٢}$

إكمال ٢٠٠٩: جد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين في الربع الأول مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن

الحل:



مساحة المثلث = نصف القاعدة × الارتفاع

$\Leftarrow م = \frac{س}{2} \times ص$

من تشابه المثلثات :

$\frac{ص}{س} = \frac{٤}{س-٢}$

$\Leftarrow ص = \frac{٤س}{س-٢}$

$م = \frac{س}{2} \times ص \Leftarrow م = \frac{س}{2} \times \frac{٤س}{س-٢}$

$\Leftarrow م = \frac{٢س^{2}}{س-٢}$

$\Leftarrow م' = \frac{(س-٢) \times ٤س - ٢س^{2} \times ١}{(س-٢)^{2}}$ $\Leftarrow م' = \frac{٢س^{2} - ٨س}{(س-٢)^{2}}$

نزار يوسف نزال
الأستاذ
0599-834812

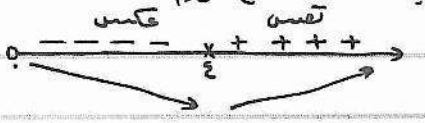
جذور المشتقة: $م' = ٠ \Leftarrow ٢س^{2} - ٨س = ٠$

$\Leftarrow ٢س(س-٤) = ٠$

$\Leftarrow س = ٠$ مرفوضة

أو $س = ٤$

وهي نقطة تقاطعه مع محور السينات (٤، ٠)



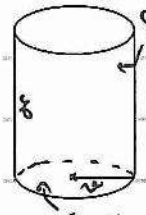
عند $س = ٤$ ، تكون مساحة المثلث أصغر ما يمكن

ميل المستقيم بين النقطتين $(٤، ٠)$ ، $(٢، ٤)$

$م = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٤ - ٠}{٢ - ٤} = \frac{٤}{-٢} = -٢$

سنة ٢٠١٠: يراد صنع وعاء معدني على هيئة اسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعلى سعتها ٨١π سم^{٣} ، فإذا كانت تكلفة المواد المستعملة ٣ دنانير لكل سم^{٢} من قاعدة الاسطوانة، ودينارا واحداً لكل سم^{٢} من سطحها الجانبي . جد أبعاد الاسطوانة التي تجعل تكاليف صنعها أقل ما يمكن ؟

الحل:



دينار/سم^{٢}

٣ دينار/سم^{٢}

$ت = ٣ \times \pi نق^{٢} + ١ \times ٢\pi نق ع$

القاعدة — السطح الجانبي

$\Leftarrow ت = ٣\pi نق^{٢} + ٢\pi نق ع$

$\Leftarrow ت = \pi(٣نق^{٢} + ٢نق ع)$.

السعة $= ٨١\pi$ سم$^{٣} \Leftarrow \pi نق^{٢} ع = ٨١\pi$

$\Leftarrow ع = \frac{٨١}{نق^{٢}}$

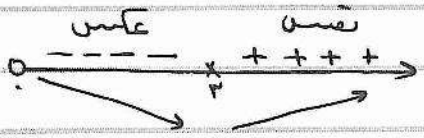
$\Leftarrow ت = \pi\left(٣نق^{٢} + ٢نق \times \frac{٨١}{نق^{٢}}\right)$

$\Leftarrow ت = \pi\left(٣نق^{٢} + \frac{١٦٢}{نق}\right)$

$\Leftarrow ت' = \pi\left(٦نق - \frac{١٦٢}{نق^{٢}}\right)$ $\Leftarrow ت' = \pi\left(\frac{٦نق^{٣} - ١٦٢}{نق^{٢}}\right)$

جذور المشتقة: $ت' = ٠ \Leftarrow ٦نق^{٣} - ١٦٢ = ٠$

$\Leftarrow نق^{٣} = ٢٧ \Leftarrow نق = ٣$ سم



عند $نق = ٣$ سم ، تكون تكاليف صنع الوعاء أقل ما يمكن .

أبعاد الاسطوانة: $نق = ٣$ سم

$ع = \frac{٨١}{نق^{٢}} = \frac{٨١}{٣^{٢}} = \frac{٨١}{٩} = ٩ \Leftarrow ع = ٩$ سم

سنة ٢٠١٢: جد الإحداث السيني للنقطة الواقعة على منحنى العلاقة $ص^2 - 2ص + 4س - 23 =$ صفر وتكون أقرب ما يمكن للنقطة $(3 ، 1)$

الأستاذ
نزار يوسف نزال
0599-834812

الحل:

بعد النقطة (١،٣) عن منحنى العلاقة هو بعد (١،٣) عن النقطة $(س، ص) \in$ المنحنى

وهو: $ف = \sqrt{(س-3)^2 + (ص-1)^2}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{س^2 - 6س + 9 + ص^2 - 2ص + 1}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{س^2 - 6س + 10 + ص^2 - 2ص}$

$ص^2 - 2ص + 4س - 23 = 0 \Leftarrow ص^2 - 2ص = -4س + 23$

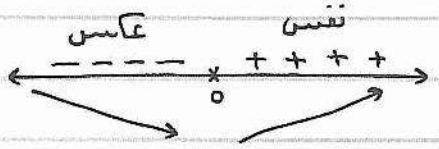
$\Leftarrow ف = \sqrt{س^2 - 6س + 10 + -4س + 23}$

$\Leftarrow ف = \sqrt{س^2 - 10س + 33}$

$ف' = \frac{2س - 10}{2\sqrt{س^2 - 10س + 33}} = \frac{س - 5}{\sqrt{س^2 - 10س + 33}}$

بدور بالمشتقة:

$ف' = 0 \Leftarrow س - 5 = 0 \Leftarrow س = 5$



عند $س = 5$، تكون النقطة (١،٣) أقرب ما يمكن من منحنى العلاقة: $ص^2 - 2ص + 4س - 23 = 0$