المادة التأسيسية لطلاب الثاني عشر علمي

مع الحلول

إعداد : أ. هدى فرج

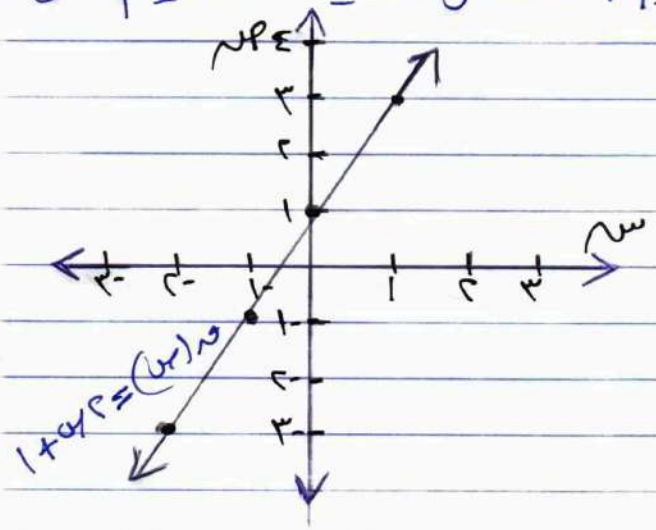
أ. هدى فتح

مراجعة عامة

أولاً / الاقتران الخطي :-

يكتب الاقتران الخطي على الصورة $ق(س) = أ س + ب$ ويمكن تمثيله في المستوى الديكارتي بطريقتين .

الطريقة الأولى / نكون جدول لقيم س وقيم ص المناظرة ونعين النقاط في المستوى ونصلها بخط مستقيم .



مثال ① / $ق(س) = ٢س + ١$

س	٢	١	٠	١-	٢-
ص	٥	٣	١	١-	٣-

الطريقة الثانية / طريقة المقاطع حيث

نجد المقطع السيني بوضع ص = ٠

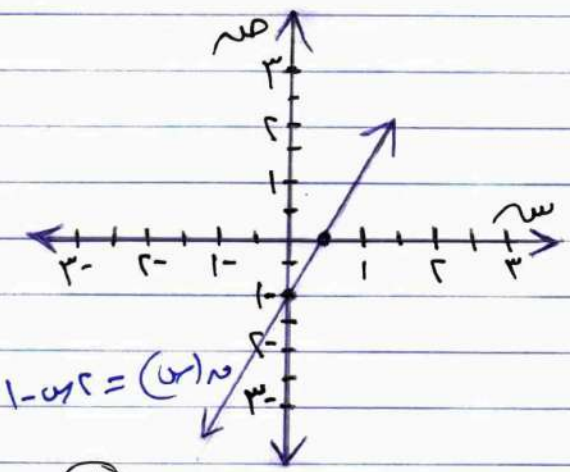
ونجد المقطع الصادي بوضع س = ٠

مثال ② / $ق(س) = ٢س - ١$

عندما ص = ٠ $\Leftarrow$ $٢س - ١ = ٠$ $\Leftarrow$ $٢س = ١$ $\Leftarrow$ $س = \frac{١}{٢}$

عندما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ١-

إذن تمثل النقطتين $(\frac{١}{٢}، ٠)$ ، $(٠، ١-)$



م. هدى فرج

تدريب ① / مثل/ي الاقترانات الخطية التالية في المستوى الديكارتي :-

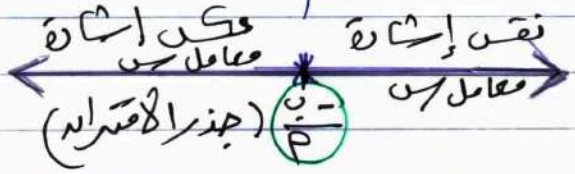
① $ه(س) = 3س - 6$ ③ $ل(س) = 2س - 2$

② $هـ(س) = 1 - س$ ④ $ك(س) = 2س - 1$

* إشارة الاقتران الخطي / لبحث إشارة الاقتران الخطي

① نجد صفر الاقتران بوضع $أس + ب = 0$ ⟸ $س = -\frac{ب}{أ}$

فتكون اشارة $ه(س)$ كالشكل المقابل



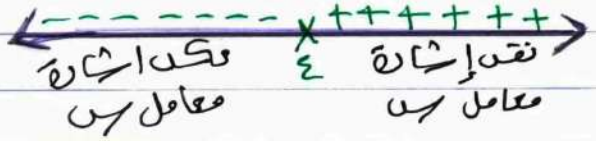
مثال ③ / ابحث إشارة كل من الاقترانات التالية :-

④ $ه(س) = 2س - 8$

الحل أولاً : نوجد صفر الاقتران $2س - 8 = 0$ ⟸ $2س = 8$

⟸ $س = \frac{8}{2} = 4$

ثانياً : نمثل صفر الاقتران على خط الأعداد



⑤ $هـ(س) = -س + 2$

$-س + 2 = 0$ ⟸ $-س = -2$ ⟸ $س = 2$

تدريب ② / ابحث/ي إشارة كل من الاقترانات التالية :-

① $ه(س) = س + 2$ ③ $ل(س) = 3س - 6$

② $هـ(س) = 8 - 4س$ ④ $ك(س) = 1 - س$

٢. صورة من ٩

ملاحظة هامة/ إذا كان الاقتران $هـ(س)$ ثابت يكتب على الصورة

$هـ(س) = جـ$ ، $جـ \in ح$ فإنه إشارة الاقتران هي إشارة $جـ$ نفسها

مثل $هـ(س) = ٣$ ← إشارة $هـ(س)$ ← + + + + + + + + +

$هـ(س) = -\frac{١}{٢}$ ← إشارة $هـ(س)$ ← - - - - - - - - -

ثانياً / الاقتران التربيعي :-

الاقتران التربيعي هو الاقتران الذي يكتب على الصورة $ق(س) = أس^2 + بس + جـ$

حيث $أ \neq 0$ ، $أ، ب، جـ \in ح$.

أولاً / تمثيله بيانياً :-

① نجد احداثيات الرأس وهي $\left(\frac{-ب}{2أ}, ق\left(\frac{-ب}{2أ}\right)\right)$

② نحدد فتحة القطع المكافئ

ⓐ إذا كانت إشارة معامل $س^2$ $(أ > 0)$ يكون مقعر للأعلى ∪

ⓑ إذا كانت إشارة معامل $س^2$ $(أ < 0)$ يكون مقعر للأسفل ∩

③ نجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات إن أمكن بوضع $ق(س) = 0$

④ نجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع $س = 0$

(نقطة تقاطعه مع محور الصادات هي $(0، جـ)$)

مثال ① / مثل بيانياً كل من الاقترانات التالية :-

ⓐ $ق(س) = س^2 - 6س + 9$

الحل /

① الاحداثي السيني لنقطة الرأس $= \frac{-ب}{2أ} = \frac{6}{2} = 3$

الاحداثي الصادي لنقطة الرأس $= ق(3) = (3)^2 - 6(3) + 9$

$= 9 - 18 + 9 = 0$

∴ إحداثي نقطة الرأس $(3، 0)$

② القطع مقعر للأعلى لأنه إشارة معامل $س^2$ موجبة .

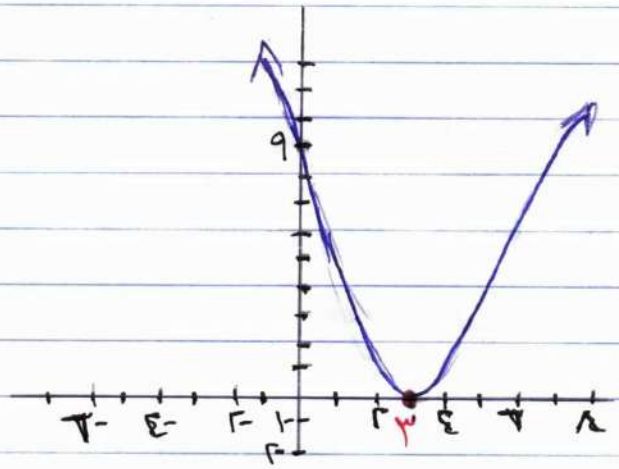
أ. هدى فتح

③ نجد نقاط تقاطع الاقتران مع محور السينات بوضع $س^2 - 6س + 9 = 0$

$\Leftarrow (س-3)(س-3) = 0 \Leftarrow س = 3$

∴ نقطة تقاطعه مع محور السينات $(3, 0)$

④ نقطة تقاطعه مع محور الصادات عندما $س = 0$ وهي $(0, 9)$



تدريب ① / مثل بيانياً الاقترانات التالية :-

① $ق(س) = س^2 + 6س - 12$

② $هـ(س) = س^2 + 2س - 3$

③ $ل(س) = 1 - س^2$

④ $م(س) = س^2 - 4$

ملاحظة هامة / يمكن الاعتماد على التحويلات الهندسية في رسم الاقترانات كما درسنا في الصف العاشر.

أمثلة / $ل(س) = س^2 + 1$ (الخاب لمختنى $ق(س) = س^2$ وحدة واحدة للأعلى).

$هـ(س) = س^2 - 1$ (الخاب لمختنى $ق(س) = س^2$ وحدة واحدة للأسفل)

$م(س) = (س-1)^2$ (الخاب لمختنى $ق(س) = س^2$ وحدة واحدة لليمين)

$ل(س) = (س+1)^2$ (الخاب لمختنى $ق(س) = س^2$ وحدة واحدة لليسار)

$ن(س) = -س^2$ (انعكاس لمختنى $ق(س) = س^2$ في محور السينات)

$ع(س) = (-س)^2$ (انعكاس لمختنى $ق(س) = س^2$ في محور الصادات)

* ثانياً / إشارة الاقتران التربيعي :-

هناك ثلاثة حالات للمميز :

(أ) إذا كانت قيمة المميز $ب^2 - 4أجـ < 0$ ⇐ لا يوجد للمعادلة جذور حقيقية وتكون إشارة الاقتران هي نفس إشارة معامل $س^2$ (الاقتران لا يقطع محور السينات)

نفس إشارة معامل $س^2$

مثال / $ق(س) = س^2 + 1$

$ق(س) = س^2 + 1 = 0$ ⇐ $س^2 = -1$ (لا يوجد جذور حقيقية)

++++++++++ إشارة $ق(س)$

(ب) إذا كانت المميز $ب^2 - 4أجـ$ = صفر ، وهنا يوجد جذر له حقيقيان متساويان وتكون إشارة الاقتران هي نفس إشارة معامل $س^2$ إلا عند صفر الاقتران.

نفس إشارة معامل $س^2$ | الجذر | نفس إشارة معامل $س^2$

مثال / $ق(س) = س^2 + 2س + 1$

$س^2 + 2س + 1 = 0$ ⇐ $(س+1)(س+1) = 0$ ⇐ $س = -1$

++++++ x ++++++ إشارة $ق(س)$ ، -1

(ج) إذا كان المميز $ب^2 - 4أجـ > 0$ ، وهنا يوجد للاقتران جذران حقيقيان مختلفان فتكون الإشارة كما يلي :-

نفس | عكس | نفس

الجذر ① | الجذر ②

مثال / $ق(س) = س^2 - س - 20$

$س^2 - س - 20 = 0$ ⇐ $(س+4)(س-5) = 0$ ⇐ إما $س = -4$ أو $س = 5$

+++ x ----- x +++ إشارة $ق(س)$

-4 | 5

ملاحظة هامة / (أ) عندما يقع منحنى الاقتران فوق محور السينات فإن قيم الصادات تكون موجبة ⇐ $د(س) > ٠$.

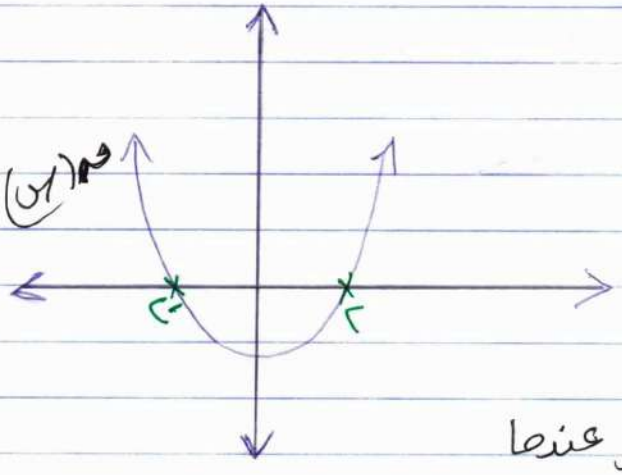
(ب) عندما يقع منحنى الاقتران تحت محور السينات فإن قيم الصادات سالبة ⇐ $د(س) < ٠$.

وهذه المعلومات نستخدمها لبحث إشارة إقتران من الرسم.

مثال / في الشكل المجاور $د(س)$ موجبة على الفترة $]-\infty، -٢[\cup]٢، \infty[$

وسالبة أو $د(س) < ٠$ على الفترة $]-٢، ٢[$

والاقتران = صفر أي $د(س)$ = صفر عندما $س = ٢، -٢$



تدريب ٢ / ابحث إشارة الاقترانات التالية :-

١) $د(س) = س^٢ + ٣س + ٤$

٢) $د(س) = -س^٢ + ٣س - ٥$

٣) $هـ(س) = س^٢ - ٦س + ٩$

٤) $هـ(س) = س^٢ + ١٠س + ٢٥$

٥) $ط(س) = س^٢ + س - ١٢$

٦) $م(س) = ٢س^٢ - ٤س - ١٦$

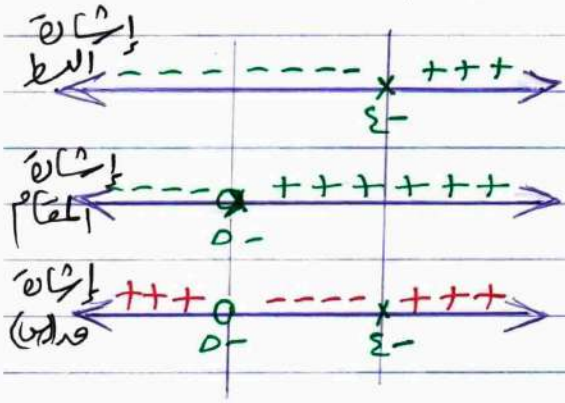
٧) $ل(س) = س - س^٢$

٨) $د(س) = ٩ - س^٢$

ثالثاً: الاقتران النسبي :-

أولاً/ إشارة الاقتران النسبي :- يسمى الاقتران $هـ(س)$ إقتراناً نسبياً إذا كانت قاعدته على الصورة $هـ(س) = \frac{ل(س)}{م(س)}$ حيث ل، م كثيرا حدود و $م(س) \neq$ صفر.

مثال ①/ ادرس إشارة $هـ(س) = \frac{س+٤}{س+٥}$ ، $س \neq -٥$



الحل/ البسط/ $س+٤ = ٠ \Leftarrow س = -٤$

المقام/ $س+٥ = ٠ \Leftarrow س = -٥$

* $هـ(س) > ٠$ (موجبة) عندما

$س > -٤$ ، $س < -٥$

* $هـ(س) < ٠$ (سالبة) عندما $-٥ < س < -٤$ * $هـ(س) = ٠$ عندما $س = -٤$

$هـ(س)$ غير معرفة عندما $س = -٥$

تدريب ①/ ادرس إشارة الاقترانات التالية :-

① $هـ(س) = \frac{٥}{س-٣}$ ، $س \neq ٣$

② $هـ(س) = \frac{١-٣س}{س^٢-٩}$ ، $س \neq \pm ٣$

③ $هـ(س) = \frac{س^٢-س-٢٠}{س-٢}$ ، $س \neq ٢$

ثانياً/ مجال الاقتران النسبي :- إذا كان $له(س) = \frac{هـ(س)}{ه(س)}$ اقتران نسبي فإن مجال $له(س)$ = مجال $هـ(س) \cap$ مجال $ه(س) - \{$أصفار المقام $ه(س)\}$

مثال/ جد/ي مجال الاقتران $هـ(س) = \frac{س^2 + 4س + 4}{س^2 + 2س - 3}$

* مجال البسط $(س^2 + 4س + 4) = ح$ ، لأنه كثير حدود.

* أصفار المقام: $س^2 + 2س - 3 = 0 \Leftarrow (س - 1)(س + 3) = 0$

$\Leftarrow س = 1 \text{ ، } -3$

مجال $هـ(س) = ح \cap ح - \{1، -3\} = ح - \{-3، 1\}$

* قاعدة/ إذا كان كل من بسط ومقام الاقتران النسبي كثير حدود فإن مجال الاقتران النسبي $= ح - \{\text{أصفار المقام}\}$

تدريب (٢)/ أوجد/ي مجال كل من الاقترانات النسبية التالية:-

(١) $هـ(س) = \frac{س + 3}{س^2 - 2س - 3}$ (٢) $ل(س) = \frac{س^2 + 6س + 5}{س - 4}$

* مجال اقتران الجذر التربيعي/ مجال اقتران الجذر التربيعي $\sqrt{هـ(س)}$

$= \{س : هـ(س) \geq 0\}$ ولإيجاد مجال الجذر التربيعي

(١) نجعل إشارة ما داخل الجذر التربيعي.

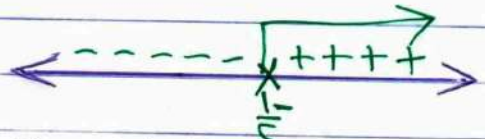
(٢) يكون مجال اقتران الجذر التربيعي هو الصفر والموجبة وأصفار الاقتران

مثال (٣)/ أوجد/ي مجال الاقترانات التالية:-

(أ) $هـ(س) = \sqrt{2س + 1}$

$2س + 1 = 0 \Leftarrow 2س = -1$

$\Leftarrow س = -\frac{1}{2}$

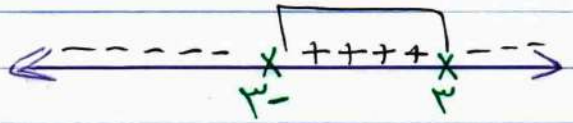


مجال $هـ(س) = [-\frac{1}{2}، \infty[$

ب) $هـ(س) = \sqrt{-س^2 + 9}$

$-س^2 + 9 = 0 \Leftarrow -س^2 = -9 \Leftarrow س^2 = 9 \Leftarrow س = \pm 3$

مجال $هـ(س) = [-3, 3]$



تدريب ٣ / أوجد/ي مجال كل من الاقترانات التالية :-

١) $د(س) = \sqrt{س - ١}$ ٢) $هـ(س) = \sqrt{س^2 + ٤س - ١٢}$

* مجال الاقتران المثلثي $(جا س) = ح$

ومجال الاقتران المثلثي $جتا س = ح$

مجال الاقتران المثلثي $ظا س = ح - \{\frac{\pi}{2} \pm ن\pi : ن \in ص\}$.

اقتران القيمة المطلقة

* القيمة المطلقة لعدد هي بُعد العدد عن الصفر على خط الأعداد

مثال/ |٣| = ٣ ، |-٥| = ٥ ، |-٢٫٢| = ٢٫٢ وهكذا...

* ويُسمى الاقتران الذي يكتب على الصورة $ق(س) = |س|$ اقتران القيمة المطلقة

ويمكن كتابته بدون استخدام رمز القيمة المطلقة كما يأتي :-

$$ق(س) = \begin{cases} س & ، س \geq 0 \\ -س & ، س < 0 \end{cases}$$

* خطوات إعادة تعريف إقتران القيمة المطلقة :-

① نثبت إشارة ما داخل رمز القيمة المطلقة.

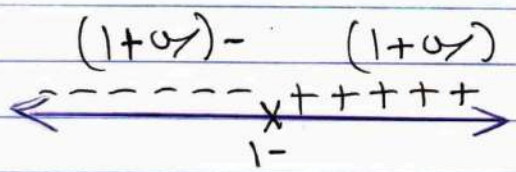
② في الفترات الموجبة يبقى ما داخل القيمة المطلقة كما هو وفي الفترات السالبة يضرب ما داخل رمز القيمة المطلقة بـ -١.

③ تظهر إشارة المساواة في مجال القاعدة التي تحوي نقطة ما داخل القيمة المطلقة.

مثال أعد/أعيدي تعريف كل من الاقترانات التالية :-

① $ق(س) = |س + ١|$

$س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -١$



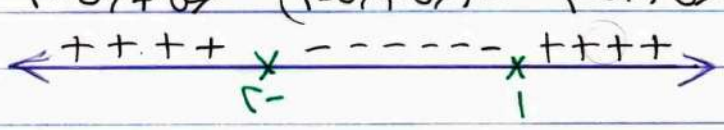
$$ق(س) = \begin{cases} -(س+١) & ، س < -١ \\ س + ١ & ، س \geq -١ \end{cases}$$

② $هـ(س) = |س^2 + س - 2|$

$س^2 + س - 2 = 0$

$(س - 1)(س + 2) = 0$

$س = 1 ، -2$



$$هـ(س) = \begin{cases} س^2 + س - 2 & ، س \geq 1 \\ -(س^2 + س - 2) & ، -2 < س < 1 \\ س^2 + س - 2 & ، س \leq -2 \end{cases}$$

تدريب ①/ أعد/أعيدي تعريف كل من الاقترانات دون استخدام رمز القيمة المطلقة

① $هـ(س) = |س + 7|$

② $هـ(س) = |2 - 3س|$

③ $هـ(س) = |2س + 5|$

④ $لـ(س) = |4 - س^2|$

⑤ $م(س) = |س^3 - س|$

⑥ $هـ(س) = |ظا س|$ ، $س \in [0, \pi]$

⑦ $هـ(س) = |10س - س^2|$

⑧ $هـ(س) = \left|\frac{س - 1}{س + 2}\right|$

*** خصائص القيمة المطلقة/**

① $|س| \geq$ صفر

② $|-س| = |س|$

③ $|س| = ع \Leftrightarrow س = ع$ أو $س = -ع$

④ $|س| \leq ع \Leftrightarrow -ع \leq س \leq ع$

⑤ $|س| \geq ع \Leftrightarrow س \geq ع$ أو $س \leq -ع$

⑥ $|س ص| = |س||ص|$

⑦ $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$

⑧ $|س - ص| = |ص - س|$

م. هدى فتح

⑨ $|س|^2 = س^2$ ، $|س| = \sqrt{س^2}$

أمثلة / ① $|س| = ٧ \Leftrightarrow$ إما $س = ٧$ أو $س = -٧$

② $|س| \geq ١ \Leftrightarrow -١ \geq س \geq ١$

③ $|س| \geq ٩ \Leftrightarrow$ إما $س \geq ٩$ أو $س \leq -٩$

* التمثيل البياني لاقتران القيمة المطلقة :-

الخطوات / ① نرسم اقتران ما داخل القيمة المطلقة .

② نعكس في محور السينات الجزء من المنحنى الواقع تحت محور السينات .

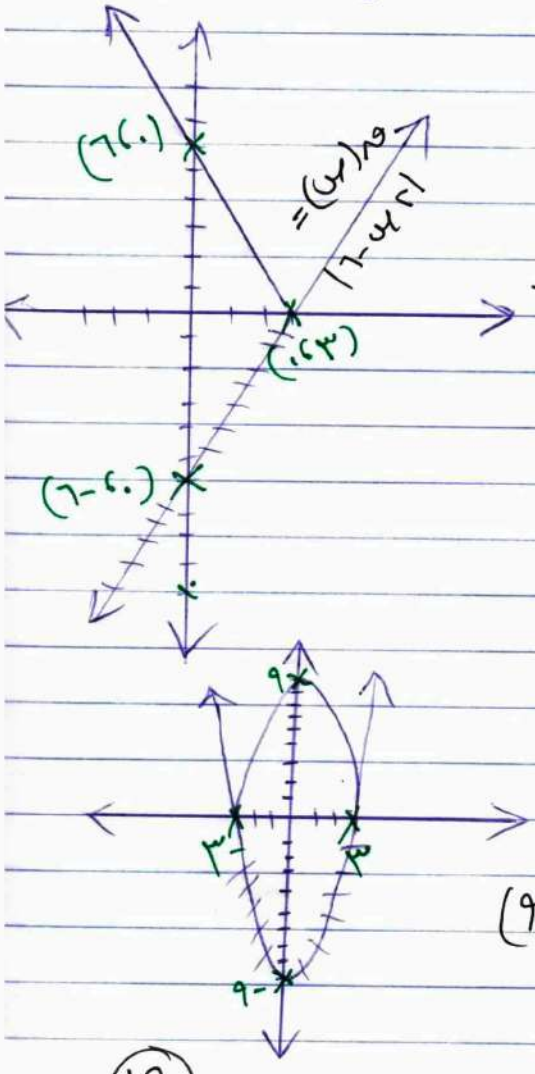
مثال / مثل / ي بيانياً الاقترانات التالية :-

① $ق(س) = |٢س - ٦|$

① نرسم $٢س - ٦$

الحل / * عندما $ص = ٠ \Leftarrow ٢س - ٦ = ٠ \Leftarrow ٢س = ٦$

$\therefore س = ٣$



النقطة الأولى $(٠،٣)$

* عندما $س = ٠ \Leftarrow ص = -٦$

النقطة الثانية $(-٦،٠)$

② $ق(س) = |س^2 - ٩|$

* نرسم $س^2 - ٩$

إحداثيات نقطة الرأس $(\frac{-ب}{٢أ}، ق(\frac{-ب}{٢أ})) = (٠، -٩)$

* المقطع السيني $س^2 - ٩ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$

تدريب ② مثل/ي بيانياً كل من الاقترانات التالية:-

① $هـ(س) = |٣س - ٢|$

② $هـ(س) = |س^٢ - ١|$

③ $ل(س) = |٥ - ٢س|$

④ $هـ(س) = |٢س - ٤|$

⑤ $هـ(س) = |٤س - س^٢|$

⑥ $م(س) = -|س^٢ + ٦س + ٥|$

⑦ $م(س) = |٤ - س^٢|$

إقتران أكبر عدد صحيح

تعريف: أكبر عدد صحيح للعدد س هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي العدد س ويرمز له بالرمز [ ]

أو/ هو أكبر عدد صحيح على يسار العدد المطلوب (س) على خط الأعداد

مثال/ [٣] = ٣ ، [-٧] = -٧ ، [٢,٥] = ٢

[-٦,٢] = -٣ ، [-٠,٥] = -١ ، [٦,٧] = ٦

قاعدة/ لكل س ∈ ح ، [س] = ن حيث ن ≤ س < ن+١ ، ن ∈ ص

وبشكل عام د(س) = [أ س + ب] فإن [أ س + ب] = ن

حيث ن ≤ أ س + ب < ن+١

* وتوظف القاعدة السابقة في حل المعادلات وتكون مجموعة الحل على شكل متباينة.
* ليكن د(س) = [س] اقتران متعدد القاعدة حيث د: ح ← ص وليكن الاقتران الكلي.
* طول الدرجة = $\frac{١}{\text{معامل س}}$ (موجبة دائماً).
* لإيجاد مفكوك د(س) = [س]

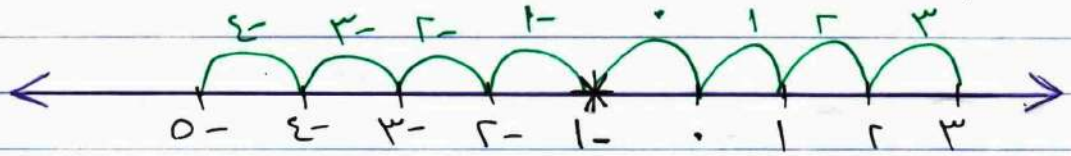
(أ) عندما يكون معامل س موجب.

مثال ① د(س) = [س + ١]

* طول الدرجة = $\frac{١}{١}$ = ①

* معامل س موجب

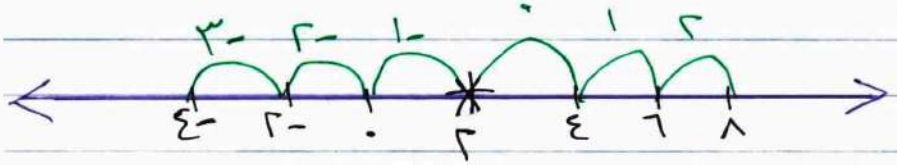
* س + ١ = ٠ ⇐ س = -١



هـ(س) = { -٢ ، س < -٢ ، -٣ ≤ س
-١ ، س < -١ ، -٢ ≤ س
٠ ، س < ٠ ، -١ ≤ س
١ ، س < ١ ، ٠ ≤ س
٢ ، س < ٢ ، ١ ≤ س

مثال ② هـ(س) = [½ س - ١]

* طول الدرجة = $\frac{١}{|\frac{١}{٢}|} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ②$



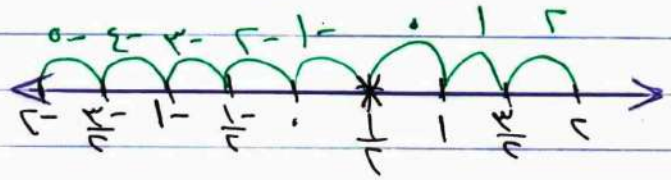
* معامل س موجب

* ½ س - ١ = ٠ ⇐ ½ س = ١ ⇐ س = ٢

هـ(س) = { -٢ ، س < ٠ ، -٢ ≤ س
-١ ، س < ٢ ، ٠ ≤ س
٠ ، س < ٤ ، ٢ ≤ س
١ ، س < ٦ ، ٤ ≤ س
٢ ، س < ٨ ، ٦ ≤ س

مثال ③ $هـ(س) = [٢س - ١]$ ، $س \in [0, 1]$

* طول الدرجة $= \frac{1}{|٢|} = \frac{1}{٢}$



* معامل س موجب

* $٢س - ١ = ٠ \Leftarrow ٢س = ١$

$\Leftarrow س = (\frac{1}{٢})$

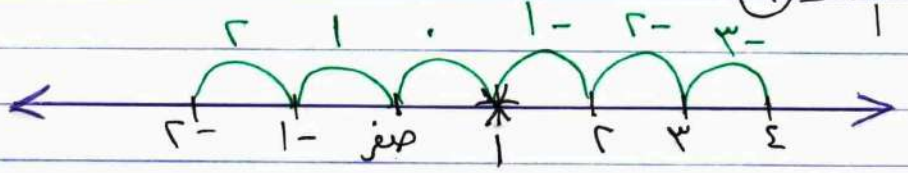
$$هـ(س) = \begin{cases} -٢ & ، -\frac{1}{٢} \leq س < ٠ \\ -١ & ، ٠ \leq س < \frac{1}{٢} \\ ٠ & ، \frac{1}{٢} \leq س < ١ \\ ١ & ، ١ \leq س < \frac{3}{٢} \end{cases}$$

$$هـ(س) = \begin{cases} -١ & ، ٠ \leq س < \frac{1}{٢} \\ ٠ & ، \frac{1}{٢} \leq س < ١ \\ ١ & ، س = ١ \end{cases}$$

ب) عندما يكون معامل س سالب :-

مثال ① : $هـ(س) = [١ - س]$

* طول الدرجة $= \frac{1}{|-١|} = \frac{1}{١} = ①$



* معامل س سالب

* $١ - س = ٠ \Leftarrow -س = -١$

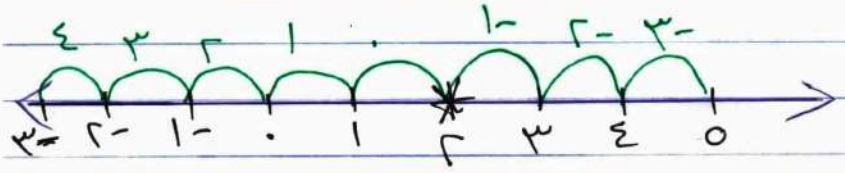
$\Leftarrow س = ١$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٢ & ، -٢ < س \leq -١ \\ ١ & ، -١ < س \leq ٠ \\ ٠ & ، ٠ < س \leq ١ \\ -١ & ، ١ < س \leq ٢ \\ -٢ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$$

مثال ② / $هـ(س) = [\![-٢س]\!]$ ، $-٣ \leq س \leq ٠$

* طول الدرجة $= \frac{١}{|-١|} = ١$ ①

* معامل س سالب



* $-٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \Leftarrow -٢س = -٢$

$\Leftarrow س = ٢$

$$هـ(س) = \begin{cases} ٥ & ، & -٣ \leq س < -٢ \\ ٤ & ، & -٢ \leq س < -١ \\ ٣ & ، & -١ \leq س < ٠ \\ ٢ & ، & ٠ \leq س < ١ \\ ١ & ، & ١ \leq س < ٢ \\ ٠ & ، & ٢ \leq س < ٣ \\ -١ & ، & ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$$

$$\text{ن } هـ(س) = \begin{cases} ٥ & ، & -٣ \leq س < -٢ \\ ٤ & ، & -٢ \leq س < -١ \\ ٣ & ، & -١ \leq س < ٠ \\ ٢ & ، & ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

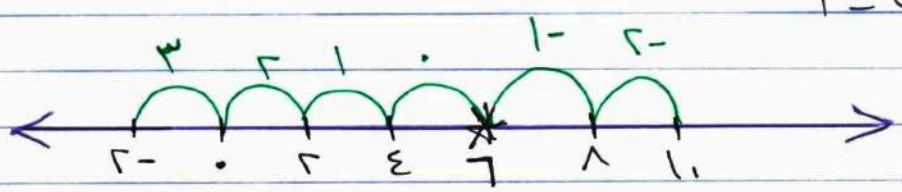
مثال ③ / $لـ(س) = [\![-٣ - \frac{١}{٢}س]\!]$ ع الفترة $[٢ ، ٧]$

* طول الدرجة $= \frac{١}{|-\frac{١}{٢}|} = \frac{١}{|\frac{١}{٢}|} = ٢$ ②

* معامل س سالب

* $-٣ - \frac{١}{٢}س = ٠ \Leftarrow -\frac{١}{٢}س = ٣$

$\Leftarrow \frac{١}{٢}س = -٣ \Leftarrow س = ٦$



$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & ، & ٠ < س \leq ٢ \\ ١ & ، & ٢ < س \leq ٤ \\ ٠ & ، & ٤ < س \leq ٦ \\ -١ & ، & ٦ < س \leq ٨ \\ -٢ & ، & ٨ < س \leq ١٠ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & ، & س = ٢ \\ ١ & ، & ٢ < س \leq ٤ \\ ٠ & ، & ٤ < س \leq ٦ \\ -١ & ، & ٦ < س \leq ٨ \end{cases}$$

تدريب/ أوجد/ي مجموعة الاقترانات التالية:-

① $[\frac{١}{٢}س - ٣]$ ② $[-٢س - ٦]$

م. هدى فرج

النهايات والاتصال

* قواعد هامة /

① $\lim_{س \to أ} ع = ع$ مثال / $\lim_{س \to -٢} ٥ = ٥$

② $\lim_{س \to ٣} س^٢ + ٧س = (٣)^٢ + ٧(٣) = ٩ + ٢١ = ٣٠$

③ $\lim_{س \to ٣} \frac{س + ٤}{س - ٥} = \frac{٣ + ٤}{٣ - ٥} = \frac{٧}{-٢}$

④ $\lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س^٤ + ٧} = \frac{٥ - ٥}{٦٢٥ + ٨} = \frac{٠}{٦٣٣} =$ صفر

⑤ $\lim_{س \to ٣} \frac{س}{س - ٣} = \frac{٣}{٠} =$ غير معرف .

⑥ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٥ - ٥}{س^٤ - ٦٢٥} = \frac{٥ - ٥}{٦٢٥ - ٦٢٥} = \frac{٠}{٠}$ (كمية غير معينة)

$$\lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)}{(س + ٥)(س - ٥)} = \lim_{س \to ٥} \frac{١}{س + ٥} = \frac{١}{١٠}$$

⑦ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

⑧ $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا أ س}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

⑨ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{ظا س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س}{جا ب س} = \frac{أ}{ب}$

⑩ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا أ س}{ظا ب س} = \frac{أ}{ب}$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا أ س}{ظا ب س} = \frac{أ}{ب}$

٢.٥ هدى فتح

تدريب ① أوجد:

① $\lim_{س \to -٤} ٣$

② $\lim_{س \to ١} ٥س^{٢} + ٣س$

③ $\lim_{س \to ٧} \frac{س - ٧}{س^{٢} + ١}$

④ $\lim_{س \to ٥} \frac{س}{س - ٥}$

⑤ $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤}$

⑥ $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٥س}{ظا ٣س}$

قاعدة/ تكون $\lim_{س \to ٩} د(س) = ل$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{س \to ٩^{+}} د(س) = \lim_{س \to ٩^{-}} د(س) = ل$

مثال ①/ احسب/ ابحثي في وجود $\lim_{س \to ١} د(س)$ إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س < ١ \\ ٤ - س^{٢} & ، س \geq ١ \end{cases}$$

الحل $\lim_{س \to ١^{+}} د(س) = \lim_{س \to ١^{+}} س^{٢} - ١ = (١)^{٢} - ١ = ٠$ ①

$\neq$

$\lim_{س \to ١^{-}} د(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ٤ - س^{٢} = ٤ - (١)^{٢} = ٤ - ١ = ٣$ ③

$\lim_{س \to ١^{-}} د(س) \neq \lim_{س \to ١^{+}} د(س)$ $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة.

مثال ②/ إذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س < ٥ \\ ٤س - ١٢ & ، س > ٥ \end{cases}$ إبحث في وجود $\lim_{س \to ٥} د(س)$

الحل $\lim_{س \to ٥^{+}} د(س) = \lim_{س \to ٥^{+}} ٤س - ١٢$

$= ٤(٥) - ١٢ = ٢٠ - ١٢ = ٨$ ⑧

أ. هدى فرج

$$\lim_{س \to 0^-} هـ(س) = \lim_{س \to 0^-} \frac{س^2 - 9}{س - 3} = \lim_{س \to 0^-} \frac{(س-3)(س+3)}{(س-3)} = \lim_{س \to 0^-} (س+3) = 0+3 = 3 \quad (1)$$

$$\lim_{س \to 0^+} هـ(س) = \lim_{س \to 0^-} هـ(س) = 3 \quad (1) \quad \text{(النهاية موجودة)}$$

مثال (3) / أوجد/ي قيمة $أ$ التي تجعل الاقتران $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + 2س & ، س \geq 2 \\ 5س + أ & ، س < 2 \end{cases}$ له نهاية موجودة عند $س = 2$

الحل) بما أن $\lim_{س \to 2} هـ(س)$ موجودة

$$\text{إذن } \lim_{س \to 2^+} هـ(س) = \lim_{س \to 2^-} هـ(س)$$

$$أ + 5(2) = (2)^2 + 2(2)$$

$$أ + 10 = 4 + 4$$

$$أ + 10 = 8 \Leftarrow \boxed{أ = -2}$$

تدريب (2) / ابحث/ي عن وجود النهاية لكل من الاقترانات التالية :-

(1) $هـ(س) = \frac{|س - 1|}{س - 1}$ عند $س = 1$

(2) $هـ(س) = \begin{cases} [\frac{س}{2}] + س & ، -2 \leq س < 2 \\ 2 & ، 2 \leq س < 4 \end{cases}$ عندما $س = 2$ وعندما $س = 0$

* الإتصال *

أولاً / الإتصال عند نقطة :-

يكون الاقتران $د(س)$ متصلاً عند $س = أ$ إذا كان $د(أ) = \lim_{س \to أ} د(س)$

مثال ① / إذا كان $د(س) = \begin{cases} \sqrt{س^2 + 7} & ، س < 3 \\ \frac{8}{س - 2} & ، س \geq 3 \end{cases}$

ابحثي في اتصال $د(س)$ عند $س = 3$

الحل $د(3) = \frac{8}{3-2} = 8$

① $\lim_{س \to 3^-} د(س) = \lim_{س \to 3^-} \sqrt{س^2 + 7} = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$

② $\lim_{س \to 3^+} د(س) = \lim_{س \to 3^+} \frac{8}{س - 2} = \frac{8}{3-2} = 8$

من ① و ② $\lim_{س \to 3^+} د(س) \neq \lim_{س \to 3^-} د(س)$ $\Leftarrow$ $\lim_{س \to 3} د(س)$ غير موجودة

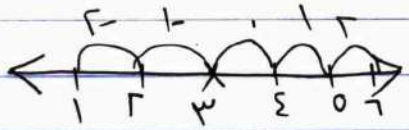
$\therefore د(س)$ غير متصل عند $س = 3$

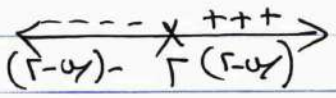
مثال ② / إذا كان $د(س) = \begin{cases} [س - 3] & ، س \leq 2 \\ \frac{|س - 2|}{س - 2} & ، س > 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال $د(س)$ عند $س = 2$

الحل نجد تعريف $[س - 3]$

نجد تعريف $|س - 2|$





$$د(س) = \begin{cases} -1 & ، \ 2 \leq س < 3 \\ \frac{-(س-2)}{(س-2)} & ، \ س < 2 \end{cases}$$

$$\text{نه } د(س) = \begin{cases} -1 & ، \ 2 \leq س < 3 \\ -1 & ، \ س < 2 \end{cases}$$

$$د(2) = -1$$

$$\text{هـ}_{س \to 2^+} د(س) = -1 \quad ، \quad \text{هـ}_{س \to 2^-} د(س) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{هـ}_{س \to 2} د(س) = -1$$

$$\text{به } د(2) = \text{هـ}_{س \to 2} د(س) = -1 \quad \text{نه الاقتران متصل عند } س = 2$$

تدريب ③ / ⓐ إذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{|س-1|}{س-1} & ، \ س \neq 1 \\ 0 & ، \ س = 1 \end{cases}$

ابحث الاتصال عند $س = 1$

ⓑ ابحث في اتصال $د(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، \ س < 0 \text{ ، عند } س = 0 \\ 1 - 2 \text{ جتا } س & ، \ س \geq 0 \end{cases}$

ⓒ إذا كان $د(س) = \begin{cases} س^2 - س + 1 & ، \ |س| < 2 \\ س + 1 & ، \ [س] = 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال $د(س)$

عند $س = 2$

أ. هدى فتح

* ملاحظات هامة / ① جميع كثيرات الحدود متصلة على ح.

② الاقتران النسبي متصل على ح ماعدا أصفار المقام.

③ جا س ، جتا س متصلان على ح.

④ اقتران القيمة المطلقة متصل على ح.

⑤ الجذور الفردية متصلة على ح.

⑥ الجذور الزوجية متصلة عندما يكون ما داخل الجذر متصل وموجب.

⑦ [س] ← متصل عندما س ∉ صـ
غير متصل عندما س ∈ صـ

⑧ إذا كان د(س) ، هـ(س) متصلان عند س = أ فإن

① د(س) ± هـ(س) متصل.

② د(س) / هـ(س) متصل ، حيث هـ(س) ≠ ٠

③ جـ د(س) متصل حيث جـ ∈ ح.

مثال / ① د(س) = س^٤ + ٥س - ٧ متصل على ح.

② م(س) = ٦ متصل على ح

③ د(س) = ٥ جا ٢س + ٣ جتا (س^٢ + ١) متصل على ح

④ د(س) = ١ / (س - ٢) + ٥س متصل على ح - {٢}

⑤ د(س) = (س + ٢) / (س^٢ - ٣س - ٤) متصل على ح - {-١ ، ٤}

⑥ $هـ(س) = |س - 1| + جا س$ متصل على ح.

⑦ $هـ(س) = \sqrt{س - 5}$ متصل على $[5 ، \infty[$

⑧ $هـ(س) = \sqrt{9 - س^2}$ متصل على $[-3 ، 3]$

⑨ $هـ(س) = س ظا س = \frac{س جا س}{جتا س}$ متصل على ح $- \{\frac{\pi}{2} ، \frac{3\pi}{2}\}$

مثال/ أوجد قيمة ر التي تجعل الاقتران $هـ(س) = \begin{cases} \frac{جا 2س}{ر} & ، س \neq 0 \\ 1 & ، س = 0 \end{cases}$ متصلاً عند $س = 0$

الحل بما أن $هـ(س)$ متصلاً عند $س = 0$ $\Leftarrow$ $هـ(0) = \lim_{س \to 0} هـ(س)$

$$\lim_{س \to 0} هـ(س) = \lim_{س \to 0} \frac{جا 2س}{2س} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore هـ(0) = \lim_{س \to 0} هـ(س)$$

$$ر = \lim_{س \to 0} هـ(س) \Leftarrow ر = \frac{1}{2}$$

تدريب/ ① إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} \frac{جا 3س}{جا 2س} & ، س \neq 0 \\ ل & ، س = 0 \end{cases}$ أوجد قيمة ل التي تجعل $هـ(س)$ متصلاً عند $س = 0$

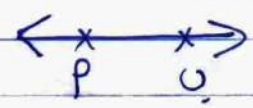
② ليكن $هـ(س) = \begin{cases} ر - ب ظا س & ، 0 < س < \frac{\pi}{4} \\ ب + \frac{4س}{\pi} & ، س > \frac{\pi}{4} \\ 3 & ، س = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

أوجد قيمة ر ، ب حيث $هـ(س)$ متصل عند $س = \frac{\pi}{4}$

ثانياً/ الاتصال على فترة :-

لكي يكون الاقتران متصلاً على $[أ، ب]$ يجب أن يحقق الشروط الثلاثة معاً:

① $د(س)$ متصل على $]أ، ب[$



② $د(س)$ متصل عند $س = أ$ من اليمين أي أن $د(أ) = \lim_{س \to أ^+} د(س)$

③ $د(س)$ متصل عند $س = ب$ من اليسار أي أن $د(ب) = \lim_{س \to ب^-} د(س)$

ملاحظة/ إذا كان $د(س)$ متصلاً على أي فترة فإنه يكون متصلاً على أي فترة جزئية منها.

مثال/ إذا كان $د(س) = \begin{cases} 3 - س^2 & -2 \le س \le 1 \\ س + 1 & 1 < س \le 2 \end{cases}$

ابحث في الاتصال على الفترة $[-2، 2]$

الحل/ القواعد/ الاقتران $3 - س^2$ متصل على $]-2، 1[$ لأنه كثير حدود.

الاقتران $س + 1$ متصل على $]1، 2[$ لأنه كثير حدود.

نقاط الخوف/ عند $س = 1$

$د(1) = 3 - (1)^2 = 2$ ② $\lim_{س \to 1^+} س + 1 = 2$ و $\lim_{س \to 1^-} 3 - س^2 = 2$

$\therefore د(1) = \lim_{س \to 1} د(س)$ ② $\Leftarrow$ $د(س)$ متصل عند $س = 1$

م. هدى فتح

الأطراف / عند $س = -٢$

$د(-٢) = ٣ - (-٢)^{٢} = ①$ و $\lim_{س \to -٢^{+}} ٣ - س = ②$

$\therefore$ الاقتران متصل عند $س = -٢$ من اليمين لأنه $د(-٢) = \lim_{س \to -٢^{+}} د(س)$

عند $س = ٢$

$د(٢) = ٢ + ١ = ③$ و $\lim_{س \to ٢^{-}} س + ١ = ③$

$\therefore$ الاقتران متصل عند $س = ٢$ من اليسار لأنه $د(٢) = \lim_{س \to ٢^{-}} د(س)$

$\therefore د(س)$ متصل على $[-٢، ٢]$

تدريب ①/ إذا كان $د(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، -٤ \leq س < ١ \\ [\frac{١}{٣} س + ٤] & ، ١ \leq س \leq ٦ \end{cases}$

ابحث في اتصال $د(س)$ على $[-٤، ٦]$

② إذا كان $د(س) = \begin{cases} \frac{جا ٢س}{٥س} & ، -٢ \leq س < ٠ \\ ٤ & ، س = ٠ \\ ب(٢ + س) & ، ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$

جد/ جدي قيمة $ا$ و $ب$

إذا كان $د(س)$ متصلاً

على $[-٢، ٢]$

P.0 هدى فوزي

التاريخ: / / اليوم: الدرس: فيديو (١)

حل تدريبات ص (٢)

تدريب (١)

(١) $د(س) = ٣س - ٦$ (بطريقة الاعتراض)

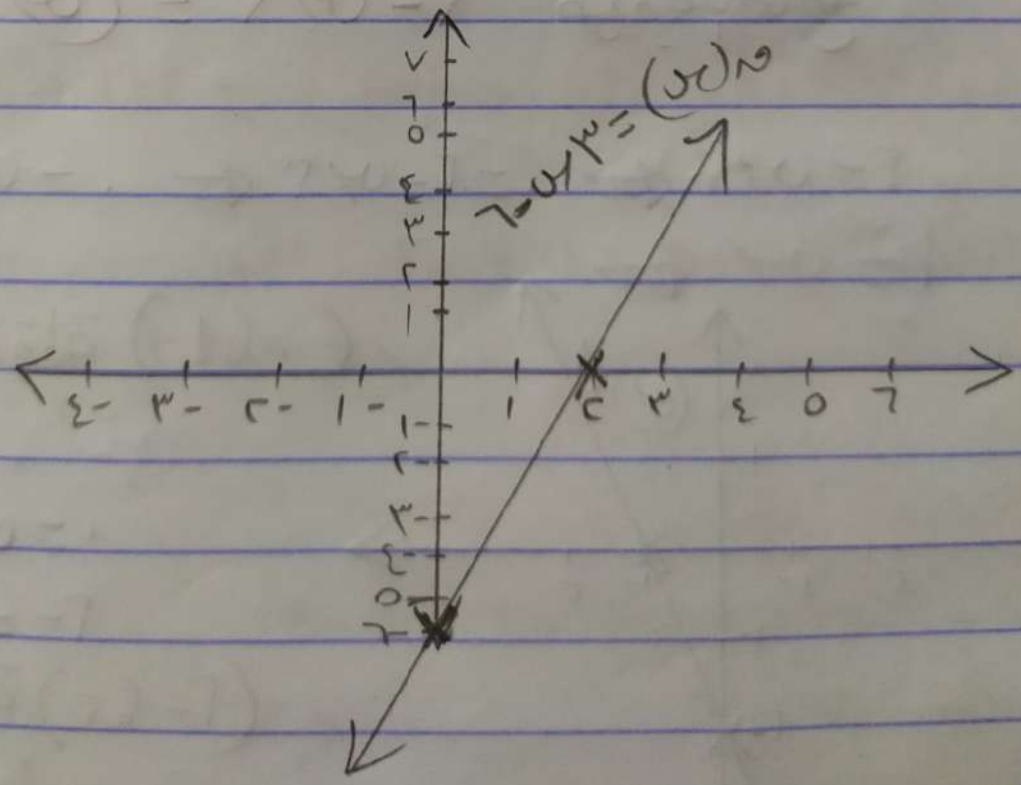
عندما ص = ٠

$٣س - ٦ = ٠ \Leftarrow ٣س = ٦ \Leftarrow س = ٢$

(٢، ٠) النقطة الأولى

عندما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = -٦

(٠، -٦) النقطة الثانية

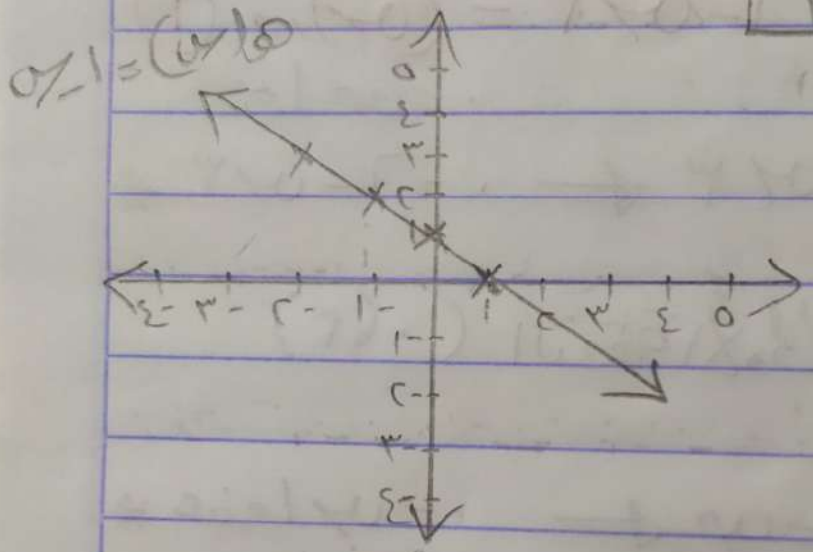


الدرس: اليوم: التاريخ: ٩/

رسم الدوال

② $هـ(س) = 1 - س$

س	١	٠	١-	٢-
هـ(س)	٠	١	٢	٣

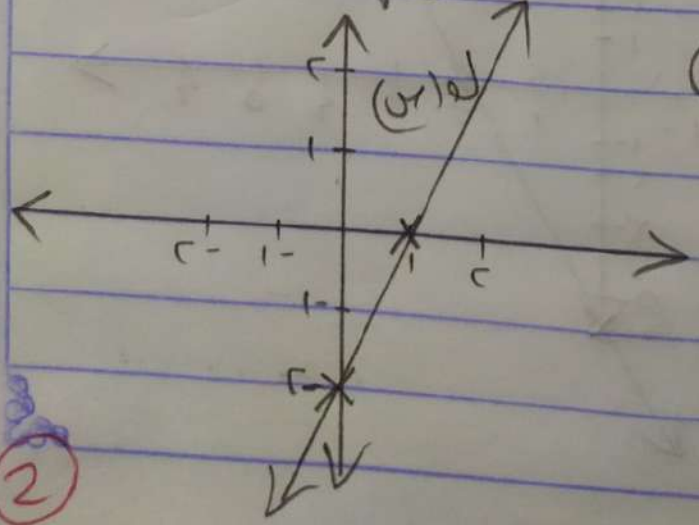


③ $ل(س) = ٢س - ٢$ طريقة التقاطع

* عندما ص = ٠ ⟵ $٢س - ٢ = ٠$ ⟵ $٢س = ٢$

$س = 1$ ⟵

∴ النقطة (١، ٠)



* عندما س = ٠

⟵ ص = -٢

∴ النقطة (٠، -٢)

التاريخ: / / اليوم: الدرس:

المشتقات

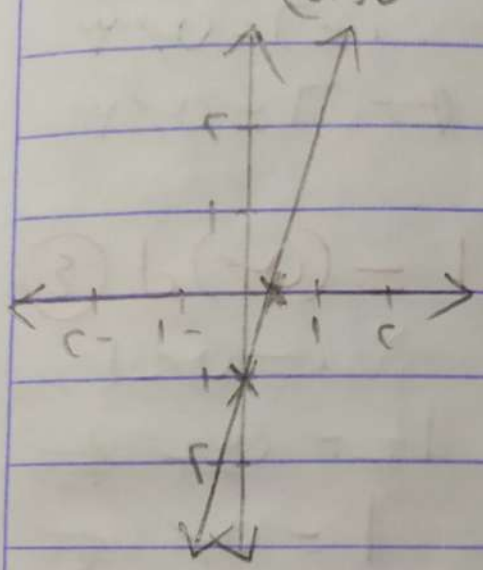
④ $ل(س) = ٢س - ١$

عندما $ص = ٠$ ⟵ $٢س - ١ = ٠$

$٢س = ١$ ⟵

$س = \frac{١}{٢}$ ⟵

∴ النقطة $(\frac{١}{٢}، ٠)$

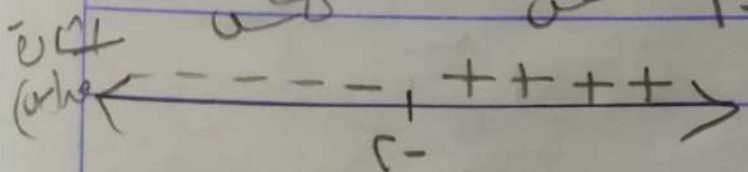


عندما $س = ٠$ ⟵ $ص = -١$

∴ النقطة $(٠، -١)$

تدريب ② ① $هـ(س) = س + ٢$

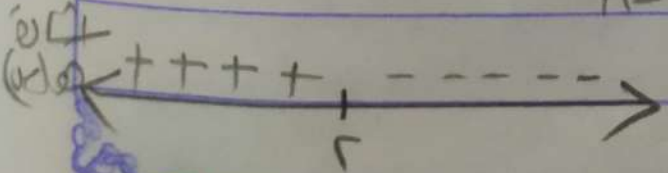
$س + ٢ = ٠$ ⟵ $س = -٢$ نقف عكس



② $هـ(س) = ٨ - ٤س$

$٨ - ٤س = ٠$ ⟵ $-٤س = -٨$

$س = ٢$ ⟵

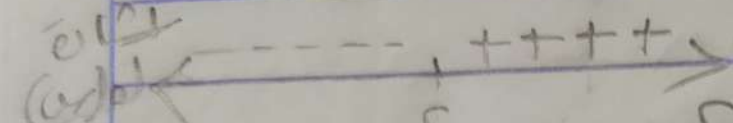


③ $ق(س) = ٣س^{٢} - ٦س$

$٣س^{٢} - ٦س = ٠$

$٣س(س - ٢) = ٠$

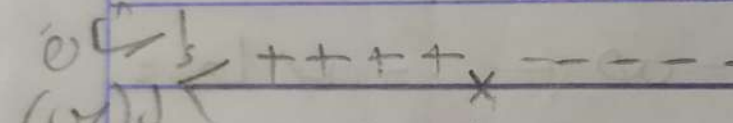
$س = ٠$ أو $س = ٢$



④ $ك(س) = ١ - س$

$١ - س = ٠$

$س = ١$



م. هدى كاظم

P.هدى فؤاد

التاريخ: / / اليوم: المدرس: محمد يوسف ②

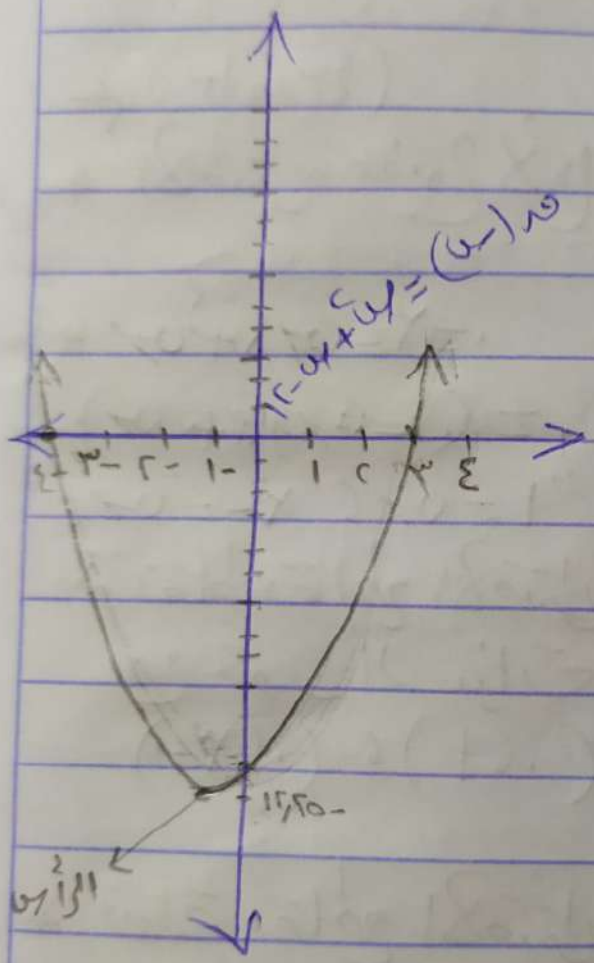
حل تدريبات ص 5

تدريب ① ① $ق(س) = س^2 + 6س - 12$

* إحداثيات نقطة الرأس

$(-\frac{1}{2}، ق(-\frac{1}{2}))$

$= (-\frac{1}{2}، -12,25)$



* القطع موضع الرأس

* $س^2 + 6س - 12 = 0$

$(س - 2)(س + 6) = 0$

إما $س = 2$ أو $س = -6$

∴ نقاط تقاطع الاختبار مع محور السينات $(2، 0)، (-6، 0)$

* نقطة تقاطع الاختبار مع محور الصادات عندما $س = 0$

$\Leftarrow (0، -12)$

الدرس:

اليوم:

التاريخ:

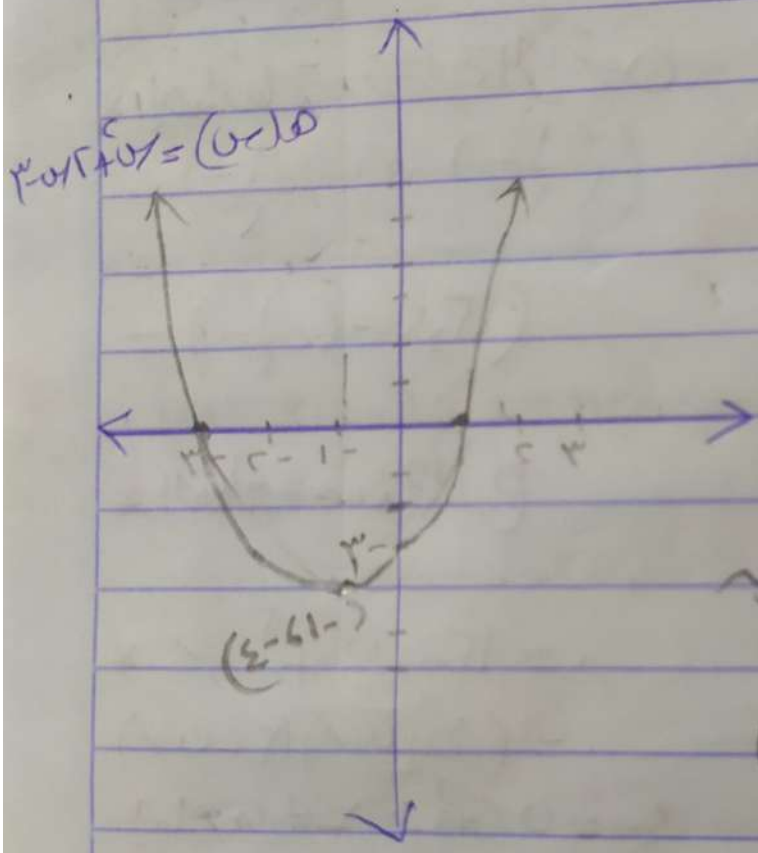
أ، هدى فوزي

(٢) $هـ(س) = س^2 + ٢س - ٣$

* إحداثيات الرأس $(\frac{-ب}{٢أ}، هـ(\frac{-ب}{٢أ}))$

$\Leftarrow (-١، -٤)$

* الاقتران مفتوح لأعلى



* $س^2 + ٢س - ٣ = ٠$

$(س + ٣)(س - ١) = ٠$

$س = -٣ ، س = ١$

نقاط تقاطع الاقتران مع محور السينات

$(٠، -٣) ، (٠، ١)$

* نقطة تقاطع الاقتران مع محور الصادات

$(٠، -٣)$

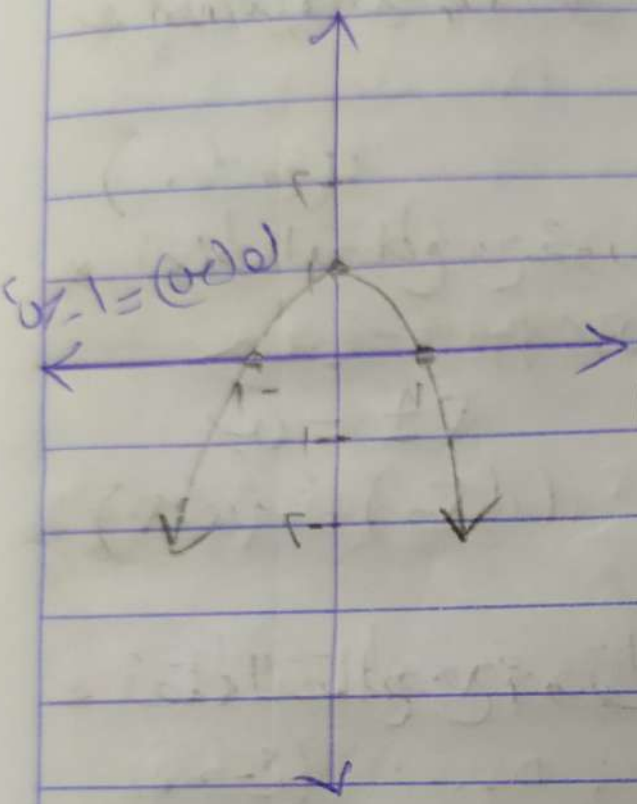
الدرس: اليوم: التاريخ:

أ. هدى فرج

③ $ق(س) = 1 - س^2$

* إحداثيات نقطة الرأس
(0، 1)

* الاتجاه مفتوح لأسفل



* $1 - س^2 = 0$

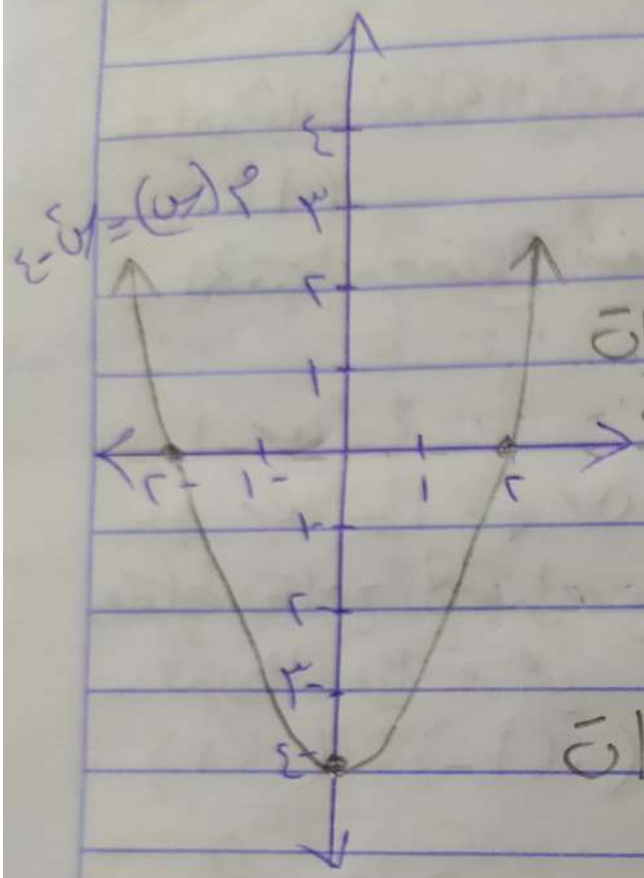
$س^2 = 1 \Leftarrow س = \pm 1$

نقاط تقاطع الاتجاه مع محور السينات هي
(1، 0) ، (-1، 0)

نقطة تقاطع الاتجاه مع محور الصادات هي
(0، 1)

الدرس: اليوم: التاريخ:

④ $م(س) = س^2 - 4$



* إحداثيات نقطة الرأس

$(0، -4)$

* نقاط التقاطع مع محور السينات

$س^2 - 4 = 0 \Leftarrow م(س) = 0$

$س^2 = 4$

$س = \pm 2$

$(2، 0)$ و $(-2، 0)$

* نقاط التقاطع مع محور الصادات

$(0، -4)$

المرس: اليوم: التاريخ:

تدريب (2) ص (7) ع ـــــ أ. هدى فتوح

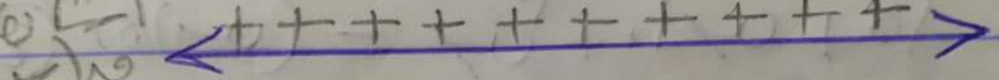
① $ق(س) = س^2 + 0.3س + 0.4$

المميز $ب^2 - 4أ جـ$

$(0.4)(1)4 - (0.3)^2$

$= 0.09 - 1.6 < 0$ ليس لها جذور حقيقية

$ق(س)$ موجبة لكل $س \in ح$



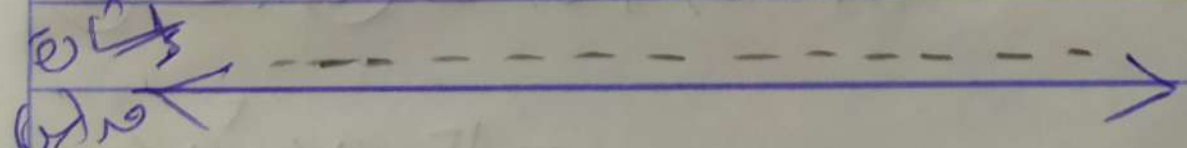
② $ق(س) = -س^2 + 0.3س - 0.5$

المميز $ب^2 - 4أ جـ$

$(-0.5)(-1)4 - (0.3)^2$

$= 0.09 - 2.0 < 0$ ليس لها جذور حقيقية

$ق(س)$ سالبة لكل $س \in ح$



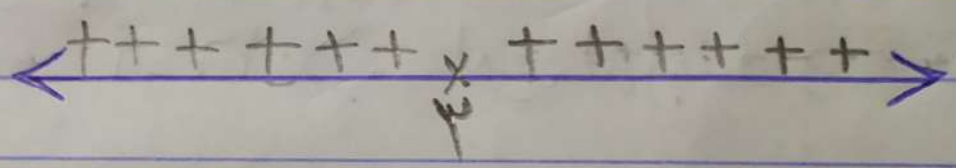
الدرس: اليوم: التاريخ: ٢٠٢٠/٩/٢٠

(٣) $ق(س) = س^2 - ٦س + ٩$

$س^2 - ٦س + ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٣) = ٠$

$\therefore س = ٣$

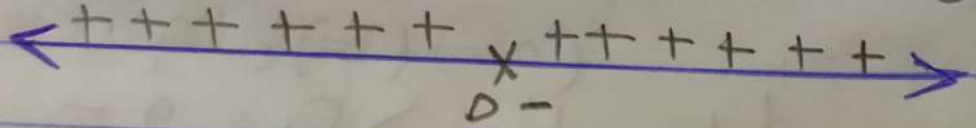


(٤) $ق(س) = س^2 + ١٠س + ٢٥$

$س^2 + ١٠س + ٢٥ = ٠$

$(س + ٥)(س + ٥) = ٠$

$س = -٥$

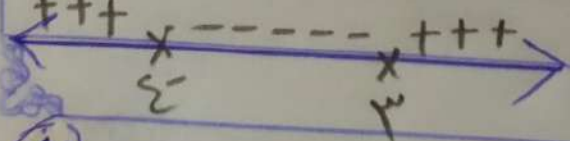


(٥) $ق(س) = س^2 + ١س - ١٢$

$س^2 + س - ١٢ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٤) = ٠$

$س = ٣ ، س = -٤$



الدرس: اليوم: التاريخ: ٢٠/ ٩/ ٢٠٢٠

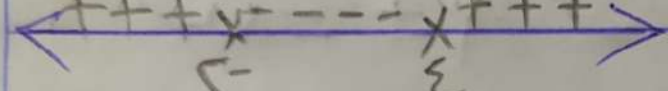
⑥ $م(س) = ٢س^٢ - ٤س - ١٦$

$٢س^٢ - ٤س - ١٦ = ٠$ (÷ ٢)

$س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$

$(س + ٢)(س - ٤) = ٠$

$س = -٢ ، ٤$



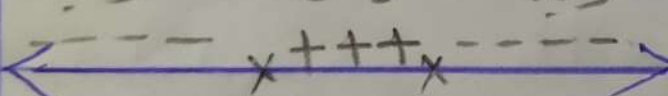
⑦ $ع(س) = س - س^٢$

$-س^٢ + س = ٠$ (×-١)

$س^٢ - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠$

$س = ٠ ، س = ١$



ملاحظة هامة / نتعامل مع إشارة معامل $س^٢$ قبل الضرب أو القسمة .

الدرس:
اليوم:
التاريخ:

٢.٢ تطبيقات التفاضل

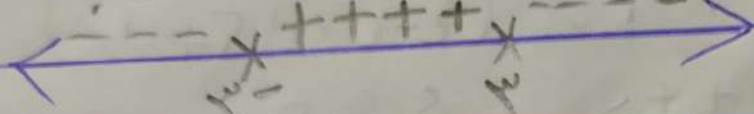
① $د(س) = ٩ - س^٢$

$٩ - س^٢ = ٠$

$-س^٢ = -٩$

$س^٢ = ٩$

$س = \pm ٣$



الدرس: فيديو (3) اليوم: التاريخ: / /

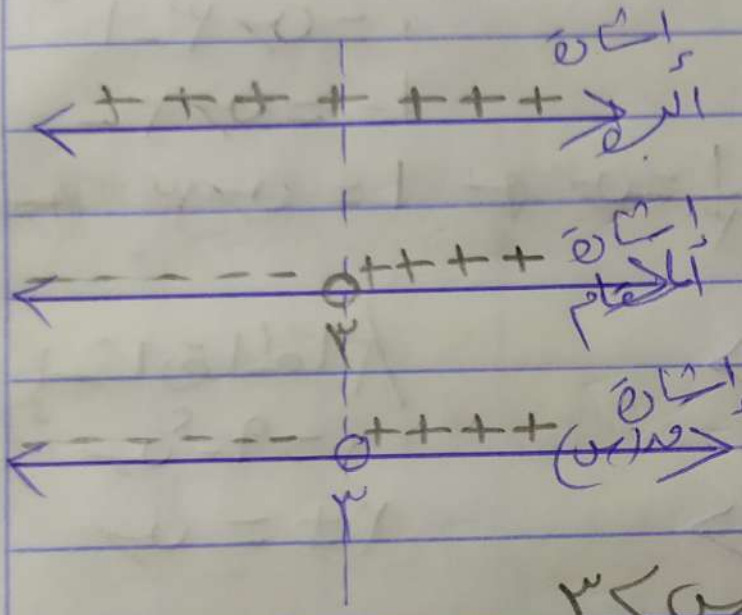
تدريب (1) ص (8)

(1) $ه(س) = \frac{٥}{٣ - س}$ ، $س \neq ٣$

النقطة الحرجة

المقام / $٣ - س = ٠$

$س = ٣$



$ه(س) > ٠$ عندما $س < ٣$

$ه(س) < ٠$ عندما $س > ٣$

الدرس: اليوم: التاريخ: / /

② $م(س) = \frac{س^3 - 1}{س^2 - 9}$ $\quad$ $س \neq \pm 3$

إشارة البسط /

$س^3 - 1 = 0$

$س^3 = 1$

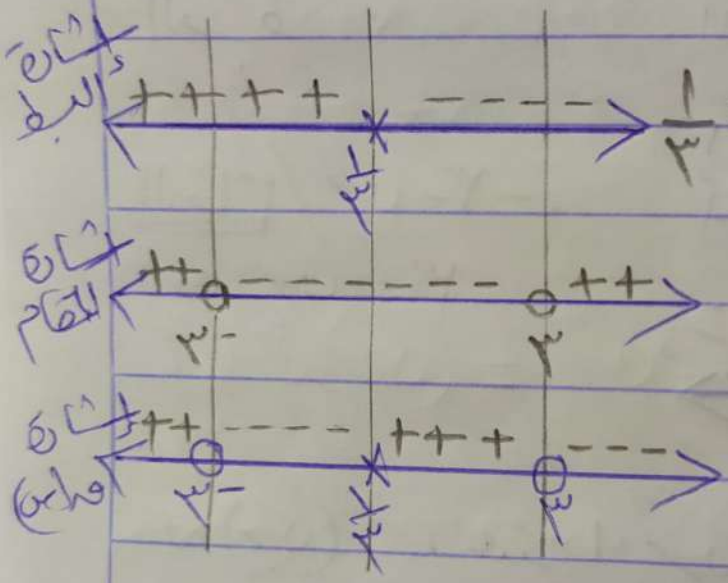
$س = 1$

$س = \frac{1}{3}$

إشارة المقام /

$س^2 - 9 = 0$

$س = \pm 3$



* $م(س) > 0$ عندما $س < -3$ ∪ $\frac{1}{3} < س < 3$

* $م(س) < 0$ عندما $-3 < س < \frac{1}{3}$ ∪ $3 < س$

الدرس: اليوم: التاريخ: / /

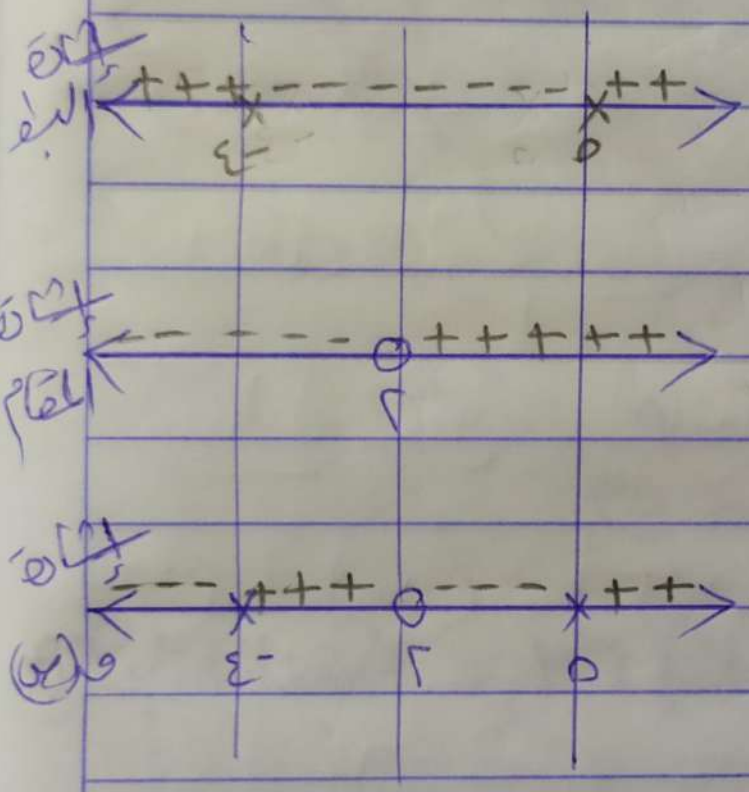
(٣) $ه(س) = \frac{س^2 - س - ٢٠}{س - ٢}$ ، $س \neq ٢$

إشارة البسط /

$س^2 - س - ٢٠ = ٠$

$(س + ٤)(س - ٥) = ٠$

$س = -٤$ ، $س = ٥$



إشارة المقام /

$س - ٢ = ٠$

$س = ٢$

* $ه(س) > ٠$ عندما $س \in]-\infty, -٤[\cup]٢, ٥[$

* $ه(س) < ٠$ عندما $س \in]-٤, ٢[\cup]٥, \infty[$

تدريب (2) ص (9)

(1) $م(س) = \frac{س + 3}{س^2 - 2س - 3}$

مجال البسط / $(س + 3) = ع$ لأنه البسط كثير حدود.

مجال المقام / $س^2 - 2س - 3 = 0$

$(س - 3)(س + 1) = 0$

$س = 3$ ، $س = -1$ ← $ع - \{-1، 3\}$

مجال $م(س) = ع - \{-1، 3\}$.

(2) $ل(س) = \frac{س^2 + 6س + 5}{4 - س}$

مجال البسط / $ع$ لأنه كثير حدود.

مجال المقام / $4 - س = 0$ ← $س = 4$

مجال $ل(س) = ع - \{4\}$.

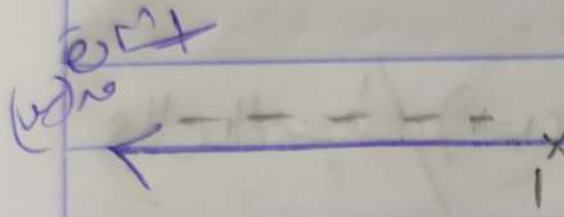
التاريخ : / / اليوم : المدرس :

تدريب (3) ص (10)

(1) $d(س) = \sqrt{س - 1}$

$س - 1 = 0$

$س = 1$



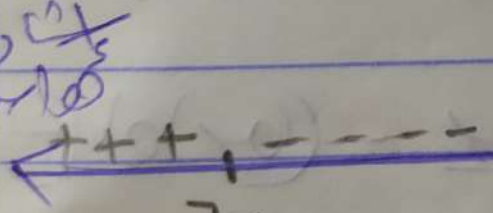
مجال $d(س) = [1, \infty[$

(2) $هـ(س) = \sqrt{س^2 + 4س - 12}$

$س^2 + 4س - 12 = 0$

$(س + 6)(س - 2) = 0$

$س = -6 \ ، \ س = 2$



مجال $هـ(س) =]-\infty, -6] \cup [2, \infty[$

الدرس:

فيديو ⑥

اليوم:

التاريخ: / /

تدريب ① ص 12

① $ق(س) = |س + 7|$

$س + 7 = 0$

$س = -7$

$(س+7)$	$(س+7)$
$-$	$+$

-7

$ق(س) = \begin{cases} -(س+7) & ، س < -7 \\ س + 7 & ، س \geq -7 \end{cases}$

② $ق(س) = |3س - 2|$

$3س - 2 = 0$

$-3س = -2$

$3س = 2$

$س = \frac{2}{3}$

$(3س-2)$	$-(3س-2)$
$+$	$-$

$\frac{2}{3}$

$ق(س) = \begin{cases} -(3س-2) & ، س < \frac{2}{3} \\ 3س - 2 & ، س \geq \frac{2}{3} \end{cases}$

التاريخ: / /

اليوم:

④ $\sigma(س) = |٢س + ٥|$

$٢س + ٥ = ٠$

$٢س = -٥$

$س = \frac{-٥}{٢}$

	$\frac{-٥}{٢}$	
$(٢س + ٥)$	٠	$-(٢س + ٥)$

$$\sigma(س) = \begin{cases} -(٢س + ٥) & ، \ س < \frac{-٥}{٢} \\ ٢س + ٥ & ، \ س \geq \frac{-٥}{٢} \end{cases}$$

③ $ل(س) = |٤ - س_٢|$

$٤ - س_٢ = ٠$

$-س_٢ = -٤$

$س = \pm ٢$

	-٢		٢	
$(٤ - س_٢)$	$-(٤ - س_٢)$	٠	$(٤ - س_٢)$	$-(٤ - س_٢)$

$$ل(س) = \begin{cases} -(٤ - س_٢) & ، \ س > ٢ \\ ٤ - س_٢ & ، \ -٢ \leq س \leq ٢ \\ -(٤ - س_٢) & ، \ س < -٢ \end{cases}$$

⑤ $م(س) = |س^3 - س|$

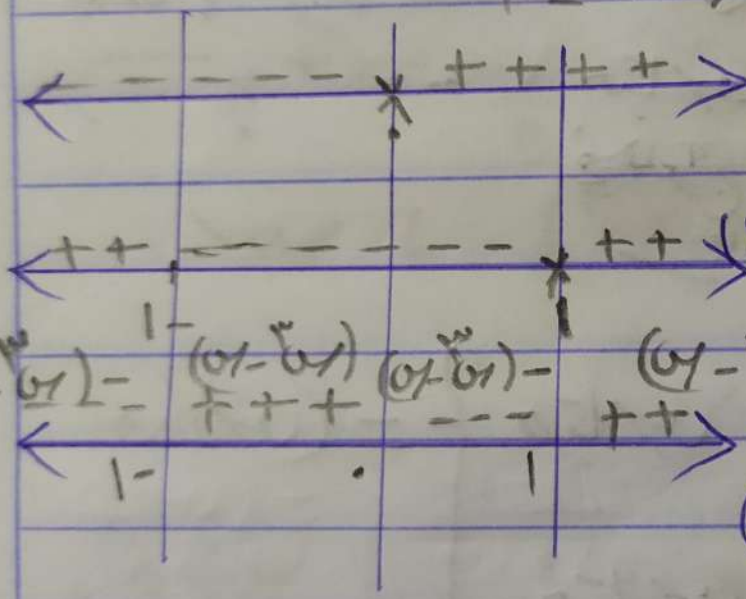
$س^3 - س = 0$

$س(س^2 - 1) = 0$

$س = 0$ أو $س^2 - 1 = 0$

$س^2 = 1$

$س = \pm 1$



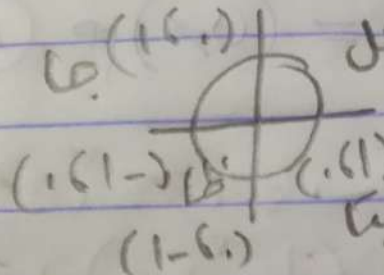
$$م(س) = \begin{cases} -(س^3 - س) & ، س < -1 \\ (س^3 - س) & ، -1 \leq س \leq 0 \\ -(س^3 - س) & ، 0 < س < 1 \\ (س^3 - س) & ، س \geq 1 \end{cases}$$

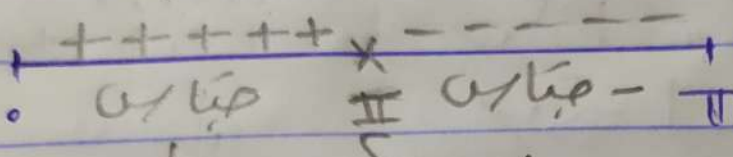
التاريخ : / / اليوم : الدرس :

⑥ $\text{هـ}(س) = |\text{جتا}\ س|$ ، $س \in [0, 2\pi]$

جتا $س = 0$

$س = \frac{\pi}{2}$





جتا س في الربع الأول ← موجبة

جتا س في الربع الثاني ← سالبة

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} \text{جتا}\ س & ، \ \frac{\pi}{2} \geq س \geq 0 \\ -\text{جتا}\ س & ، \ 2\pi > س > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

الدرس:

اليوم:

التاريخ: / /

⑦ $هـ(س) = |٥س - س^٢|$

$٥س - س^٢ = ٠$

$س(٥ - س) = ٠$

$س = ٠$ أو $٥ - س = ٠$

$-س = -٥$

$س = ٥$

$-(٥س - س^٢)(٥ - س)$

$-(٥ - س)^٢$

$هـ(س) = \begin{cases} -(٥س - س^٢) & ، س < ٠ \\ (٥س - س^٢) & ، ٠ \le س \le ٥ \\ -(٥س - س^٢) & ، س > ٥ \end{cases}$

التاريخ: / / اليوم: الدرس:

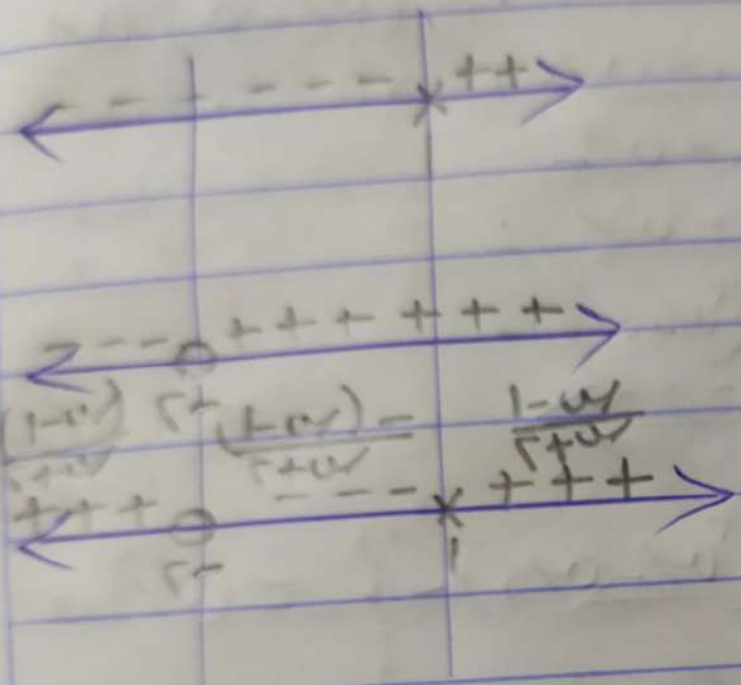
⑧ $\left|\frac{1-س}{2+س}\right| = ه(س)$

البسط/ $1-س = 0$

$س = 1$

المقام/ $2+س = 0$

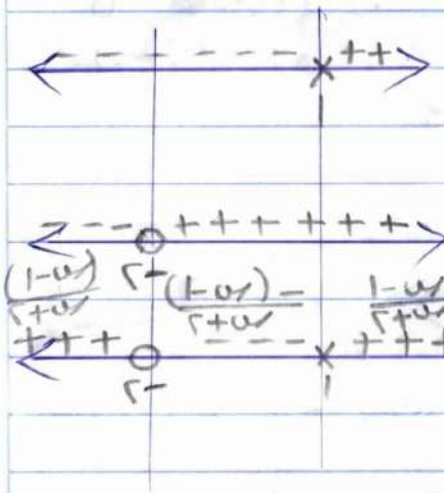
$س = -2$



$$ه(س) = \begin{cases} \frac{1-س}{2+س} & ، \ س < -2 \\ -\frac{(1-س)}{(2+س)} & ، \ -2 < س \leq 1 \\ \frac{1-س}{2+س} & ، \ س > 1 \end{cases}$$

م.هـ دالة فترى

(٨) $هـ(س) = \left| \frac{١ - س}{٢ + س} \right|$



$هـ(س) = \begin{cases} \frac{١ - س}{٢ + س} & ، \ س < -٢ \\ -\frac{(١ - س)}{(٢ + س)} & ، \ -٢ < س \leq ١ \\ \frac{١ - س}{٢ + س} & ، \ س > ١ \end{cases}$

م.هـ دالة فترى

تدريب ② ص 14

① $هـ(س) = |٣س - ١٢|$

* يترك للطالب .

فيديو (5)

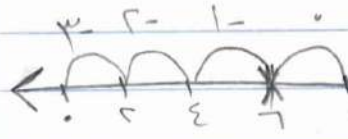
ن.م هدى فوزي

تدريب ص 19 :-

① $[\frac{1}{2}س - 3]$

* طول الدرجة $= \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

* معامل س موجب



$\frac{1}{2}س - 3 = 0$

$\frac{1}{2}س = 3 \Leftarrow س = 6$

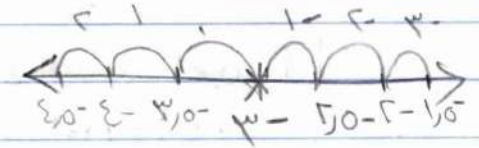
$$[\frac{1}{2}س - 3] = \begin{cases} -2 & 6 \geq س > 4 \\ -1 & 4 \geq س > 6 \\ 0 & 6 \geq س > 8 \\ 1 & 8 \geq س > 10 \end{cases}$$

ن.م هدى فوزي

② $[-2س - 7]$

* طول الدرجة $= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

* معامل س سالب



$-2س = 7$

$س = \frac{7}{-2} = -3$

$$[-2س - 7] = \begin{cases} 1 & -4 < س \leq -3,5 \\ 0 & -3,5 > س \geq -3 \\ -1 & -3 > س \geq -2,5 \\ -2 & -2,5 > س \geq -2 \end{cases}$$

فيديو ⑥ و ⑦

د.ه هدى حزين

تدريب ② ص ٢٢ :-

① $د(س) = \frac{|س-1|}{س-1}$ عند $س = 1$

* لنبحث $|س-1|$

$س - 1 = 0$

$س = 1$

	$(1-س)$	$-(1-س)$
	$+++$	$---$

$$د(س) = \begin{cases} \frac{(1-س)}{(س-1)} & ، س \leq 1 \\ \frac{-(1-س)}{(س-1)} & ، س > 1 \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} 1 & ، س \leq 1 \\ -1 & ، س > 1 \end{cases}$$

$\lim_{س \to 1^+} د(س) = \lim_{س \to 1^+} -1 = (1)$

د.ه هدى حزين

$\lim_{س \to 1^-} د(س) = \lim_{س \to 1^-} 1 = (-1)$

$\therefore \lim_{س \to 1^+} د(س) \neq \lim_{س \to 1^-} د(س)$

$\therefore \lim_{س \to 1} د(س)$ غير موجودة.

② $د(س) = \begin{cases} [\frac{س}{2}] + س & ، 0 \leq س < 2 \\ 2 & ، 2 \leq س \leq 4 \end{cases}$

عندما $س = 2$ وعندما $س = 0$

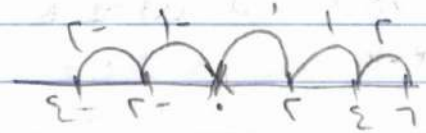
$[\frac{س}{2}]$

طول الدرجة $= \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = (2)$

معامل $س$ موجب

P، هل هي قابلة للاشتقاق؟

$س = 0 \Leftarrow \frac{س}{2} = 0$



$$[\frac{س}{2}] = \begin{cases} -2 & -4 \le س < -2 \\ -1 & -2 \le س < 0 \\ 0 & 0 \le س < 2 \\ 1 & 2 \le س < 4 \\ 2 & 4 \le س < 6 \end{cases}$$

$$[\frac{س}{2}] = \begin{cases} -1 & -2 \le س < 0 \\ 0 & 0 \le س < 2 \end{cases}$$

$$[\frac{س}{2}] + س = \begin{cases} -1 + س & -2 \le س < 0 \\ س & 0 \le س < 2 \\ 2 & 2 \le س < 4 \end{cases}$$

P، هل هي قابلة للاشتقاق؟

* النهاية عند $س = 2$

$$\text{نها}_{س \to 2^+} \frac{هـ(س) - هـ(2)}{س - 2} = \text{نها}_{س \to 2^+} \frac{2 - 2}{س - 2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{نها}_{س \to 2^-} \frac{هـ(س) - هـ(2)}{س - 2} = \text{نها}_{س \to 2^-} \frac{س - 2}{س - 2} = 1 \quad (2)$$

$\therefore$ نها$_{س \to 2}$ هـ(س) $\neq$ هـ(2) $\Leftarrow$ (1) $\neq$ (2)

$\therefore$ هـ(س) غير قابلة للاشتقاق عند $س = 2$

* النهاية عند $س = 0$

$$\text{نها}_{س \to 0^+} \frac{هـ(س) - هـ(0)}{س - 0} = \text{نها}_{س \to 0^+} \frac{0 - 0}{س} = 0 \quad (3)$$

$$\text{نها}_{س \to 0^-} \frac{هـ(س) - هـ(0)}{س - 0} = \text{نها}_{س \to 0^-} \frac{-1 + س - 0}{س} = -1 \quad (4)$$

$\therefore$ نها$_{س \to 0^+}$ هـ(س) $\neq$ نها$_{س \to 0^-}$ هـ(س)

$\therefore$ نها$_{س \to 0}$ هـ(س) غير موجودة.

P. هدى فتح

تدريب ③ ص 24 :-

④ $هـ(س) = \begin{cases} \frac{|س-1|}{س-1} & ، س \neq 1 \\ صفر & ، س = 1 \end{cases}$

اختبر الاتصال عند $س = 1$

$|س-1|$

$س - 1 = 0$

$س = 1$

$(1-س)-$ $(1-س)$

$---$ $+++$

1

$هـ(س) = \begin{cases} \frac{(1-س)}{(1-س)} & ، س < 1 \\ \frac{-(1-س)}{(1-س)} & ، س > 1 \\ 0 & ، س = 1 \end{cases}$

P. هدى فتح

$هـ(س) = \begin{cases} 1 & ، س < 1 \\ -1 & ، س > 1 \\ 0 & ، س = 1 \end{cases}$

$هـ(1) = 0$

$\neq$

$\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = \lim_{س \to 1^+} 1 = 1$

$\lim_{س \to 1^-} هـ(س) = \lim_{س \to 1^-} -1 = -1$

$\therefore \lim_{س \to 1^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to 1^-} هـ(س)$

$\therefore \lim_{س \to 1} هـ(س)$ غير موجودة

$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = 1$

٢، هدى فؤاد

(ب) $د(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < 0 \\ 1 - 2جتا س & ، س \geq 0 \end{cases}$

عند $س = 0$

(أولاً) $د(0) = 1 - 2جتا 0 = 1 - 2 \times 1 = -1$

$نها_{س \to 0^-} \frac{|ظا س|}{س} = نها_{س \to 0^-} \frac{-ظا س}{س} = -1$

$نها_{س \to 0^+} 1 - 2جتا س = 1 - 2 \times 1 = -1$

$\therefore نها_{س \to 0} د(س) = د(0) = -1$

$\therefore د(س)$ متصل عند $س = 0$

* $(ظا(-س) = -ظا س)$ =

٢، هدى فؤاد

(ج) $د(س) = \begin{cases} س^2 - س + 1 & ، |س| < 2 \\ س + 1 & ، [س] = 2 \end{cases}$

عند $س = 2$

* $|س| < 2 \Leftarrow -2 < س < 2$
* $[س] = 2 \Leftarrow 2 \leq س < 3$

$د(س) = \begin{cases} س^2 - س + 1 & ، -2 < س < 2 \\ س + 1 & ، 2 \leq س < 3 \end{cases}$

$د(2) = 2 + 1 = 3$ (=) العقاية موجودة

$نها_{س \to 2^+} د(س) = نها_{س \to 2^+} س + 1 = 2 + 1 = 3$

$نها_{س \to 2^-} د(س) = نها_{س \to 2^-} س^2 - س + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$

$\therefore نها_{س \to 2} د(س) = د(2)$ $\Leftarrow$ $د(س)$ متصل عند $س = 2$

التاريخ: / / اليوم: الدرس:

تدريب ص (26) *

(1) $d(x) = \begin{cases} \frac{\text{جا}3x}{\text{جا}2x} & ، x \neq 0 \\ l & ، x = 0 \end{cases}$

$d(x)$ متصل عند $x = 0$

(الحل)

بما أن $d(x)$ متصل عند $x = 0$

$\therefore \lim_{x \to 0} d(x) = d(0)$

$l = \lim_{x \to 0} \frac{\text{جا}3x}{\text{جا}2x}$

$\therefore l = \frac{3}{2}$

التاريخ: / / اليوم: الدرس:

تابع تدريب ص (26) *

(2) $d(x) = \begin{cases} \text{ظا}x - b & ، 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{3x}{\pi} + b & ، x > \frac{\pi}{4} \\ 3 & ، x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$d(x)$ متصل عند $x = \frac{\pi}{4}$

(الحل)

بما أن $d(x)$ متصل عند $x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} d(x) = d(\frac{\pi}{4})$

وكذلك $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} d(x)$ موجودة

$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} d(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} d(x)$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}^+} b + \frac{3x}{\pi} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \text{ظا}x - b$

٩، هيا نحل

$$\frac{\pi}{4} \text{ ظا } ب = ٩ - ب \Leftarrow \frac{(\frac{\pi}{4})\text{ظ} + ب}{\pi} = ٩ - ب$$

$$٩ - ب = ١ + ب \Leftarrow$$

$$١ = ب - ب - ٩$$

$$\boxed{٩ - ٢ب = ١} \rightarrow (١)$$

بما أن $ق(ب)$ متصل عند $ب = \frac{\pi}{4}$

$$\text{إذن } ق(\frac{\pi}{4}) = \text{ظا}(ب) \underset{ب \to \frac{\pi}{4}^+}{=}$$

$$٣ = \text{ظا } ب \underset{ب \to \frac{\pi}{4}^+}{\cdot} \frac{(\frac{\pi}{4})\text{ظ} + ب}{\pi}$$

$$٣ = ب + \frac{\pi}{\pi} \Leftarrow ٣ = ب + ١$$

$$ب = ٣ - ١$$

٩، هيا نحل

$$\boxed{\text{إذن } ب = ٢}$$

بالتعويض عن (ب) في معادلة (١)

$$٩ - ٢ب = ١$$

$$٩ - ٢(٢) = ١ \Leftarrow ٩ - ٤ = ١$$

$$\text{إذن } ٩ = ١ + ٤$$

$$\boxed{٩ = ٥}$$

م. هدى فرج

* تدريب ص (28)

① $ق_{ص}(س) = \begin{cases} |٢س+٢| & -٤ \le س < ١ \\ [\frac{١}{٣}س+٤] & ١ \le س \le ٦ \end{cases}$

ابحث في اتصال $ق_{ص}(س)$ على $[-٤, ٦]$

* $|٢س+٢|$

$٢س+٢ = ٠$

$٢س = -٢$

$س = -١$

	$(-\infty, -١)$	$(-١, \infty)$
$٢س+٢$	$-(٢س+٢)$	$(٢س+٢)$

$= |٢س+٢| \begin{cases} -(٢س+٢) & -٤ \le س < -١ \\ (٢س+٢) & -١ \le س < ١ \end{cases}$

م. هدى فرج

$[\frac{١}{٣}س+٤]$

طول الدرجة $= \frac{١}{[\frac{١}{٣}]} = ٣$

معامل س موجب

$\frac{١}{٣}س+٤ = ٠$

$\frac{١}{٣}س = -٤$

$س = -٤ \times ٣$

$= -١٢$

$[\frac{١}{٣}س+٤] = \begin{cases} ٢ & ٦ \le س < ٩ \\ ١ & ٣ \le س < ٦ \\ ٠ & ٠ \le س < ٣ \\ -١ & -٣ \le س < ٠ \end{cases}$

$[\frac{١}{٣}س+٤] = \begin{cases} ٦ & س = ٦ \\ ٥ & ٣ \le س < ٦ \\ ٤ & ١ \le س < ٣ \end{cases}$

أ/ هدى فتح

$$د(س) = \begin{cases} -٢س - ٢ & ، -٤ \leq س < -١ \\ ٢س + ٢ & ، -١ \leq س < ١ \\ ٤ & ، ١ \leq س < ٣ \\ ٥ & ، ٣ \leq س < ٦ \\ ٦ & ، س = ٦ \end{cases}$$

* نبحث اتصال $د(س)$ في الفترة $[-٤، ٦]$

① القواعد/ * الاقتران $-٢س - ٢$ متصل في $]-٤، -١[$ لأنه كثير حدود.

* الاقتران $٢س + ٢$ متصل في $]-١، ١[$ لأنه كثير حدود

* ٤ متصل في $]١، ٣[$ لأنه اقتران ثابت

٥ متصل في $]٣، ٦[$ لأنه اقتران ثابت

أ/ هدى فتح

② نقاط التحول عند $س = -١$

$د(-١) = ٢(١) + ٢ = -٢ + ٢ =$ صفر

$\lim_{س \to -١^+} ٢س + ٢ = ٢(-١) + ٢ = -٢ + ٢ =$ صفر

$\lim_{س \to -١^-} -٢س - ٢ = -٢(-١) - ٢ = ٢ - ٢ =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to -١^+} د(س) = \lim_{س \to -١^-} د(س)$

$\therefore \lim_{س \to -١} د(س)$ موجودة $= -١$

$\therefore د(-١) = \lim_{س \to -١} د(س)$

$\therefore د(س)$ متصل عند $س = -١$

أ.هدى فرج

عند $س = 1$

$ق(1) = 4$

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} 4 = 4$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} 2س + 2 = 2(1) + 2 = 4$

$\therefore \lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} ق(س)$

$\therefore \lim_{س \to 1} ق(س)$ موجودة وتساوي 4

$\therefore ق(1) = \lim_{س \to 1} ق(س)$

$\therefore ق(س)$ متصل عند $س = 1$

أ.هدى فرج

عند $س = 3$

$ق(3) = 5$

$\lim_{س \to 3^+} ق(س) = \lim_{س \to 3^+} 5 = 5$

$\lim_{س \to 3^-} ق(س) = \lim_{س \to 3^-} 4 = 4$

$\therefore \lim_{س \to 3^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 3^-} ق(س)$

$\therefore \lim_{س \to 3} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore ق(س)$ غير متصل عندما $س = 3$

الأطراف

P. هدى فرج

عند $س = -٤$

$د(-٤) = -٢(-٤) - ٢ = +٨ - ٢ = ٦$

$\lim_{س \to -٤^+} د(س) = \lim_{س \to -٤^+} -٢س - ٢ = -٢(-٤) - ٢$

$= ٨ - ٢ = ٦$

$\therefore د(-٤) = \lim_{س \to -٤^+} د(س)$

$\therefore$ الاقتران $د(س)$ متصل عند $س = -٤$

من اليمين

P. هدى فرج

عند $س = ٦$

$د(٦) = ٦$

$\lim_{س \to ٦^-} د(س) = \lim_{س \to ٦^-} ٥ = ٥$

$\therefore د(٦) \neq \lim_{س \to ٦^-} د(س)$

$\therefore$ الاقتران $د(س)$ غير متصل عند $س = ٦$

من اليسار

٢٠ هدى فزع

(٣) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{جا ٢س}{٥س} & -٢ \leq س < ٠ \\ ٤ & س = ٠ \\ ب(٢+س) & ٠ < س \leq ٢ \end{cases}$

$هـ(س)$ متصل على $[-٢، ٢]$

(الحل)

بما أن $هـ(س)$ متصل على $[-٢، ٢]$

إذن $هـ(س)$ متصل عند $س = ٠$

إذن $هـ(٠) = \lim_{س \to ٠} هـ(س)$

$٤ = \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{٥س}$

$٤ = \frac{٢}{٥} أ \Leftarrow ٤ = ٢ أ \times \frac{٥}{٢} \Leftarrow أ = ٢٠$

٢٠ هدى فزع

بما أن $هـ(س)$ متصل عند $س = ٠$

إذن $\lim_{س \to ٠^+} هـ(س)$ موجودة

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-} هـ(س)$

$\lim_{س \to ٠^+} ب(٢+س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{جا ٢س}{٥س}$

$ب(٢+٠) = \frac{٢}{٥}$

$٢ب = \frac{٢٠}{٥} \Leftarrow ٢ب \times ٥ = ٢٠$

$\frac{١٠ب}{١٠} = \frac{٢٠}{١٠} \Leftarrow ب = ٢$