

٩

الجزء
الثاني

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

فريق التأليف:

أ. محمد غانم

أ. أمانى الأخضر

أ. أشجان جبر

أ. قيس شبانة (منسقاً)

أ. عماد جمعة

أ. جهاد ابو جاسر

أ. هاشم أبو بكر



أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية

إشراف فني	أ. كمال فحماوي
تصميم فني	أ. عبد الناصر أبوشوشة

تحكيم علمي	د. نبيل الجندي
تحرير لغوي	أ. وفاء الجيوسي
مراجعة	د. سعيد عساف
رسومات	أ. سالم نعيم
قراءة	أ. مها غانم
متابعة للمحافظات الجنوبية	د. سميرة النخالة

الطبعة الثانية

٢٠١٩ م / ١٤٤٠ هـ

جميع حقوق الطبع محفوظة ©



mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps

f.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym

هاتف +970-2-2983280 | فاكس +970-2-2983250

حي الماصيون، شارع المعاهد

ص. ب 719 - رام الله - فلسطين

pcdc.mohe@gmail.com | pcdc.edu.ps

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي التابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار وإعٍ لعدد من المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكرية المتوخاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تألفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلاق بين المطلوب معرفياً وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إجزاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، واللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج الفلسطينية

كانون أول / ٢٠١٧ م

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي ب قالب عصري؛ ليكون امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعليمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسلة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستويات الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوّن هذا الكتاب من خمس وحدات تعليمية، تناولت الوحدة الخامسة: حساب المثلثات والنسب المثلثية وتطبيقات عليها، أمّا الوحدة السادسة، فتناولت الجبر، لتقدم مفهوم الفترة وطرق حلّ المتباينات الخطيّة، وتناولت الوحدة السابعة الاقترانات والعمليات عليها، أمّا الوحدة الثامنة (الاحتمالات)، فاستكملت قوانين الاحتمالات التي تعلمها الطلبة سابقاً، بالإضافة للاحتمال المشروط واستقلال الحوادث، وتناولت الوحدة التاسعة (الهندسة) معادلة الدائرة والزوايا المحيطية والمركزية بالإضافة للشكل الرباعي الدائري.

أملنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعليمية كافة، من خلال منهاج فلسطيني واقعي منظم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرّفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في ردد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

فريق التأليف

المحتويات

الوحدة الخامسة: حساب المثلثات

٦٣	٥ - ٧	الاقتران النسبي	٤	١ - ٥	النسب المثلثية
٦٧	٦ - ٧	العمليات على الاقترانات النسبية	٨	٢ - ٥	النسب المثلثية الثانوية
٧٢	٧ - ٧	تمارين عامة	١٣	٣ - ٥	المتطابقات المثلثية
			١٧	٤ - ٥	المعادلات المثلثية
			٢٠	٥ - ٥	تمارين عامة

الوحدة الثامنة: الاحتمالات

٧٦	١ - ٨	قوانين الاحتمالات
٨٠	٢ - ٨	الاحتمال المشروط
٨٤	٣ - ٨	استقلال الحوادث
٨٨	٤ - ٨	تمارين عامة

الوحدة التاسعة: الهندسة

٩٢	١ - ٩	الدائرة
٩٧	٢ - ٩	الزوايا المركزية والزوايا المحيطية
١٠٣	٣ - ٩	الشكل الرباعي الدائري
١٠٧	٤ - ٩	تمارين عامة

الوحدة السادسة: الجبر وتطبيقات الحساب

٢٤	١ - ٦	الفترة
٣٠	٢ - ٦	المتباينات الخطية بمتغير واحد
٣٧	٣ - ٦	المتباينات الخطية بمتغيرين
٤٢	٤ - ٦	تمارين عامة

الوحدة السابعة: الاقترانات

٤٦	١ - ٧	كثيرات الحدود
٥٠	٢ - ٧	جمع كثيرات الحدود وطرحها
٥٤	٣ - ٧	ضرب كثيرات الحدود وقسمتها
٥٩	٤ - ٧	الاقتران التربيعي

حساب المثلثات

٥

الوحدة



أتأمل وأفكر:

يُمكن إقامة جسر بين الجبلين باستخدام النسب المثلثية من خلال رسم تخطيطي لمثلث قائم الزاوية، أناقش ذلك.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على
توظيف النسب المثلثية في الحياة العملية من خلال الآتي:

١ إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا الحادة.

٢ التعرف إلى النسب المثلثية الثانوية.

٣ التعرف إلى العلاقات بين النسب المثلثية.

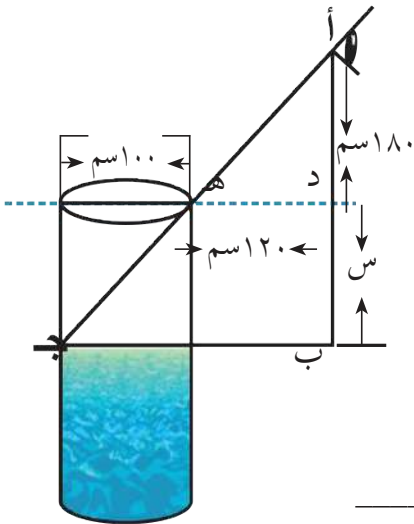
٤ التعرف إلى مفهوم المتطابقة المثلثية.

٥ إثبات صحة متطابقة مثلثية .

٦ حلّ معادلةٍ مثلثية .

٧ استخدام النسب المثلثية في حلّ مشكلاتٍ حياتية.

نشاط (١): تعاني الزراعة في فلسطين من نقص بالمياه بسبب اجراءات الاحتلال، إذ يقوم المزارعون بإنشاء آبار مياه لأغراض الري، فإذا أراد مزارع طوله ١٨٠ سم معرفة انخفاض مستوى سطح مياه بئر قطره ١ م، واقترب من حافة البئر حتى تمكن من رؤية سطح الماء، وكان بعده عن حافة البئر ١٢٠ سم. أجد انخفاض سطح الماء على النحو الآتي:



نفرض أن س تمثل انخفاض مستوى سطح المياه في البئر.

من تشابه المثلثات أد هـ ، أ ب جـ:

$$\frac{\boxed{}}{120 + 100} = \frac{180}{\boxed{} + س}$$

$$(\text{————}) (180 + س) = \text{————} \times 180$$

$$\text{————} = 180 + س$$

$$س = ١٥٠ \text{ سم}$$

ومنها: انخفاض مستوى سطح المياه في البئر =

النسبة بين طولَي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية تُسمى نسبةً مثلثية.

أتذكر:

نشاط (٢): برج الساعة في عكا واحد من سبعة أبراج أقيمت في فلسطين عام ١٩٠١ م.



يمثل الشكل المقابل مثلثاً قائم الزاوية في ب، أكمل ما يأتي :

(١) يُسمى الضلع أ ب بالنسبة إلى الزاوية أ مجاوراً.

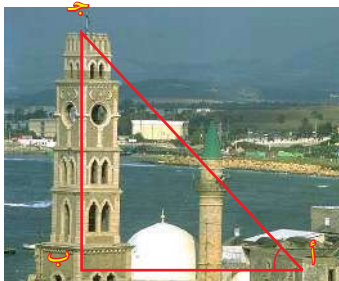
(٢) يُسمى الضلع ب جـ بالنسبة إلى الزاوية أ: ———

(٣) يُسمى الضلع أ جـ وتر المثلث القائم الزاوية، وهو أطول أضلاع المثلث.

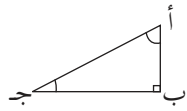
$$(٤) \text{ جيب الزاوية أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$(٥) \text{ جيب تمام الزاوية أ} = \text{————}$$

$$(٦) \text{ ظل الزاوية أ} = \text{————}$$



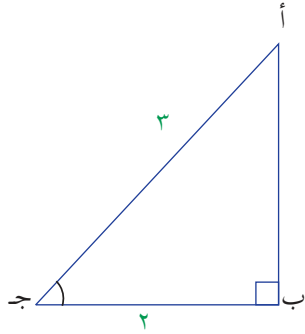
أُتذَكَّر:



في المثلث القائم الزاوية تُسمّى هذه النسب (جا أ، جتا أ، ظا أ) النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة أ.



نشاط (٣): أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه جتا ج = $\frac{2}{3}$ ، أ ج = ٣ وحدات، أجد:



(٢) جا ج

(١) ظا ج

نرسم رسماً تخطيطياً للمثلث أ ب ج
جتا ج = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\square}{\text{أ ج}} = \frac{\square}{3}$

ومنها ب ج = ٢ وحدة، ثم نعيّن أطوال الأضلاع على المثلث
(أ ب) = ٢ (أ ج) - ٢ (ب ج) (لماذا ؟)

أ ب = _____

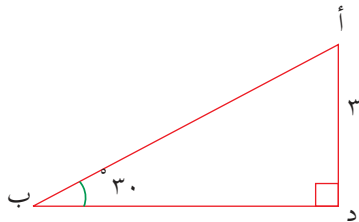
ظا ج = _____

جا ج = _____



نشاط (٤): أ د ب مثلث قائم الزاوية في د، فيه أ د = ٣ وحدات، أجد كل من:

(٣) النسب المثلثية الأساسية للزاوية: ٣٠°، ٦٠°



(٢) ب د

(١) أ ب

المثلث أ د ب فيه جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\text{أ ب}}$$

أ ب = _____

ومنها ب د = _____

ظا ٣٠° = _____

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جتا } ٣٠^\circ$$

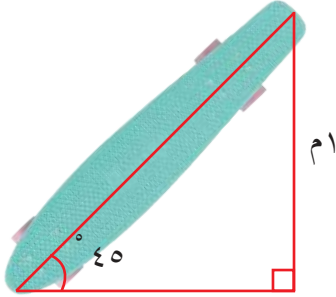
$$\frac{1}{2} = \text{جا } ٣٠^\circ$$

ظا ٦٠° = _____

$$\sqrt{3} = \text{جتا } ٦٠^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{جا } ٦٠^\circ$$

نشاط (٥): لوح للتزلج يرتفع أحد طرفيه عن الأرض ١ م، ويصنع طرفه الآخر مع الأرض زاوية قياسها 45° كما في الشكل المجاور بالاعتماد على المعلومات الواردة في الشكل، أكمل إيجاد:



(١) طول لوح التزلج

طول لوح التزلج = م ، لأن

(٢) النسب المثلثية الأساسية للزاوية 45°

جا 45° = جتا 45° =

ظا 45° =

يمكن إيجاد قياس زاوية إذا عُلِمَتْ إحدى نسبها المثلثية، باستخدام الحاسبة العلمية من خلال مفاتيح خاصة على الآلة الحاسبة العلمية.

ملاحظة:



Sin (مفتاح جا) ، cos (مفتاح جتا) ، tan (مفتاح ظا)

مثلاً: جا $30^\circ = \frac{1}{2}$ يكافئ الزاوية التي جيبها $(\frac{1}{2}) = 30^\circ$

ورمزها على الآلة الحاسبة: $\sin^{-1}(x)$

لإيجاد الزاوية باستخدام الآلة الحاسبة، نتبع الخطوات الآتية:

Shift → sin → 0.5 → = 30°

إذا كانت س زاوية حادة، فإن: . جا س > ١

. جتا س > ١

أتذكر:

إذا كانت س زاوية حادة، فما القيم الممكنة لظاس؟

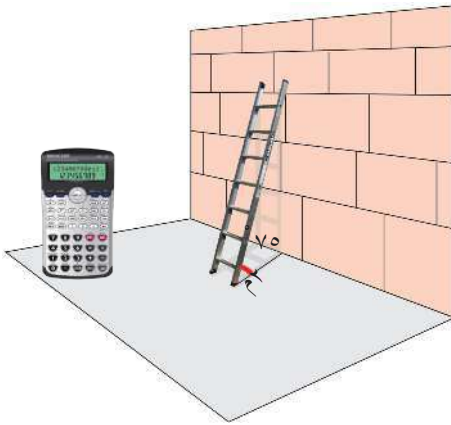
أفكر وأناقش

تمارين ومسائل:



س١ أجد قيم النسب المثلثية الأساسية للزاوية الصغرى في المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب، إذا كان أ ب = ٨ سم ، أ ج = ١٠ سم.

س٢ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، إذا علمت أن ج ا ب = $\frac{5}{3}$ ، وأن أ ب = $\sqrt{5}$ ، أجد : ج ت ا ج ، ظ ا ج



س٣ إذا كانت الزاوية الآمنة التي يمكن أن يستند بها سلّم على حائط هي ٧٥° تقريباً مع الأرض كما في الشكل المجاور، ما طول السلّم، إذا كانت قاعدته تبعد مترين عن الحائط الرأسي؟



س٤ من نقطة تبعد ٣ أمتار عن قاعدة منزل ارتفاعه ٦ أمتار رصدت قمة المنزل، أرسّم شكلاً يبيّن زاوية ارتفاع قمة المنزل، ثم أحسب قيمة تلك الزاوية.

النسب المثلثية الثانوية

(٢-٥)



نشاط (١): تنتشر زراعة النخيل في فلسطين مثل منطقة أريحا والأغوار، وقطاع غزة، وبيسان؛ ونتيجةً للانتهاكات الإسرائيلية في تجريف الأشجار تتعرض بعضُها للتكسير. إذا تعرضت إحدى أشجار النخيل للكسر، كما في الشكل المجاور، وكان طول الجزء المائل من الشجرة على الأرض ١٣ متراً، وكان طول الشجرة قبل سقوطها ٢٠ متراً، فهل يمكن معرفة قياس الزاوية التي يصنعها الجزء المائل مع سطح الأرض؟

يمكن استخدام النسب المثلثية لمعرفة قياس الزاوية س.

$$\frac{\square}{13} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جا س}$$

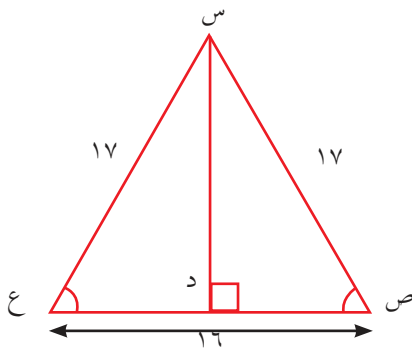
$$\text{س} = \text{الزاوية التي جيبها } \left(\frac{\square}{13} \right) = \text{—————}$$



هناك نسبٌ مثلثيةٌ أخرى يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية س، أذكر بعضاً منها.

أفكر وأناقش

نشاط (٢): س ص ع مثلث متساوي الساقين فيه: س ص = س ع = ١٧ وحدة،



ص ع = ١٦ وحدة، أكملُ إيجاد:

طول س د = ——— (نظرية فيثاغورس)

$$\frac{\square}{17} = \frac{\text{س د}}{\text{س ص}}, \text{ وتمثلُ جا ص.}$$

$$\frac{1}{\text{س د}} = \frac{\text{س ص}}{\text{س د}}, \text{ وتمثلُ جـ ص}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{ص د}}{\text{ص س}} &= \text{_____} , \text{وتمثل جتا ص} \\ \frac{\text{ص س}}{\text{ص د}} &= \text{_____} , \text{وتمثل ظا ص} \\ \frac{\text{س د}}{\text{ص د}} &= \text{_____} , \text{وتمثل ظا ص} \\ \frac{\text{ص د}}{\text{س د}} &= \text{_____} , \text{وتمثل جتا ص} \end{aligned}$$

أَتَعَلَّمُ : النسب المثلثية الناتجة عن مقلوب النسب المثلثية الأساسية تُسمى النسب المثلثية الثانوية، وتُعرف كما يأتي:

$$\begin{aligned} \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} &= \frac{1}{\text{جتا س}} = \text{قاس : قاطع الزاوية س} \\ \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} &= \frac{1}{\text{جا س}} = \text{قتاس : قاطع تمام الزاوية س} \\ \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} &= \frac{1}{\text{ظا س}} = \text{ظلتا س : ظل تمام الزاوية س} \end{aligned}$$

نشاط (٣) : أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٧ سم، أ ج = ٨ سم، أ ج د:



(١) قا أ (٢) قتا أ (٣) ظتا أ (٤) جا أ × قتا أ (٥) جتا أ × قا أ

نجد أولاً طول الضلع ب ج : (ب ج)² = (أ ج)² - (أ ب)²

$$(ب ج)² = ٦٤ - ٤٩ = ١٥ , \text{ومنهاب ج} = \text{_____}$$

$$(١) \text{ قا أ} = \frac{1}{\text{جتا أ}} = \frac{8}{7}$$

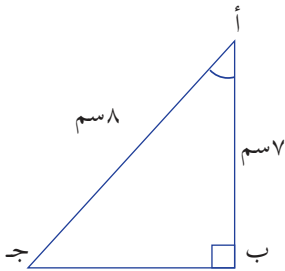
$$(٢) \text{ قتا أ} = \text{_____}$$

$$(٣) \text{ ظتا أ} = \text{_____}$$

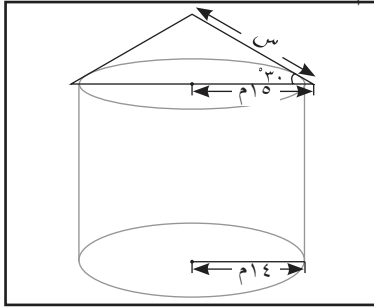
$$(٤) \text{ جا أ} \times \text{قتا أ} = \text{_____}$$

$$(٥) \text{ جتا أ} \times \text{قا أ} = \text{_____}$$

ألاحظ أن: النسبة المثلثية × مقلوبها = _____



نشاط (٤): مخزن لتخزين الحبوب على شكل أسطوانة يعلوه غطاء مخروطي كما في الشكل المجاور، وكان نصف قطر قاعدة المخزن ١٤ م. يزيد طول نصف قطر الغطاء مترا واحدا عن طول نصف قطر القاعدة، أجد قيمة س حيث س طول راسم الغطاء.



$$\frac{\text{س}}{\square} = \cos 30^\circ$$

$$\frac{\text{س}}{\square} = \frac{2}{\square}$$

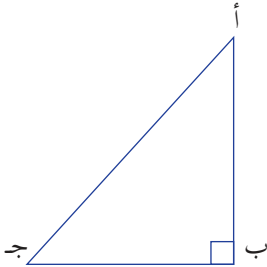
$$\text{س} = \frac{2}{\square} \times \text{—} = \text{—} \text{ م}$$

إذن طول راسم الغطاء = م

نشاط (٥): أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب. فيه: $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ، ومنها:

$$\angle B = 90^\circ - \angle A$$

أكمل إيجاد النسب المثلثية، باستخدام أطوال أضلاع المثلث:



$$\text{جا } \angle A = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتا } \angle A = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{ظا } \angle A = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$$

$$\text{ظتا } \angle A = \frac{\text{أ ج}}{\text{أ ب}}$$

$$\text{قتا } \angle A = \frac{\text{أ ج}}{\text{ب ج}}$$

أقارن بين كلّ نسبتين متقابلتين، ثم أستنتج العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين: أ، $(90^\circ - \angle A)$ ؟



: إذا كانت أ زاوية حادة، فإنّ:

(١) ج أ = جتا (٩٠° - أ) ، والعكس صحيح، جا الزاوية = جتا المتممة.

(٢) ظ أ = ظتا (٩٠° - أ)، والعكس صحيح، ظل الزاوية = ظتا المتممة.

(٣) ق أ = قتا (٩٠° - أ)، والعكس صحيح، قا الزاوية = قتا المتممة.



نشاط (٦): أ ج هـ مثلث قائم الزاوية في ج، فيه: جتا هـ = $\frac{1}{5}$ ،

فإذا كان أ هـ = ١٠ وحدات، أجد:

(١) قيم النسب المثلثية الأخرى للزاوية هـ .

لإيجاد باقي النسب المثلثية نرسم المثلث أ ج هـ القائم في ج، فيه: ج هـ = ٢ وحدة،

أ هـ = ١٠ وحدات. فيكون

$$\begin{array}{ll} \text{أ ج} = \text{_____} , & \text{جا هـ} = \text{_____} \\ \text{ظا هـ} = \text{_____} , & \text{قا هـ} = \text{_____} \\ \text{قتا هـ} = \frac{5}{24} , & \text{ظتا هـ} = \text{_____} \end{array}$$

قتا (٩٠° - هـ) قتا (٩٠° - هـ)

(٢) قيمة المقدار :

ظتا هـ

$$\frac{\text{قتا هـ} \times \boxed{}}{\text{ظتا هـ}} =$$

$$\text{_____} \times \frac{25}{24} = \frac{\frac{5}{24} \times 5}{()} =$$

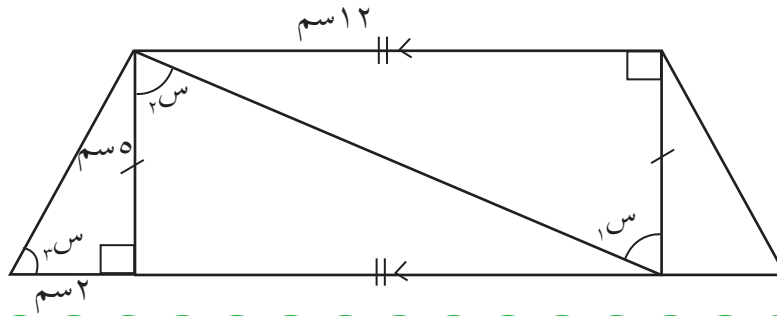
$$\text{_____} =$$

تمارين ومسائل:



س١ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه س ص = ص ع = ٥ سم، أجد كلاً من :
جتا ع، ظا ع، قاع، قناع.

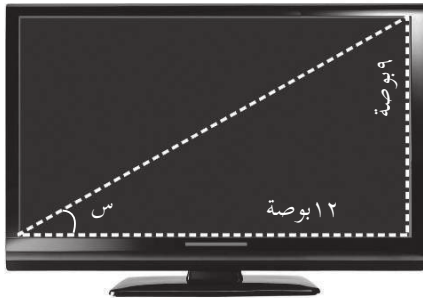
س٢ أجد النسب المثلثية الأساسية والثانوية للزوايا s_1 ، s_2 ، s_3 في الشكل الآتي:



س٣ لدى هاني سلك أ د طوله ٢٥ سم، أراد أن يشكل منه زاوية قائمة ليستخدمه في حصة الرياضيات، أخذ عليه النقطتان ب، ج، وقام بثني السلك عند النقطة ب.
بحيث: أ ب = ب ج = ١٠ سم، ب د يعامد أ ب. أجد:

١ طول أ د، طول أ ج ٢ ظا (أ ج ب)، جتا د ٣ ظتا (ب أ ج)

س٤ أ ج ه مثلث قائم الزاوية في ج، جتا (٩٠° - ه) = $\frac{2}{3}$ ، أ ه = ٣ وحدات، أجد:
جا ه، ظا ه، ظتا (٩٠° - ه)



س٥ تُصنّف شاشات الحاسوب وفقاً لطول قطرها، في الشكل
المجاور طول الشاشة* = ١٢ بوصة*، وعرضها = ٩
بوصة، أبين أن: $\frac{جتا س}{١} = \frac{١ - جتا س}{١}$

* الواجهة الأمامية للشاشة

** البوصة = ٢.٥٤ سم

نشاط (١): هدى وشادي طالبان في الصف التاسع في مدرسة الشهيد أبو جهاد الأساسية، كلّفهما معلّم الرياضيات بواجبٍ بيتيّ، وكان حول كون المعادلة $s^2 - 9 = (s - 3)(s + 3)$ صحيحة لكل قيم المتغير s ، أم صحيحة لبعض قيم المتغير s . وفي اليوم التالي تناقش الطالبان حول ذلك.

شادي



استطعت إيجاد قيمة للمتغير s ، لا تتحقّق عندها المعادلة

هدى



هي صحيحة لكل قيم s ، فقد جربت ١٠ قيم للمتغير، وحققت المعادلة.

أيّهما كانت إجابته صحيحة: هدى أم شادي؟ ولماذا؟

لاحظ أن: $s^2 - 9 = (s - 3)(s + 3)$: صحيحة لـ _____

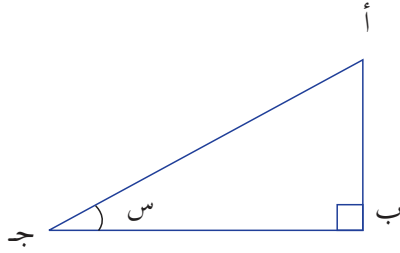
أَتَعَلَّمُ : المتطابقة هي معادلة صحيحة لجميع قيم المتغيرات فيها.

والمتطابقة المثلثية هي متطابقة تحوي نسباً مثلثية. وتكون صحيحة لجميع قيم الزوايا الموجودة فيها.

نشاط (٢): في المثلث المجاور، أجد:



أولاً: العلاقة بين ظاس، جاس، جتاس



$$\frac{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}}{\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$\text{ظاس} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} =$$

ثانياً: قيمة جا^٢ س + جتا^٢ س

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} \right)^2 = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} \right)^2 = \text{جا}^2 \text{ س}$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \left(\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} \right)^2 = \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \right)^2 = \text{جتا}^2 \text{ س}$$

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} + \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} = \text{جا}^2 \text{ س} + \text{جتا}^2 \text{ س}$$

$$1 = \frac{(\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2}{(\text{أ ج})^2} \quad \text{(لماذا؟)}$$

أَتَعَلَّمُ : إذا كان س ص ع مثلثاً قائم الزاوية في ص، فإن :

$$1. \text{ ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$2. \text{ جا}^2 \text{ س} + \text{جتا}^2 \text{ س} = 1 \quad \text{(تُسمى متطابقات مثلثية أساسية)}$$

وهناك كثير من المتطابقات المثلثية التي تُشتق من المتطابقة المثلثية الأساسية السابقة منها:

★ بقسمة طرفي المتطابقة المثلثية الأساسية الثانية على: جتا^٢ س، تنتج متطابقة مثلثية أساسية أخرى:

$$\text{ظاس} + 1 = \text{قتا}^2 \text{ س}$$

★ بقسمة طرفي المتطابقة نفسها على: جا^٢ س، نحصل على المتطابقة: ظتا^٢ س + 1 = قتا^٢ س

نشاط (٣): أثبت صحة المتطابقة الآتية:



$$\frac{\text{جا}^2 \text{ هـ}}{(1 - \text{جتا هـ})} = 1 + \text{جتا هـ}$$

$$\frac{\text{جا}^2 \text{ هـ}}{(1 - \text{جتا هـ})} = \frac{\text{جا}^2 \text{ هـ}}{(1 - \text{جتا هـ})} : \text{الطرف الأيمن}$$

$$\frac{(\quad)(\quad)}{(1 - \text{جتا هـ})} =$$

$$= 1 + \text{جتا هـ} (\text{الطرف الأيسر})$$

لاحظ: لإثبات صحة متطابقة بدأنا بأحد الأطراف للوصول إلى الطرف الآخر.

نشاط (٤): قام كل من علي وهبة بمحاولة اثبات صحة المتطابقة:



$$\text{جتا س} \text{ ظتا س} = \text{قتا س} - \text{جاس} \text{ كالآتي:}$$

طريقة هبة

$$\text{قتاس} - \text{جاس} = \frac{1}{\text{جا س}}$$

$$\frac{1 - \text{جا}^2 \text{ س}}{\text{جا س}} =$$

(لكن : $\text{جا}^2 \text{ س} + \text{جتا}^2 \text{ س} = 1$)

$$\frac{\text{جتا}^2 \text{ س}}{\text{جا س}} =$$

طريقة علي

$$\text{جتا س} \text{ ظتا س} = \text{جتا س} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$$

$$\frac{\text{جتا}^2 \text{ س}}{\text{جا س}} =$$

$$\text{جا س}$$

(أناقش الحلين)

لاحظ: لإثبات صحة متطابقة تم أخذ كل طرف على حدة حتى تساوى الطرفان.

تمارين ومسائل:



س١ أثبت صحة المتطابقات الآتية:

١ جتا^٢س = (١ + جا س) (١ - جا س)

٢ جتا س + جا س ظا س = $\frac{جتا س}{١}$

٣ قا س قتا س = ظا س + ظتا س

٤ (جاس + جتا س)^٢ - ٢ جا س جتا س = ١

س٢ أعط مثلاً يبين أن كلاً ممّا يأتي ليس متطابقةً مثلثيةً:

أ ١ - جا س = جتا س

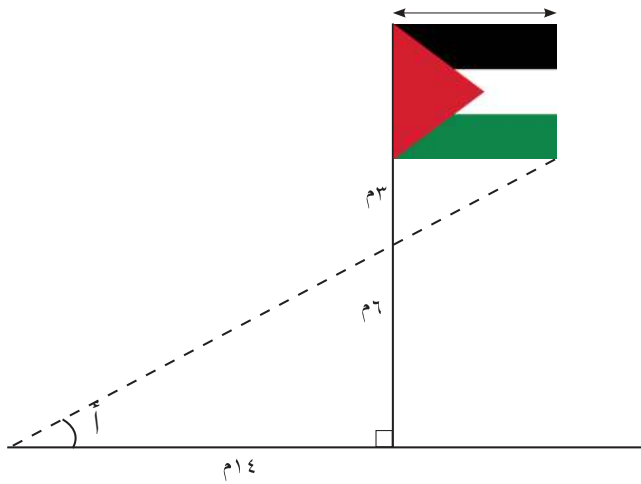
ب جا س جتا س = $\frac{١}{٣}$ جا س

س٣ تم رفع علم فلسطين أمام مقر الأمم المتحدة أواخر شهر أيلول من العام ٢٠١٥ م.

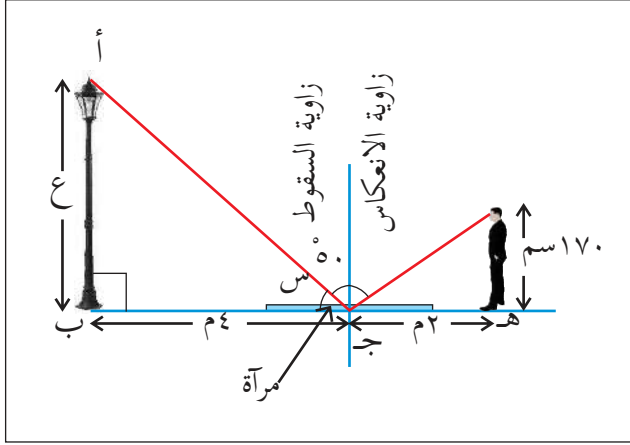
أ أجد طول العلم

ب بالاعتماد على الزوايا الحادة أ في الشكل الآتي أتأكد من صحة المتطابقة

(جا أ - ١) (ظا أ + قا أ) = - جتا أ



نشاط (١): ينصُّ قانونُ انعكاسِ الضوءِ الأوَّل على أنَّ زاويةَ سقوطِ شعاعٍ على سطحٍ



عاكِسٍ تساوي زاويةَ انعكاسِ الشعاع نفسه. يحاول شخصٌ طوله ١٧٠ سم معرفةَ ارتفاعِ عمودٍ كهرباءٍ؛ من خلال النَّظَرِ إلى مرآةٍ مستويةٍ ملقاةٍ على سطحِ الأرض، بحيث يبعدُ عن النقطة جـ مسافة ٢ م، إذا عُلِمَ أنَّ قياسَ زاوية السقوط 50° ، وأنَّ عمودَ الكهرباء يبعد ٤ م عن النقطة جـ، فكيف يمكنُ استخدامُ النسب

المثلثية في الشكل المقابل، لمعرفة ارتفاعِ عمودِ الكهرباء؟

قياس زاوية الانعكاس = _____

قياس الزاوية س في المثلث أ ب جـ = 50° (لماذا؟)

ظا س = $\frac{\square}{4}$

ع = ٤ ظاس

ع = ٤ $\square$ ظا. $50^\circ = \frac{\square}{\square}$ $3,4 = \frac{\square}{\square}$ متر

تُسمَّى الجملةُ : $3,4 = 4$ ظاس معادلةً مثلثيةً.

هل هناك طريقةٌ حلٍّ أخرى.

أفكر وأناقش

المعادلة المثلثية: هي معادلة تحتوي نسبةً مثلثيةً أو أكثر، تكون صحيحةً لبعض قيم المتغيّر فيها.

تعريف

* زاوية السقوط: هي الزاوية المحصورة بين الشعاع الساقط والعمود المقام عند نقطة السقوط.

نشاط (٢): أحلّ المعادلات المثلثية الآتية:



أ) $\sqrt{2} \sin \theta - 2 = 0$ ، حيث: θ زاوية حادة.

$$\sqrt{2} \sin \theta - 2 = 0$$

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \sqrt{2} \text{ ، إذن: } \theta = 45^\circ$$

ومنها: مجموعة حل المعادلة هي $\{45^\circ\}$

ب) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 0$ ، θ زاوية حادة.

$$\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ جتا } \theta \text{ (بقسمة طرفي المعادلة على جتا } \theta \text{)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \cos \theta$$

$\theta = 30^\circ$ ، ومنها: مجموعة حل المعادلة هي $\{30^\circ\}$

ملاحظة: حلّ المعادلة المثلثية: هو إيجاد قياس الزاوية θ التي تجعل المعادلة صحيحة. مجموعة حلّ المعادلة: هي مجموعة القيم التي تجعل المعادلة صحيحة دائماً.

نشاط (٣): أحلّ المعادلات المثلثية الآتية:



٢ جتا $\theta - 7 \sin \theta + 3 = 0$ ، θ زاوية حادة.

أكمل بإيجاد قيمة/ قيم θ :

أ) ٢ جتا $\theta - 7 \sin \theta + 3 = 0$ ، θ زاوية حادة

$$2 \cos \theta - 7 \sin \theta + 3 = 0 \text{ (جتا } \theta - 3 \text{)}$$

$$\text{إما } 2 \cos \theta - 1 = 0 \text{ أو } \cos \theta = 3$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ جتا } \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ مرفوضة (لماذا؟)}$$

ومنها: مجموعة حلّ المعادلة هي $\{60^\circ\}$

هل كل معادلة مثلثية تمثل متطابقة مثلثية؟

أفكر وأناقش

تمارين ومسائل:



س١ أحلّ المعادلات المثلثية الآتية حيث س، هـ، أ، زوايا حادة :

أ $0 = (2 \text{ جا هـ} - 1) (2 \text{ جتا هـ} - 1)$

ب $0 = 1 + 2 \text{ ظا س} - 2 \text{ ظا س}^2$

ج $0 = 2 \text{ جا أ} - 5 \text{ جا أ} + 2$

س٢ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه: قا أ = $\frac{1}{2}$ ، أحلّ المعادلات الآتية:

١ س جا أ - جتا أ = 0

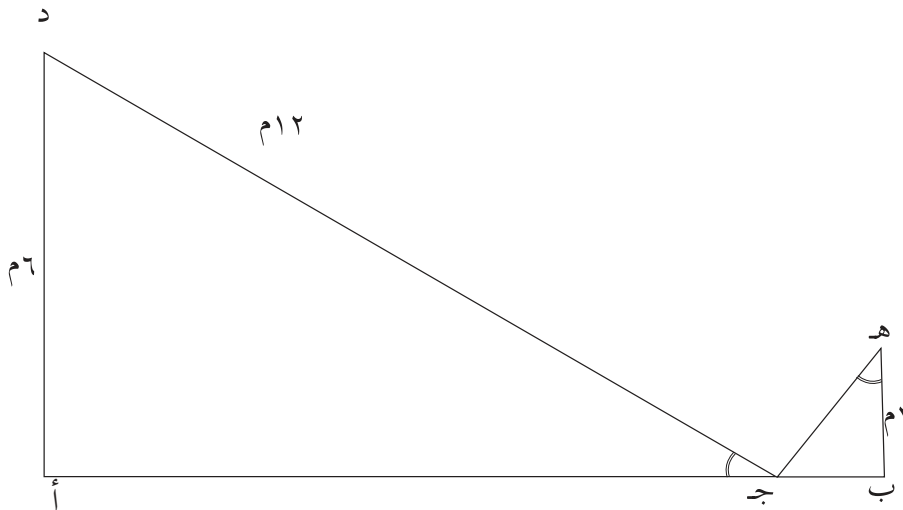
٢ س ظتا أ - ظا أ = 0

٣ قتا ($90^\circ - \text{أ}$) ظتا ($90^\circ - \text{أ}$) - $\left(\frac{1}{\text{س}}\right) = 0$ ، س $\neq$ صفر

س٣ يمثل الشكل الآتي موقع المنزل (هـ) عند النقطة (جـ) المزودة لخدمة الإنترنت من موقع

التقوية (د)، وكان $\angle \text{د ج أ} = \angle \text{ج هـ ب}$.

أجد $\angle \text{هـ}$.



س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ ما قيمة المقدار $\frac{\text{جتا}^2 \text{س} \text{قتا} \text{س}}{\text{ظا} \text{س}}$ ؟

(أ) ظتا س (ب) قتا س (ج) ظتا^٢ س (د) قتا^٢ س

س٢ إذا كانت س زاوية حادة، وكان جاس = جتا(س + ٢٠°)، فما قياس الزاوية س ؟

(أ) ٣٠° (ب) ٣٥° (ج) ٥٠° (د) ٢٠°

س٣ ما قيمة جا^٢ ٣٠° + جتا^٢ ٣٠° ؟

(أ) صفر (ب) ١ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

س٤ ما قيمة جتا هـ $\times \frac{1}{\text{قا هـ}}$ ؟

(أ) صفر (ب) ١ (ج) جتا^٢ هـ (د) جتا هـ

س٥ إذا كانت س زاوية حادة، وكان جتا س ظا س = $\frac{1}{2}$ ، فما قيمة س ؟

(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (ج) ٦٠° (د) ٨٠°

س٦ ما قيمة المقدار المكافئ لـ: جا^٢ س + ظا^٢ س جا^٢ س ؟

(أ) ظا س (ب) قتا س (ج) ظتا^٢ س (د) ظا^٢ س

س٢ إذا كان جا أ = ٠,٣ ، أجد قيم النسب المثلثية الأخرى للزاوية أ، وقيم النسب المثلثية للزاوية المتممة لها.

س٣ أثبت صحة المتطابقات المثلثية الآتية:

أ $\frac{\text{ظا}^2 \text{س}}{1 + \text{ظا}^2 \text{س}} = \text{جا}^2 \text{س}$

ب $1 = \text{جتا}^2 \text{س} + \text{ظا}^2 \text{س}$

د $1 = \frac{\text{جا س جتا س}}{\text{ظا س}} + \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{\text{ظا س}}$

ج $1 + \text{ظتا}^2 (٩٠^\circ - \text{هـ}) = \text{قا}^2 \text{هـ}$

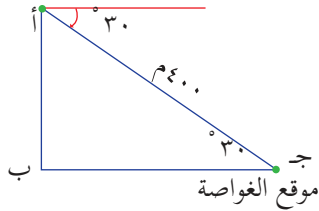
س٤ إذا علمت أن: ١٣ جا أ - ١٢ = ٠ ، حيث أ زاوية حادة. أحسب قيمة ظا أ + قا أ

س٥ أحلّ المعادلات المثلثية الآتية:

أ - $2 - \text{جتا } 3 = 2$

ب - $2 \text{ جتا } 5 - 5 \text{ جتا } 2 = 0$

موقع الرادار



س٦ رصد رادار على سفينة حربية غوّاصة على بعد ٤٠٠ متر تحت سطح الماء، بزاوية انخفاض قياسها ٣٠°، أجد عمق الغوّاصة تحت سطح الماء لحظة الرصد.

س٧ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

متدني	متوسط	مرتفع	المهارة
			اجد النسب المثلثية لاي زاوية حادة
			احل مسائل كلامية على النسب المثلثية
			اوظف النسب المثلثية في حل مشكلات حياتية

مشروع الوحدة:

يفصل وادي بين قريتي برطعة الشرقية وبرطعة الغربية، ولتسهيل الحركة بينهما فكر السكان إقامة جسر فوقه، كيف تساعد السكان في التخطيط لإقامة الجسر؟ (اعتبر القريتين على نفس المستوى)

★ حدّد الأدوات اللازمة للعمل.

★ ارسم شكلاً توضيحياً.

★ حدّد المفاهيم والمهارات الرياضية التي تحتاجها.

★ ما المخاطر التي يواجهونها؟

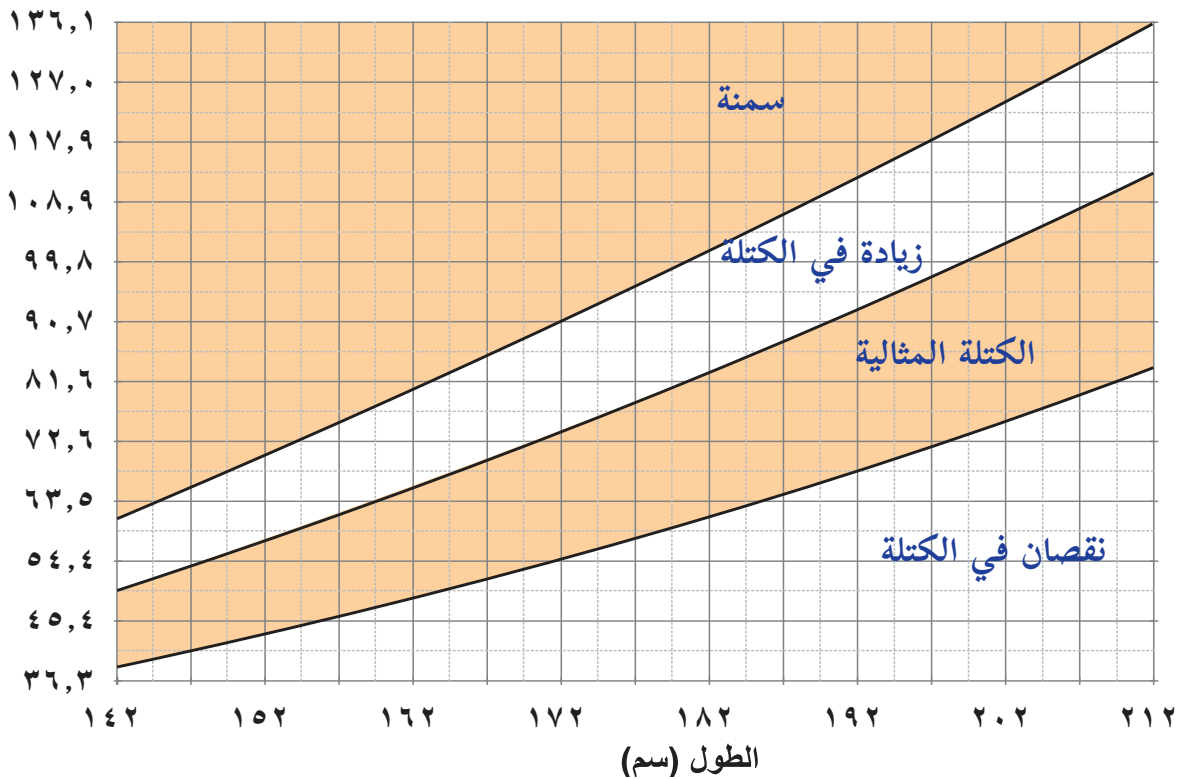
★ اكتب تقريراً يوضّح خطوات العمل.

الجبر وتطبيقات الحساب

الوحدة

المخطّط البياني للطول والكتلة

الكتلة
(كغم)



أتأمل الصورة، أقيس طولي، وأستخدم المخطّط البياني في تحديد الكتل المناسبة، لتكون كتلتي ضمن الكتلة المثالية (الطبيعية).

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف المتباينات الخطية في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى الفترات وأنواعها .
- ٢ تمثيل الفترات على خطّ الأعداد.
- ٣ التعرف إلى المتباينة الخطيّة بمتغيرٍ واحدٍ، وحلّها.
- ٤ التعرف إلى المتباينة الخطيّة بمتغيرين، وتمثيلها بيانيّاً.
- ٥ حلّ نظامٍ من المتباينات الخطيّة بمتغيرين بيانيّاً.
- ٦ حلّ مشكلاتٍ حياتيّة على مفاهيم الوحدة.

نشاط (١): يعد الحق في توفير التعليم المجاني من الحقوق الأساسية لكل طفل، يلتحق



الأطفال في فلسطين بالصف الأول الأساسي في المدارس الحكومية والوكالة إذا كانت أعمارهم بين ٥ سنوات و ٧ أشهر، و ٦ سنوات و ٧ أشهر، في بداية العام الدراسي*، إضافةً إلى الذين أعمارهم ٦ سنوات و ٧ أشهر تماماً.

يمكن لأي طفل في فلسطين عمره ٦ سنوات وشهر في بداية العام الدراسي الالتحاق بالمدارس الفلسطينية الحكومية، أو الوكالة،

لاحظ أن $\frac{1}{12}$ محصور بين العددين

$$\frac{7}{12}, 5, \frac{7}{12}.$$

لا يمكن لطفل في فلسطين عمره ٥ سنوات الالتحاق في المدارس الحكومية، أو مدارس الوكالة.

لاحظ أن: $\{s: s \in \mathbb{H}, 5 < s \leq \frac{7}{12}\}$.

هل يمكن للطفل الفلسطيني الذي عمره ٥ سنوات و ١٠ أشهر الالتحاق بالمدرسة؟ لماذا؟ ____.

نشاط (٢):



١. أكمل كتابة المجموعات الآتية:

(أ) المجموعة المكوّنة من العددين الحقيقيّين: ١ ، ٥ ، وجميع الأعداد المحصورة بينهما على خطّ الأعداد = $\{s: s \in \mathbb{H}, 1 \leq s \leq 5\}$ ، وهي مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تبدأ بالعدد ١ وتنتهي بالعدد ٥.

(ب) المجموعة المكوّنة من العدد ١، وجميع الأعداد المحصورة بين العددين: ١ ، ٥ على خطّ الأعداد = $\{s: s \in \mathbb{H}, 1 \leq s < 5\}$.

٢. ماذا نسمّي هذه المجموعات؟ _____

* على اعتبار أن العام الدراسي يبدأ في الأول من شهر أيلول.



أَتَعَلَّمُ : ليكن a ، b عددين حقيقيين، بحيث: $a > b$ ، فإن مجموعة جميع الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين: a ، b على خط الأعداد، تُسمى فترة ، ويستعمل الرمزان "[" ، "]" للدلالة على انتماء طرفي الفترة أو عدم انتمائهما إليها.

الفترات المحدودة :

ليكن a ، b عددين حقيقيين ، حيث: $a > b$

أنواع الفترات	الفترة بالرموز	الفترة على شكل مجموعة
المغلقة	$[a, b]$	$\{x: b \leq x \leq a\}$
نصف المغلقة (نصف المفتوحة)	$[a, b[$	$\{x: b < x \leq a\}$
نصف المغلقة (نصف المفتوحة)	$]a, b]$	$\{x: b \leq x < a\}$
المفتوحة	$]a, b[$	$\{x: b < x < a\}$

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

الفترة الثانية: تعبر عن جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من العدد a والأقل أو يساوي العدد b

* نصف مغلقة من اليسار ** نصف مغلقة من اليمين *** يمكن كتابتها أيضاً على الصورة (a, b)

نشاط (٣): أكمل كتابة الفترات الآتية كمجموعات، وأمثلها على خطّ الأعداد:



الفترة	الفترة على شكل مجموعة	التمثيل على خطّ الأعداد
$[٧, ٢]$	$\{س: س \geq ٢, ح \geq ٧\}$	
$]٧, ٢]$	$\{س: س \geq ٢, ح > ٧\}$	
$[, ٢[$	$\{س: س > ٧, ح \geq ٥\}$	
$]٥, ٢[$	$\{س: س \geq ٥, ح > ٧\}$	

نشاط (٤): أ) أكتب الفترة $[-٢, \frac{1}{٢}]$ ، على شكل مجموعة: _____



ب) أمثلها على خطّ الأعداد:



ج) أحدّد أيّ الأعداد الآتية تنتمي إلى الفترة $[-٢, \frac{1}{٢}]$:

$٨, ١-, \sqrt[٥]{٠.٠٠٤}, -\frac{1}{٣}, \frac{1}{٢}, ٠, ٣-, ٢-$

د) أكتب ٣ أعداد تنتمي إلى الفترة $[-٢, \frac{1}{٢}]$: _____، _____، _____

١) هل $[٤, ١] = \{٤, ١\}$ ؟ لماذا؟

٢) بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد غير منتهي من الأعداد، أعط ثلاثة أعداد بين العددين $\frac{1}{١٠}$ ، $\frac{٢}{١٠}$

أفكر وأناقش



نشاط (٥) مصعدٌ في بنايةٍ مكوّنةٍ من ٧ طوابق، كُتب عليه: ”الحد الأعلى للحمولة ٤٥٠ كغم“ .

يمكن التعبير عن كتلة الحمولة الممكنة للمصعد بالفترة: [٠ ، ٤٥٠] .

أمثل تلك الفترة على خطّ الأعداد: _____

هل يمكن لـ ٣ أشخاص، كتلتهم: ٨٣ كغم ، ٧٩ كغم ، ٩٠ كغم، ويحمل كلُّ منهم ٢٥ كغم من الأرز الصعودُ معاً إلى الطابق الرابع ؟ _____ .

وضّح إجابتك _____ .

الفترات غير المحدودة

ليكن أ عدداً حقيقياً ، فإنّ:

الفترة	الفترة على شكل مجموعة
$] \infty , أ]$	$\{س : س \ni ح , س \leq أ\}$
$] \infty , أ [$	$\{س : س \ni ح , س < أ\}$
$أ , -\infty [$	$\{س : س \ni ح , س \geq أ\}$
$أ , -\infty]$	$\{س : س \ni ح , س > أ\}$
$] \infty , -\infty [$	$\{س : س \ni ح = ح\}$

يمكن التعبير عن الفترات بالكلمات مثلاً:

الفترة الأولى تعبر عن جميع الأعداد الحقيقة الأكبر من أو يساوي العدد أ

ملاحظة: الرمز ∞ يدلّ على مالانهاية في الفترات غير المحدودة.

نشاط (٦) أعبّر عن المجموعات الآتية بفترات، وأكمل تمثيلها على خطّ الأعداد:



(١) $\{s: s \geq 3\}$ ، $s < 3$



(٢) $\{s: s \geq 2\}$ ، $s \geq 2$



(٣) $\{s: s \geq 3\}$ ، $s \geq 3$



نشاط (٧): أمثل الفترة $]-\infty, 10[$ ، 10 على خطّ الأعداد، أحدد أيّ الأعداد الآتية تنتمي



إلى هذه الفترة: 10 ، -10 ، صفر ، $-\sqrt{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، 980 .



$10 \notin]-\infty, 10[$ ، 10 ، $]-\infty, 10[$ ، صفر

$-\sqrt{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، 980

تمارين ومسائل:



س١ كُتِبَ على قطرةٍ للعين: "صالحة للاستخدام لمدة ٣٠ يوماً من تاريخ فتح العبوة"، أُعْبِرْ عن مدة صلاحيتها عند فتحها بفترة ، وأمثلها على خطّ الأعداد.

س٢ أكتب المجموعات الآتية على شكل فترات :

- $ل = \{س : س \geq ٢١ ، ح > ٤٠٠\}$.
- جميع الأعداد الحقيقية التي بُعْدها عن الصفر أقلّ من ٥ وحدات.
- درجات الحرارة السالبة.

س٣ أمثلُ الفترات الآتية على خطّ الأعداد :

- $[-٤ ، ٢]$
- $[-٤ ، ٠) ،]٠ ، \infty]$
- $[-\infty ، ٩]$

س٤ أعبر عمّا يلي بفترات:

- فترة صلاحية مصباح ٩٥٠ ساعة تشغيل.
- الفترة التي تُمثّل أيّ عددٍ حقيقيٍّ غير موجب.

س٥ أحدّد الأعداد التي تنتمي إلى الفترة $[-\infty ، -٣]$ من بين الأعداد:

٣ ، $-\frac{٢٥}{٤}$ ، -٣ ، ٠ ، -٤ ، -١١ .



نشاط (١): يُعدُّ فقر الدم (الأنيميا) من المخاطر الصحيّة في المجتمع الفلسطينيّ، وينتج عن نقص بعض المغذّيات من الفيتامينات، والعناصر المعدنيّة، (ويُعدُّ فقر الدم الناتج عن نقص الحديد هو الأكثر انتشاراً، يُعدُّ الذكّر البالغ مصاباً بفقر الدم إذا كان معدّل الهيموغلوبين في الدم أقلّ من ١٣غم/ديسلتر، وللأنثى البالغة أقلّ من ١٢غم/ديسلتر، وللطفّل وللمرأة الحامل أقلّ من ١١غم/ديسلتر؛ وذلك حسب بروتوكول وزارة الصّحة الفلسطينيّة، الذي يعتمد ما تقرّهُ منظّمة الصّحة العالميّة. فإذا رمزنا لنسبة الهيموغلوبين في الدم للذكّر البالغ المصاب بفقر الدم بالرمز س، فيمكن التعبير عنها بـ:

س > ١٣، وتُسمّى متباينة. أكمل:

هل يُعدُّ الذكّر البالغ الذي نسبة الهيموغلوبين عنده ٩ مصاباً بفقر الدم؟ _____

هل يمكن أن تكون س = ١٤؟ _____

المتباينة الخطية بمتغير واحد: هي عبارة رياضيّة بمتغير واحد، وتحتوي إحدى الإشارات

، > ، < ، ≥ ، ≤ ، وتُكتب بإحدى الصّور الآتية :

أ س + ب > ٠ ، أ س + ب ≥ ٠ ، أ س + ب < ٠ ، أ س + ب ≤ ٠ .

حيث أ ، ب أعداد حقيقيّة، أ ≠ صفر .



نشاط (٢): أرّتب الأشخاص التالية أسماؤهم حسب أطوالهم من الأطول إلى الأقصر:



أمل: ١,٥٨ م ، مازن: ١,٩٠ م ، جميل: ١,٧٠ سم.

مازن هو الأطول

الترتيب هو: _____ ، _____ ، _____ .



* ١٠ ديسلتر = لتر

نشاط (٣): أكوّن متباينةً تُعبّر عن كلّ من الجمل الآتية:



★ الحد الأدنى لقيمة المشتريات في محلّ تجاريّ؛ للحصول على خصم هو ١٠٠ دينار.
فإذا رمزنا لقيمة المشتريات للحاصلين على خصم بالرمز س ، يمكن التعبير عن المسألة بالمتباينة: $100 \leq S$

٦٠	
٣٥	؟

★ الحد الأعلى لزمان التشغيل المتواصل لخلاطٍ منزليّ ٦٠ ثانية، شغلّته أمّ عبد الله ٣٥ ثانية وما زال يعمل. أرمز للزمان الإضافي الممكن للتشغيل م
فإنّ المتباينة: $35 + \text{---} \geq \text{---}$.

نشاط (٤): أجدُ ناتجَ ما يأتي، وأقارن :



٣ ، ٨ عدداً حقيقيّان، $8 - 3 = \text{---}$ ، وهو عدداً موجباً ومنها $8 < 3$.
٢- ، ٦ عدداً حقيقيّان، $6 - 2 = \text{---}$ ، وهو عدد ——— ومنها ٦ ——— ٢- .

ماذا تلاحظ؟

يكون العدد الحقيقيّ أ أكبر من العدد الحقيقيّ ب؛ أي: أ < ب ، إذا كان أ - ب عدداً موجباً، وبالرموز أ - ب < صفر.



نشاط (٥): أضعُ إشارة < أو > أو = في الفراغات الآتية :



$$12 > 5$$

$$2- + 12 \text{ ————— } 2- + 5 \quad , \quad 3 + 12 \text{ ————— } 3 + 5$$

$$4- < 1-$$

$$6- + 4- \text{ ————— } 6- + 1- \quad , \quad 2 + 4- \text{ ————— } 2 + 1-$$

ماذا تلاحظ؟ —————



إذا كانت أ ، ب ، ج أعداداً حقيقيّة ، و كان $أ > ب$ ، فإنّ :
 $أ + ج > ب + ج$.



نشاط (٦): أكمل إيجاد ما يأتي، وأضع إشارة $<$ أو $>$ أو $=$ في الفراغ :

$$١٢ > ٥$$

$$٢- \times ١٢ \text{ ————— } ٢- \times ٥ , \quad ٣ \times ١٢ > ٣ \times ٥$$

$$١- < ٤- :$$

$$٦- \times ٤- \text{ ————— } ٦- \times ١- , \quad ٢ \times ٤- \text{ ————— } ٢ \times ١-$$

$$٣٦ < ٢٤- :$$

$$٦- \div ٢٤- \text{ ————— } ٦- \div ٣٦ , \quad ٦ \div ٢٤- \text{ ————— } ٦ \div ٣٦$$

ماذا تلاحظ ؟



إذا كانت أ ، ب ، ج أعداداً حقيقيّة ، فإنه:

إذا كان $أ > ب$ ، وكان ج عدداً موجباً ، فإنّ: $أ ج > ب ج$ و $\frac{أ}{ج} > \frac{ب}{ج}$.

وإذا كان $أ > ب$ ، وكان ج عدداً سالباً ، فإنّ: $أ ج < ب ج$ و $\frac{أ}{ج} < \frac{ب}{ج}$.

العبارات أعلاه صحيحة إذا كانت الإشارة $\geq$.

حلّ المتباينة: هو إيجاد قيمة، أو قيم المتغيّر التي تجعل المتباينة صحيحةً عند تعويض تلك

القيم فيها.

ملاحظة: مجموعة قيم المتغيّر تُسمّى مجموعة حلّ المتباينة.

مثال (١): أجد مجموعة حل المتباينة: $2 - 20 \leq 2$ في ح ، وأمثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل:

$$2 - 20 \leq 2$$

باستخدام خاصية الجمع للمتباينة: $2 - 20 + 20 \leq 2 + 20$

$$2 \leq 22$$

وبالقسمة على ٢ ينتج: $1 \leq 11$.

مجموعة الحل $=]\infty, 11]$ ، وأمثل على خط الأعداد:



ليكن أ ، ب عددين حقيقيين، بحيث: أ < ب . ما العلاقة بين $\frac{1}{ب}$ ، $\frac{1}{أ}$ ؟
أوضح بأثلة عددية.

أفكر وأناقش

نشاط (٧): كلفت المعلمة كلاً من إشراق وندى حل المتباينة: $2 + 3 > 4 + 9$ في ح .



طريقة ندى

$$2 + 3 > 4 + 9$$

$$2 + 3 - 9 > 4 + 9 - 9$$

$$2 + 3 > 4$$

$$2 - 9 + 9 > 4 - 9 + 9$$

$$2 > 6 - 9$$

$$2 > 3 - 9$$

طريقة إشراق

$$2 + 3 > 4 + 9$$

$$2 + 3 - 3 > 4 + 9 - 3$$

$$2 > 4 + 6$$

$$2 - 4 > 4 - 4 + 6$$

$$-2 > 6$$

$$-2 < 3$$

أناقش الحلين:



نشاط (٨): بالاعتماد على المتباينة: $١,٥ > س > ٨,٩$ ، أكمل ما يأتي:

أكبر عدد صحيح يُحقّق المتباينة هو: ٨

أقل عدد صحيح يُحقّق المتباينة هو: ____ .

عدد الأعداد الصحيحة التي تُحقّق المتباينة يساوي: ____ .

اكتب ثلاث أعداد صحيحة تحقق المتباينة: ____ ، ____ ، ____

مجموعة حل المتباينة في ح = { ____ : ____ } = [٨,٩ ، ١,٥]

أقارن مجموعة حل المتباينة: $١,٥ > س > ٨,٩$ بالفتريتين: [-∞ ، ٨,٩] ، [١,٥ ، ∞]

أمثل مجموعة حل المتباينة على خطّ الأعداد: _____

مثال (٢): أجد مجموعة حل المتباينة: $١ - س > ٤ س + ٢ \geq ٦$ ، ثمّ أمثل مجموعة حلّها على خطّ الأعداد.

الحل: لحلّ المتباينة: $١ - س > ٤ س + ٢ \geq ٦$ نجد تقاطع مجموعتي حلّ المتباينتين:

$$١ - س > ٤ س + ٢ \quad \text{و} \quad ٤ س + ٢ \geq ٦$$

أولاً: المتباينة $١ - س > ٤ س + ٢$

$$١ - س > ٤ س + ٢ \quad \text{س - ٣} > ٤ س$$

$$٣ - س > ٣ س$$

$$١ - س > ٣ س$$

إذن: مجموعة الحل [-١ ، ∞]

ثانياً: المتباينة $4 \geq 2 + s$

$$4 \geq s$$

$$s \geq 1$$

(بطرح ٢ من طرفي المتباينة).

(بقسمة طرفي المتباينة على ٤).

إذن مجموعة الحل $[-\infty, 1]$

مجموعة حل المتباينة: $s - 1 > 4 \geq 2 + s$ هي:

$$[-\infty, 1] \cap [1, \infty) = [1, 1]$$

ألاحظ التمثيل على خط الأعداد:



وبالتالي، فإن تمثيل مجموعة الحل هو تقاطع الفترتين



تمارين ومسائل:



س١ أحلّ المتباينات الآتية، وأمثّل مجموعة حلّها على خطّ الأعداد:

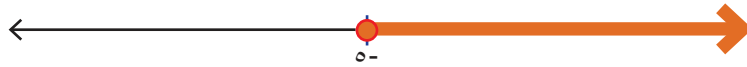
أ) $س + ٣ \geq ٤$

ب) $٢(ص + ٥) - ص < ٥$

ج) $س - ٧ \geq ٦ - س$

د) $٧ \geq س - ٣ \geq ١٢$

س٢ أكتب متباينةً خطيّةً يكون حلّها ممثلاً بالشكل:



ب) أكتب متباينةً تمثّل العبارة : «طرح العدد ٧٠ من عددٍ ما، وكانت النتيجة ٥ على الأقلّ» .



س٣ كتلة شاحنة ١٤ طناً، وكان الحد الأعلى لها مع حمولتها ٣٢ طناً، فما الحمولة المتبقية المسموح بها. عبّر عن المسألة بمتباينة، ثمّ أحلّها.

س٤ إذا كانت أ ، ب $\Rightarrow$ ح* ، ما إشارة قيم كلٍّ من أ ، ب التي تجعل المتباينة صحيحةً في كلٍّ من الحالات الآتية :

٣) $\frac{أ}{ب} < ٠$

٢) $أ^٢ ب < ٠$

١) $أ ب > ٠$



نشاط (١) ضمن آليات تنظيم الأسواق في فلسطين، أقرت وزارة الاقتصاد الوطني، ضمن المادة ١٧ من قانون حماية المستهلك قراراً بإشهار الأسعار على السلع، ويلزم هذا القرار التجار والبائعين وضع الأسعار على السلع. تحدّد الأسعار في الأسواق الفلسطينية في بعض الحالات الاستثنائية؛ حيث يتمّ وضع تسعيرة استرشادية لمجموعة من السلع من قبل دائرة حماية المستهلك في المحافظات، فإذا أُصدِرَت استمارة شهر رمضان بأسعار مجموعة من السلع الغذائية الأساسية في إحدى المحافظات، ومنها:

النوع	دجاج مذبوح	جبنة بلدية
السعر (كغم)	٤ دنانير	٥ دنانير

فإذا رصدت سميرة ٣٠ ديناراً لشراء دجاج، وجبنة بلدية، فوجدت أن كيلوغرام الدجاج يُباع في أحد المحال التجارية بأربعة دنانير، ويُباع كيلوغرام الجبنة بخمسة دنانير، فإذا رمزنا لكتلة الدجاج س كغم، وكتلة الجبنة ص كغم. عبّر عن المسألة بمتباينة:

$$٤س + ٥ص \geq ٣٠$$

لاحظ أن: $٠ \leq س$ و $٠ \leq ص$.

هل تستطيع سميرة شراء ٤ كيلوغرام دجاج، و ٣ كيلوغرام جبنة؟ _____

إذا التزم التاجر بالأسعار الاسترشادية التي حدّتها دائرة حماية المستهلك في المحافظة، هل سيكون باستطاعتها شراء ٤ كيلوغرام دجاج و ٣ كيلوغرام جبنة؟ _____

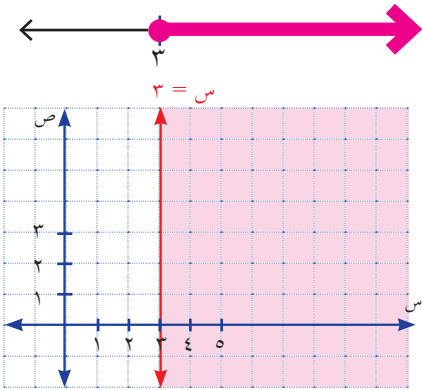


أَتَعَلَّمُ : المتباينة الخطيَّة بمتغيَّرين: هي عبارة رياضيَّة فيها متغيَّران، وإحدى الإشارات $>$ ، $\geq$ ، $<$ ، $\leq$ ، وتُكتَب بإحدى الصُّور الآتية :

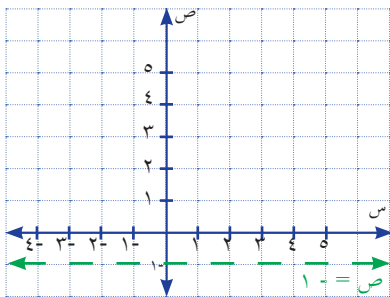
أ س + ب ص + ج $>$ ، أ س + ب ص + ج $\geq$.
أ س + ب ص + ج $<$ ، أ س + ب ص + ج $\leq$.
حيث: أ ، ب ، ج أعدادٌ حقيقيَّة وأ ، ب $\neq$ صفرًا.

مثال (١): أكتب مجموعة حلّ المتباينة: $س \leq ٣$ ، وأمثِّلها على خطّ الأعداد ، ثمّ أمثِّلها في المستوى الديكارتي .

الحل: مجموعة حلّ المتباينة: $س \leq ٣ = [٣ ، \infty)$ ، وتُمثَّل على خطّ الأعداد:



ولتمثيل مجموعة حلّ المتباينة: $س \leq ٣$ في المستوى الديكارتي، نرسم الخطّ المستقيم $س = ٣$ الذي يقسم المستوى إلى منطقتين، إحداهما تمثِّل مجموعة الحل، نطلِّل منطقة حلّ المتباينة $س \leq ٣$ كما في الشكل. لاحظ أنّ الإحداثي السيني للنقاط الواقعة ضمن منطقة الحل يُحقِّق $س \leq ٣$ ، أمثِّل موقع النقطة (٥ ، ١) .



نشاط (٢): أكمل تمثيل مجموعة حلّ المتباينة:

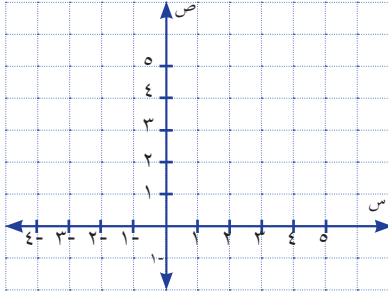
ص < ١ - في المستوى الديكارتي.

أرسم الخطّ المستقيم الذي معادلته $ص = ١$ -، بحيث يُرسم الخطُّ مُتَقَطَّعًا؛ لأنّ: $ص = ١$ - لا تُحقِّق المتباينة. أطلِّل المنطقة التي تمثِّل مجموعة الحل، وتشمل جميع النقاط التي إحداثيَّها الصّادي أكبر من ١ -

أكتب زوجاً مرتباً ينتمي إلى مجموعة حلّ المتباينة: $ص < ١$ - .

أكتب زوجاً مرتباً لا ينتمي إلى مجموعة حل المتباينة: $ص < ١٠$ (لا يحققها) _____ .

نشاط (٣): أمثل مجموعة حل المتباينة: $٢س - ٣ص = ٦$ في المستوى الديكارتي.



أرسم الخطّ المستقيم $٢س - ٣ص = ٦$
لتحديد منطقة الحلّ، أَعوّضُ إحداثيّات نقطة لا تقع
على الخطّ المستقيم المرسوم في المتباينة، ولتكن
(١، ٠) :

$$٢ \times ١ - ٣ \times ٠ = ٢ > ٦ \text{ . ماذا تلاحظ؟ } \text{_____}$$

أظللُ المنطقة التي تمثل مجموعة الحلّ على الرسم.

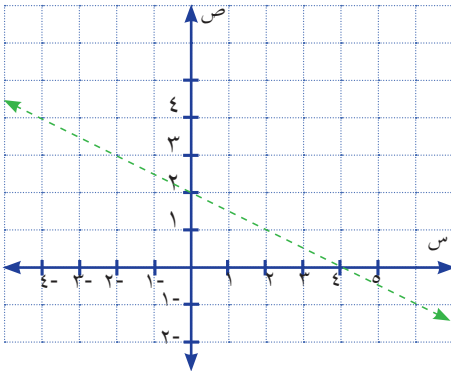
أكتب زوجاً مرتباً ينتمي إلى مجموعة الحل: _____

أكتب زوجاً مرتباً لا ينتمي إلى مجموعة الحل: _____

نظام المتباينات : هو أي مجموعة من المتباينات.

والمنطقة التي تمثل حلّ النظام هي المنطقة التي تُحقّق جميع المتباينات فيه.

نشاط (٤): أحدد المنطقة التي تمثل حل النظام الآتي في المستوى الديكارتي:



$$٢ص + ٤ > س$$

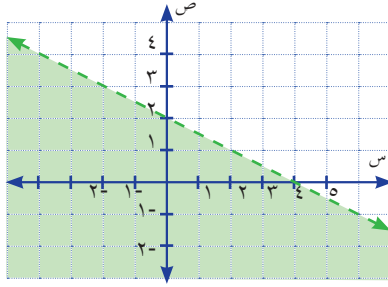
$$١ \leq س$$

$$١ \leq ص$$

أُمثّل مجموعة حلّ المتباينة: $٢ص + ٤ > س$:

أرسم الخطّ المستقيم: $٢ص + ٤ = س$ ، لاحظ أنّ
الخطّ متقطع.

أحدّد منطقة حلّ المتباينة: $س + ٢ص > ٤$ باختيار زوج مرتّب، مثل: $(١, ٠)$ والتعويض فيها:
 $٤ > ١ + ٠$



أي أنّ: النقطة $(١, ٠)$ ضمن منطقة الحلّ .

أظلل منطقة حلّ المتباينة: $س + ٢ص > ٤$ باللون الأخضر.

(١) أمثّل مجموعة حل المتباينة $س \leq ١$:

أرسم الخط المستقيم $س = ١$

ثمّ أحدّد منطقة حل المتباينة $س \leq ١$ ، باختيار زوج مرتّب مثل: $(٠, ١)$ ، والتعويض فيها.

أظلل منطقة حل المتباينة $س \leq ١$ بلونٍ آخر.

(٢) أمثّل مجموعة حل المتباينة $ص \leq ١ -$:

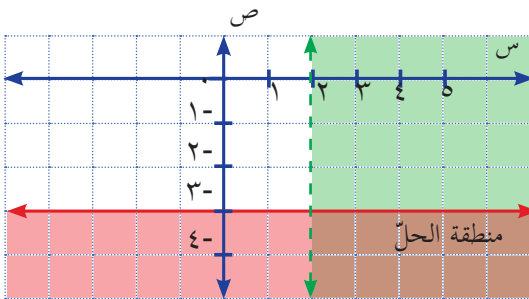
أرسم الخط المستقيم

أحدّد منطقة حل المتباينة: $ص \leq ١ -$

أظلل منطقة حل المتباينة ————— بلونٍ مختلفٍ عن اللونين السابقين .

وبهذا تكون المنطقة الواقعة ضمن مجموعة حلّ كلّ متباينةٍ في النظام، هي التي تمثّل مجموعة حل النظام.

مثال (٢): ما نظام المتباينات الذي مُثّلت مجموعة حلّه في الشكل؟



النظام هو :

$س < ٢$ (تمثّلها المنطقة المظلّلة

باللون الأخضر)

$ص \geq ٣ -$ (تمثّلها المنطقة المظلّلة

باللون الأحمر)

تمارين ومسائل:



س١ أمثلُ بيانياً مجموعة حلّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية :

١ ص $-2 \leq$

٢ ص $3 - 2 > 6$

٣ ص $2,5 > 4$

س٢ أجدُ بالرسم في المستوى الديكارتي المنطقة التي تمثّل حلّ كلّ نظامٍ من المتباينات الآتية:

ب

أ

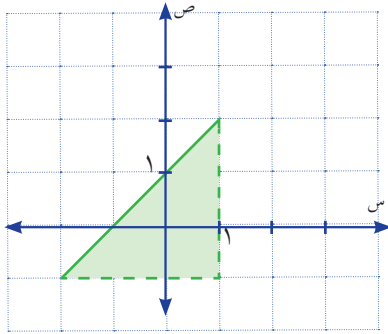
ص $-2 \leq$

ص $3 - 2 \geq$

ص $2 + 4 \geq 4$

ص $1 >$

ص $1 \leq$

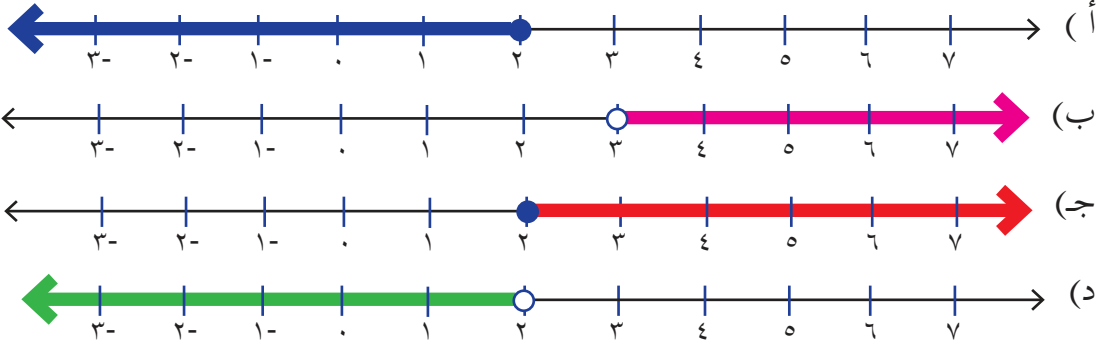


س٣ أجدُ نظام المتباينات الذي يمثّل المنطقة المظلّلة الآتية:

س٤ ينتج مصنع للأقمشة الجاهزة، في إحدى المدن الفلسطينية المشهورة بالصناعات الوطنية، نوعين من الجرابات، صوفية وقطنية، حيث يبيع ربطة الجرابات الصوفية بـ ٢ دينار، وربطة الجرابات القطنية بـ ٣ دنانير. استلم المصنع طلبية من أحد التجار لشراء النوعين بحيث لا يزيد ثمنها عن ٣٠٠ دينار. أمثلُ بيانياً الخيارات الممكنة التي يمكن للمصنع أن يزود بها ذلك التاجر.

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١ أي من الآتي تمثل حل المتباينة: $10 + 3 \geq 16$ ؟



٢ إذا كانت ن تمثل المدة بالساعات التي يحتاجها عمرو لحل أسئلة امتحان كُتِبَ عليه "مدة الامتحان ساعة و نصف"، فما المتباينة التي تُمثل القيم الممكنة لـ ن؟

(أ) $1,5 > ن$ (ب) $1,5 \leq ن$ (ج) $1,5 \geq ن$ (د) $1,5 < ن$

٣ ما الفترة التي تمثل المجموعة: $\{ع : ع \geq 4\}$ ، $ع \geq 4$ ؟

(أ) $[-4, \infty)$ (ب) $[-2, 2]$ (ج) $[-2, \infty)$ (د) $[2, 0]$

٤ ما الفترة التي يقع بها العدد $3,9$.

(أ) $[2, 1]$ (ب) $[-3, 2]$ (ج) $[4, 0]$ (د) $[0, 4]$

٥ إذا كانت ص $\in [-7, 5]$ فما قيمة ص؟

(أ) -7 (ب) 5 (ج) صفر (د) 12

س٢ تعلن إحدى شركات الطيران لزبائنها أن الحد الأعلى لأمتعة الراكب الواحد هي ٣٥ كغم، فإذا كانت كتلة الحقيرة الأولى لأحد المسافرين ١٥ كغم، ما الكتلة الممكنة للحقيرة الثانية؟ (أعبر عن المسألة بمتباينة وأحلها).

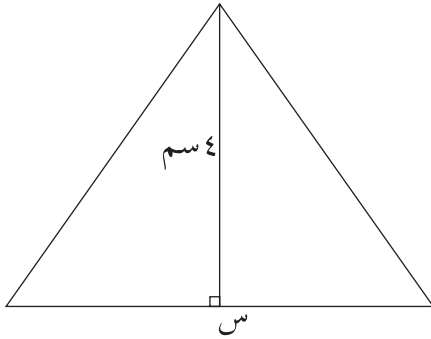
س٣ أمثل مجموعة حل النظام الآتي في المستوى الديكارتي:

$$1 > س$$

$$3,5 \geq ص$$

$$ص - س \leq 2$$

س٤ ما مجموعة قيم س الممكنة التي تجعل مساحة المثلث في الشكل المجاور أقل من ٤٠ سم^٢؟



س٥ أقيم ذاتي: أعبّر بلغتي عن المفاهيم الأكثر اثاراً التي تعلمتها في هذه الوحدة .

مشروع الوحدة:

تُقدِّم إحدى الشركات الكبرى عروضاً لوكلائها لتشجيع المواطنين على شراء حاجياتهم، فإذا كنتَ صاحبَ هذه الشركة، استخدم الجدول أدناه في وضع عروض مميزة، من وجهة نظرك؛ لتشجيع الناس على الشراء، مع مراعاة تحقيق أرباح معقولة لشركتك. نظم عروضك فنياً أيضاً، بحيث يمكنك إدراجها في إحدى الصحف المحلية. اكتب في ورقة: لماذا تعتقد بأن عرضك قوي، ومنافس لعروض أخرى وما هي المخاطر المتوقعة؟

السلعة	ثمن بيعها نقداً
ثلاجة.	١٠٠٠ دينار
طباخ غاز مع فرن.	١٠٠٠ دينار
غسالة.	٨٠٠ دينار
مكنسة كهربائية.	٢٥٠ ديناراً
تلفاز.	٥٠٠ دينار

- 1- Body mass calculator
- 2- <http://www.screencast.com>
- 3- <http://www.mohe.ps.pcdc>

روابط إلكترونية

الاقترانات



الوحدة



أتأمل الصورة: أبحث في الصورة عن حواف تُمثل منحنيات لاقترانات، أرسم رسماً تخطيطياً لها، مع تسميتها.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على
توظيف كثيرات الحدود والعمليات عليها في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١ التعرف إلى كثيرات الحدود.
- ٢ جمع كثيرات الحدود وطرحها.
- ٣ ضرب كثيرات الحدود وقسمتها.
- ٤ التعرف إلى الاقتران التربيعي، وتمثيله بيانياً.
- ٥ التعرف إلى الاقتران النسبي.
- ٦ إجراء العمليات الحسابية الأربع على الاقترانات النسبية.

نشاط (١): تستخدم البنوك خدمة الصراف الآلي على نطاق واسع وذلك للتسهيل على المواطن في التعاملات البنكية.



يحتوى الصراف الآلي صناديق من فئة العملات المتداولة، دينار، دولار، ... ، فإذا كانت س = ١٠ نستطيع التعبير عن الحركات الآتية من الصراف الآلي: ١٠، ٨٠، ١٠٠، ٣٠٠، بالمقادير الجبرية:

س ، ٨س ، س^٢ ، ٣س^٢ ، على التوالي

أمثل مجموع حركات الصراف الآلي بالرموز: _____ .

الاقتران كثير الحدود* على ح: هو اقتران معرف على ح، ويتكون من حد، أو مجموع حدود جبرية عدة، وتكون فيه أسس المتغير أعداداً صحيحة غير سالبة. ونعبر عن كثير الحدود بـ:

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s^1 + a_0$$

حيث: أ، أ_١، أ_٢، ... أ_ن أعداد حقيقية، وتسمى معاملات كثير الحدود Q(s)، ن عدداً صحيحاً غير سالب.

تعريف

ملاحظة: درجة كثير الحدود هي أكبر أس للمتغير فيه.

* يمكن تعريف كثير الحدود على أي مجموعة جزئية من ح.

نشاط (٢): أكمل:



(١) ق(س) = $2س^{\circ} - 15س + 9$: اقتران كثير حدود من الدرجة الخامسة؛ لأن: الأسس صحيحة غير سالبة، وأكبر أس فيه هو ٥ .

(٢) ق(س) = $6س - 3س^{\frac{1}{3}}$: ليس اقتراناً كثير حدود؛ لأن الأس $\frac{1}{3}$ عدد غير صحيح .

(٣) ق(س) = $س - س^{\frac{2}{5}} - س^{\frac{7}{6}} + 2س^{\circ} + 4س^{\frac{1}{6}} - 9$: _____ .

(٤) ق(س) = 3 : اقتران ثابت، وهو كثير حدود من الدرجة الصفرية؛ لأنه يمكن كتابته على صورة: ق(س) = $3س^0$.

(٥) ق(س) = $\pi س^2 - س^{\frac{3}{4}} + 1$: _____ .

(٦) ق(س) = $4س + 1$: _____ .

(٧) ق(س) = $3س^2 + 5س - 4$: _____ .

نشاط (٣): لتكن: ق(س) = $9س^3 - \frac{1}{4}س^2 - 5س - 3$



أكمل إيجاد:

أ_٤ = -٥ ، أ_٣ = _____ ، أ_٢ = _____ ، أ_١ = _____ ، أ_٠ = _____ .

يتساوى كثيرا الحدود، إذا كان لهما الدرجة نفسها، وكانت معاملات قوى س المتناظرة متساوية.

تفصيل

نشاط (٤): إذا كان: ق(س) = $3س^2 + ب س + ج$ ، هـ(س) = $3س + 3س^{\frac{1}{3}}$ ،



وكان ق(س) = هـ(س) ، أكمل إيجاد:

أ = ٣ ، ب = _____ ، ج = _____ .

نشاط (٥): ليكن: $ق(س) = ٢س + ٤$



- هل $ق(س)$ كثير حدود؟ _____
- إذا كان $ق(س)$ = صفر
فإن: $٢س + ٤ = ٠$
_____ = $٢س$
 $س = -٢$

نُسمّي العدد $(٢-)$ صفراً للاقتران $ق$ ؛ لأن: $ق(٢-) = صفر$ ، أتحمق من ذلك.

أَتَعَلَّمُ : إذا كان $ق(س)$ اقتراناً، وكان $ق(م) = صفر$ ، فإن العدد $م$ يُسمّى صفراً للاقتران $ق(س)$.



نشاط (٦): وجد محاسب أحد الفنادق أن العلاقة بين عدد نزلاء الفندق، ومقدار ما يربحه بالدنانير، يعطى بالإقتران $ر(س) = ٢س - ١٨$ ، $س \in \mathbb{V}^+$ ، أجد عدد النزلاء الذي يجعل الربح يساوي صفراً.

$$\begin{aligned} ٠ &= ر(س) \\ ٠ &= ٢س - ١٨ \\ ٢س &= ١٨ \\ ٩ &= س \end{aligned}$$

و منها إما $س =$ _____ أو $س = -٣$ (مرفوضة، لماذا؟)

عدد النزلاء الذي يجعل الربح يساوي صفراً هو _____

تمارين ومسائل:



س١ أبين أيّ الاقترانات الآتية تمثل كثير حدود، ثم أكتب درجة كثير الحدود فيها:

أ) ق(س) = $٢س^٢ - ٥س + ١$

ب) ق(س) = $س^٢ - \frac{٥}{٣-س} + ٧ - ٣س^٩ - ٢س$

ج) ق(س) = $س^٢ + ٥س + \frac{٢}{٥}$

س٢ تعد تمارين التنفس أحد الطرق المتبعة لعلاج الأمراض والاضطرابات. في إحدى تمارين التنفس،

إذا مُثل حجم الهواء بالتر في رئة ياسر بالاقتران ق(س) = $٠,١٢٥س^٢ + ٠,٠٣٥س - ٠,٠٣٥س$ ، حيث س تمثل الزمن اللازم لإجراء عملية الشهيق، ومُثل حجم الهواء بالتر في رئة أيمن بالاقتران هـ(س) = $١,٧٣س^٢ + (٣ب - ١)س - ٠,٠٣٥س$ ، أجد قيم كل من: أ، ب التي تجعل حجم الهواء في رئتيهما متساوي.

س٣ أجد أصفار الاقترانات الآتية:

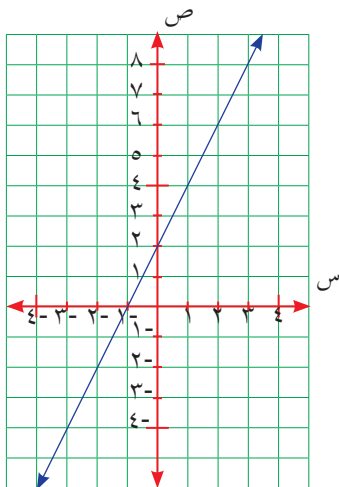
أ) ق(س) = $٧ - ٣س$

ب) ق(س) = $١ + ٥س$

ج) ق(س) = $١٤ - ٥س + ٢س^٢$

د) ق(س) = $(١ + ٢س) \times (٤ - س)$

هـ) ق(س) = $٤ - ٢س$



س٤ مُثل الاقتران ق(س) في المستوى الديكارتي، كما في الشكل

المجاور، أجد من الشكل:

أ) نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

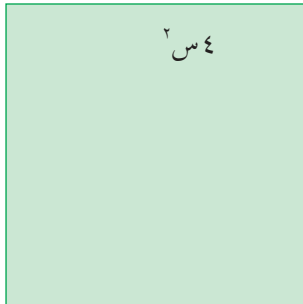
ب) نقطة تقاطعه مع محور السينات.

ج) صفر الاقتران ق(س).

جمع كثيرات الحدود وطرحها

(٧ - ٢)

نشاط (١): تنتشر لعبة كرة الطائرة في فلسطين، ومن أجل تطوير اللعبة يعمد الاتحاد الفلسطيني إلى توفير قاعات لأندية الدرجة الممتازة، طُلب إلى مهندس عمل تخطيط داخل القاعة، لغرف ملابس اللاعبين؛ ويمكن تمثيلها بالأشكال الآتية، فرسم المهندس غرفتين، مساحة إحداهما أربعة أضعاف مساحة الأخرى.



مجموع مساحتهما: _____

الفرق بين مساحتهما: _____

مجموع محيطيهما: _____

أَتَعَلَّم : إذا كان $Q(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$ ، فإن $J(s) = s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + s + 1$.

أولاً: جمع كثيرات الحدود:

ليكن: $Q(s)$ ، $H(s)$ كثيري حدود، فإن: $(Q + H)(s)$ كثير حدود، بحيث:

$$(Q + H)(s) = Q(s) + H(s)$$

ق. هـ

نشاط (٢): ليكن $Q(s) = 3s^2 + 5s - 1$ ، $H(s) = 2s^2 - 2s$ ،

أكمل إيجاد:



$$(Q + H)(s) = Q(s) + H(s) = (3s^2 + 5s - 1) + (2s^2 - 2s)$$

$$= (3s^2 + 2s^2) + (5s - 2s) - 1$$

$$= 5s^2 + 3s - 1$$

لاحظ أن: $(Q + H)(s)$ هو اقتران كثير حدود من الدرجة _____ .



نشاط (٣): إذا كان $ق(س) = ٤س^٢ - ٥س + ١$ ، $ك(س) = -٤س^٢ - ٣س + ٣$ ، أكمل
إيجاد:

$$() + () = \text{---} + \text{---} = (س) (ق + ك)$$

$$\text{---} =$$

لاحظ أن: $(ق + ك) (س)$ هو اقتران كثير حدود من الدرجة --- .

$$(٢) (ق + ك) (-١) = \text{---}$$

$$(٣) ق (-١) = \text{---}$$

$$(٤) ك (-١) = \text{---}$$

$$(٥) ق (-١) + ك (-١) = \text{---}$$

(٦) أقرن بين: $ق (-١) + ك (-١)$ ، $ق + ك (-١)$.

أَتَعَلَّمُ : ناتج جمع كثيري حدود هو كثير حدود، درجته أقل، أو تساوي أعلى درجتَي الاقترانين.

ثانياً: طرح كثيرات الحدود:

ليكن: $ق(س)$ ، $هـ(س)$ كثيري حدود، فإن: $(ق - هـ) (س)$ كثير حدود، بحيث:

$$(ق - هـ) (س) = ق(س) - هـ(س)$$

ق
هـ



نشاط (٤) إذا كان $ق(س) = ٧س^٢ + ٥س - ١$ ، $هـ(س) = ٢س^٢ - ٢س + ٧$ ، أكمل
إيجاد:

$$(١) \quad (ق - هـ)(س) = ق(س) - هـ(س) = (٧س^٢ + ٥س - ١) - (٢س^٢ - ٢س + ٧)$$

$$= (٧س^٢ - ٢س^٢) + (٥س - (-٢س)) + (-١ - ٧)$$

$$= ٥س^٢ + \text{---} - \text{---}$$

لاحظ أن: $(ق - هـ)(س)$ هو اقتران كثير حدود من الدرجة ——— .

$$(٢) \quad ٣ق(س) = ٣ \times (\text{---})$$

$$= ٢١س^٢ + \text{---} - \text{---}$$



نشاط (٥): تعتبر حرفة صيد الأسماك في فلسطين من أقدم الحرف التي تركزت في قطاع غزة، فإذا كانت العائدات من البيع السنوي للأسماك تعطى بالاقتران

$$ق(س) = ٠,٠٣س^٢ + ٠,٢س + ١٢٠$$

وتكلفة الإنتاج تعطى بالاقتران $هـ(س) = ٠,٧س^٢ + ٢٠س + ٥٠$ ، أكتب قاعدة الاقتران الذي يمثل الربح

الربح = العائدات - التكلفة

$$= ق(س) - هـ(س)$$

$$= (٠,٠٣س^٢ + ٠,٢س + ١٢٠) - (٠,٧س^٢ + ٢٠س + ٥٠)$$

$$= ٠,٠٣س^٢ - ٠,٥س^٢ + \text{---} + \text{---}$$

ما درجة ناتج طرح كثيري حدود؟

أفكر وأناقش

تمارين ومسائل:



س١ إذا كان: ق(س) = $٦س^٢ + ٥س - ١$ ، هـ(س) = $٣س^٢ + س + ٤$

ك(س) = $٢س^٢ - ٤$ ، اقترانات كثيرة الحدود، أجد ما يأتي :

- | | |
|------------------|-----------------|
| ١ (ق + هـ)(س) | ب (هـ - ك)(س) |
| ج (ق + ك)(١-) | د (ق - هـ) (٣) |
| هـ ٢ق(س) + ٣ك(س) | و هـ(س) - ٤ق(س) |

س٢ ليكن :

◀ ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة

◀ هـ(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة

◀ ك(س) كثير حدود من الدرجة الخامسة

فما درجة كلٍّ ممّا يأتي؟

- | | | |
|---------------|--------------|-------------------|
| ١ (ق + هـ)(س) | ب (ق - ك)(س) | ج (ق + هـ + ك)(س) |
|---------------|--------------|-------------------|

س٣ يمثل الشكل المجاور مخططاً لملاعب كرة سلة أبعاده بدلالة س، أجد محيطه عندما $س = ٦$ م.

$$٤س + ٤$$

$$٣س + ٢$$

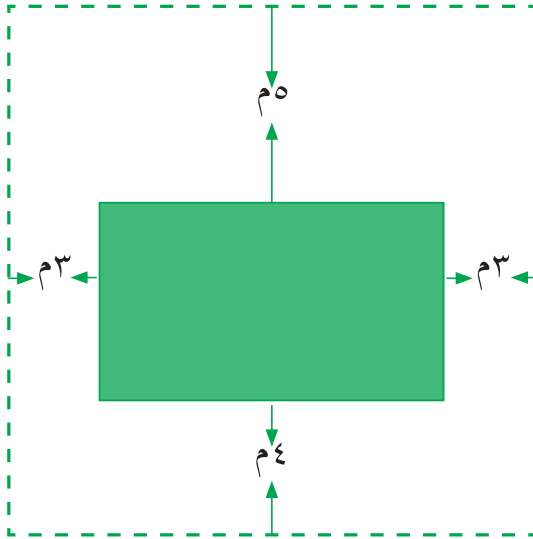


ضرب كثيرات الحدود وقسمتها

(٧ - ٣)



نشاط (١): تُصدر إحدى البلديات تراخيص البناء للمواطنين؛ لغرض تنظيم البناء،



وضبطه في المدن والقرى الفلسطينية. يمتلك سميّر قطعة أرضٍ مربعة الشكل، ويريد بناء بيتٍ عليها، بحيث يترك مساحاتٍ حول البيت (ارتدادات)، يمكن تمثيلها بالشكل المجاور، افترض طول قطعة الأرض ٥ متر.

طول البيت: (س - ٦)

عرض البيت: (س - —)

مساحة البيت:

أولاً: ضرب كثيرات الحدود:

ليكن ق(س)، هـ(س) كثيري حدود، فإن: $(ق \times هـ)(س) = (ق \times هـ)(س)$ كثير حدود، ويكون:

ق(س) هـ(س)



نشاط (٢): إذا كان ق(س) = $س^٢ + ٣$ ، هـ(س) = $س٤ + ٢$ ، أكمل إيجاد:

$$(ق \times هـ)(س) = (س) \times هـ(س) = (س^٢ + ٣) \times (س٤ + ٢)$$

$$= س^٢ \times س٤ + س^٢ \times ٢ + ٣ \times س٤ + ٣ \times ٢$$

$$= س^٦ + ٢س^٢ + ٣س٤ + ٦$$

لاحظ أن: $(ق \times هـ)(س)$ هو اقتران كثير حدود من الدرجة —.



نشاط (٣): إذا كان $ق(س) = ٢س^٢ - ٥س + ١$ ، $ك(س) = ٣س - ٢$ ، أكمل إيجاد:

$$ق(ك) \times ك(س) = ق(س) \times ك(س) = (٢س^٢ - ٥س + ١) \times (٣س - ٢)$$

$$= ٢س^٢ \times ٣س - ٢س^٢ \times ٢ - ٥س \times ٣س + ٥س \times ٢ + ١ \times ٣س - ١ \times ٢ =$$

$$= ٦س^٣ - ٤س^٢ - ١٥س^٢ + ١٠س + ٣س - ٢ =$$

لاحظ أن: $ق(ك) \times ك(س)$ هو اقتران كثير حدود من الدرجة _____ .

ما درجة حاصل ضرب كثيري حدود؟

أفكر وأناقش

ثانياً: قسمة كثيرات الحدود:

نشاط (٤): أكمل إيجاد ناتج قسمة ما يأتي:

$$(١) \quad ٣س^٢ = \frac{٣س^٢}{س} ، س \neq ٠$$

$$(٢) \quad \frac{٣س^٢}{٢س} = \frac{٣س^٢}{٢س} ، س \neq ٠$$

$$(٣) \quad \frac{س(١-س)}{س} = \frac{س-٢س}{س} = \frac{س-٢س}{س} ، س \neq ٠$$

$$(٤) \quad \frac{٢س^٤}{٢س} = \frac{٢س^٤}{٢س} ، س \neq ٠$$

ليكن $ق(س)$ ، $هـ(س)$ كثيري حدود، فإن:

$$ق(هـ) \div هـ(س) = ق(س) \div هـ(س) ، هـ(س) \neq ٠ \text{ صفر لكل } س \in ح$$

ملاحظة

مثال:

إذا كان $ق(س) = ٧س + س^٣ + ١٢$ ، $ه(س) = س + ٢$ ، أجد: $ق(س) \div ه(س)$.
يمكن إيجاد ناتج قسمة كثيري حدود باستخدام القسمة الطويلة، إذا كانت درجة
المقسوم أعلى، أو تساوي درجة المقسوم عليه، باتباع الخطوات الآتية:

الحل:

$$\begin{array}{r}
 س^٣ - ٢س + ١١ \\
 ٢ + س \overline{) ١٢ + ٧س + س^٣} \\
 \underline{س^٣ + ٢س^٢} \\
 ١٢ + ٧س + س^٢ - ٢س^٢ \\
 \underline{س^٢ - ٢س - ١٢} \\
 ١٢ + ١١س + س^٢ \\
 \underline{١١س + ٢٢} \\
 ١٠ - ٠
 \end{array}$$

- ١- نرتب حدود الاقترانين $ق(س)$ ، $ه(س)$ تنازلياً حسب قوى $س$.
- ٢- نقسم الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، ونضعه حداً أول في ناتج القسمة؛ أي أن: $س^٣$ على $س$ يساوي $س^٢$.
- ٣- نضرب $(س^٢)$ الذي حصلنا عليه في خطوة ٢ في كل حد من حدود المقسوم عليه، ونطرح.
- ٤- نكرر الخطوتين ٢، ٣ حتى نحصل على باقٍ، درجته أقل من درجة المقسوم عليه.

ناتج قسمة $ق(س)$ على $ه(س)$ يساوي $س^٣ - ٢س + ١١$. والباقي ١٠ .

- ★ كيف نتحقق من صحة حل المثال السابق؟
- ★ ما درجة ناتج قسمة أي كثيري حدود؟

أفكر وأناقش

نشاط (٥): أكمل إيجاد ناتج قسمة: $(٣س^٢ + س^٣ - ٤) \div (س + ٢)$.



$$\begin{array}{r}
 س^٣ \\
 س + ٢ \overline{) ٤ - س^٢ + ٣س^٣} \\
 \underline{ + س^٣} \\
 \\
 \\

 \end{array}$$

ناتج قسمة $(٣س^٢ + س^٣ - ٤)$ على $(س + ٢)$ يساوي _____ ، والباقي _____ .

لاحظ أن:

$$(\quad) \times (٢ + س) = ٤ - س^٣ + س^٢$$

$$(٢ + س) \text{ عامل من عوامل } س^٣ + س^٢ - ٤$$

$$\text{هل ناتج القسمة عامل من عوامل } س^٣ + س^٢ - ٤ ؟$$

أتعلم: إذا كان باقي قسمة اقتران كثير حدود على اقتران كثير حدود آخر يساوي صفراً، فإنّ المقسوم عليه عامل من عوامل المقسوم.

نشاط (٦): خزان ماء اسطواني حجمه باللترات $٥(س^٢ + س - ٣)$ ، وارتفاعه $٢س + ٣$ ، لحساب مساحة قاعدته قام كل من فاطمة وأحمد بالحل كما يأتي:



طريقة أحمد

$$\text{حجم الأسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \text{حجم الأسطوانة} \div \text{الارتفاع}$$

$$= (١٠س^٢ + ٥س - ١٥) \div (٢س + ٣)$$

$$\begin{array}{r} ٥س - ٥ \\ ٢س + ٣ \overline{) ١٠س^٢ + ٥س - ١٥} \\ \underline{١٠س^٢ + ١٥س} \\ ١٥س - ١٥ \\ \underline{١٥س - ١٥} \\ \text{صفر} \end{array}$$

طريقة فاطمة

$$\text{حجم الأسطوانة} = \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \text{حجم الأسطوانة} \div \text{الارتفاع}$$

$$= (١٠س^٢ + ٥س - ١٥) \div (٢س + ٣)$$

$$= (٢س + ٣)(٥س - ٥) \div (٢س + ٣)$$

$$= (٥س - ٥) \text{ وحدة مربعة}$$

تمارين ومسائل:



س١ إذا كان $ق(س) = س^2 - ٥س$ ، $هـ(س) = س + ٢$ ، $ك(س) = س^٢ + ٢س + ١$ ، أجد:

أ) $ق(س) \times هـ(س)$ ب) $ك(س) \times هـ(س)$

س٢ أجد: $ق(س) \div هـ(س)$ في كلِّ ممَّا يأتي:

أ) $ق(س) = ٣س^٢ - ١$ ، $هـ(س) = س - ١$
 ب) $ق(س) = ٦س^٢ + ٣س + ٢$ ، $هـ(س) = ٢س^٢ + ١$

س٣ أكتب درجة ناتج حاصل ضرب $ق(س)$ في $هـ(س)$ فيما يأتي، دون إجراء عمليّة الضرب:

أ) $ق(س) = ٣س^٦ - ٣$ ، $هـ(س) = س^٢ + س^٢ - ٤$
 ب) $ق(س) = ٣س^٢ - ٥س^٤ + ٢$ ، $هـ(س) = س^٢ + ١ - س^٢$

س٤ أكتب درجة ناتج قسمة $ق(س)$ على $هـ(س)$ فيما يأتي، دون إجراء عمليّة القسمة:

أ) $ق(س) = ٣س^٥ - ٧س^٤ + س$ ، $هـ(س) = س^٢ + ٢س + ١$
 ب) $ق(س) = ٢س^٣ - ٨س^٢ + ١$ ، $هـ(س) = س + ٦$

س٥ أيبّن باستخدام القسمة الطويلة أنّ $س - ٢$ عامل من عوامل $س^٣ - ٨$

س٦ قطعنا أرض احدهما مربعة الشكل طول ضلعها $(س + ٣)$ والأخرى مستطيلة الشكل أبعادها $(س + ١٣)$ ، $(س - ٢)$ هل تتساوى مساحتهما عندما $س = ١٢$ ، $س = ٧$ ؟ أفسر إجابتي.

نشاط (١): كثيرٌ من حركة الأشياء في الطبيعة تحصل بطريقةٍ منظّمةٍ، وضمن قوانينٍ ثابتةٍ.



ففي الشكل المجاور حركة المياه تشكّل شكلاً منظّماً.

الشكل الهندسي الذي تصنعه نافورة المياه في الشكل منحنى مفتوح إلى الأسفل .

أعط أمثلةً أخرى لأشياء، أو لأشكالٍ لها الحركة نفسها : _____



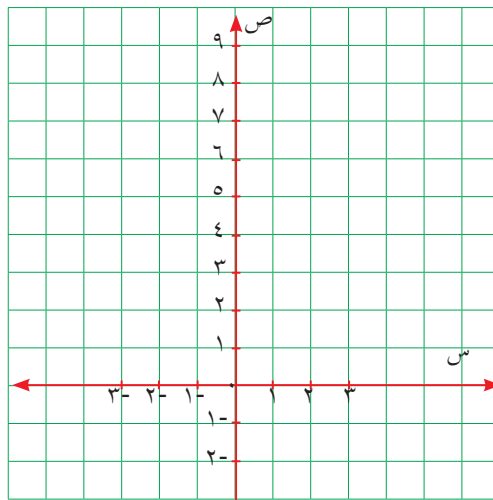
يُسمّى كثير الحدود ق(س) = أس^٢ + ب س + ج، حيث: أ، ب، ج أعداد حقيقية،
أ ≠ صفر اقتراناً تربيعياً.

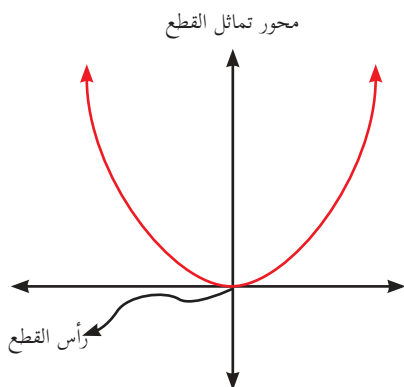


نشاط (٢): أكمل الجدول الآتي، وأعيّن النقاط الناتجة في المستوى:



س	٣	٢	١	٠	١	٢	٣
ص = ق(س) = أس ^٢			١			٤	





عند تمثيل الاقتران التربيعي $ق(س) = س^2$ في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل المجاور، ويُسمَّى قطعاً مكافئاً. ويُسمَّى هنا قطعاً مكافئاً مفتوحاً إلى الأعلى؛ لأنَّ معامل $س^2$ موجب.

نشاط (٣): أكمل خطوات تمثيل الاقتران التربيعي: $ق(س) = س^2 + ٢س - ٣$

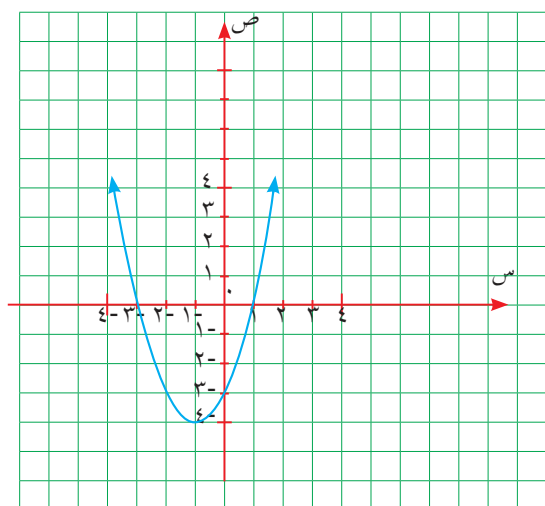


(١) أجدُ الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ، $س = \frac{-ب}{٢ا} = -١$

(٢) أكوّن الجدول لتمثيل النقاط:

س	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = ق(س)			٤-		

ق(١-) = (١-) = $١ - ٢ \times ١ + ٣ = ٤-$ إحداثيّات رأس القطع (١-، ٤-)



ق(١) = (١) = _____ = _____ (١،)

ق(٠) = (٠) = _____ = _____ (٠،)

ق(٢-) = (٢-) = _____ = _____ (٢-،)

ق(٣-) = (٣-) = _____ = _____ (٣-،)

(٣) أعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأصلُ بينها.

(٤) ما نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات؟

(٥) الاقتران مفتوح لـ _____ لأن _____

(٦) ما الإحداثي الصادي لرأس القطع المكافئ؟ ماذا ألاحظ؟

ألاحظ أنَّ: ق(١-) = ٤-، وهي القيمة الصغرى للاقتران.



نشاط (٤): يعد وجود الأقواس أحد أهم مظاهر الفن العمراني في فلسطين، الشكل المجاور هو صورة باب الحديد في المسجد الأقصى، القوس في الصورة يمكن التعبير عنه بالإقتران هـ(س) = ١٦ - س^٢



★ ارسم محور تماثل القوس.

★ ارسم المحورين الإحداثيين بحيث ينطبق

محور الصادات على محور تماثل الشكل،

ومحور السينات على قاعدة القوس.

★ نقاط تقاطع قاعدة القوس مع محور

السينات هي:

عرض القوس عند قاعدته = _____

ارتفاع القوس = _____

تمارين ومسائل:

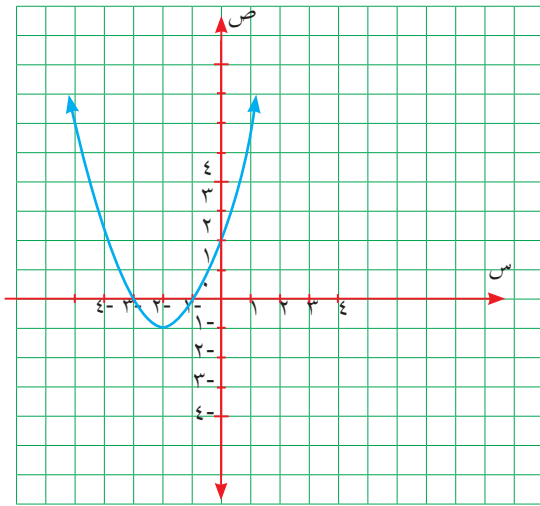


س١ أمثل الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = $س^2 + 6س + 9$

ب) ق(س) = $3س^2 - 12س$

ج) ق(س) = $س^2 - 1$



س٢ من الشكل المجاور، أجد:

أ) إحداثيات رأس القطع المكافئ.

ب) أصفار الاقتران.

ج) أرسم في الشكل محور التماثل.

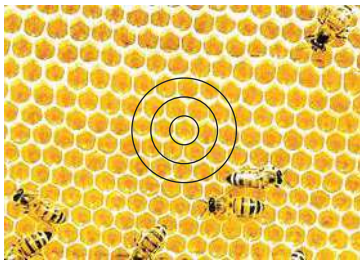
د) إحداثيات نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

س٣ تمثل عدد الخلايا السداسية في قرص العسل

$$بالإقتران هـ(ر) = 3ر^2 - 3ر + 1$$

حيث ر تمثل عدد الحلقات في القرص.

أمثل الاقتران في المستوى الديكارتي، وهل يمكن أن يكون عدد الأشكال السداسية في إحدى الحلقات يساوي صفر؟ أفسر إجابتي





نشاط (١): في القاعات الرئيسة يتم عمل أنظمة للتبريد؛ للتخفيف من استهلاك الطاقة،



يحاول المهندسون أن تكون نسبة مساحة سطح المجسم إلى حجمه صغيرة بالحد الكافي. هناك قاعة طولها ٥ متر، عرضها ٦ متر، ارتفاعها ٦ متر.

أجد: المساحة الكلية للقاعة =

$$٥ \times ٦ \times ٦ = \text{---}$$

$$\text{حجم القاعة} = \text{---} \times \text{---} \times \text{---}$$

$$\text{نسبة المساحة الكلية للقاعة إلى حجمها} = \text{---}$$

تبريد

يُسمى الاقتران المكتوب على صورة $ق(س) = \frac{ه(س)}{ل(س)}$ ، اقتراناً نسبياً، حيث $ه(س)$ ، $ل(س)$ اقترانان كثيرا حدود، ومجال الاقتران $ق(س)$ هو ح ما عدا أصفار الاقتران $ل(س)$.



نشاط (٢): أكتب أمثلة لاقترانٍ نسبية:

$$ق(س) = \frac{٣س + ٤}{س - ٥} ، \quad س \neq ٥$$

$$\text{ه(س)} = \text{---}$$

$$\text{م(س)} = \text{---}$$



نشاط (٣): ما مجال الاقترانات النسبية الآتية؟

$$(١) \text{ ق(س) } = \frac{٣س - ٤}{٢س + ٦}$$

لإيجاد مجال الاقتران ق(س) نجد أصفار المقام.

لإيجاد أصفار المقام نضع : $٢س + ٦ = \text{صفر}$

$$٢س = \text{_____}$$

$$س = \text{_____}$$

مجال ق(س) هو ح ما عدا أصفار المقام

إذن مجال ق(س) = ح - { _____ }

$$(٢) \text{ ق(س) } = \frac{س}{٣س - ٥س + ٦} \text{ نجد أولاً أصفار المقام: } ٣س - ٥س + ٦ = \text{صفر}$$

$$(٣س - ٥س + ٦) \times (س - \text{_____}) = \text{صفر}$$

$$\text{إمّا } ٣س - ٥س + ٦ = \text{صفر} ، \text{ أو } س - \text{_____} = \text{صفر}$$

$$٣س = \text{_____} \text{ أو } س = \text{_____}$$

إذن مجال ق(س) : ح - { _____ ، ٢ }



نشاط (٤): أكمل إيجاد أصفار الاقترانات النسبية الآتية:

$$(١) \text{ ق(س) } = \frac{٣س + ٤}{٣س - ٤س - ٤} ، س \neq ١ ، ٤$$

$$\text{صفر} = \frac{٣س + ٤}{٣س - ٤س - ٤} =$$

$$\text{ينتج أن: } ٣س + ٤ = \text{_____}$$

$$س = \text{_____}$$

صفر الاقتران ق(س) هو: _____ ، وهو صفر البسط

$$(٢) ق(س) = \frac{س^٢ - ٤س - ١٢}{س^٣ - ٢٧} ، س \neq ٣$$

$$صفر = \frac{س^٢ - ٤س - ١٢}{س^٣ - ٢٧} =$$

$$س^٢ - ٤س - ١٢ =$$

$$صفر = (س + ٢) \times (س - ٣)$$

$$إِذَا: س + ٢ = صفر ، أَوْ: س - ٣ = صفر$$

$$س = ٢- ، أَوْ: س =$$

أصفار الاقتراح (س) هي ٢- ،

أَتَعَلَّمُ : أصفار الاقتراح النسبي هي تلك القيم التي تجعل قيمة البسط = صفر، ولا يكون المقام مساوياً صفر عندها.

ما القيم التي تجعل قيمة البسط = صفر إذا كان ق(س) = $\frac{س^٣}{س^٢ - ٥}$ ،
حيث: $س \neq ٥$ ؟

أَفَكِّرْ وَأُناقِشْ

تمارين ومسائل:



س١ أجد مجال الاقتربات النسبية الآتية:

أ)
$$\frac{٥س + ٣س^٢ + ٨}{\frac{١}{٢} - س^٢} = ق(س)$$

ب)
$$\frac{١ + س^٤}{٤ + س^٢} = ق(س)$$

ج)
$$\frac{١ + س^٣}{س(س^٢ - ١)} = ق(س)$$

س٢ أجد أصفار الاقتربات النسبية الآتية:

أ)
$$\frac{٤ - س^٢}{س^٣ + س^٤} = ق(س) ، س \neq \text{صفر}$$

ب)
$$\frac{س^٣ + ٩س^٢ + ١٨س}{س^٢ + ١} = ق(س)$$

ج)
$$\frac{س^٢}{س^٣ + س + ١} = ق(س)$$

س٣ تم تعبئة خزانى وقود على شكل متوازي المستطيلات، الخزان الأول قاعدته مربعة الشكل، طول ضلعها س وارتفاعه ١م، والخزان الثانى قاعدته مستطيلة الشكل، أبعادها س + ١ ، س - ٢ وارتفاعه ١م.

أ) ما نسبة حجم الخزان الثانى الى حجم الخزان الأول؟.

ب) أى القيم الآتية تعتبر بعداً مناسباً لأبعاد الخزائين س : ٢ ، ٤

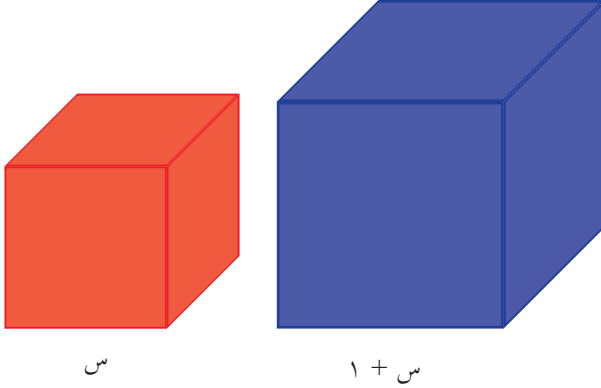
العمليات على الاقترانات النسبية

(٧ - ٦)



نشاط (١): تعقد جلسات المجلس الوطني الفلسطيني في قاعات كبيرة مثل قاعة الشهيد ياسر

عرفات، وقد صممت هذه القاعات، ويمكن تمثيلها بالشكل المجاور



نسبة المساحة الجانبية للمكعب إلى حجمه، وذلك لمكعبين أطوال أضلاعهما: $s + 1$ ، s

$$\star \text{ النسبة الأولى (المكعب الأزرق) } = \frac{4 \times (s+1)^2}{(s+1)^3}$$

$$\star \text{ النسبة الثانية (المكعب الأحمر) } = \frac{\boxed{}}{s^3}$$

$$\star \text{ مجموع النسبتين: } \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

جمع الاقترانات النسبية وطرحها:

أجد ناتج جمع الاقترانات النسبية الآتية، بأبسط صورة:

مثال:

$$(1) \quad \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 - 4} = \frac{s^2 + 5s + 8}{s^2 - 4} + \frac{s^3 + 4s}{s^2 - 4} \quad , \quad s \neq \pm 2$$

$$\frac{s + 6}{s - 2} = \frac{(s+6)(s+2)}{(s-2)(s+2)} =$$

$$(2) \quad \frac{s^2(2+s^3)(1-s) + (s+4)s^2}{(s+4)(1-s)} = \frac{s^3 + 2}{s+4} + \frac{s^2}{1-s} \quad , \quad s \neq 1, -4$$

$$\frac{s^2(5s^2 + 7s - 2)}{s^2 + 3s - 4} = \frac{s^2(8s + 3s^3 - s - 2)}{s^2 + 3s - 4} =$$



ليكن $\frac{ق_1(س)}{ق_2(س)} = ه_1(س)$ ، $\frac{ق_1(س)}{ق_2(س)} = ه_2(س)$ ، اقترانين نسبیین،

وكانت $س$ تنتمي إلى المجال المشترك للاقترانين النسبيين $ق_1(س)$ ، $ق_2(س)$ ، فإن:

$$\frac{ق_1(س) \pm ه_1(س)}{ق_2(س) \pm ه_2(س)} = \frac{ق_1(س)}{ق_2(س)} \pm \frac{ه_1(س)}{ه_2(س)}$$

• مجال مجموع أو طرح الاقترانين النسبيين هو ح ما عدا أصفار المقام.

نشاط (٢): أكمل إيجاد ما يلي:



$$\frac{\square - 2س^2}{س + 3س} = \frac{5س + 2س^2}{س + 3س} - \frac{3س^3 - 2س^3}{س + 3س} \quad (١)$$

$$\frac{(\quad)(\quad) - (\quad)(3س - 2س^2)}{(\quad) \times 3س} = \frac{4س}{س + 1} - \frac{3س^2 - 2س^3}{س^2} \quad (٢)$$

_____ =

ضرب الاقترانات النسبية:

أجد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

مثال:

$$\frac{(25 - 5س) \times (1 + 2س)}{3س \times (5 - س)} = \frac{25 - 5س}{3س} \times \frac{1 + 2س}{5 - س} = ق(س)$$

$$\frac{(1 + 2س)5}{3س} = \frac{(5 - س) \times (1 + 2س)5}{3س \times (5 - س)} =$$



• ليكن $ق(س) = \frac{ق_1(س)}{ق_2(س)}$ ، $هـ(س) = \frac{هـ_1(س)}{هـ_2(س)}$ ، اقترانين نسبیین

وكانت $س$ تنتمي إلى $ح$ ما عدا أصفار المقامين، فإن:

$$\frac{ق_1(س) \times هـ_1(س)}{ق_2(س) \times هـ_2(س)} = \frac{ق_1(س)}{ق_2(س)} \times \frac{هـ_1(س)}{هـ_2(س)}$$

• مجال حاصل ضرب الاقترانين هو $ح$ ما عدا أصفار $ق_2(س)$ ، $هـ_2(س)$.



نشاط (٣): أكمل إيجاد الناتج، مبيّناً مجاله:

$$\frac{() \times س^2}{() \times (س + 3)} = \frac{س^3 - 4}{س^2 - 5} \times \frac{س^2}{س + 3} = ق(س)$$

مجال $ق(س)$ هو: $ح - \{ -3 , \text{---} \}$

قسمة الاقترانات النسبية:



نشاط (٤): ليكن: $ق(س) = \frac{س}{س^2 - 1}$ ، $هـ(س) = \frac{س^2}{س + 1}$

أكمل إيجاد ناتج ما يأتي، بأبسط صورة:

$$ق(س) \div هـ(س) = \frac{س}{س^2 - 1} \div \frac{س^2}{س + 1} = \frac{س}{س^2 - 1} \times \frac{س + 1}{س^2}$$

$$\text{---} = \frac{() \times س}{س^2 \times ()} =$$



• ليكن $ق(س) = \frac{ق_1(س)}{ق_2(س)}$ ، $هـ(س) = \frac{هـ_1(س)}{هـ_2(س)}$ اقترانين نسبیین، وکان $هـ(س) \neq \text{صفر}$

فإنَّ: $ق(س) \div هـ(س)$ يساوي

$$\frac{ق_1(س) \times هـ_2(س)}{ق_2(س) \times هـ_1(س)} = \frac{هـ_2(س)}{هـ_1(س)} \times \frac{ق_1(س)}{ق_2(س)} = \frac{هـ_2(س)}{هـ_1(س)} \div \frac{ق_2(س)}{ق_1(س)}$$

• مجال $ق(س) \div هـ(س)$ هو ح ما عدا أصفار الاقترانات $ق_2(س)$ ، $هـ_1(س)$ ، $هـ_2(س)$

نشاط(٥): أكمل إيجاد الناتج مبيناً مجاله:



$$\frac{(\quad)}{(\quad)} \times \frac{س^2}{س^2 + ٧س + ١٢} = \frac{س - ١}{س + ٥} \div \frac{س^2}{س^2 + ٧س + ١٢} = ق(س)$$

$$\frac{(\quad) \times س^2}{(\quad) \times (\quad) \times (س + ٣)} =$$

مجال $ق(س)$ هو ح - {٣-، __، __، __}.

تمارين ومسائل:



س١ إذا كان: ق(س) = $\frac{س}{١-س}$ ، هـ(س) = $\frac{١}{س-س^٢}$ ،
أجد ما يأتي بأبسط صورة، مبيناً مجال كلٍّ منها :

أ) ق(س) + هـ(س)

ب) ق(س) - هـ(س) + ٢

ج) $\frac{١}{ق(س)} \times \frac{١}{هـ(س)}$

د) ق(س) ÷ هـ(س)

س٢ أكتب الاقترانات الآتية بأبسط صورة، مبيناً مجال كلٍّ منها:

أ) ق(س) = $\frac{٦}{س-٣} \times \frac{س^٢-٩}{س^٢-١٢}$

ب) هـ(س) = $\frac{س^٢+٦س-١٦}{س^٢-٦٤} \div (س-٢)$

س٣ استخدم الفلاح الفلسطيني صومعات على شكل مخروط لتعبئة الحبوب، أحد المخاريط المستخدمة

نصف قطره يعطى بالعلاقة $\frac{س^٢-س-٦}{س^٢+س-٢}$ وارتفاعه $\frac{س^٢+٤}{س}$

أجد حجم ذلك المخروط.

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كلّ ممّا يأتي:

١ أيّ الاقترانات الآتية يُعدُّ اقتراناً كثير حدود:

(أ) $s + \frac{s}{8} - s^0$ (ب) $s - \frac{3}{s}$ (ج) $5 \sqrt{s} + 1$ (د) $2s^3 + 7$

س٢ ما مجال الاقتران النسبي ق(س) = $\frac{s-1}{s^2-s}$ ؟

(أ) ح - {١} (ب) ح - {١-} (ج) ح - {٠ ، ١} (د) ح

س٣ ما صفر/أصفار الاقتران النسبي ق(س) = $\frac{s}{s^2-1}$ ؟

(أ) ١ ، ١ - (ب) ١ (ج) صفر (د) ١- ، صفر

س٤ درجة كثير الحدود ق(س) تساوي ٥ ، ودرجة كثير الحدود ه(س) تساوي ٣ ، فما درجة حاصل ضربهما ؟

(أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ١٥

س٥ إذا كانت ق(س) = $s^3 - 5s^2 + 3$ ، ه(س) = $s^2 + 1$ ، أجد:

١ ق(س) + ٢ ه(س) (أ) ٤ ق(س) - ه(س) (ب) ٣ ق(س) + ه(س) (ج) ٥ ق(س) × ه(س) + ٥ (د) ٥ ق(س) ÷ ه(س) (هـ)

س٦ إذا كانت ق(س) = $\frac{s^2-2}{s^2-1}$ ، ه(س) = $\frac{s^3}{s-1}$ ، أجد:

١ مجال ق(س) × ه(س) (أ) ٣ ق(س) (ب) ٢ ق(س) + ه(س) (ج) ٣ ق(س) (د) ٢ ق(س) ÷ ه(س)

س٤ إذا كان $ق(س) = س^2 - ٩$ هـ $(س) = أس^٢ + ب س + ج$ ،
فما قيمة كل من أ ، ب ، ج التي تجعل $ق(س) = هـ(س)$ ؟

س٥ حديقة منزلٍ مستطيلة الشكل بعدها ١٥ م، ١٠ م، وقطرها $\sqrt{١٣١}$ م، فإذا تمَّ زيادةُ مساحةِ الحديقة بمقدار ١٨٦ م^٢، وذلك بإضافة عددَيْن متساويَيْن من الأمتار لكلِّ بعدٍ من أبعادها، أجد :
 أ) الاقتران الذي يمثل المساحة بعد الزيادة.
 ب) أبعاد الحديقة بعد الزيادة.

س٦ أقيم ذاتي: أكمل الجدول الآتي:

متدني	متوسط	مرتفع	المهارة
			احدد المجال والمجال المقابل للاقتران
			احدد نوع اقتران ما
			اجد ناتج ضرب اقترانين

مشروع الوحدة:

يعد الحق في توفير الطاقة من الحقوق الأساسية لكل فرد، للتخفيف من استهلاك الطاقة، يحاول المهندسون أن تكون نسبة مساحة سطح المجسم إلى حجمه صغيرة بالحد الكافي.
 أيهما أفضل في بيتك تركيب نظام تبريد في غرفة الجلوس أم في غرفة نومك؟
 ناقش المخاطر الاقتصادية للتكلفة واقترح طريقة تساعد على التخفيف من استهلاك الطاقة.

www.geoalgebra.com

www.graphic-calculator.com

روابط إلكترونية

الاحتمالات



الوحدة



أتأملُ المعالم العربية في الصورة، إذا أُخْتِيرَت صورةٌ أحدِ المعالم عشوائياً، فهل الفرصة الكبرى أن يكون معلماً دينياً، ويقع في القدس (العاصمة)؟ أناقش صحّة ذلك.

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على
توظيف قوانين الاحتمالات في الحياة العملية من خلال الآتي:

١١ إيجاد احتمال اتّحاد حادثين.

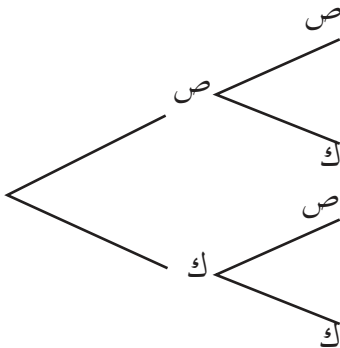
٢١ إيجاد احتمال تقاطع حادثين.

٣١ إيجاد احتمال الحادث المشروط.

٤١ التعرف إلى الحوادث المستقلّة.



نشاط (١): الجنيه الفلسطيني هو العملة التي استخدمتها حكومة فلسطين في عهد الانتداب البريطاني بين عامي ١٩٢٧م - ١٩٤٨م. تم إلقاء قطعة نقد معدنية من فئة ٥٠ مل مرتين متتاليتين، وملاحظة الوجه الظاهر. ص: تعني وجه صورة عليه غصن الزيتون. ك: تعني وجه عليه العدد ٥٠ مل



• الفراغ العيني للتجربة $\Omega = \{ (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) \}$

(ص، ك) تعني: ظهور صورة في الرمية الأولى، وكتابة في الرمية الثانية.

(ك، ص) تعني:

• إذا كان $ح_1$ حدث ظهور كتابة واحدة فقط، $ح_2$ حدث ظهور صورة واحدة على الأقل، فإن:

• $ح_1 = \{ (ص، ك)، (ك، ص) \}$ ، $ح_2 = \{ (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) \}$

• $ل(ح_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

• $ل(ح_2) = \frac{3}{4}$

$ح_1 \cap ح_2 = \{ (ص، ك)، (ك، ص) \}$

$ح_1 \cup ح_2 = \{ (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) \}$

• $ل(ح_1 \cap ح_2) = \frac{2}{4}$ ، $ل(ح_1 \cup ح_2) = \frac{3}{4}$

• احتمال عدم وقوع الحادث $ح_2$ هو:

$ل(\bar{ح}_2) = 1 - ل(ح_2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

إذا كانت Ω هي الفضاء العيني لتجربة عشوائية، بحيث إن كل عنصر في Ω له فرصة الظهور نفسها (الحدوث)، وكان الحادث $H \subset \Omega$ ، فإن:

أُتذَكَّر:

$$P(H) = \frac{\text{عدد عناصر } H}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

$$P(\bar{H}) = 1 - P(H)$$

• إذا كان H_1 ، H_2 حادثين في Ω ، فإن:

$$P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

نشاط (٢): في صندوق ٦ بطاقات مرقمة بالأعداد: ٣٦، ٢٤، ٢٧، ٩، ٧، ٣. سُحِبَت من الصندوق بطاقة عشوائياً، إذا كان:



H_1 حادث ظهور عدد من مضاعفات العدد ٣،

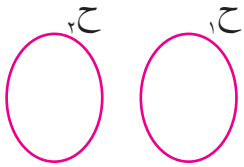
H_2 حادث ظهور عدد من مضاعفات العدد ٦، فإن:

$$\Omega = \{٣، ٩، ٢٧، ٢٤، ٣٦، ٧\}$$

$$H_1 = \{٣، ٩، ٢٧، ٢٤، ٣٦\}، H_2 = \{٦، ١٢، ١٨، ٢٤، ٣٦\}$$

$$H_1 \cap H_2 = \{٦، ١٨، ٢٤، ٣٦\}$$

$$P(H_1 \cap H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



إذا كان H_1 ، H_2 حادثين منفصلين في Ω ، فإن:

أُتذَكَّر:

$$P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2)$$

نشاط (٣): إذا كان احتمال أن يُنجَزَ مقاول بناء مشروعين (سكني وتجاري) معاً في



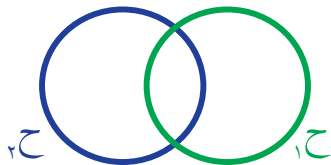
الموعد المحدد يساوي $\frac{1}{4}$ ، واحتمال أن يُنجَزَ المشروع السكني يساوي $\frac{3}{4}$ ، واحتمال

أن يُنجَزَ المشروع التجاري $\frac{2}{3}$.

• ما احتمال أن يُنجَزَ المقاول المشروع السكني فقط؟

H_1 : حادث إنجاز المقاول المشروع السكني.

H_2 : حادث إنجاز المقاول المشروع التجاري.



احتمال أن يُنَجَزَ المشروع السكني فقط يعني: أن يُنَجَزَ المشروع السكني، وعدم إنجاز

المشروع التجاري، وبالرموز: $L(H_1 - H_2) = L(H_1 \cap \bar{H}_2)$

$$L(H_1 - H_2) = L(H_1 \cap \bar{H}_2) - L(H_1 \cap H_2)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} =$$

• ما احتمال أن يُنَجَزَ المَقاولُ المشروع التجاري فقط؟

احتمال أن يُنَجَزَ المشروع التجاري فقط يعني:

$$L(H_2 - H_1) = L(H_2 \cap \bar{H}_1)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} =$$

أَتَعَلَّمُ : ليكن H_1 ، H_2 حادثين في الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية، فإن:

$$\overline{H_1 \cap H_2} = \bar{H}_1 \cup \bar{H}_2$$

$$\overline{H_1 \cup H_2} = \bar{H}_1 \cap \bar{H}_2$$

احتمال حدوث H_1 وعدم حدوث H_2 $= L(H_1 - H_2) = L(H_1 \cap \bar{H}_2)$

نشاط (٤): ليكن: $L(H_1) = 0,3$ ، $L(H_2) = 0,5$ ، $L(H_1 \cap H_2) = 0,2$ ، أكمل إيجاد

ما يأتي:

$$L(H_1 \cup H_2) = L(H_1) + L(H_2) - \text{_____} = \text{_____}$$

$$L(\bar{H}_1) = 1 - L(H_1) = 1 - \text{_____} = \text{_____}$$

$$L(H_1 - H_2) = L(H_1 \cap \bar{H}_2) = \text{_____}$$

$$= 0,3 - 0,2 = \text{_____}$$

$$L(\bar{H}_1 \cup \bar{H}_2) = L(\overline{H_1 \cap H_2}) = 1 - L(H_1 \cap H_2) = 1 - \text{_____} = 0,8$$

$$L(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2) = L(\overline{H_1 \cup H_2}) = 1 - L(H_1 \cup H_2) = \text{_____}$$

تمارين ومسائل:



س١ لدى عائلةٍ ثلاثة أطفال، ما احتمالُ أن يكونَ لديها بنتان وولد ؟

س٢ في تجربة رمي حجريّ نردٍ منتظمين مرةً واحدة، وملاحظة الوجهين الظاهريين،

أجدُ احتمالَ ما يأتي:

أ) احتمال ظهور عددين مجموعهما ٧ .

ب) احتمال ظهور عددين فرديّين .

ج) احتمال ظهور عددين مجموعهما ٣ على الأكثر .

س٣ إذا كان H_1 ، H_2 حادثين في Ω حيث:

$$P(H_1) = 0,6$$

$$P(H_2) = 0,3$$

$$P(H_1 \cap H_2) = 0,15$$

أحسب:

أ) $P(H_1 - H_2)$

ب) $P(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2)$

نشاط (١): يُمثّل الجدول الآتي بيانات مجموعة من الطلبة في إحدى الجامعات الفلسطينية، لمعرفة نتائجهم في مقرّر الإحصاء:



المجموع	الراسبون	الناجحون	الكلية / النتيجة
٤٠	١٥	٢٥	العلوم
١٥	٥	١٠	الزراعة
٢٥	١٠	١٥	الهندسة
٨٠	٣٠	٥٠	المجموع

أختير أحد الطلبة عشوائياً، أجب عما يأتي:

- احتمال أن يكون هذا الطالب من كلية الزراعة = $\frac{10}{80}$
 - احتمال أن يكون هذا الطالب من الناجحين = _____
 - احتمال أن يكون هذا الطالب ناجحاً، ومن كلية الزراعة = $\frac{10}{80}$
- هل يمكن إيجاد احتمال أن يكون هذا الطالب من كلية الزراعة، بشرط أنه من الناجحين؟



نشاط (٢): في تجربة رمي حجر النرد مرّة واحدة، وملاحظة الوجه العلوي الظاهر،

ما احتمال الحصول على العدد ٣ إذا علمت أن الوجه الظاهر عدد فردي؟

$$\Omega = \{ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ \}$$

ح_١ يُمثّل حدث ظهور العدد ٣ = { ٣ } ، وبالتالي ل(ح_١) = $\frac{1}{6}$

فإذا عُلِمَ أن الوجه الظاهر عدد فردي، فإنّ الفضاء العينيّ يتناقص، بحيث يصبح:

$$ح_٢ = \{ ١ , ٣ , ٥ \} \text{ (أي فضاء عينيّ جديد)}$$

إذن: احتمال ظهور العدد ٣ ، بعد عِلْمنا أن الوجه الظاهر عدد فرديّ هو =

ل(ظهور ٣ إذا عُلِمَ أنه فرديّ) = $\frac{1}{3}$. و بالرموز: ل(ح_١ / ح_٢) = $\frac{1}{3}$. وهو الاحتمال المشروط.

نلاحظ أنّنا عِلْمنا جزءاً من النتيجة التي وقعت، وهي أن حدثاً معيّناً قد وقع، وهو حدث ظهور عدد فرديّ.

والنتيجة: أنّ الحادثين يقعان معاً بشرط وقوع أحدهما.

$$\text{بما أن } ح_١ \cap ح_٢ = \{ ٣ \} \text{ فإن } ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{1}{6}$$

$$\text{ومنه: } \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$$

$$\text{ما العلاقة بين: } ل(ح_١ / ح_٢) \text{ و } \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)} \text{ ؟}$$

أتعلّم : الاحتمال المشروط: هو إيجاد قيمة الاحتمال لحدث ما، عِلْماً بأنّ حدثاً آخر قد وقع.

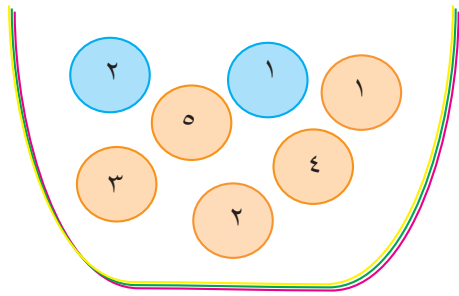
إذا كان ح_١ ، ح_٢ حادثين في Ω ، فإنّ احتمال وقوع ح_١ بشرط وقوع ح_٢ يُرمز له بالرمز:

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)} \text{ ، } ل(ح_٢) \neq \text{ صفر}$$

$$\text{أي أن: } ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١ / ح_٢) \times ل(ح_٢)$$

مثال:

يحتوي وعاءٌ على ٥ كراتٍ برتقالية اللون مرقّمةٍ من ١ إلى ٥، وكرتين زرقاوين مرقّمتين بالأرقام ١، ٢، كما في الشكل المجاور. إذا سحبنا كرةً عشوائيةً، ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة برتقاليةً علماً بأنها تحمل الرقم ٢؟



ليكن:

الحل:

ح_١: حادث الكرة المسحوبة برتقالية اللون.

ح_٢: حادث الكرة المسحوبة تحمل الرقم ٢.

$$\text{ومنه: ل(ح}_1\text{)} = \frac{2}{7},$$

ح_١ ∩ ح_٢ تعني: أن الكرة المسحوبة برتقاليةً، وتحمل الرقم ٢،

$$\text{إذن: ل(ح}_1\text{ ∩ ح}_2\text{)} = \frac{1}{7}$$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة برتقالية، علماً بأنها تحمل الرقم ٢ =

$$\text{ل(ح}_1\text{ / ح}_2\text{)} = \frac{\text{ل(ح}_1\text{ ∩ ح}_2\text{)}}{\text{ل(ح}_2\text{)}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{2}$$

نشاط (٣): ليكن: ح_١، ح_٢ حادثين في Ω، حيث إن:



$$\text{ل(ح}_1\text{)} = \frac{1}{4}, \text{ ل(ح}_2\text{)} = \frac{1}{3}, \text{ ل(ح}_1\text{ ∪ ح}_2\text{)} = \frac{23}{60}, \text{ أكمل إيجاد ل(ح}_1\text{ / ح}_2\text{)}, \text{ ل(ح}_2\text{ / ح}_1\text{)}:$$

$$\text{ل(ح}_1\text{ ∩ ح}_2\text{)} = \text{ل(ح}_1\text{)} + \text{ل(ح}_2\text{)} - \text{_____} = \text{_____}$$

$$\text{ل(ح}_1\text{ / ح}_2\text{)} = \frac{\text{ل(ح}_1\text{ ∩ ح}_2\text{)}}{\text{ل(ح}_2\text{)}} = \text{_____} = \text{_____}$$

$$\text{ل(ح}_2\text{ / ح}_1\text{)} = \frac{\text{ل(ح}_1\text{ ∩ ح}_2\text{)}}{\text{ل(ح}_1\text{)}} = \text{_____} = \text{_____}$$

تمارين ومسائل:



س١ أجب عما يأتي:

أ متى يكون ل (ح / ح٢) = صفر

ب متى يكون ل (ح / ح٢) = ١

ج أعطي أمثلة على كل حالة للفرعين السابقين.

س٢ يحتوي صندوق على ٧ كرات بيضاء اللون، مرقمة من ١ إلى ٧، وعلى ١٣ كرة سوداء اللون

مرقمة من ١ إلى ١٣، سُحِبَت كرة بشكل عشوائي.

• ما احتمال أن تكون الكرة سوداء علماً بأنها تحمل العدد ٣؟

س٣ وُجِدَ أنَّ ٠,٣ من مُراجعي إحدى العيادات الصحيّة يعانون من ارتفاع ضغط الدم،

وأنَّ ٠,١٥ من المراجعين مصابون بمرض في الكبد، و ٠,١ مصابون بالمرضىين معاً.

• ما احتمال أن يكون أحد المراجعين مصاباً بمرض في الكبد، علماً بأنه يعاني من ارتفاع

ضغط الدم؟



نشاط (١): من أجل تمثيل الشعب يتم إجراء الانتخابات، أُجريت انتخابات البلديات في فلسطين عام ٢٠١٧، وتنافست ثلاث قوائم من مدينة نابلس، وأربع قوائم من مدينة الخليل، تم اختيار مرشح من كل قائمة عشوائياً، لحضور مؤتمر حول دور البلديات في خدمة المجتمع.

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ ،
مرشح مدينة نابلس، والمسقط الثاني يمثل رقم قائمة مرشح مدينة الخليل.

ما احتمال أن يكون مرشح مدينة نابلس من القائمة الثالثة؟

ح_١: تمثل حدث أن يكون مرشح مدينة نابلس من القائمة الثالثة،

$$ح_1 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\} ، ومنه: ل(ح_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} .$$

ما احتمال اختيار مرشح مدينة الخليل من القائمة الرابعة؟

لتكن: ح_٢ تمثل حدث أن يكون مرشح مدينة الخليل من القائمة الرابعة.

$$ح_2 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\} ، ومنه ل(ح_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

إذا تم اختيار مرشحين من المدينتين بشكل عشوائي، ما احتمال أن يكون المرشح الأول من القائمة الثالثة لمدينة نابلس، وأن يكون المرشح الثاني من القائمة الرابعة لمدينة الخليل؟

المطلوب: احتمال حدوث الحادتين معاً؛ أي ل(ح_١ ∩ ح_٢)

$$ح_1 \cap ح_2 = \{(1, 4)\} ، ل(ح_1 \cap ح_2) = \frac{1}{12}$$

$$\text{أجد: } ل(ح_1) \times ل(ح_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

ما العلاقة بين: ل(ح_١ ∩ ح_٢) ، ل(ح_١) × ل(ح_٢)؟

هل يتأثر اختيار مرشح مدينة نابلس باختيار مرشح الخليل؟

هل يتأثر حدوث ح_١ بحدوث ح_٢؟

$$\text{أجد: } ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$ل(ح_1 / ح_2) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_1)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

ما العلاقة بين: $L(H_1/H_2)$ ، $L(H_2/H_1)$ ، وبين: $L(H_1/H_2)$ ، $L(H_2/H_1)$ ؟

نلاحظ أنّ: حادث اختيار المرشّح من إحدى قوائم مدينة نابلس لا يؤثّر على حادث اختيار، أو عدم اختيار المرشّح = من مدينة الخليل ، وتُسمّى مثل هذه الحوادث حوادث مستقلة .



يُقال أنّ H_1 ، H_2 حادثان مستقلّان، إذا كان وقوع أيّ منهما لا يؤثّر على وقوع، أو عدم وقوع الحادث الآخر؛ أي أنّ:

$$L(H_1/H_2) = L(H_1)$$

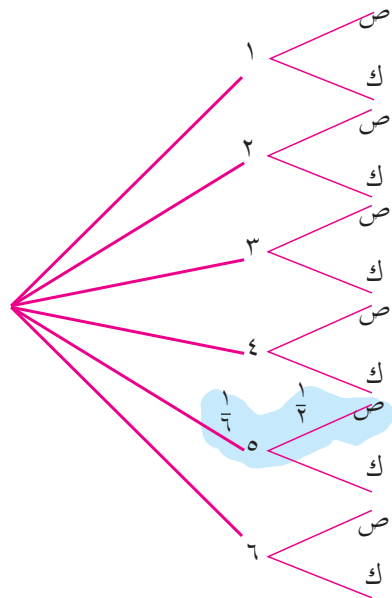
$$L(H_2/H_1) = L(H_2)$$

$$\text{وكذلك } L(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \times L(H_2) .$$

مثال:

في تجربة رمي حجر نرد، ثمّ إلقاء قطعة نقدٍ، وملاحظة الوجهين الظاهرين، ما احتمال ظهور الرقم ٥ على حجر النرد، وظهور صورة على قطعة النقد؟

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$



ليكن H_1 : حادث ظهور الرقم ٥ على حجر النرد.

H_2 : حادث ظهور صورة على قطعة النقد.

والمطلوب: $L(H_1 \cap H_2)$

لاحظ أنّ الحادثين H_1 و H_2 مستقلّان ، فلا يتأثر رمي قطعة النقد برمي حجر النرد، فنجد احتمال كلّ منهما دون الاعتماد على الآخر: $L(H_1) = \frac{1}{6}$ ، $L(H_2) = \frac{1}{2}$

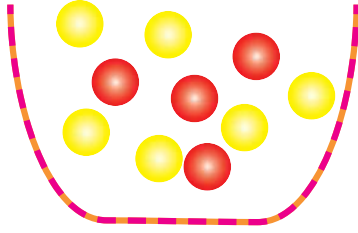
وبما أنّ H_1 ، H_2 مستقلّان، ينتج أنّ:

$$L(H_1 \cap H_2) = L(H_1) \times L(H_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

هل يمكنك إيجاد: $L(H_1 \cap H_2)$ بطريقة أخرى؟

أفكر وأناقش

نشاط (٢): يحتوي صندوقٌ على ٤ كراتٍ حمراء اللون، و٦ كراتٍ صفراء اللون متماثلاتٍ في الحجم، سُحِبَت كرتان على التوالي:



ما احتمال أن تكون الأولى حمراء، والثانية صفراء،

إذا كان السحب مع الإرجاع؟

ح_١: الكرة الأولى المسحوبة حمراء.

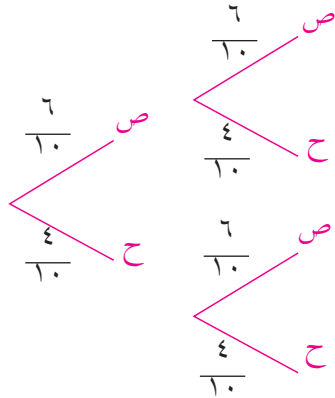
ح_٢: الكرة الثانية المسحوبة صفراء.

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء، والثانية صفراء،

إذا كان السحب مع الإرجاع =

$$P(H_1 \cap H_2) = P(H_1) \times P(H_2)$$

$$\frac{\boxed{}}{100} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \frac{4}{10} = \text{لماذا؟}$$



نشاط (٣): إذا كان $P(H_1) = 0,5$ ، $P(H_2) = 0,7$ ،



وكان $P(H_1 \cup H_2) = 0,85$ ، أُبَيِّنُ أَنَّ H_1 ، H_2 حادثان مستقلان.

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = P(H_1) \times P(H_2)$$

$$P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

$$0,85 = 0,5 + 0,7 - P(H_1 \cap H_2)$$

$$P(H_1 \cap H_2) = 0,35$$

نلاحظ أن: $P(H_1 \cap H_2) = P(H_1) \times P(H_2)$ ، أي أن: الحادثين H_1 ، H_2 مستقلان.

نشاط (٤): إذا كان $P(H_1) = 0,4$ ، $P(H_2) = 0,5$ وكان H_1 ، H_2 حادثين مستقلين،



أجد قيمة ما يأتي:

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \times 0,4 = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = P(H_1 \cap H_2)$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} - 0,9 = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = P(H_1 \cup H_2)$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = P(H_1 / \bar{H}_2)$$

تمارين ومسائل:



س١ إذا كان: $L(H_1) = 0,6$ ، $L(H_2) = 0,5$ ، وكان $L(H_1 \cup H_2) = 0,8$ ،
أُبين أن: H_1 ، H_2 حادثان مستقلان.

س٢ يحتوي صندوق على ٥ كراتٍ زرقاء اللون، و ٧ كراتٍ خضراء اللون،
سُحبت كرتان على التوالي، مع إرجاع. أحسب احتمال ما يأتي:

أ أن تكون الكرة الأولى زرقاء، والثانية خضراء.

ب أن تكون الكرتان من اللون نفسه.

س٣ إذا كان: $L(H_1 \cup H_2) = 0,2$ ، $L(H_1) = 0,4$ ، $L(H_2) = 0,5$ ، أجد:

أ $L(H_1 \cap H_2)$

ب $L(H_1 / H_2)$

ج هل H_1 ، H_2 حادثان مستقلان؟

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١١ إذا كان H ، C حادثين منفصلين في Ω ، وكان $L(H) = \frac{2}{3}$

$L(H) = \frac{1}{4}$ ، فما قيمة $L(H \cap C)$ ؟

أ ($\frac{1}{4}$) ب ($\frac{11}{12}$) ج ($\frac{5}{12}$) د (صفر)

١٢ إذا كان H ، C حادثين مستقلين في Ω ، لتجربة عشوائية ما، وكان $L(H) = 0.5$

$L(H) = 0.4$ ، فما قيمة $L(H \cup C)$ ؟

أ (0.7) ب (0.9) ج (0.5) د (0.4)

١٣ إذا كان $L(H) = 0.7$ ، $L(H) = 0.4$ ، $L(H - C) = 0.4$

فما قيمة $L(H / C)$ ؟

أ (0.6) ب (0.25) ج (0.5) د (0.75)

١٤ إذا كان احتمال أن ينجح عامر في الرياضيات يساوي 0.7 ، واحتمال أن ينجح في اللغة

الإنجليزية يساوي 0.8 ، واحتمال أن ينجح في كليهما يساوي 0.56 . فما احتمال نجاحه

في الرياضيات فقط ؟

أ (0.8) ب (0.24) ج (0.14) د (0.7)

١٥ إذا كان $L(H / C) = 0.3$ ، و $L(H) = 0.4$ ، وكان H ، C مستقلين، فما قيمة

$L(H \cap C)$ ؟

أ (0.12) ب (0.28) ج (0.7) د (0.3)

س٢ إذا كان احتمال نجاح طالب في امتحان الفيزياء يساوي 0.75 ، واحتمال نجاحه في امتحان

الكيمياء يساوي 0.8 ، واحتمال نجاحه في الامتحانين معاً يساوي 0.65 ، فما احتمال:

أ نجاح الطالب في أحد الامتحانين ؟

ب نجاح الطالب في امتحان الكيمياء فقط ؟

س٣ صندوقان يحتوي الأول على ٤ كرات بيضاء اللون، وه كرات سوداء اللون، ويحتوي الثاني على ٣ كرات بيضاء اللون، و ٣ كرات سوداء اللون، وجميع الكرات في الصندوقين متماثلات في الحجم: إذا سُحِبَتْ كرة واحدة من كل صندوق، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان سوداوين؟

س٤ إذا كان H_1 ، H_2 حادثين في Ω ، وكان $L(H_1) = \frac{1}{3}$ ، $L(H_2 / H_1) = \frac{1}{2}$ ، $L(H_1 / H_2) = \frac{1}{4}$ ، $L(H_2) = \frac{1}{5}$. أحسب قيمة كل مما يأتي:

أ) $L(H_1 - H_2)$ ب) $L(H_2 / H_1)$ ج) $L(H_1 / H_2)$

س٥ إذا كان $L(H_1) = 0.4$ ، $L(H_2 / H_1) = 0.4$ ، $L(H_1 / H_2) = 0.5$ ، $L(H_2) = 0.5$ ، هل H_1 ، H_2 مستقلان؟ ب) ما قيمة $L(H_1)$ ؟

س٦ أقيم ذاتي: أعبر بلغتي عن توظيف مفاهيم الوحدة في حياتي المدرسية .

مشروع الوحدة:

تعدّد الهوايات والمهارات لدى الطلبة، ففي إحدى المدارس لوحظ تعدّد الهوايات لدى طلبة الصف التاسع، منها لعبة كرة القدم، لعبة كرة السلة، لعبة كرة الطائرة، لعبة الشطرنج، والقراءة وغيرها من الهوايات.

بالتعاون مع زملائك قم بتوزيع طلبة صفك إلى ثلاث مجموعات، وقم بتصنيف الهوايات لديهم في جدول. اختر أحد الطلبة بصورة عشوائية، ثم احسب :

١) احتمال أن يكون هذا الطالب من المجموعة الأولى، ويلعب كرة القدم.

٢) احتمال أن يكون الطالب لاعب شطرنج، علماً بأنه من المجموعة الثالثة.

٣) أناقش نتائج المجموعات المختلفة، وأصف الفروقات بينها.

www.jmasi.com

www.ConditionalEvents/Probability-site

روابط إلكترونية



تأمل صورة المسجد العُمريّ في مدينة غزّة، ولاحظ الأشكال الهندسيّة (الدائرة) الواردة فيها، ومدى الدقّة والإتقان في بناء المسجد . كيف يمكن تحديد مركز النافذة الدائريّة؟

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف معادلة الدائرة والمماسات والزوايا في الحياة العملية من خلال الآتي:

- ١١ التعرف إلى معادلة الدائرة.
- ١٢ إيجاد معادلة الدائرة.
- ١٣ التعرف إلى الزوايا المحيطية، والزوايا المركزية.
- ١٤ استنتاج العلاقة بين الزاويتين المركزية والمحيطية المشتركة في القوس نفسه.
- ١٥ استنتاج العلاقة بين الزاويتين المحيطيتين المشتركتين في القوس نفسه.
- ١٦ أن يتعرف على مماس الدائرة.
- ١٧ أن يتعرف الزاوية المماسية في الدائرة.
- ١٨ أن يستنتج العلاقة بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.
- ١٩ التعرف إلى الشكل الرباعي الدائري.
- ٢٠ استنتاج بعض خصائص الشكل الرباعي الدائري.

نشاط (١): تربية الخيول والاعتناء بها إرثٌ عربيٌّ أصيلٌ، ومن طُرُق التعاملِ معَ الخيولِ أن يقومَ الرَّجُلُ بمسكِ طَرَفِ حبلٍ يمتدُّ إلى رَسَنِ الحصانِ الَّذي يدورُ ببعْدٍ ثابتٍ عن الرَّجُلِ.



- ما شكلُ المسارِ الناتجِ من حركةِ الحصانِ حولَ الرَّجُلِ؟
- ماذا يُمثِّلُ موقعُ قدمي الرَّجُلِ بالنسبةِ للمسارِ؟
- ماذا يُسمَّى البعدُ الثابتُ بينَ موقعِ الرَّجُلِ ومسارِ الحصانِ؟

نلاحظ أنَّ: المسارَ الذي يشكِّله الحصانُ من دورانه حولَ نقطةٍ ثابتةٍ (موقعِ الرَّجُلِ) هو دائرةٌ مركزها النقطةُ الثابتةُ ونصف قطرها ———.

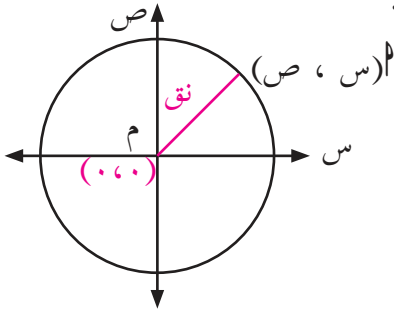
أَتَعَلَّمُ : المحلُّ الهندسيُّ: هو مسارٌ نقطةٍ تتحرَّكُ في المستوى الديكارتي لرسم منحنى تحت شروطٍ معيَّنة، حيثُ تُنتِجُ هذه المساراتُ أشكالاً هندسيَّةً.

الدائرة: هي المحلُّ الهندسيُّ (المسار) لنقطةٍ تتحرَّكُ في المستوى، بحيثُ تبعدُ بعداً ثابتاً عن نقطةٍ ثابتةٍ، تُسمَّى مركزَ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز م. يُسمَّى البعدُ الثابتُ نصفَ قطرِ الدائرة ، ويُرمز له بالرمز نق.

نشاط (٢): يُمثّل الشكل المجاور دائرةً مركزها نقطة الأصل م،



والنقطة م (س، ص) تقع على الدائرة، م هو نصف قطر الدائرة.
باستخدام قانون المسافة بين نقطتين، فإن:



$$\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} = م$$

$$\sqrt{(s - 0)^2 + (v - 0)^2} = م$$

$$م = م، \text{ ولكن: } م = م \text{ نق}$$

بتريع الطرفين أحصل على المعادلة: _____

أَتَعَلَّمُ: الصورة العامّة لمعادلة الدائرة، التي مركزها نقطة الأصل (٠، ٠)، ونصف قطرها نق هي: $س^2 + ص^2 = نق^2$

أكتبُ معادلةَ الدائرة التي مركزها (٠، ٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٤ سم.

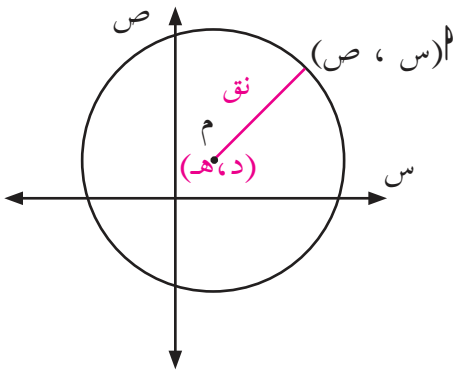
مثال (١):

معادلة الدائرة: $س^2 + ص^2 = نق^2$

الحل:

$$س^2 + ص^2 = ٤^2$$

$$س^2 + ص^2 = ١٦$$



نشاط (٣): لإيجاد معادلة الدائرة في الشكل



المجاور، حيث: م مركز الدائرة

نصف قطر الدائرة هو م، والنقطة _____

تقع على الدائرة التي مركزها م.

طول م ٢ باستخدام قانون المسافة بين نقطتين:

$$م ٢ = \sqrt{(ص_١ - ص_٢)^2 + (س_١ - س_٢)^2}$$

م ٢ = _____ ، ولكن: م ٢ = هو نصف قطر

ومنها: نق = _____

بتربيع الطرفين أحصل على المعادلة : _____



أَتَعَلَّمُ : الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (د ، هـ)، ونصف قطرها نق هي : $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

مثال (٢): أكتب معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٢ ، ١)، وطول نصف قطرها ٣ سم.

الحل:

معادلة الدائرة: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

$$(س - ٢)^2 + (ص - ١)^2 = ٣^2$$

ملاحظة: عند فك الأقواس في معادلة الدائرة السابقة نحصل على الصورة:

$$س^2 - ٤س + ٤ + ص^2 - ٢ص + ١ = ٩$$

$$س^2 - ٤س + ص^2 - ٢ص = ٥$$

$$س^2 - ٤س + ص^2 - ٢ص = ٤$$



نشاط (٤): عند فك الأقواس في المعادلة التي على الصورة: $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

نحصل على: $س^2 - ٢س + د^2 + ص^2 - ٢ص + هـ^2 = نق^2$

$$س^2 - ٢س + د^2 + ص^2 - ٢ص + هـ^2 - نق^2 = صفر$$

بفرض أن: $-د = ل$ ، $-هـ = ك$ ، $د^2 + هـ^2 - نق^2 = ج$

نتج الصورة : _____

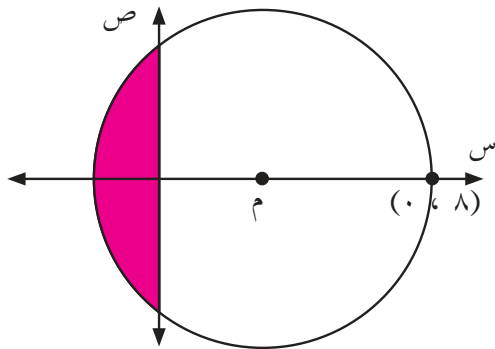
ماذا تلاحظ على معامل س^٢، معامل ص^٢؟

هل يوجد الحد س ص في المعادلة؟

أَتَعَلَّم : الصورة القياسية لمعادلة الدائرة هي : $x^2 + y^2 + 2lx + 2ky + c = 0$.

ويكون فيها مركز الدائرة $(-l, -k)$ ، نصف قطرها $\text{نق} = \sqrt{l^2 + k^2 - c}$

لاحظ أن : $l^2 + k^2 - c > 0$ صفر



نشاط (٥): كان الفلاح الفلسطيني يستغل

منطقة من أرضه لعمل بيدر عليها، كما هو ممثل في الشكل المظلل، إذا مُثلت معادلة

$$\text{الدائرة: } x^2 + y^2 - 12x = 32$$

أجد مركز ونصف قطر الدائرة.

نحوّل المعادلة: $x^2 + y^2 - 12x = 32$ إلى الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$x^2 + y^2 - 12x - 32 = 0$$

نقسم طرفيّ المعادلة على ٢، فتصبح: _____

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 6x - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 32 = 0$$

$$\text{نق} = \sqrt{(-6)^2 + (-16)^2 - (-32)} = 10$$

نق = ٥ وحدات

مركز الدائرة: $(6, -16)$

تمارين ومسائل:



س١ أجدُ معادلةَ الدائرة في كلِّ حالةٍ ممَّا يأتي:

أ مركزها (٠، ٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٥ سم.

ب مركزها (٣-، ٢)، وطولُ قطرها ٦ سم.

جأ مركزها (٢-، ٧-)، وتمرُّ في النقطة (٤-، ٨-).

س٢ أجدُ مركزَ الدائرة، وطول نصف قطرها في كلِّ حالةٍ ممَّا يأتي :

أ $s^2 + ص^2 - ١ = ٠$

ب $٤٢ = (٣ - s)^2 + (٤ + ص)^2$

جأ $٣٦ = ٦ص^2 + s^2$

دأ $١٤ = s^2 + ص^2 - ١٢$

س٣ أيَّ المعادلاتِ الآتية معادلةَ دائرة؟

أ $s^2 - ص^2 = ٣٦$

ب $s^2 + ص^2 - ٤ = ٩$

جأ $٨s^2 + ٨ص^2 + ٢س = ١٠$

دأ $s^2 + ٢ص^2 - ٥ = ٠$

هأ $s^2 + ص^2 - ٢ = ٣ص$

س٤ أجد قيمة ك التي تجعل نصف قطر الدائرة الآتية ٥ وحدات:

$$s^2 + ص^2 + ٤س + ٢ك - ١٢ = ٠$$

س٥ رسم معلم التربية الرياضية في إحدى المدارس الفلسطينية دائرة في وسط ملعب كرة القدم.

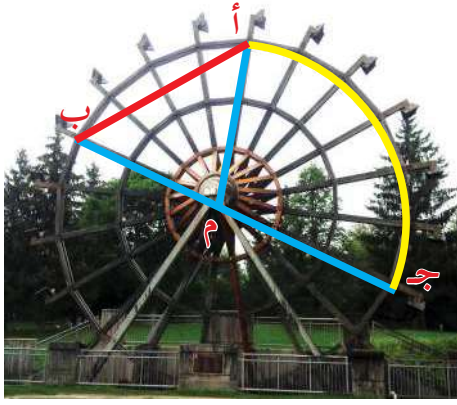
افترض المعلم أن الدائرة مرسومة في مستوى ديكارتي مركزها (٢-، ٤)، ونصف قطرها ٦

م. ما معادلتها؟

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

(٩ - ٢)

نشاط (١): المحافظة على عمارة الأرض، والاعتناء بها من ضرورات بقائنا عليها، ف«على هذه الأرض



ما يستحق الحياة». اعتمد الفلاح قديماً على قوة دفع المياه الناتجة من دولاب المياه لتحريك طاحونة القمح، تأمل دولاب المياه في الشكل المجاور، ثم أجب:

في الدائرة التي مركزها م.

تسمى القطعة أ م نصف قطر الدائرة،

بينما القطعة ب ج _____

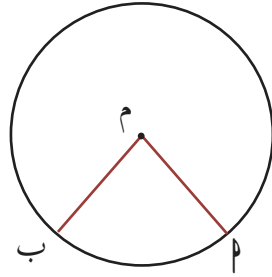
أج قوس في الدائرة.

أذكر أسماء أربع زوايا في الشكل المجاور: _____، _____، _____، _____

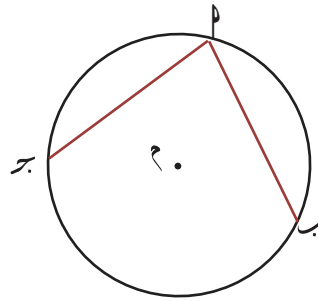
ألاحظ: موقع رأس الزوايا في الشكل السابق.

الزاوية المركزية: هي الزاوية التي يقع رأسها في مركز الدائرة، وضلعها أنصاف أقطار في الدائرة.
الزاوية المحيطية: هي الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة، وضلعها أوتار في الدائرة.

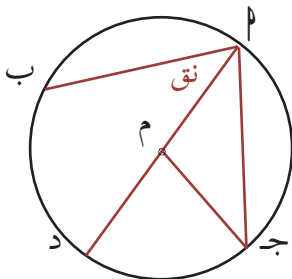
الزاوية



الزاوية م ب (مركزية)



الزاوية ب أ ج (محيطية)



نشاط (٢): في الشكل المجاور دائرة مركزها م :

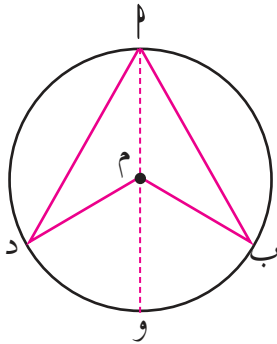


تسمى الزاوية ج م د زاوية _____، لماذا؟

تسمى الزاوية م ب د زاوية مركزية، لماذا؟

أذكر أسماء زاويتين محيطيتين _____، _____.

نشاط (٣): في الشكل المقابل، إذا كانت م مركز الدائرة، وكان $\angle ب م ا = 30^\circ$ ،
 $\angle د م ا = 35^\circ$ أجد: $\angle ب م د$.



الزاوية ب م و خارجة عن المثلث أ ب م

إذن: $\angle ب م و = \angle ب م ا + \angle د م ا$

ولكن: $\angle ب م ا = \angle د م ا$ لأن

ومنه: $\angle ب م و = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$

لإيجاد: $\angle د م و = 2 \times$

$= 2 \times$

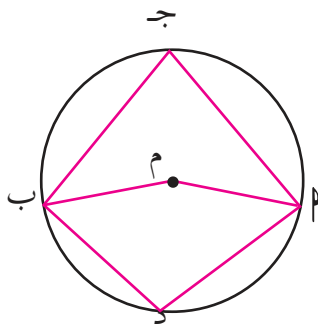
$\angle ب م د = \angle ب م و + \angle د م و$

$= 60^\circ +$

وينتج أن: $\angle ب م د = 2 \times$

لاحظ أن: الزاوية ب م د زاوية مركزية، والزاوية ب ا د زاوية محيطية، مرسومتان على القوس نفسه، ما العلاقة بين قياس الزاويتين؟

أتعلم: قياس الزاوية المركزية تساوي ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.



نشاط (٤): تحيط بمدينة القدس (العاصمة) العديد

من القرى، إذا مثل الشكل المجاور مواقع

القرى (أ، ب، ج، د) بالنسبة للقدس (م)،

وكان $\angle ب م ا = 150^\circ$

أجد: $\angle ب م ج$ ، $\angle ب م د$.

بما أن الزاوية ب م ا، والزاوية ب م ج مشتركتان في القوس ب ا د



إذن: $\angle م ب د = \angle م ج د$

$$\angle م ج د = \frac{1}{2} \times \text{_____} = \text{_____}$$

$$\angle م ب د \text{ المنعكسة } = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

زاوية $\angle م ب د$ المنعكسة مركّبة على القوس _____، وزاوية $\angle م د ب$ محيطيّة مشتركة معها في القوس _____

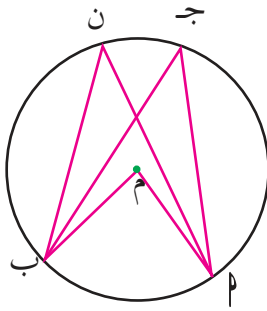
إذن: $\angle م ب د = \angle م د ب = 2$

$$\angle م د ب = \text{_____} = \text{_____}$$

نشاط (٥): أتاَمَلُ الشكل المجاور، فيه م مركز الدائرة، وقياس الزاوية $\angle م ب د = 80^\circ$ ،



أجد: قياس الزاوية $\angle م ن ب$ ، وقياس الزاوية $\angle م ج ب$



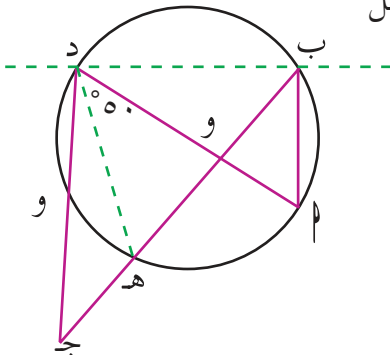
$$\angle م ج ب = \text{_____} \text{ لماذا ؟}$$

$$\angle م ن ب = 40^\circ$$

ما العلاقة بين الزاويتين: $\angle م ج ب$ ، $\angle م ن ب$ ؟

أَتَعَلَّمُ : أي زاويتان محيطيّتان مرسومتان على قوس واحد في الدائرة متساويتان في القياس.

خط الساحل



نشاط (٦): تمثل الدائرة في الشكل



المجاور المنطقة الخطرة التي يحظر

على السفن الاقتراب منها.

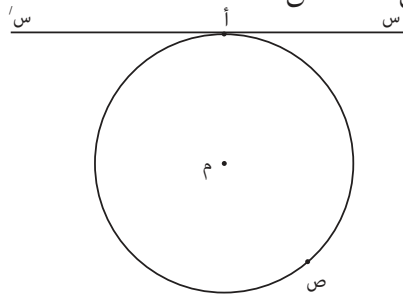
النقطة ج تمثل موقع سفينة في البحر.

تسمى الزاوية د ه ب زاوية الخطر

$$\angle أ ب ه = \text{_____} \text{ لأنها مرسومة } \text{_____}$$



نشاط (٧): ارسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة س فقط.
يسمى المستقيم أس أو أو



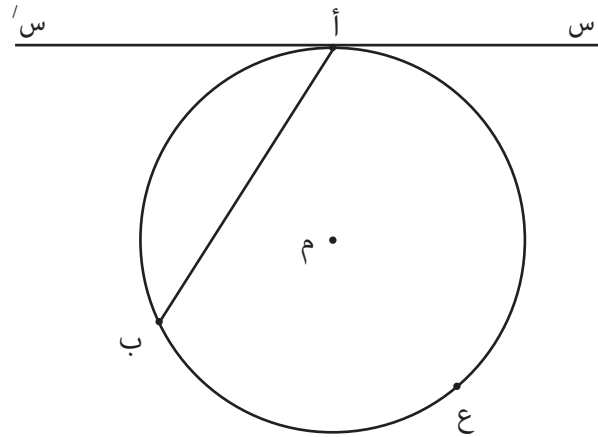
ارسم مستقيم يقطع الدائرة التي مركزها م في نقطة ص فقط.



أَتَعَلَّم : مماس الدائرة هو المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة تُعرف بنقطة تماسه معها (نقطة تماس).



نشاط (٨): الشكل المرسوم جانباً يمثل دائرة مركزها م ، فيها س س' مماس للدائرة في النقطة أ.



أب وتر في الدائرة.

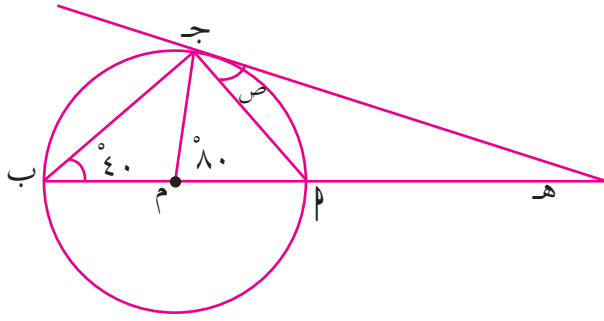
تُسمى الزاوية س' أب زاوية مماسية

الزاوية المماسية هي



نشاط (٩): الأدوات: ورق A4 ، قلم ، فرجار ، مسطرة ، منقلة.

- ارسم دائرة مركزها م (كل مجموعة ترسم دائرة نصف قطرها مختلف عن الأخرى).
- اختر نقطة على الدائرة مثل أ وارسم منها مماس.
- ثم ارسم وتر يمر بالنقطة أ مثل أب، ارسم زاوية محيطية على الوتر من الجهة الأخرى (ليس في جهة المماس)
- قم بقياس الزاوية المماسية والزاوية المحيطية التي رسمتها وسجل ملاحظاتك
- ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس.



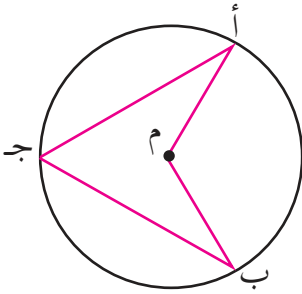
نشاط (١٠): في الشكل المجاور أجد قياس الزاوية المشار إليها بالرموز



(م مركز الدائرة)

ص = ، مماسية ومحيطية على نفس القوس.

ما العلاقة بين قياس الزاوية المماسية والزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس؟



تمارين ومسائل:

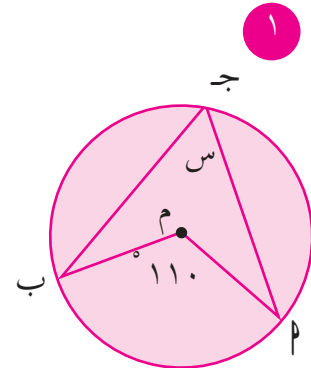
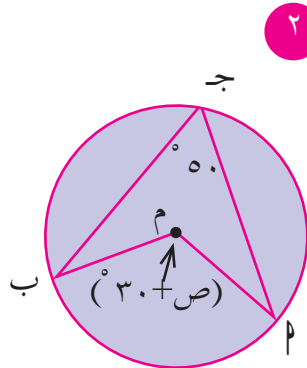
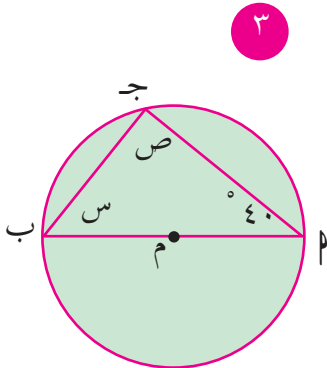


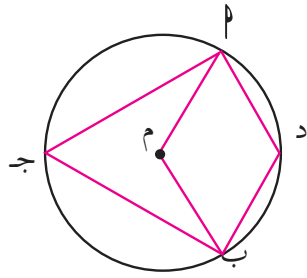
س١ الشكل المجاور فيه م مركز الدائرة، فإذا كان قياس

ب م ب = ١٣٠°، أجد ب ج ب.

س٢ أيبين أن قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تساوي ٩٠°.

س٣ أجد قيمة المجهول في الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة:

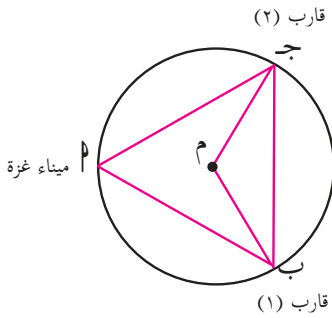




س ٤ في الشكل المجاور دائرة مركزها م، فيها :

$$\Delta (P D B) = 140^\circ$$

أجد: $\Delta (P M B)$ المنعكسة، و $\Delta (P J B)$.



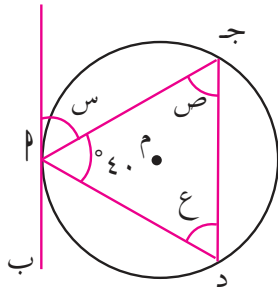
س ٥ يعاني الصيادون من ضيق مساحة الصيد المخصصة لهم

بسبب إجراءات الاحتلال، انطلق قاربا صيد من ميناء

غزة كما في الشكل المجاور، إذا كانت الدائرة مركزها

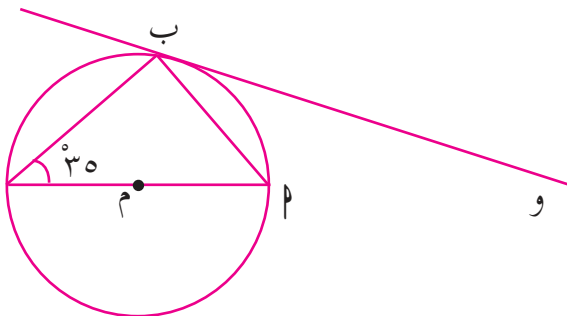
$$M، وفيها \Delta (M B J) = 30^\circ$$

أجد $\Delta (P J B)$.



س ٦ في الشكل المجاور أ ب مماس للدائرة أجد قياس جميع

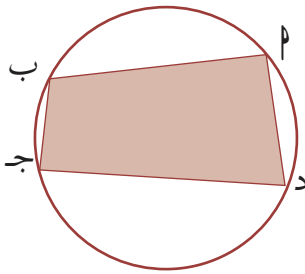
الزوايا المشار اليها بالرموز حيث م مركز الدائرة.



س ٧ أجد قياس الزاوية و ب أ في الشكل المجاور.

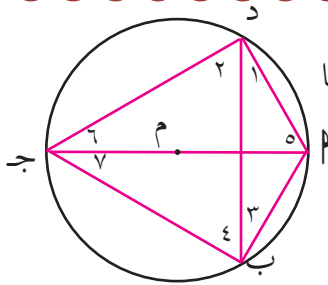


نشاط (١): يتكوّن الزيّ التراثيّ الشعبيّ في فلسطين من أثوابٍ مطرّزة يدويّاً، بخيوط الحرير أو الصوف، ويتّخذ التطريزُ تصاميمَ وأشكالاً مختلفةً من منطقة إلى أخرى، تتكون من أشكالٍ هندسيّةٍ، ورسوماتٍ، إذا أحطنا الشكل الرباعي في المطرزة بدائرة، بحيث تمرّ بجميع رؤوسه، فماذا نسمّي هذا الشكل؟



في الشكل المقابل رؤوس الشكل الرباعي _____ تقع على الدائرة التي مركزها م، فيسمّى الشكل ا ب ج د شكلاً رباعياً دائرياً.

أَتَعَلَّم : الشكل الرباعي الدائريّ: هو شكلٌ رباعيّ تقع رؤوسه الأربعة على الدائرة.



نشاط (٢): ا ب ج د شكلٌ رباعيّ مرسومٌ داخل دائرة مركزها م، أجدُ مجموعَ قياسِ الزاويتين المتقابلتين د، ب.



$$\angle 3 = \angle 6 \text{ (محيطيتان على قوس واحد)}$$

$$\angle 4 = \angle 5 \text{ لماذا؟}$$

$$\text{لكن } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 \text{ (مجموع زوايا المثلث)}$$

$$\text{إذن: } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

$$\text{إذن: مجموع قياس الزاويتين د، ب} = \angle 3 + \angle 4$$

أبحث عن طرق أخرى لحل النشاط.

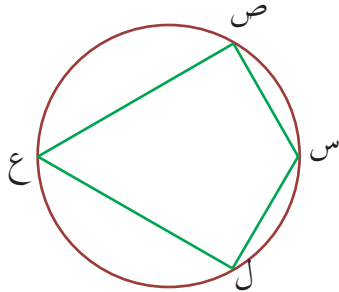
أفكر وأناقش



أَتَعَلَّم : كلُّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعيِّ الدائريِّ متكاملتان (مجموعهما ١٨٠°).
إذا كان مجموعُ زاويتين متقابلتين في شكلٍ رباعيٍّ = ١٨٠°، فإنَّ هذا الشكل رباعيٌّ دائريٌّ.



نشاط (٣): في الشكل المقابل يُسمَّى الشكلُ س ص ع ل لماذا؟

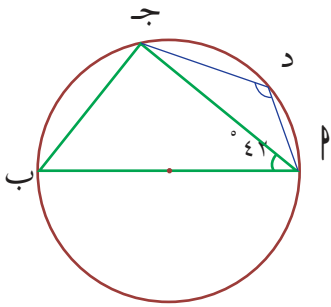


إذا كان $\angle ع = ٧٠^\circ$

ومنه $\angle س = \text{.....}$. لماذا؟



نشاط (٤): $\angle ب ج د$ شكلٍ رباعيٍّ دائريٍّ، فيه:
الضلع $\angle ب$ قطر في الدائرة.



أجد: $\angle د ج$ ، إذا كان $\angle ب ج د = ٤٢^\circ$

$\angle ب ج د = \text{.....}$. لماذا؟

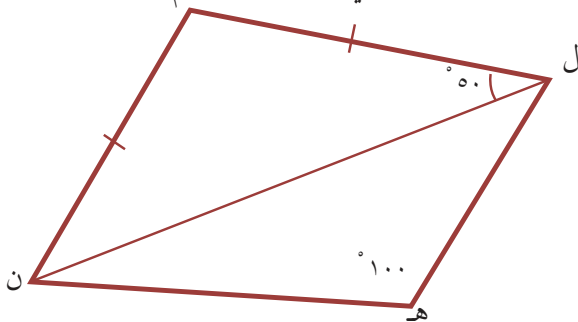
المثلث $\angle ب ج د$ فيه:

$\angle ب ج د = \text{.....} = (٩٠^\circ + ٤٢^\circ)$

ومنه: $\angle د ج = ١٨٠^\circ - ٤٨^\circ = ١٣٢^\circ$. لماذا؟



نشاط (٥): اقترح أحد مصممي البرامج الحاسوبية النموذج المرفق كتصميم لساحة مدرسة العودة (الشكل التخطيطي) هل الشكل ل م ن ه رباعيٌّ دائريٌّ؟ لماذا؟ م



$\angle م ن ل = \text{.....}$. لماذا؟

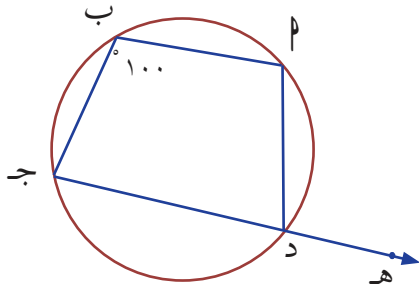
$\angle م = ٨٠^\circ$. لماذا؟

الشكل ل م ن ه شكلٍ رباعيٍّ، فيه زاويتان متقابلتان، مجموع قياسهما = ١٨٠°

إذن الشكل ل م ن ه شكلٍ رباعيٍّ دائريٍّ.

أفكر وأناقش

هل كلٌّ معيّن شكلٌ رباعيّ دائريّ؟



نشاط (٦): في الشكل المقابل أجد $\angle P$ د هـ .

$\angle P$ د ج = 80° ، لماذا؟

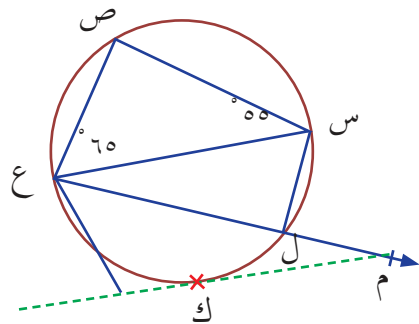
$\angle P$ د هـ = لماذا؟

$\angle P$ د هـ تقع على امتداد أحد أضلاع الشكل الرباعي والضلع المجاور له. ماذا تُسمّى $\angle P$ د هـ بالنسبة إلى الشكل الرباعي $\angle B$ ج د؟



إذا مُدَّ أحد أضلاع الشكل الرباعي على استقامته، فإنّ الزاوية المحصورة بين امتداد الضلع والضلع المجاور له تُسمّى **الزاوية الخارجة** عن الشكل الرباعي.
وقياس الزاوية الخارجة للشكل الرباعي الدائري = قياس الزاوية الداخليّة المقابلة للمجاورة لها.

تذكّر



نشاط (٧): في الشكل المقابل أجد $\angle S$ ل م .

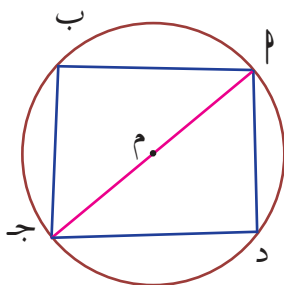
$\angle S$ ص ع =

الزاوية $\angle S$ ل م تُسمّى زاوية عن الشكل الرباعي الدائري.

$\angle S$ ل م =



ملاحظة: إذا كانت إحدى زوايا الشكل الرباعي الدائري قائمةً، فإنّ قُطرَ الشكل الرباعي المقابل لهذه الزاوية القائمة هو قطر الدائرة.

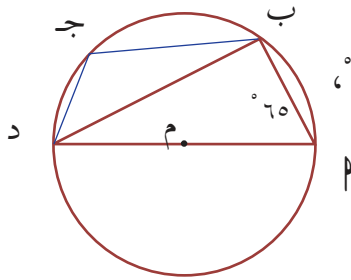
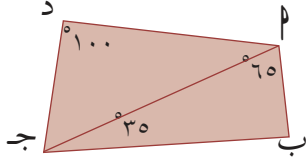


في الشكل الرباعي الدائري $\angle B$ ج د $\angle P$ ب ج = 90° ومنه $\angle P$ ج د قطر في الدائرة، وهو قطر الشكل الرباعي.



تمارين ومسائل:

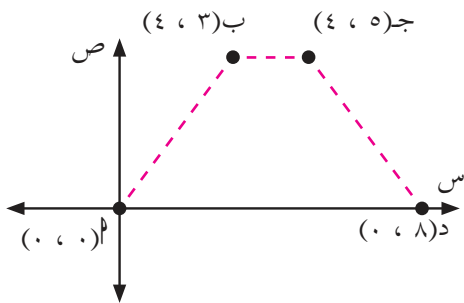
س١ أيبين أي الأشكال الآتية تمثل شكلاً رباعياً دائرياً.



س٢ ب ج د شكل رباعي دائري، فيه قياس الزاوية ب د ج = 30°،
أجد قياس الزاوية ب ج د ، وقياس الزاوية م ب ج.

س٣ ب ج د شكل رباعي دائري، فيه: $\angle م = 40^\circ$ و $\angle ج = 30^\circ + س$ ،
أجد قيمة س بالدرجات، ثم أجد قياسي كل من زاوية أ و زاوية ج .

س٤ في يوم الأرض وعلى لوحة كرتونية، مثلت هند
مواقع لأربعة قرى فلسطينية مهجرة، كما في
الشكل المجاور.



أ ما اسم الشكل الهندسي الذي يصل بين النقاط؟
ب أيبين أن الشكل هو رباعي دائري؟

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١١ ما طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س - ٥) + (ص - ٢) = ٦٤$ ؟

(أ) ٥ سم (ب) ٢ سم (ج) ٦٤ سم (د) ٨ سم

١٢ قياس زاوية مركزيّة في دائرة مركزها م $= ١٠٠^\circ$ ، فما قياس الزاوية المحيطيّة المشتركة معها في القوس؟

(أ) ١٠° (ب) ٥٠° (ج) ١٠٠° (د) ٢٠°

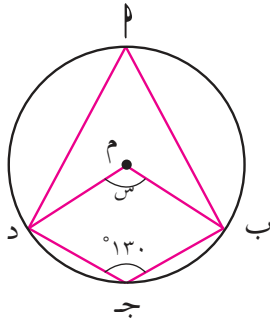
١٣ ما العلاقة بين كلّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري؟

(أ) مجموعهما ٣٦٠° (ب) متساويتين (ج) متكاملتين (د) متتامتين

١٤ ما قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على قطر الدائرة؟

(أ) ٩٠° (ب) ٣٠° (ج) ٦٠° (د) ٨٠°

١٥ في الشكل المجاور:



إذا كان م مركز دائرة، فيها $\angle (ب ج د) = ١٣٠^\circ$ ، فما قيمة س؟

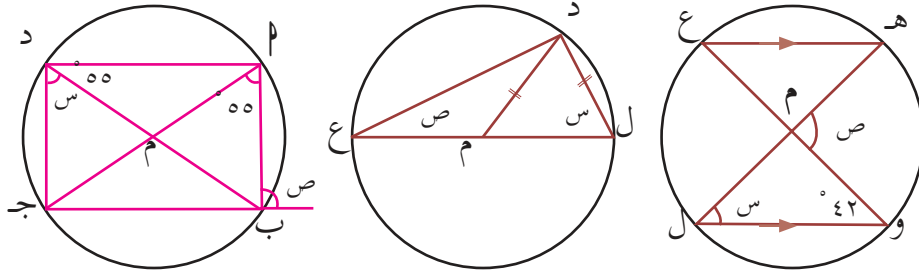
(أ) ٥٠° (ب) ١٠٥° (ج) ٢٣٠° (د) ١٠٠°

س٢ أجد معادلة الدائرة في الحالات الآتية:

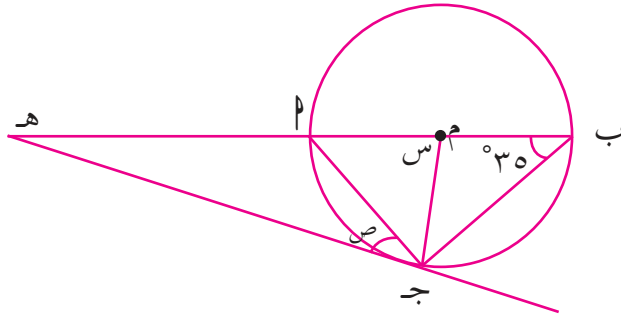
١١ مركزها $(١، ٥)$ ، وتمرّ بالنقطة $(٢، ٤)$

١٢ نهايتا قطرٍ فيها النقطتان: $(٧، ١٢)$ ، $(٥، -٤)$

س٣ أجد قياسات الزوايا المجهولة في الأشكال الآتية:



س٤ ب ج د شكلٌ رباعيٌّ دائريٌّ، مرسوم داخل دائرة مركزها م، إذا كان ب قطراً في الدائرة، وكان قياس الزاوية ب م ج = ٤٠° ، أجد قياس الزاوية ل د ج .



س٥ في الشكل المجاور أجد قياس الزوايا المشار إليها بالرموز.

س٥ أقيم ذاتي: اعبّر بلغتي عن نقاط القوة ونقاط الضعف الواردة في مفاهيم الوحدة التي تعلمتها.

مشروع الوحدة:

صمم نموذجاً لجداريةً مستطيلة الشكل أبعادها م٥، م٢، لوضعها على جدار المدرسة. أكرر نموذجاً بشكل رباعيٍّ دائريٍّ (مستطيل، مربع، . . . الخ) بحيث نستطيع تكراره ليغطي اللوحة. هل يُشترطُ تكرار الشكل الرباعيِّ الدائريِّ نفسه في اللوحة كلها؟
أناقش الخطوات والصعوبات التي قد تواجهك.

<http://www.ies.co.jp/math/java/geo/klight/klight.html>

<http://www.blogmathnookarabia.com>

روابط إلكترونية

المشروع

المشروع: شكل من أشكال منهج النشاط؛ يقوم الطلبة (أفراداً أو مجموعات) بسلسلة من ألوان النشاط التي يتمكنون خلالها من تحقيق أهداف ذات أهمية للقائمين بالمشروع. ويمكن تعريفه على أنه: سلسلة من النشاط الذي يقوم به الفرد أو الجماعة لتحقيق أغراض واضحة ومحددة في محيط اجتماعي برغبة ودافعية.

مميزات المشروع:

١. قد يمتد زمن تنفيذ المشروع لمدة طويلة ولا يتم دفعة واحدة.
٢. ينفذه فرد أو جماعة.
٣. يرمي إلى تحقيق أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.
٤. لا يقتصر على البيئة المدرسية وإنما يمتد إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها.
٥. يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويشير دافعيتهم ورغبتهم بالعمل.

خطوات المشروع:

أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما يأتي:

١. أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.
٢. أن يوفر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.
٣. أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.
٤. أن تكون المشروعات متنوعة ومتراكبة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلب مجالاً على الآخر.
٥. أن يتلاءم المشروع مع إمكانيات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.
٦. أن يُخطَّط له مسبقاً.

ثانياً: وضع خطة المشروع:

يتم وضع الخطة تحت إشراف المعلم حيث يمكن له أن يتدخل لتصويب أي خطأ يقع فيه الطلبة.

يقتضي وضع الخطة الآتية:

١. تحديد الأهداف بشكل واضح.
٢. تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.
٣. تحديد خطوات سير المشروع.

٤. تحديد الأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، (شريطة أن يشترك جميع أفراد المجموعة في المشروع من خلال المناقشة والحوار وإبداء الرأي، بإشراف وتوجيه المعلم).
٥. تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلي.

ثالثاً: تنفيذ المشروع:

مرحلة تنفيذ المشروع فرصة لاكتساب الخبرات بالممارسة العملية، وتعدّ مرحلة ممتعة ومثيرة لما توفره من الحرية، والتخلص من قيود الصف، وشعور الطالب بذاته وقدرته على الإنجاز حيث يكون إيجابياً متفاعلاً خلافاً مبدعاً، ليس المهم الوصول إلى النتائج بقدر ما يكتسبه الطلبة من خبرات ومعلومات ومهارات وعادات ذات فائدة تنعكس على حياتهم العامة.

دور المعلم:

١. متابعة الطلبة وتوجيههم دون تدخل.
٢. إتاحة الفرصة للطلبة للتعلم بالأخطاء.
٣. الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من أخطاء.
٤. التدخل الذكي كلما لزم الأمر.

دور الطلبة:

١. القيام بالعمل بأنفسهم.
٢. تسجيل النتائج التي يتم التوصل إليها.
٣. تدوين الملاحظات التي تحتاج إلى مناقشة عامة.
٤. تدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقاً).

رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الآتي:

١. الأهداف التي وضع المشروع من أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق الأهداف إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.
٢. الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة أثناء التنفيذ، التقيد بالوقت المحدد للتنفيذ، ومرونة الخطة.
٣. الأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوعها، إقبال الطلبة عليها، توافر الإمكانيات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.
٤. تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الإقبال على تنفيذه بدافعية، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور بالارتياح، إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.

يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:

- أهداف المشروع وما تحقق منها.
- الخطة وما طرأ عليها من تعديل.
- الأنشطة التي قام بها الطلبة.
- المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.
- المدة التي استغرقها تنفيذ المشروع.
- الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.

المراجع

فريدريك بل (1986): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني؛ (ترجمة محمد المفتي و ممدوح سليمان).
قبرص: الدار العربية للنشر والتوزي
للحام، أنور (1990): الجبر ، ط4 ، مطبعة دار الكتاب ، دمشق
ابو الوفاء البوزجاني (1971): علم الحساب العربي ، تحقيق د. احمد سعيدان ، عمان .
أنور عكاشة وآخرون (1990): تاريخ الرياضيات ، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر ، عمان
كارتر ، فيليب ؛ راسيل ، كين (2010): الدليل الكامل في اختبارات الذكاء، مكتبة جرير ، السعودية
هاشم الطيار، ويحيي سعيد (1977): موجز تاريخ الرياضيات، مؤسسة دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل.
السبتي ، جورج (1988): ، الجبر الخطي ، دار الحكمة ، جامعة البصرة
الجنابي، احمد نصيف (1980): ، الرياضيات عند العرب، منشورات دار الجاحظ للنشر، الجمهورية العراقية
الزغلول، عماد (2005)، الإحصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.
عبد اللطيف، علي اسحق (1993): عالم الهندسة الرياضية ابن الهيثم، منشورات الجامعة الاردنية، عمان، الاردن .
الخوارزمي ، محمد بن موسى (1939): كتاب الجبر والمقابلة ، تقديم علي مصطفى مسرفة ومحمد مرسي
احمد ، القاهرة

ريتش، بارنيت (2004) : الجبر الأساسي ، ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية -القاهرة- مصر

Kline, M,(1972): Mathematics Thought From Ancient to Modern Times, Oxford, N. Y

Lamborg. James(2005): Math reference, Wiley ,N. Y

Bell,E,T(1937): ,Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N. Y

Friel,Suzan,Rashlin,Sid.Doyle,Dot.& others(2001): Navigating through Algebra in
Grades 6-8. NCTM. RESTON, VIRGINIA .

لجنة المناهج الوزارية:

د. صبري صيدم	أ. ثروت زيد	د. شهناز الفار
د. بصري صالح	أ. عزام أبو بكر	د. سميرة نخالة
م. فواز مجاهد	أ. علي منصرة	م. جهاد دريدي

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد	د. محمد صالح (منسقاً)	د. معين جبر	د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي	د. عادل فوارعة	أ. وهيب جبر	د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني	د. سعيد عساف	د. محمد مطر	د. علا الخليلي
د. شهناز الفار	د. علي نصار	د. أيمن الأشقر	أ. ارواح كرم
أ. نادية جبر	أ. نشأت قاسم	أ. أحلام صلاح	أ. عبد الكريم صالح
أ. نسرین دویکات	أ. حنان أبو سكران	أ. كوثر عطية	د. وجيه ضاهر
أ. فتحي أبو عودة	د. سميرة النخالة	أ. احمد سياصرة	أ. قيس شبانة
أ. مبارك مبارك			

المشاركون في ورشات عمل الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف التاسع:

أ. كريم العارضة	أ. محمد الفرا	أ. رانية شريم	أ. ريم العويضات
أ. عهود طه	أ. راتب نصار	أ. ميسون جمل	أ. منال الصباغ
أ. عبد الله مهنا	أ. أمل جبور	أ. عارف السعافين	أ. ابتسام اسليم
أ. وفاء موسى	أ. منال أسمة	أ. سمير حنيف	أ. سهيل شبير
أ. باسم المدهون	أ. رفيق الصيفي	أ. صلاح الترك	أ. سعيد عتيق
أ. عبد العزيز شلالدة	أ. نبيلة سلامة	أ. رابعة فشافشة	