اجابات الفصل الأول

الفرع العلمي والصناعي

مكتبة الملتقى التربوي

حلول الوحدة الاولى / حساب التفاضل

تمارين (١-١) صفحة ٨

السؤال الأول: أ) مقدار التغير في ق(س) = ق(٥) – ق(٣) = $\frac{٧٨}{٥}$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٤ الى ١ يساوي = $\frac{ق(٤)-ق(١)}{٤-١} = \frac{٥١}{١٢} = \frac{١٧}{٤}$

السؤال الثاني: متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة $[\pi ، \frac{\pi}{٢}]$ = $\frac{ق(\pi)-ق(\frac{\pi}{٢})}{\pi - \frac{\pi}{٢}} = \frac{٤}{\pi}$

السؤال الثالث :متوسط التغير = $\frac{ق(ا)-ق(١)}{ا-١} = \frac{ا^٢+ا^٢-(٦-)}{ا-١} = \frac{٥-ا^٢١}{ا-١} = ٩$

ومنها $ا^٢١ - ٥ = ا٩ - ٩$ وبالتالي $ا^٢١ - ا٩ + ٤ = ٠ = (ا١٢ - ١)(ا - ٤)$

$ا = \frac{١}{١٢}$ (مرفوض لأن أ >٢) ، $ا = ٤$ ومنها $ا = ٤$

السؤال الرابع : متوسط التغير للاقتران ك (س) في الفترة $[١ ، ٣]$

$= \frac{ك(٣)-ك(١)}{٢} = \frac{٩+ا٣ن(٣)-(١+ا٣ن(١))}{٢} = \frac{٨+ا٣ن(٣)-ن(١)٣}{٢} = \frac{ن(٣)-ن(١)}{٢}٣ + ٤ =$

$= ٤ + ٣ \times ٤ = ١٦$

السؤال الخامس: ميل المستقيم ل = ظا٥ ١٣٥ = $\frac{ن(٣)-ن(١)}{٢} = -١$

متوسط التغير في الاقتران هـ(س) = $\frac{هـ(٣)-هـ(١)}{٢}$

$= \frac{٣ن(٣)+(١)ن٣-١-٩-(-١)}{٢} = \frac{٨}{٢} + ٣ \frac{ن(٣)-ن(١)}{٢}$ $= ٤ + ٣ \times -١ = ١$

السؤال السادس: السرعة المتوسطة في الفتر ة $[١ ، ٣]$

$= \frac{ف(٣)-ف(١)}{٣-١} = \frac{٩+ا٣ب-(ب+١)}{٣-١} = ٦$

ومنها ٢ب + ٨=١٢ وبالتالي ب=٢

السؤال السابع: متوسط التغير للاقتران ق (س)

$$= \frac{ن(٢)-ن(ن)}{٢-ن} = \frac{(٤أ+٢ب+جـ)-(أن^{٢}+بن+جـ)}{٢-ن}$$

$$= \frac{(٤-ن^{٢})أ+(٢-ن)ب}{٢-ن} \times \frac{٢-ن}{٢-ن} = (ب+(٢+ن)أ) \quad (ب+(٢+ن)أ) =$$

السؤال الثامن :أ) متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٠ إلى ١

$$= \frac{ق(١)-ق(٠)}{١-٠} = ق(١)-ق(٠)$$

$$= ١+هـ^{١+١}-(٠+هـ^{١+٠}) = ١+هـ^{٢}-هـ$$

ب) متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ١ إلى هـ

$$= \frac{ن(هـ)-ن(١)}{هـ-١} = \frac{هـ^{ن}+لـو هـ-(١+لـو١^{ن})}{هـ-١} \quad \frac{هـ-٣}{هـ-١} = \frac{هـ+ن-١}{هـ-١}$$

ومنها ن - ١ = -٣ وبالتالي ن =-٢

تمارين (١-٢) صفحة ١٦

السؤال الأول: $ن'(-١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(-١+هـ)-ن(-١)}{هـ} =$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ-هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢-هـ}{١} = ٢$$

السؤال الثاني :أ) $ن'(٤) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٤+هـ)-ن(٤)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{(٤+هـ)+(٤+هـ)^{٢}-٢٠}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٤+هـ+١٦+٨هـ+هـ^{٢}-٢٠}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٩هـ+هـ^{٢}}{هـ} = ٩$$

ب) $\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=٣} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣ - س}{٣س}}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{٣س} = \frac{-١}{٩}$

ج) عندما س= ٠ نلاحظ أن: ق(س) يغير من قاعدته

$$ن'(٠) = \lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س - ٠}$$

$$ن'(٠^+) = \lim_{س \to ٠} \frac{|س| - ٠}{س} = ٠ \quad ن'(٠^-) = \lim_{س \to ٠} \frac{-س}{س} = ٠ \quad \text{ومنها } ن'(٠) = ٠$$

عندما س = $\frac{١}{٢}$ فإن $ن'(\frac{١}{٢}) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{[س] - ٠}{س - \frac{١}{٢}} = \lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٠}{س - \frac{١}{٢}} = ٠$

أي ان $ن'(\frac{١}{٢}) = ٠$

السؤال الثالث : في الفترة $]-١، ١[$

$$ن'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع) - ن(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢\sqrt{ع + ٣} - ٢\sqrt{س + ٣}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢\sqrt{ع + ٣} - ٢\sqrt{س + ٣}}{ع - س} \times \frac{٢\sqrt{ع + ٣} + ٢\sqrt{س + ٣}}{٢\sqrt{ع + ٣} + ٢\sqrt{س + ٣}}$$

$$\lim_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{(ع - س)(٢\sqrt{ع + ٣} + ٢\sqrt{س + ٣})} = \frac{١}{\sqrt{س + ٣}}$$

في الفترة $]١، ٤[$:

$$ن'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع) - ن(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٤}{ع} - \frac{٤}{س}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٤(س - ع)}{ع س}}{ع - س} = \frac{-٤}{س^٢}$$

عندما س= -١ ، ٤ المشتقة غير موجودة (أطراف فترة)

مكتبة الملتقى التربوي

عندما س = ١ ، المشتقة غير موجودة لأن ن´(١) $^{+}$ ≠ ن´(١) $^{-}$ وذلك بإيجادهما باستخدام تعريف

المشتقة فتكون ن´(س) = $\begin{cases} \frac{١}{\sqrt{٣+س}} & ، \ س \in]-١، ١[\\ \frac{-٤}{س^{٢}} & ، \ س \in]١، ٤[\end{cases}$

السؤال الرابع : أفرض العرض س فيكون الطول ٣س

ومنها المساحة م = ٣س^{٢}

معدل التغير في مساحة الصفيحة (عندما س = ٦)

م´(س) = $\lim_{س \to ٦}$ $\frac{م(س)-م(٦)}{س-٦}$ = $\lim_{س \to ٦}$ $\frac{٣س^{٢}-١٠٨}{س-٦}$ = ٣٦ سم^{٢} / س

السؤال الخامس :أ) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ن(٣+٥هـ)-ن(٣)}{١٠هـ}$ = $\frac{٥}{١٠}$ ن´(٣) = $\frac{١}{٢}$ × ٤ = ٢ **(بفرض و= ٥ هـ)**

ب) $\lim_{س \to ١}$ $\frac{ن(س)-ن(١)}{س-١}$ = $\lim_{س \to ١}$ $\frac{\frac{ن(س)-ن(١)}{س-١}}{\frac{س^{٢}-١}{س-١}}$ **بقسمة البسط والمقام على (س-١)**

= $\lim_{س \to ١}$ $\frac{ن(س)-ن(١)}{س-١}$ ÷ $\frac{س+١}{٢}$ = $\frac{ن´(١)}{٢}$ = $\frac{-٢}{٢-}$ = ١

ج) $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{ن(١+٩هـ)-ن(١)}{\sqrt{١+هـ}-١}$ = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{\frac{ن(١+٩هـ)-ن(١)}{هـ}}{\frac{\sqrt{١+هـ}-١}{هـ}}$

= ٩ن´(١) × $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ}{\sqrt{١+هـ}-١}$ × $\frac{\sqrt{١+هـ}+١}{\sqrt{١+هـ}+١}$

(بالضرب بالمرافق والتبسيط) = ٩ × ٢- × ٢ = ٣٦-

د) $\lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١+٣هـ)-ب(١-٣هـ)}{١٠هـ} = \lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١+٣هـ)-ب(١)-ب(١)-ب(١-٣هـ)+ب(١)}{١٠هـ}$

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١+٣هـ)-ب(١)-(ب(١)-ب(١-٣هـ))}{١٠هـ}$

$= \lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١+٣هـ)-ب(١)}{١٠هـ} - \lim_{هـ\to 0} \frac{ب(١)-ب(١-٣هـ)}{١٠هـ}$

$= \frac{٣}{١٠} \times ب'(١) - \frac{-٣}{١٠} ب'(١) = \frac{-٦}{٥}$ بالفرض لكل حالة

هـ) $\lim_{س\to ٣} \frac{س ب(٣)-٣ب(س)}{س-٣} = \lim_{س\to ٣} \frac{س ب(٣)-٣ب(٣)+٣ب(٣)-٣ب(س)}{س-٣}$

$= \lim_{س\to ٣} \frac{ب(٣)(س-٣)+٣(ب(٣)-ب(س))}{س-٣} = ب(٣)-٣ب'(٣) = -١٤$

تمارين (١-٣) صفحة ٢٥

السؤال الأول : أ) $ب'(س) = ٥س^{٤} - ٢س$ ومنها $ب'(-١) = ٥+٢ = ٧$

ب) $ب'(س) = (س^{٣}-١)\times ١ + ٣س^{٢}(١٢+س)$

ومنها $ب'(٣) = ٢٦+٢٧(١٢+٣) = ١٣٤$

ج) $ب'(س) = \frac{(٥-س^{٢})\times ٢س - -٢س \times س^{٢}}{(٥-س^{٢})^{٢}}$ ومنها $ب'(-٢) = -٢٠$

السؤال الثاني : أ) $(ب+هـ^{٢})'(س) = ب'(س)+هـ(س)هـ'(س)+هـ'(س)\times هـ(س)$

$= ب'(س)+٢هـ'(س)\times هـ(س)$ $= ب'(١)+٢هـ'(١)\times هـ(١)$

$= ٣+٢\times -٣\times -١ = ٩$

ب) $\left(\frac{\text{س}^{٢}\,\text{ن}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}\right)'(١) = \left(\text{س}^{٢}\,\text{ن}'(\text{س}) + ٢\text{س}\,\text{ن}(\text{س}) + \frac{٣\,\text{هـ}'(\text{س})}{\text{هـ}^{٢}(\text{س})}\right)(١)$

$= \left(\text{ن}'(١) + ٢\,\text{ن}(١) + \frac{٣\,\text{هـ}'(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}\right) = ٣ + ٤ + ٩ = ٢-$

ج) $\left(\frac{\text{ن}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{\text{ن}'(١)\text{هـ}(١) - \text{هـ}'(١)\times\text{ن}(١)}{\text{هـ}^{٢}(١)}$

نجد ن′(١) من اشتقاق ن(س) حيث ن′(١) = ٠ ، ق(١)=$\frac{١}{٢}$

ميل المماس = ظل الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$= \text{ظا}\,٠١٥ = -\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ومنها هـ′(١) = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، هـ(١) = ١

بالتعويض ينتج أن: $\left(\frac{\text{ن}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$

السؤال الرابع: أ) ص′ = $\frac{\text{س}+١-\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}}$ ، ص″ = $\frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}}$

الطرف الأيمن = ٢ × $\frac{\text{س}}{(\text{س}+١)}\times\frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}} + \text{س}\times\frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}} = ٠$ = الطرف الأيسر

ب) ص = ١ س^{٥} + ٥س$^{-٤}$ ، ص′ = ٥١ س^{٤} − ٢٠ س$^{-٥}$

ص″ = ٢٠١ س^{٣} + ١٠٠ س$^{-٦}$ = ٢٠(١ س^{٣} + ٥س$^{-٦}$) = $\frac{١٠٠}{\text{س}^{٦}} + ٢٠١\,\text{س}^{٣}$

ومنها ص″ = $\frac{٢٠}{\text{س}^{٢}}(١\,\text{س}^{٥} + \frac{٥}{\text{س}^{٤}}) = \frac{٢٠\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$

السؤال الخامس :بعد التبسيط ن(س) = (١ − س^{١٦}) ومنها ن′(س) = −٦ ١س^{١٥}

ن′(١) = −١٦

السؤال السادس : أولا: ن(س) = س^{٢} ومنها ن′(س) = ٢س

أ) ن′(٠) = ٠

ب) هـ$'$(٠) غير موجودة لأن هـ(س) غير متصل عندها

جـ) $(ن \times هـ)(س) = \begin{cases} ٠ & ، \ س \in \left[٠، \frac{١}{٢}\right) \\ -س^{٢} & ، \ س \in \left(-\frac{١}{٢}، ٠\right) \end{cases}$

لاحظ ان الاقتران الجديد متصل عندما س = ٠

د) لاحظ أنه لا يمكن تحديد وجود $(ن \times هـ)'(٠)$ باستخدام مشتقة حاصل الضرب

$(ن \times هـ)'(س) = \begin{cases} ٠ & ، \ س \in \left(٠، \frac{١}{٢}\right) \\ -٢س & ، \ س \in \left(-\frac{١}{٢}، ٠\right) \end{cases}$ ومنها $(ن \times هـ)'(٠) = ٠$

ثانيا : نستنتج أنه لا يمكن الحكم على وجود أو عدم وجود المشتقة باستخدام قواعد الاشتقاق لذلك نعود إلى إيجاد قاعدة الاقتران الأصلي ثم نحدد وهذا لا يتناقض مع القاعدة المذكورة .

السؤال السابع : $ن(س) = س^{٤} + أ س^{٣} - ٣$ ، $ن'(س) = ٤س^{٣} + ١٣ أ س^{٢}$

$ن''(س) = ١٢ أ س^{٢} + ٦ أ س$ ، $ن^{(٣)}(س) = ٢٤ س + ٦ أ$ ،

$ن^{(٣)}(٢) = ٢٤ \times ٢ + ٦ أ = ١٨$ ومنها $أ = -٥$

السؤال الثامن : $ن(س) = س^{ن}$ ، $ن'(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ن''(س) = ن(ن-١) س^{ن-٢}$

$ن'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢) س^{ن-٣} = أ س$ ومنها $ن - ٣ = ١$ ، $ن = ٤$ ،

لكن $ن(ن-١)(ن-٢) = أ$ ومنها $أ = ٢٤$

السؤال التاسع : نفرض ٢س = ع ومنها $س = \frac{ع}{٢}$ عندما س $\to$ ١ فإن ع $\to$ ٢

النهاية = $\lim_{ع \to ٢} \frac{ن'(ع) - ن'(٢)}{\frac{ع}{٢} - ١} = ٢ \lim_{ع \to ٢} \frac{ن'(ع) - ن'(٢)}{ع - ٢} = ٢ ن''(٢) = ٢ \times ٥ = ١٠$

مكتبة الملتقى التربوي

تمارين (١-٤) صفحة ٢٩

السؤال الأول :

أ) $\frac{ء ص}{ء س} = -٢جاس - ٢قا^{٢}س$

ب) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(١+قاس)(-قاس ظاس)-(١-قاس)(قاس ظاس)}{(١+قاس)^{٢}} = \frac{-٢قاس ظاس}{(١+قاس)^{٢}}$

ج) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{قتاس + ظتاس + س قتاس ظتاس + س قتا^{٢}س}{(قتاس + ظتاس)^{٢}} = \frac{١ + س قتاس}{قتاس + ظتاس}$

د) $\frac{ء ص}{ء س} = ٢س قاس + س^{٢} قاس ظاس = س قاس (٢ + س ظاس)$

السؤال الثاني : $\frac{ء ص}{ء س} = قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س$ **(يتم التعامل مع مشتقة ظا^{٢}س على أنها حاصل ضرب)**

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢قا^{٢}س ظاس = ٢ظاس(١ + ظا^{٢}س) = ٢ص(١ + ص^{٢})$

السؤال الثالث : $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}}$

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{-س^{٢} جاس - ٢س جتاس + ٢جاس}{س^{٣}}$

الآن الطرف الأيمن= $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \frac{٢}{س}\frac{ء ص}{ء س} + ص$

$= \frac{-س^{٢} جاس - ٢س جتاس + ٢جاس}{س^{٣}} + \frac{٢}{س} \times \frac{س جتاس - جاس}{س^{٢}} + \frac{جاس}{س} = ٠$ **(مع التبسيط والاختصار)**

السؤال الرابع : $ن'(س) = س + جاس$ ، $ن''(س) = ١ + جتاس = ٠$

ومنها جتاس $= -١$ ، س $= \pi$ ، س $= -\pi$

السؤال الخامس : $نهـا_{هـ \leftarrow ٠} \frac{قا(س^{٢} + هـ) - قا(س^{٢})}{هـ} = نهـا_{هـ \leftarrow ٠} \frac{قا(ص + هـ) - قا(ص)}{هـ}$

$= (قاص)' = قاص ظاص = قاس^{٢} ظاس^{٢}$

تمارين (١-٥) صفحة ٣٦

السؤال الأول :

ا) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية = $\lim_{س\to ١} \frac{هـ^{س-١}-١}{\frac{١}{س}} = \frac{هـ^{٠}-١}{١} = ٠$

ب) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية= $\lim_{س\to ٠} \frac{٤}{قا^{٢}س} = ٤$

ج) ناتج التعويض = ÷ وبالتالي قيمة النهاية = $\lim_{س\to ٠} \frac{١-جتاس}{٣س^{٢}}$ وناتج التعويض = ÷

نطبق قاعدة لوبيتال مرة اخرى فتصبح $\lim_{س\to ٠} \frac{جاس}{٦س}$ وناتج التعويض ÷ تطبق قاعدة

لوبيتال مرة أخرى فتصبح $\lim_{س\to ٠} \frac{جتاس}{٦} = \frac{١}{٦} \Leftarrow \lim_{س\to ٠} \frac{س-جاس}{س^{٣}} = \frac{١}{٦}$

السؤال الثاني :

أ) $\frac{ص}{س} = -جاس \times هـ^{س} + هـ^{س} جتاس$

ب) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٢س}$

ج) $ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} س^{-٥} = \frac{-٥}{٢} لـو_{هـ} س$ ومنها $\frac{ص}{س} = \frac{-٥}{٢س}$

د) $ص = (هـ^{س}-٢)(هـ^{س}+٢)$

$\frac{ص}{س} = (هـ^{س})(هـ^{س}+٢)+(هـ^{س}-٢)(هـ^{س})$ ، ومنها $\frac{ص}{س} = ٢هـ^{٢س}$

السؤال الثالث : متوسط تغير الاقتران ص $= \frac{ب(٢)-ب(٠)}{٢} = \frac{١٢\ هـ^{-١}-٠}{٢}$

$= \frac{أ}{هـ} = \frac{٢}{هـ}$، ومنها $أ = ٢$

السؤال الرابع : $ص' = ٢س + هـ^{س} = ص = س^{٢} + هـ^{س} + ١$ ومنها $س^{٢} - ٢س + ١ = ٠$

وبحل المعادلة ينتج أن: س = ١

السؤال الخامس :بما أن ناتج التعويض = ÷ نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\text{نهـــا}_{س\leftarrow ١} \frac{س^{ن} - م^{ن}}{س^{٢} - م^{٢}} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow م} \frac{ن س^{ن-١}}{٢س^{٢-١}} = \frac{ن}{٢} م^{ن-٢} = \frac{ن}{٢} م^{ن-٢}$$

السؤال السادس : لاحظ أن ناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$

$$\text{قيمة النهاية} = \text{نهـــا}_{س\leftarrow ١} \frac{ق(١) - ق(س)}{١} = ق(١) - ق'(١) = ٦ - ٣ = ٣$$

تمارين (١-٦) صفحة ٤٣

السؤال الأول: ميل المستقيم = $\frac{-١}{٢}$ ، ميل المماس = ٢ لأنه عمودي عليه .

ميل المنحنى = ميل المماس ومنها $٢س - ٢ = ٢$ ، س=٢

نقطة التماس = (٢،١)

السؤال الثاني : $ق'(س) = -٢ظاس \, قا^{٢}س$

ميل المماس= $ق'(\frac{\pi}{٤}) = -٢ظا\frac{\pi}{٤} \, قا^{٢}\frac{\pi}{٤} = -٤$

$ق(\frac{\pi}{٤}) = ٣ - ظا^{٢}\frac{\pi}{٤} = ٣ - ١ = ٢$ ومنها نقطة التماس $(\frac{\pi}{٤}، ٢)$

معادلة المماس $ص - ٢ = -٤(س - \frac{\pi}{٤})$ ومنها $ص = -٤س + \pi + ٢$

السؤال الثالث : $ق'(س) = \frac{١}{س}$ ميل المماس= $ق'(٢) = \frac{١}{٢}$ ، $ق(٢) = ٠$

معادلة المماس هي $ص - ٠ = \frac{١}{٢}(س - ٢)$ ومنها $ص = \frac{١}{٢}س - ١$

المماس يقطع محور السينات في النقطة ب (٠،٢) والصادات في النقطة جـ (-١،٠)

مساحة المثلث ب جـ $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$ وحدة مساحة

السؤال الرابع : ميل المماس $= \frac{1}{6}$ ، $ن'(س) = \frac{-6}{(س-2)^2}$

ميل المماس $= ن'(س) = \frac{-6}{(س-2)^2} = \frac{-1}{6}$

وبحل المعادلة ينتج أن: س $=8$ أو س$= -4$

عندما س$=8$ ، ص $= 4$ ، $ا = 32$ ، وعندما س$=-4$ ، ص $=2$ ، $ا = 8$

السؤال الخامس : أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر أي أن: $40 - 10ن = 0$، ومنها $ن = 4$

$ف(4) = 80$ م

المسافة الكلية المقطوعة $= 100 = 2 \times 80 - ف(ن)$

$ف(ن) = 60$ ، أي يكون الجسم على ارتفاع ٦٠ م وهو نازل

$40ن - 5ن^2 = 60$ ،ومنها $ن = 6$، $ن = 2$ تهمل

سرعة الجسم في اللحظة المطلوبة $= 40 - 10 \times 6 = -20$ م / ث

السؤال السادس : $ف(ن) = 30ن - 5ن^2$

أ) أقصى ارتفاع عندما السرعة = صفر

$ع(ن) = 30 - 10ن = 0$، ومنها $ن = 3$ ث

أقصى ارتفاع = $ف(3) = 45$ م

ب) عندما يكون الجسم على مستوى سطح العمارة تكون الإزاحة $= 40$ م

$30ن - 5ن^2 = 40$ ومنها $ن = 2$، $ن = 4$ ث ، ن$=2$ تهمل

السرعة في تلك اللحظة(ن$=4$) $= -10$ م / ث

تمارين (١-٧)صفحة ٤٨

السؤال الأول :

أ) $\frac{ص}{س} = -3(س^2 + س + 1)^{-4} \times (2س + 1)$

عندما س$= 1$: $\frac{ص}{س} = -3(3)^{-4} \times (2+1) = \frac{-1}{9}$

ب) $ص = س^2 قا\frac{\pi}{س}$ ومنها $\frac{ص}{س} = س^2 قا\frac{\pi}{س} ظا\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^2} + 2س قا\frac{\pi}{س}$

عندما س$=1$: $\frac{ص}{س} = -2$

جـ) $ص = ٥ع^{٢} - ٧$ ، $\frac{ود ص}{ود ع} = ١٠ع$

$ع = \frac{١}{س^{٢}+١}$ ، $\frac{ود ع}{ود س} = \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{ود ص}{ود ع} \times \frac{ود ع}{ود س} = ١٠ع \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}} = ١٠ \times \frac{١}{س^{٢}+١} \times \frac{-٢س}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

عندما س=١ : $\frac{ود ص}{ود س} = \frac{-٥}{٢}$

د) $\frac{ود ص}{ود س} = قا^{٢}\frac{\pi}{س} \times \frac{-\pi}{س^{٢}} - ٢جتا\pi س \times جا\pi س \times \pi$

عندما س=١ : $\frac{ود ص}{ود س} = -\pi$

هـ) $\frac{ود ص}{ود س} = ٣(لـو_{هـ} س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

عندما س=١ : $\frac{ود ص}{ود س} = ٠$

السؤال الثاني : $ن'(س) = \frac{\frac{٢س م'(س)}{م(س)} - ٢لـو_{هـ} م(س)}{٤س^{٢}}$

$$ن'(١) = \frac{\frac{٢م'(١)}{م(١)} - ٢لـو_{هـ} م(١)}{٤} = ١ - \frac{١}{هـ}$$

السؤال الثالث : أ) $ن'(س) = (٢س+١)هـ^{س^{٢}+س}$

ب) $ع'(س) = \frac{٣س^{٢}-٦س}{س^{٣}-٣س^{٢}}$

السؤال الرابع : $ن'(س) = ٢س^{٣}م'(س^{٢}+١) + ٢س م(س^{٢}+١)$

$ن''(س) = ٤س^{٤}م''(س^{٢}+١) + ٤س^{٢}م'(س^{٢}+١) + ٦س^{٢}م'(س^{٢}+١) + ٢م(س^{٢}+١)$

$ن''(١) = ٤$

السؤال الخامس : $\frac{ص}{س} = ٣ن^{٢}(س)ن'(س) - ٣س^{٢}ن'(س^{٣})$

عندما س= ٢ : $\frac{ص}{س} = -٣٠$

السؤال السادس : $ن'(س) = قتا^{٢}س$ ومنها $ن'(\frac{\pi}{٤}) = قتا^{٢}\frac{\pi}{٤} = ٢$

$ن(\frac{\pi}{٤}) = -٤ظا\frac{\pi}{٤} = ٣$ نقطة التماس $(٣، \frac{\pi}{٤})$

ميل العمودي $= \frac{-١}{٢}$ ، معادلة العمودي هي $ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{\pi}{٨} + ٣$

السؤال السابع: $\frac{ص}{ن} = ٢ن + ٥$

عندما ن=١ : $\frac{ن}{س} = ٢$ أيضًا $\frac{ص}{ن} = ٢ \times ١ + ٥ = ٧$

عندما ن=١ : $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ن} \times \frac{ن}{س} = ٧ \times ٢ = ١٤$

السؤال الثامن : $ص = أجتاس^{٢} + ب جاس^{٢}$

$ص' = -٢أس جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}$

$ص'' = -٤أس^{٢} جتاس^{٢} - ٢أجاس^{٢} - ٤ب س^{٢} جاس^{٢} + ٢ب جتاس^{٢}$

$س ص'' = س(-٤أس^{٢} جتاس^{٢} - ٢أجاس^{٢} - ٤ب س^{٢} جاس^{٢} + ٢ب جتاس^{٢})$

$س ص'' = -٤أس^{٣} جتاس^{٢} - ٤ب س^{٣} جاس^{٢} - ٢أس جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}$

$س ص'' = -٤س^{٣}(أجتاس^{٢} + ب جاس^{٢}) - ٢أس جاس^{٢} + ٢ب س جتاس^{٢}$

$س ص'' = -٤س^{٣} ص + ص'$

السؤال التاسع: $ن'(س) = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $هـ'(س) = -جاس$

$(ن \circ هـ)'(س) = ن'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

$= (ن \circ هـ)'(س) = ن'(جتاس) \times -جاس$

$= (ن \circ هـ)'(س) = (١ - \frac{١}{جتا^{٢}س}) \times -جاس$

$= \frac{جتا^{٢}س - ١}{جتا^{٢}س} \times -جاس = -جا^{٣}س قا^{٢}س$

السؤال العاشر : نفرض م = ٢ س فيكون

$$\text{نهـا}_{هـ\to 0}\frac{\text{ظا}(٢س+هـ)-\text{ظا}(٢س)}{هـ}=\text{نهـا}_{هـ\to 0}\frac{\text{ظا}(م+هـ)-\text{ظا}(م)}{هـ}$$

$$=(\text{ظا}م)'=\text{قا}^{٢}م=\text{قا}^{٢}٢س$$

السؤال الحادي عشر : $\frac{د ص}{د س}=م'ن^{م-١}هـ^{م}+ن^{م}م'هـ^{م-١}هـ'=م'ن^{م-١}هـ^{م-١}(ن'هـ+هـ'ن)$

بالضرب والقسمة على $ن\times هـ$ **ينتج أن:**

$$ص'=م'ن^{م}هـ^{م}\times\frac{ن'هـ+هـ'ن}{ن هـ}=ص م\left(\frac{ن'}{ن}+\frac{هـ'}{هـ}\right)$$

ومنها $\frac{ص'}{ص}=م\left(\frac{ن'}{ن}+\frac{هـ'}{هـ}\right)$.

تمارين (١-٨) صفحة ٥٣

السؤال الأول :

أ) $٣س^{٢}+ص+س ص'+٤ص ص'=٠$ **ومنها** $ص'=\frac{-٣س^{٢}-ص}{س+٤ص}$

ب) $\frac{د ص}{د س}=\frac{١}{٥}((١-س^{٢})^{-\frac{٤}{٥}}\times-٢س=س(١-س^{٢})^{-\frac{٤}{٥}}$

ج) $ص'=جتا(س+ص)(١+ص')$ **بالتبسيط ينتج أن:**

$$ص'=جتا(س+ص)\times\frac{١}{١-جتا(س+ص)}$$

د) $\frac{-ص'}{ص^{٢}}-\frac{١}{س^{٢}}=٠$ **ومنها** $ص'=\frac{-ص^{٢}}{س^{٢}}$

السؤال الثاني : **نجد نقط التقاطع** $ص-٥+ص^{٢}=٢٥$ **ومنها** $ص=-٦$، $ص=٥$

عندما ص= -٦ لا يوجد س ، عندما ص=٥ فان س= ٠ ، ٣

$\frac{د ص}{د س}=٢س-٣$ ، **ميل المماس عندما س=٣ يساوي ٣**

ميل العمودي $\frac{-١}{٣}$ **ومنها معادلة العمودي هي** $ص-٥=\frac{-١}{٣}(س-٣)$

أي $ص=\frac{-١}{٣}س+٦$

ميل المماس عند ما س= ٠ يساوي -٣

ميل العمودي $\frac{١}{٣}$ ومنها معادلة العمودي هي $ص - ٥ = \frac{١}{٣}(س)$

$$ص = \frac{١}{٣}س + ٥$$

السؤال الثالث : بالاشتقاق الضمني ينتج أن:

$$٢ف\frac{ف}{ن} = ٢ا^{٢}ن \text{ ومنها } ع(ن) = \frac{ف}{ن} = \frac{ا^{٢}ن}{ن} = \frac{ا^{٢}ن}{\sqrt{ا^{٢}ن^{٢} + ٢٤}}$$

$$ع(٢) = \frac{ا^{٢}}{\sqrt{ا^{٢} \times ٢^{٢} + ٢٤}} = ١ \text{ ومنها } ا = ٣$$

السؤال الرابع : $ف = ا جا(٢ن + م)$ ، $ع = ٢ا جتا(٢ن + م)$ ،

$$ت = -٤ا جا(٢ن + م) = -٤ف$$

السؤال الخامس : نفرض نقطة التماس (س، ص) ، لاحظ ان النقطة المعطاة خارجة عن منحنى العلاقة

$$٨س + ٢ص ص' = ٠، \text{ ومنها } ص' = \frac{-٨س}{٢ص} = \frac{ص}{س + ٢}$$

$$\text{ومنها } ص^{٢} = -٤س^{٢} - ٨س = ٤ - ٤س^{٢}$$

$$س = -\frac{١}{٢}، ص = \pm\sqrt{٣} \quad ، \text{ نقط التماس هي } (-\frac{١}{٢}، \sqrt{٣})، (-\frac{١}{٢}، -\sqrt{٣})$$

السؤال السادس: $هـ^{س} + هـ^{ص} ص' = -هـ^{-س} - هـ^{-ص} ص'$

عند النقطة $(-١، ١)$ يكون $\frac{١}{هـ} + هـ ص' = -هـ - هـ^{-١} ص'$

بالتبسيط ينتج أن : $ص' = -١$

السؤال السابع : $س^{٢} = لـو_{هـ} س + لـو_{هـ} ص$ بالاشتقاق ينتج أن:

$$٢س = \frac{١}{س} + \frac{ص'}{ص} \text{ ومنها } ٢ = \frac{١}{١} + \frac{ص'}{هـ}، ص' = هـ$$

مكتبة الملتقى التربوي

تمارين عامة (الوحدة الاولى) صفحة ٥٤

السؤال الأول :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
د	أ	ب	أ	ج	د	ج	د	د	ج	ا	ب	ب	د

الأسئلة المقالية:

السؤال الثاني : متوسط التغير للاقتران ص = $\frac{ن(١)-ن(٠)}{١-٠} = ٢هـ^{٠} - هـ^{٠} = ١$

السؤال الثالث : $\lim_{س\to١} \frac{ن(س^{٢}+٢س-١)-ن(٢)}{س^{٢}-١}$

$= \lim_{س\to١} \frac{(٢س+٢)ن'(س^{٢}+٢س-١)}{٢س} = \lim_{س\to١} \frac{(س+١)ن'(س^{٢}+٢س-١)}{س} = ٢ن'(٢) = -٢$

يمكن الحل باستخدام الفرض والقسمة .

السؤال الرابع: أ) $\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{٤س}-١}{ظاس}$ ، بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{٤س}-١}{ظاس} = \lim_{س\to٠} \frac{٤هـ^{٤س}}{قا^{٢}س} = ٤$

ب) $\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢س}$ بالتعويض داخل النهاية يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$\lim_{س\to٠} \frac{هـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢س} = \lim_{س\to٠} \frac{٢سهـ^{س^{٢}}-هـ^{س}}{٢} = \frac{٠-١}{٢} = -\frac{١}{٢}$

ج) $\lim_{س\to٠} \frac{جا٢س-جاس}{٢س}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب ÷ وبالتالي:

$\lim_{س\to٠} \frac{جا٢س-جاس}{٢س} = \lim_{س\to٠} \frac{٢جتا٢س-جتاس}{٢} = \frac{٢-١}{٢} = \frac{١}{٢}$

د) $\lim_{س\to 0} \frac{١-\text{جتاس}}{س\ \text{جاس}}$ بالتعويض المباشر يكون الجواب $\frac{٠}{٠}$ وبالتالي:

$$\lim_{س\to 0} \frac{١-\text{جتاس}}{س\ \text{جاس}} = \lim_{س\to 0} \frac{\text{جاس}}{\text{جاس} + س\ \text{جتاس}}$$ وبالتعويض المباشر ينتج أيضا $\frac{٠}{٠}$ ونكمل تطبيق لوبيتال

$$\lim_{س\to 0} \frac{١-\text{جتاس}}{س\ \text{جاس}} = \lim_{س\to 0} \frac{\text{جاس}}{\text{جاس} + س\ \text{جتاس}} = \lim_{س\to 0} \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس} + \text{جتاس} - س\ \text{جاس}} = \frac{١}{٢}$$

السؤال الخامس :

أ) $ن'(١) = \lim_{س\to ١} \frac{(س+١)\sqrt{س}-٢}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{(س+١)\sqrt{س}-٢\sqrt{س}+٢\sqrt{س}-٢}{س-١}$

بالاضافة والطرح

$$ن'(١) = \lim_{س\to ١} \frac{(س-١)\sqrt{س}+٢(\sqrt{س}-١)}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to ١} \sqrt{س}+٢ \quad \lim_{س\to ١} \frac{\sqrt{س}-١}{س-١} = ١+٢\times\frac{١}{٢} = ٢$$ يمكن استخدام لوبيتال في ايجاد النهاية

ب) $ن'(١) = \lim_{س\to ١} \frac{\sqrt[٣]{٢س-١}-١}{س-١}$ بفرض ص $= \sqrt[٣]{٢س-١}$

$$ن'(١) = \lim_{ص\to ١} \frac{ص-١}{\frac{ص^٣+١}{٢}-١} = ٢\lim_{ص\to ١} \frac{ص-١}{ص^٣+١-٢} = ٢\lim_{ص\to ١} \frac{١}{ص^٢+ص+١} = \frac{٢}{٣}$$

السؤال السادس: متوسط التغير في الاقتران هـ(س)

$$= \frac{هـ(٣)-هـ(٠)}{٣} = \frac{٩+ن(٢)-ن(٠)}{٣} = \frac{٦+٩}{٣} = ٥$$

السؤال السابع : $\lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-٢}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{ن(س)-ن(١)}{س-١} = ن'(١) = ٣$ ، $ن(١) = ٢$ لأن

ق(س) متصلاً عند س = ١

$$\lim_{س\to ١} \frac{س^٣ ن(س)-ن(١)}{س-١} = \lim_{س\to ١} \frac{س^٣ ن'(س)+٣س^٢ ن(س)}{١}$$

$$= ن'(١)+٣ن(١) = ٣+٣\times٢ = ٩$$

السؤال الثامن : نفرض أن زمن وصول كرة نزار $ن$ وزمن وصول كرة أحمد $ن+١$

$ف_١(ن+١) = ف_٢(ن)$ ومنها $٥(ن+١)^٢ = ٥ن^٢+١٥ن$

ن = ١ زمن وصول كرة نزار

سرعة ارتطام كرة نزار = ف ´ (١) = ١٥ + ١٠ × ١ = ٢٥ م/ ث

السؤال التاسع : ق´(س) = ٤ جتاس ، هـ´(س) = $\frac{٣ - ٣س^{٢}}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

(هـ ∘ ق)´($\frac{\pi}{٦}$) = هـ´(ق($\frac{\pi}{٦}$)) × ق´($\frac{\pi}{٦}$) = هـ´($\frac{١}{٢}$) × ($\frac{٣}{٢}$) = ٠

ومنها

هـ´($\frac{١}{٢}$) = ٠ ومنها هـ´($\frac{١}{٢}$) = ٣ − ٣($\frac{١}{٢}$)^{٢} = ٠ ومنها ٤ = ± ٢

السؤال العاشر : لاحظ أن: ق(س) منفصل عدما س= ١ ، س=٢

$$ق´(س) = \begin{cases} ٢س ، & س \in [١، ٢[\\ ٢س ، & س \in [٠، ١] \\ \frac{-٢}{(س+١)^{٢}} ، & س \in]٢، \infty[\end{cases}$$

عند س = ٠ ، ١ ، ٢ غير موجودة .

السؤال الحادي عشر : ف = ٢(هـ ^{٢ن} − هـ $^{-٢ن}$)

ع = ٢(٢هـ ^{٢ن} + ٢هـ $^{-٢ن}$) ، ت = ٤(٢هـ ^{٢ن} − ٢هـ $^{-٢ن}$) = ٤ف

السؤال الثاني عشر : ق´(س) = ٣جا^{٢}س جتاس + ٣جتا^{٢}س جاس

ق´´(س) = −٣جا^{٣}س + ٦جاس جتا^{٢}س + ٣جتا^{٣}س − ٦جتا س جا^{٢}س

ق´´($\frac{\pi}{٤}$) = −٣جا^{٣}$\frac{\pi}{٤}$ + ٦جا$\frac{\pi}{٤}$ جتا^{٢}$\frac{\pi}{٤}$ + ٣جتا^{٣}$\frac{\pi}{٤}$ − ٦جتا$\frac{\pi}{٤}$ جا^{٢}$\frac{\pi}{٤}$

ق´´($\frac{\pi}{٤}$) = −٣ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ + ٦ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ + ٣ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ − ٦ × $\frac{١}{\sqrt{٢}^{٣}}$ = ٠

السؤال الثالث عشر : أ) ق´(س) = ٣(س − ٢)^{٢}(٣ + ٢س)^{٤} + ٨(س − ٢)^{٣}(٣ + ٢س)^{٣}

ق´(س) = (س − ٢)^{٢}(٣ + ٢س)^{٣}(٨(س − ٢) + ٣(٣ + ٢س)) = ٠

ق´(س) = (س − ٢)^{٢}(٣ + ٢س)^{٣}(١٤س − ٧) = ٠

س = ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٣}{٢}$ ، س = $\frac{-٣}{٢}$ تهمل

ب) ق´(س) = جتاس(١ + جتاس) − جا^{٢}س = ٢جتا^{٢}س + جتاس − ١ = ٠

وبحل المعادلة ينتج أن القيمة المطلوبة هي س = $\frac{\pi}{٣}$

السؤال الرابع عشر : أ) $\frac{ص}{س} = \frac{(هـ^{٦س} + ٦س هـ^{٦س})جا س - س هـ^{٦س} جتا س}{جا^{٢} س}$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{(١ + لـو_{هـ} س)جتا س + س جا س لـو_{هـ} س}{جتا^{٢} س}$

السؤال الخامس عشر : $ف(ن) = ١(جتا٢ن + جا٢ن) = ٣$

$ع = ف'(ن) = ١(٢جتا٢ن - ٢جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = ١(-٤جتا٢ن - ٤جا٢ن)$

$ت = ف''(ن) = -٤١(جتا٢ن + جا٢ن) = -٤ \times ٣ = -١٢$ م/ ث٢

السؤال السادس عشر : $ن'(س) = \frac{٢ - \frac{٥}{٢}}{١ - ٢} = \frac{١}{٢}$

$= ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $\frac{١}{٢} = \frac{١}{س^{٢}}$ ، $س = \pm \sqrt{٢}$

النقاط هي $(\sqrt{٢}، ن(\sqrt{٢}))$ ، $(-\sqrt{٢}، ن(-\sqrt{٢}))$.

حلول الوحدة الثانية/ تطبيقات التفاضل

تمارين (٢-١) صفحة ٦٥

السؤال الأول :

أ) $ن(س) = \sqrt{٤س - س^{٢}}$ على الفترة $[٠، ٤]$

نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[٠، ٤]$

ق(س) متصل على $[٠، ٤]$

$ن'(س) = \frac{١}{٢}(٤س - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (٤ - ٢س)$ ، $س \in]٠، ٤[$

$\leftarrow ن'(س) = \frac{٢ - س}{\sqrt{٤س - س^{٢}}}$ ، ق قابل للاشتقاق في $]٠، ٤[$

ق(٠)= صفر ، ق(٤) = صفر $\Leftarrow$ ق(٠) = ق(٤)

تحققت شروط نظرية رول ومنها يوجد جـ ∈]٠، ٤[: ن′(جـ) = ٠

$$\frac{٢-جـ}{\sqrt{٤جـ-جـ^{٢}}} = ٠ \Leftarrow جـ = ٢ \in]٠، ٤[$$

ب) ن(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ على الفترة $[-١، ٣]$

الحل: ن(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ ، س ∈ $[-١، ٣]$

ق(س) متصل على $[-١، ٣]$ وقابل للاشتقاق على $]-١، ٣[$ لأنه كثير حدود

ق(−١) = ق(٣) = صفر

إذن تحققت شروط نظرية رول على ق(س) في $[-١، ٣]$ ومنها يوجد جـ ∈ $]-١، ٣[$: ن′(جـ) = ٠

ن′(س) = ٢س − ٢

$$جـ = ١ \in]-١، ٣[\Leftarrow ٠ = ٢جـ + ٢-$$

ج) ن(س) = لـو$_{هـ}$ $\left(س + \frac{١}{س}\right)$ ، س ∈ $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

ق(س) متصل في $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$ لانه اقتران لوغريتمي والفترة ضمن مجاله

$$ن'(س) = \frac{١}{س + \frac{١}{س}} \times \left(١ + \frac{١-}{س^{٢}}\right) ، \quad س \in \left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$$

ق(س) قابل للاشتقاق في الفترة $\left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$

$$ن\left(\frac{١}{٢}\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{١}{٢} + ٢\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{٥}{٢}\right)$$

$$ن(٢) = لـو_{هـ}\left(٢ + \frac{١}{٢}\right) = لـو_{هـ}\left(\frac{٥}{٢}\right)$$

إذن $ن\left(\frac{١}{٢}\right) = ن(٢)$

تحققت شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) في الفترة $\left[\frac{١}{٢}، ٢\right]$

إذن E جـ ∈ $\left]\frac{١}{٢}، ٢\right[$: ن′(جـ) = ٠

$$\frac{1}{\frac{1}{جـ}+1}\times\left(\frac{-1}{جـ^{2}}+1\right)=0$$

$\left(\frac{جـ^{2}-1}{جـ^{2}}\right)=0$ وعندما $\left(\frac{جـ^{2}-1}{(جـ)^{2}}\right)=0$ إذن $جـ^{2}-1=0$ صفر ومنها جـ=1 $\in\left]\frac{1}{2}، 2\right[$

لاحظ ان جـ = −1 $\notin\left]\frac{1}{2}، 2\right[$ (تهمل)

د) $ن(س)=جا2س+2جاس$ ، $س\in[0، \frac{\pi}{2}]$

الحل: نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في $[0، \frac{\pi}{2}]$ ، ق(س) متصل على $[0، \frac{\pi}{2}]$

ق(س) قابل للاشتقاق على الفترة $]0، \frac{\pi}{2}[$ بحيث $ن'(س)=2جتا2س+2جتاس$

ق(0) = صفر ، $ن(\frac{\pi}{2})=2 \Leftarrow$ ق(0) $\neq ن(\frac{\pi}{2})$

إذن لم تتحقق شروط نظرية رول $\Leftarrow$ قد يوجد ج

$ن'(جـ)=$ صفر $\Leftarrow 2جتا2جـ+2جتاجـ=0$

$جتا2جـ+جتاجـ=0 \Leftarrow 2جتا^{2}جـ+جتاجـ-1=0$

$جـ=\frac{\pi}{3} \Leftarrow جتاجـ=\frac{1}{2} \Leftarrow (2جتاجـ-1)(جتاجـ+1)=0 \Leftarrow$ $\in]0، \frac{\pi}{2}[$

او $(جتا\ جـ+1)=0 \Leftarrow جتاجـ=-1 \Leftarrow جـ=\pi$ (تهمل)

السؤال الثاني:

أ) $ن(س)=س^{3}-س-1$ ، $س\in[-1، 2]$

ن(س) متصل على $[-1، 2]$ ، كثير حدود

$ن'(س)=3س^{2}-1$ ، $س\in]-1، 2[$ ، ن(س) قابل للاشتقاق على الفترة

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في الفترة $[-1، 2]$

$\Leftarrow E جـ\in]-1، 2[: ن'(جـ)=\frac{ن(2)-ن(-1)}{2-(-1)}$

$$٣جـ^{٢}-١=\frac{(-١)-٥}{٣}=\frac{٦}{٣}=٢$$

$$٣جـ^{٢}=٣\leftarrow جـ^{٢}=١\leftarrow جـ=١\ \text{ه}\ ]-١،٢[\ ،\ جـ=-١\ \text{(تهمل)}$$

ب) $ن(س)=\frac{٤}{س+٢}$ ، $س\ \text{ه}\ ]-١،٢]$

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $]-١،٢]$

ق(س) متصل على $]-١،٢]$

$$ن'(س)=\frac{٤\times-١}{(س+٢)^{٢}}\ ،\ س\ \text{ه}\ ]-١،٢[$$

ق قابل للاشتقاق في $]-١،٢[$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة $\Leftarrow E\ جـ\ \text{ه}\ ]-١،٢[$ بحيث

$$ن'(جـ)=\frac{ن(٢)-ن(-١)}{٢-(-١)}=\frac{-٤}{(جـ+٢)^{٢}}=\frac{١-٤}{٣}$$

$$\frac{-٤}{(جـ+٢)^{٢}}=\frac{-٣}{٣}\Leftarrow -١=\frac{-٤}{(جـ+٢)^{٢}}\quad \text{ومنها}\quad ٤=(جـ+٢)^{٢}$$

$جـ+٢=\pm ٢\Leftarrow$ جـ=صفر أو جـ= -٤ ترفض ومنها قيمة ج المطلوبة هي الصفر

ج) $ن(س)=\sqrt{س}+٢س$ ، $س\ \text{ه}\ [٤،٩]$

الحل : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[٤،٩]$

ق(س) متصل في $[٤،٩]$ ، وقابل للاشتقاق في $]٤،٩[$حيث

$$ن'(س)=\frac{١}{٢\sqrt{س}}+٢$$

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في $[٤،٩]$

$$\Leftarrow E\ جـ\ \text{ه}\ ]٤،٩[: ن'(جـ)=\frac{ن(٩)-ن(٤)}{٩-٤}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}}+٢=\frac{٢١-١٠}{٥}$$

$$\frac{١}{٢\sqrt{جـ}}+٢=\frac{١١}{٥}\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ}}=\frac{١}{٥}$$

$$\Leftarrow ٢\sqrt{جـ}=٥\Leftarrow جـ=\frac{٢٥}{٤}\ \text{ه}\ ]٤،٩[$$

السؤال الثالث:

$$ن(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ٢س & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^{٣} - ب س + ١٢ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$$ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

إذن ق(س) متصل على [٠،٣] وقابل للاشتقاق على]٠،٣[

ق متصل على[٠،٣] $\Leftarrow$ نهـــا $_{س \to ٢^{-}}$ ن(س) = نهـــا $_{س \to ٢^{+}}$ ن(س)

$\Leftarrow$ ٤أ + ٤ = ٨ − ٢ب + ١٢ $\Leftarrow$ ٤أ + ٢ب = ١٦

٢أ + ب = ٨ -------

$$ن'(س) = \begin{cases} ٢أس + ٢ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ ٣س^{٢} - ب & ، ٢ < س < ٣ \end{cases}$$

ن'(٢$^{+}$) = ن'(٢$^{-}$) $\Leftarrow$ ٤أ + ٢ = ١٢ − ب (١)

٤أ + ب = ١٠ -------- (٢) وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

٤أ + ب = ١٠

٢أ + ب = ٨

أ = ٢ $\Leftarrow$ أ = ١ $\Leftarrow$ ٢ × ١ + ب = ٨ $\Leftarrow$ ب = ٦

لإيجاد قيمة جـ : $ن'(جـ) = \frac{ن(٣) - ن(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٢١ - ٠}{٣} = ٧$

عندما ٠ < جـ ≤ ٢ ، ٢جـ + ٢ = ٧ $\Leftarrow$ ٢جـ = ٥ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{٥}{٢}$ ترفض

عندما ٢ < جـ < ٣ ، ٣جـ^{٢} − ٦ = ٧ $\Leftarrow$ ٣جـ^{٢} = ١٣ $\Leftarrow$ جـ = $\sqrt{\frac{١٣}{٣}}$ ∈]٠،٣[

السؤال الرابع:

ن(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ [أ،ب] ، س > ٠ أثبت باستخدام نظرية القيم المتوسطة ان جـ^{٢} = أب

البرهان : نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [أ،ب]

ق(س) متصل لأن س > ٠ ، ∀ س ∈ [أ،ب]

ث′(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$ ← ث قابل للاشتقاق على]أ،ب[لأن س > ٠

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة ومنها ∃ جـ ∈]أ،ب[بحيث ث′(جـ) = $\frac{ث(ب)-ث(أ)}{ب-أ}$

$$\frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{\frac{١}{ب}-\frac{١}{أ}}{ب-أ} \Leftarrow \frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{أ-ب}{أب(ب-أ)}$$

$$\frac{-١}{جـ^{٢}} = \frac{-١}{أب} \Leftarrow جـ^{٢} = أب \text{ وهو المطلوب}$$

السؤال الخامس :

البرهان : نبحث في شروط نظرية رول على ق(س) في [٠، π]

ق(س) متصل على [٠، π] وقابل للاشتقاق على]٠، π[بحيث ث′(س) = ٨جتا٢س ، س ∈]٠، π[

ق(٠) = صفر ، ث(π) = صفر ⇐ ث(٠) = ث(π)

إذن تحققت شروط نظرية رول ⇐ ∃ جـ ∈]٠، π[بحيث ث′(جـ) = صفر وهذا يعني ان للاقتران ق(س) مماساً أفقياً واحداً على الاقل في [٠، π] عند س = جـ

لإيجاد نقط التماس:

ث′(جـ) = ٠ ⇐ ٨جتا٢جـ = ٠ ⇐ جتا٢جـ = ٠

٢جـ = $\frac{\pi}{٢}$ ← جـ = $\frac{\pi}{٤}$ او ٢جـ = ٣ $\frac{\pi}{٢}$ ← جـ = $\frac{٣\pi}{٤}$

لأن القيم الأخرى جـ = ٠ ، جـ = π ترفض

إذن نقط التماس هي $\left(\frac{\pi}{٤}، ٤\right)$ ، $\left(\frac{٣\pi}{٤}، -٤\right)$

السؤال السادس:

ع(س) = ث ∘ هـ(س) ، س ∈ [أ،ب]، ث، هـ متصلين على الفترة [أ،ب] وقابلين للاشتقاق على الفترة]أ،ب[

هـ(أ) = ب ، هـ(ب) = أ أثبت أنه ∃ جـ ∈]أ،ب[: ع′(جـ) = ث′(جـ)(ب − أ) = ع(ب) − ع(أ)

البرهان:

نبحث في شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [أ،ب]

ق(س) متصل على [أ،ب] وقابل للاشتقاق على]أ،ب[من المعطيات

تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة

$$\Leftarrow \text{E جـ} \ni]أ،ب[: ن´(جـ) = \frac{ن(أ) - ن(ب)}{أ - ب}$$

لكن ب = هـ(أ) ، أ = هـ(ب) إذن $ن'(جـ) = \frac{ن(هـ(أ)) - ن(هـ(ب))}{أ - ب}$

$$ن'(جـ) = \frac{ع(أ) - ع(ب)}{أ - ب}$$

$ن'(جـ)(ب - أ) = ع(أ) - ع(ب)$ وهو المطلوب

السؤال السابع:

البرهان : $ن(س) = س جتاس ، س \ni \left[0، \frac{\pi}{2}\right]$

ن(س)متصل على $\left[0، \frac{\pi}{2}\right]$ وقابل للاشتقاق على $\left]0، \frac{\pi}{2}\right[$

ق(٠) =صفر ، $ن(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \times ٠ = ٠ \Leftarrow ن(٠) = ن(\frac{\pi}{2})$

إذن تحققت شروط نظرية رول ومنها $\Leftarrow \text{E جـ} \ni \left]0، \frac{\pi}{2}\right[: ن'(جـ) = ٠$

$ن'(س) = س \times -$ جاس + جتاس $\times ١$

$ن'(س) =$ جتاس – س جاس ومنه $ن'(جـ) =$ جتاجـ – جـ جاجـ

وبالتالي ظتا جـ = جـ القيمة التي تعينها النظرية هي عندما ظتا س = س

تمارين (٢-٢) صفحة ٧٠

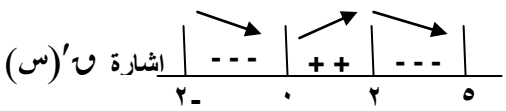
السؤال الاول:

أ) ق(س)= ٣س^{٢} - س^{٣} ، س ∋ [-٢، ٥]

الحل : ق(س) متصل على [-٢، ٥]

$ن'(س) = ٦س - ٣س^{٢}$

صفر=٣س (٢- س)



س= صفر أو س =٢

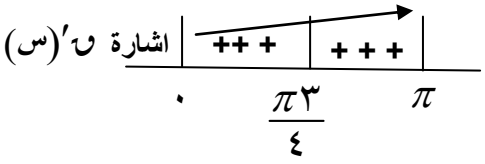
من اشارة ن ´(س) فإن ق(س) متناقص في [-٢، ٠] ، [٢، ٥] ومتزايد في [٠، ٢]

ب) ن ´(س) = س+جا٢س ، س ∈ [٠، π]

الحل: ن(س) متصل في [٠، π]

ن ´(س) = ١ + ٢جاس جتاس = ١+جا٢س ، س ∈]٠، π[

$-١ = جا٢س \Leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤}$



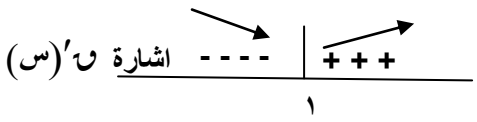
من اشارة ن ´(س)فإن

ن(س) متزايد في [٠، π]

ج) ن(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$

الحل: ن(س) = $\sqrt{(س-١)^{٢}}$ = |س − ١|، س ∈ ع

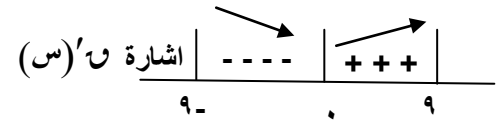
ن(س) = { س − ١ ، س ≤ ١ ; −س + ١ ، س > ١ } متصل على ح



ن ´(س) = { −١ ، س > ١ ; ١ ، س < ١ }

من اشارة ن ´(س) فإن ن(س) متناقص في]−∞، ١] ومتزايد في [١، ∞[

د) ن ´(س) = $\frac{س}{س^{٢} + ٩}$، س ∈]−٩، ٩[

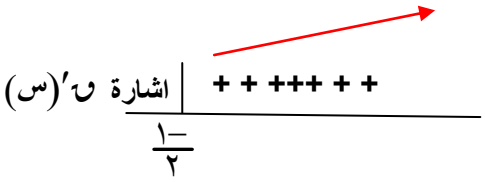


الحل: ن ´(س) = ٠ ← س = ٠

ن(س) متناقص في]−٩، ٠] ومتزايد في [٠، ٩[

السؤال الثاني:

الحل: ن ´(س) = $\frac{١}{س+١} - ٢$



ن ´(س) = $\frac{١}{س+١} - ٢ = ٠$

ومنها س = $\frac{-١}{٢}$

ومنها ق متزايد على الفترة [$\frac{-١}{٢}$، ∞ [وبالتالي متزايد على ح$^{+}$

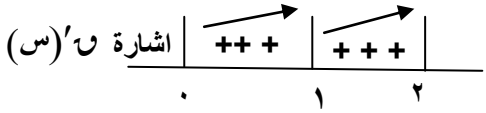
السؤال الثالث:

$$ن(س)=\begin{cases} س^{٣} & ، ٠\leq س<١ \\ س^{٢}-٢ & ، ١\leq س\leq ٢ \end{cases}$$

لاحظ ان ق غير متصل عند س=١ لان

$نهـــا_{س\leftarrow ١^{-}} ن(س)=١$ ، $نهـــا_{س\leftarrow ١^{+}} ن(س)=١-٢=-١$ ، النهاية غير موجودة

وبالتالي ن ´(١) غير موجودة



$$ن´(س)=\begin{cases} ٣س^{٢} & ، ٠<س<١ \\ ٢س & ، ١<س<٢ \end{cases}$$

ن ´(س) ≠ ٠ لجميع قيم س في المجال ، ن ´(س) موجبة دائما

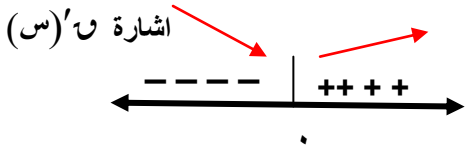
ن(س) متزايد في [٠،١] ، و متزايد في [١،٢]

السؤال الرابع :

ن′(س) = هـ(س) ، هـ′(س) = −ن(س) ، ك(س) = ن^٢(س) + هـ^٢(س) + س^٢

الحل : ك′(س) = ٢ن(س)ن′(س) + ٢هـ(س)هـ′(س) + ٢س

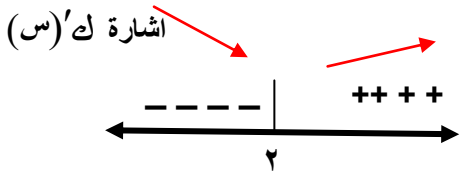
= ٢ن(س) × هـ(س) − ٢هـ(س) × ن(س) + ٢س = ٠ + ٢س



ك′(س) = ٢س

ك(س) متزايد في [٠،∞[ك(س) متناقص في]−∞،٠]

السؤال الخامس : ك(س) = هـ(س^٢ − ٤س)



ك متصل على ح لانه كثير حدود

ك ´(س) = هـ ´(س^٢ − ٤س) × (٢س − ٤)

ك ´(س) = ٠ ⇐ (٢س − ٤) = ٠ ⇐ س = ٢ لان ن′(س) ≠ ٠ كون ق متزايد

ك(س) متزايد [٢،∞[، ك(س) متناقص عندما]−∞،٢]

السؤال السادس :

الحل : $ن(س)، هـ(س)$ كثيرا حدود في $[٤،٠]$ ← متصلين في $[٤،٠]$ وقابلين للاشتقاق في $]٤،٠[$

$ن(س)$ متناقص في مجاله اذن $ن'(س) < ٠ ،\forall س \in]٤،٠[$

يقع منحنى $ن(س)$ في الربع الرابع اذن $ن(س) < ٠ ،\forall س \in [٤،٠]$

$هـ(س)$ متزايد في مجاله اذن $هـ'(س) > ٠ ،\forall س \in]٤،٠[$

يقع منحنى $هـ(س)$ في الربع الاول اذن $هـ(س) > ٠ ،\forall س \in [٤،٠]$

لكن $(ن(س) \times هـ(س))' = ن(س) \times هـ'(س) + ن'(س) \times هـ(س)$

اشارة $(ن(س) \times هـ(س))' =$ **سالب × موجب + موجب × سالب = سالب**

اذن $ن(س) \times هـ(س)$ **متناقص في** $[٤،٠]$

السؤال السابع :

$ن(س) = جاس + جتاس \ ، \ س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right]$

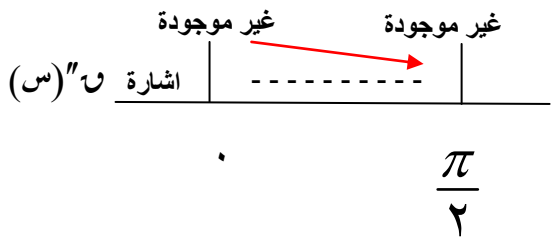
$ن'(س) = جتاس - جاس \ ، \ س \in \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

ولمعرفة مجالات التزايد والتناقص للاقتران $ن'(س)$ **نبحث في اشارة** $ن''(س)$

$ن''(س) = -جاس - جتاس = ٠$ أي أن

$ظاس = -١ \leftarrow س = \frac{٣\pi}{٤} \notin \left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$

$ن'(س)$ **متناقص في** $\left[٠ ، \frac{\pi}{٢}\right[$



تمارين (٢-٣) القيم القصوى صفحة ٨٠

السؤال الاول :

أ) $ن(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - س^{٢} + \frac{١}{٣}$ ، $س \in [-٢،٣]$

الحل: $ن'(س) = س^{٢} - ٢س$ ، $س \in [-٢،٣]$

صفر $= س(س-٢) \leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

النقاط الحرجة هي

$(-٢،ن(-٢))$ ، $(٣،ن(٣))$ ، $(٠،ن(٠))$ ، $(٢،ن(٢))$

$(-٢، -\frac{١٩}{٣})$ ، $(٣، \frac{١}{٣})$ ، $(٠، \frac{١}{٣})$ ، $(-٢، ١)$

ب) $ن(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ ، $س \in [-٨،٨]$

$ن'(س) = \frac{٢}{٣}س^{-\frac{١}{٣}}$ ، $س \neq ٠ \leftarrow س \in [-٨، ٨] - \{٠\}$

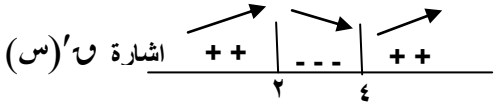
$ن'(س) = \frac{٢}{٣ \times \sqrt[٣]{س}}$ ، $س \neq ٠$

النقط الحرجة هي $(٠،٠)$ ، $(-٨، ٤)$ ، $(٨، ٤)$

السؤال الثاني :

أ) $ن(س) = س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٤س$ ، $س \in ح$

الحل: $ن'(س) = ٣س^{٢} - ١٨س + ٢٤$



صفر $= ٣(س^{٢} - ٦س + ٨) = ٣(س-٤)(س-٢)$

أي أن : س=٤ أو س=٢

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

ق(٢)= ٨-٩×٤+٢٤×٢=٨-٣٦+٤٨=٢٠ قيمة عظمى محلية

ق(٤)=٦٤-٩×١٦+٢٤×٤=٦٤-١٤٤+٩٦=١٦ قيمة صغرى محلية

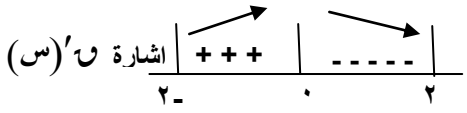
ب) $ن(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ المجال $٤ - س^{٢} \geq ٠ \leftarrow س \in [-٢، ٢]$

$$ن'(س) = \frac{١}{٢}(٤ - س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times -٢س = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}، س \in]-٢، ٢[$$

$ن'(س) =$صفر $\leftarrow$ س= صفر

$ن(-٢) = ن(٢) =$ صفر قيمة صغرى محلية

$ن(٠) = ٢$ قيمة عظمى محلية



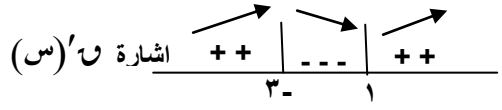
ج) $ن(س) = (س^{٢} - ٣)هـ^{س}$ ، $س \in ع$

الحل: $ن'(س) = (س^{٢} - ٣)هـ^{س} + ٢س هـ^{س}$ ، $س \in ع$

$$٠ = (س^{٢} - ٣)هـ^{س} + ٢س هـ^{س} \leftarrow ٠ = هـ^{س}(س^{٢} + ٢س - ٣)$$

$$\leftarrow ٠ = هـ^{س}(س + ٣)(س - ١) \leftarrow س = -٣ ، س = ١$$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي



$ن(-٣) = ٦هـ^{-٣}$ قيمة عظمى محلية

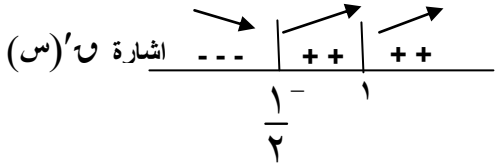
$ن(١) = -٢هـ$ قيمة صغرى محلية

د) $ن(س) = \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$

الحل: $ن(س) = س^{٢} + س + ١$ ، $س \neq ١$

$ن'(س) = ٢س + ١$

صفر= $ن'(س) \leftarrow س = -\frac{١}{٢}$

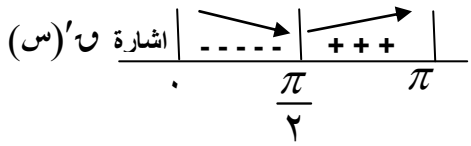


القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي

$ن(-\frac{١}{٢}) = \frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} + ١ = \frac{٣}{٤}$ قيمة صغرى محلية

هـ) $ن(س) = جتا^{٢}س - جا^{٢}س$ ، $س \in [٠، \pi]$

الحل: $ن(س) = جتا٢س$ ، $س \in [٠، \pi]$



$ن'(س) = -جا٢س \times ٢ = -٢جا٢س$ ، $س \in]٠، \pi[$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow -٢جا٢س = ٠ \Leftarrow ٢س = ٠ \leftarrow س = ٠ \notin]٠، \pi[$

$٢س = \pi \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ أو $٢س = ٢\pi \leftarrow س = \pi \notin]٠، \pi[$

القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) هي :

ق(٠) = ١ قيمة عظمى محلية

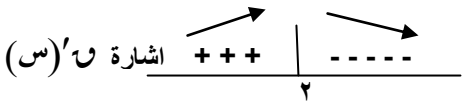
$ن(\pi) = ١$ قيمة عظمى محلية

$ن(\frac{\pi}{٢}) = -١$ قيمة صغرى محلية

و) $ن(س) = هـ^{-(س-٢)^٢}$ ، $س \in ع$

الحل: $ن'(س) = هـ^{-(س-٢)^٢} \times -٢(س-٢) \times ١ = -٢(س-٢)هـ^{-(س-٢)^٢}$

$ن'(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$



ق(٢) = ١ قيمة عظمى محلية

السؤال الثالث:

أ) $ن(س) = \begin{cases} س^٣ & ، \ ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^٢ + ٤ & ، \ ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$ ، $س \in [٠، ٣]$

الحل: $\lim_{س \to ٢^-} ن(س) = ن(٢) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٢^+} ن(س) = ٨$

إذن ق متصل في [٠، ٣]

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ، \ ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، \ ٢ < س < ٣ \end{cases}$

$ن'(س)$ غير موجودة عند س= ٠ ، ٢ ، ٣

$ن'(س)$ = ٠

عندما $٠ < س < ٢ \Leftarrow ٣س^٢ = ٠ \leftarrow س = ٠$ ترفض

عندما $٢ < س < ٣ \leftarrow ٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$ ترفض

القيم القصوى المحلية ق(٠) = صفر ، ق(٢) = ٨ ، ق(٣) = ١٣

ق(٠) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة) ، ق(٣)=١٣ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة)

ب) $ن(س) = هـ^{س} - هـ س$ ، $س \in [0، 3]$

الحل: ق متصل (حاصل طرح متصلين)

$ن'(س) = هـ^{س} - هـ$ ، $س \in]0، 3[\rightarrow ن' = 0 \Leftarrow هـ^{س} - هـ \Leftarrow س = 1$

القيم القصوى المحلية ق(٠) = ١ ، ق(١) = ٠ ، ق(٣) = $هـ^{3} - 3هـ$

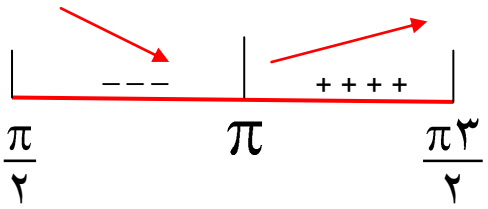
ق(١) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة)

ق(٣)= $هـ^{3} - 3هـ$ قيمة عظمى مطلقة (اكبر قيمة) حسب نظرية القيم القصوى

ج) $ه(س) = جتاس - \frac{1}{3} جتا^{3} س$ ، $س \in [\frac{\pi}{2}، \frac{3\pi}{2}]$ ، **ق متصل (حاصل طرح متصلين)**

$ه'(س) = -جاس + جتا^{2} س جاس = -جا^{3} س$

$ه'(س) = -جا^{3} س = 0 \Leftarrow جاس = 0 \Leftarrow س = \pi$



$ه(\frac{\pi}{2}) = جتا(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3} جتا^{3}(\frac{\pi}{2}) = 0$ **عظمى مطلقة**

$ه(\frac{3\pi}{2}) = جتا(\frac{3\pi}{2}) - \frac{1}{3} جتا^{3}(\frac{3\pi}{2}) = 0$ **عظمى مطلقة**

$ه(\pi) = جتا(\pi) - \frac{1}{3} جتا^{3}(\pi) = -\frac{2}{3}$ **صغرى مطلقة**

السؤال الرابع :

$ن(س) = أس^{3} + ب س^{2} + 9س + 1$ ، ق(١) عظمى محلية ، ق(٣) صغرى محلية

الحل: للاقتران نقط حرجة عند س=١ ، س=٣ $\Leftarrow$ $ن'(١) = ن'(٣) = 0$

$ن'(س) = 3أس^{2} + 2ب س + 9$

$ن'(١) = 3أ + 2ب + 9 \Leftarrow 3أ + 2ب + 9 = 0$ صفر ---------- (١)

$ن'(٣) = 3 \times 3أ + 2ب \times 3 + 9$

$27أ + 6ب + 9 = 0$

(٢)

$٠ = ١٩ + ٢ب + ٣$ ---------- وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على:

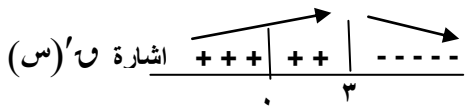
$-١٦ + ٦ = ٠ \longleftarrow ١ = أ \Longleftarrow ب = -٦$

السؤال الخامس:

الحل: $ن(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} - ٢٩$ متصل على ح لانه كثير حدود

$ن'(س) = ٢ ١ س^{٢} - ٤س^{٣}$

صفر $= ٤س^{٢}(٣ - س) \longleftarrow س = ٠ ، س = ٣$



ق(٣) قيمة عظمى محلية وهي مطلقة لانها وحيدة

ق(٣) $= ٤ \times ٢٧ - ٨١ - ٢٩ = ١٠٨ - ١١٠ = -٢$

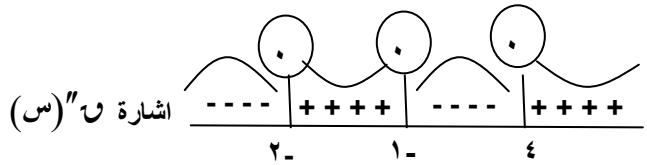
إذن $ن(س) \geq -٢ ، \forall س \in ح \Longleftarrow$ ن(س)سالب دائماً

تمارين (٢-٤) التقعر ونقط الانعطاف صفحة ٨٧

السؤال الأول :

أ) $ن''(س) = (س^{٢} - ٣س - ٤)(س + ٢)$

$٠ = (س + ١)(س - ٤)(س + ٢) \longleftarrow س = -٢ ، -١ ، ٤$



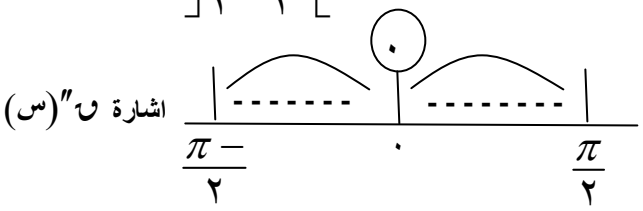
مجالات التقعر للاقتران ن(س) هي :

ن(س) مقعرا الى اعلى في $[-٢ ، -١]$ **كذلك في** $[٤ ، \infty[$ ،

ومقعرا الى اسفل في $]-\infty ، -٢]$ **كذلك في** $[-١ ، ٤]$

ب) $ن'(س) = جتاس - س ، س \in \left]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$ ، $ن''(س) = -جتاس - ١ ، س \in \left]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$

$٠ = جتاس - ١ \longleftarrow جتاس = ١ \longleftarrow س = ٠$

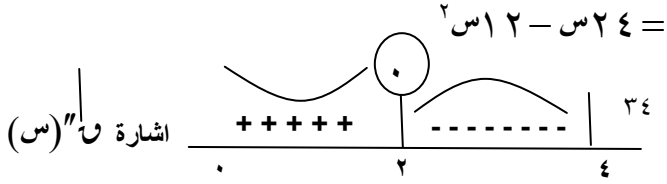


ن(س) مقعر الى اسفل في $\left]٠ ، \frac{-\pi}{٢}\right[$ **كذلك في** $\left]\frac{\pi}{٢} ، ٠\right[$

ج) $ن(س) = ٤س^{٣} - س^{٤} + س ، س \in [٠ ، ٤]$

$ن'(س) = ٢ ١ س^{٢} - ٤س^{٣} + ١ ، س \in [٠ ، ٤]$

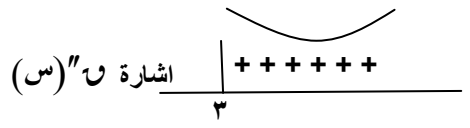
$ن''(س) = ٤ ٢ س - ٢ ١ س^{٢} ، س \in [٠ ، ٤] \longleftarrow ٤ ٢ س - ٢ ١ س^{٢} = ٠$



$\leftarrow$ س = ٢ ، س = ٠ $\notin$]٤،٠[

ن(س) مقعر الى اسفل في[٤،٢] و مقعر الى اعلى في[٢،٠]

د) ن(س) = (س − ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ ، مجال ن(س) هو س $\geq$ ٣



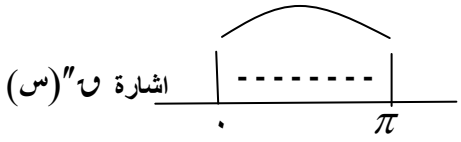
ن′(س) = $\frac{٣}{٢}$(س − ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ ، س $\in$]٣،∞[

ن″(س) = $\frac{٣}{٢}\times\frac{١}{٢}$(س − ٣) $^{\frac{-١}{٢}}$ = $\frac{٣}{٤}$(س − ٣)$^{\frac{-١}{٢}}$ ، س $\in$]٣،∞[، ن″(س) موجبة دائما

و ن″(س)$\neq$٠ ،$\forall$ س$\in$]٣،∞[ومنها ن(س) مقعر الى اعلى في[٣،∞[

هـ) ن(س) =جا$\frac{س}{٢}$ ، س $\in$ [٠،π] $\leftarrow$ ن′(س) = $\frac{١}{٢}$جتا$\frac{س}{٢}$ ، س $\in$]٠،π[

ن″(س) = $\frac{-١}{٤}$جا$\frac{س}{٢}$ ، س $\in$]٠،π[



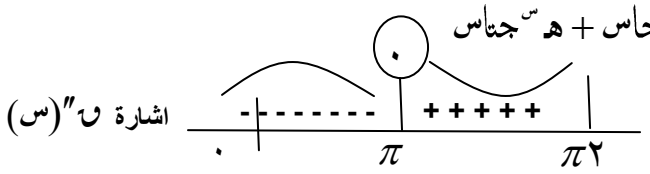
ن″(س) = ٠ $\leftarrow$ ٠ = $\frac{-١}{٤}$ جا$\frac{س}{٢}$

$\leftarrow$ $\frac{س}{٢}$= ٠ $\leftarrow$ س = ٠ او $\leftarrow$ $\frac{س}{٢}$=π $\leftarrow$ س = ٢π ترفض فيكون ن(س) مقعر الى اسفل في[٠،π]

و) ن(س) = هـ^{س}جتاس ، س $\in$ [٠،٢π] $\leftarrow$ ن′(س) = −هـ^{س}جاس + هـ^{س}جتاس ، س $\in$]٠،٢π[

ن″(س) = −هـ^{س}جتاس + − هـ^{س}جاس + − هـ^{س}جاس + هـ^{س}جتاس

= −٢هـ^{س}جاس ، س $\in$]٠، ٢π[



ن″(س) = ٠ $\leftarrow$ ٠ = −٢هـ^{س}جاس $\leftarrow$ س = π

ن(س) مقعر الى اسفل في[٠،π] و ن(س) مقعر الى اعلى في[π،٢π]

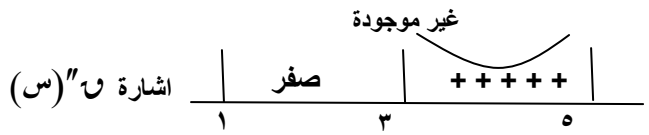
ز) ن(س) = $\begin{cases} \left[\frac{١}{٣}س - ١\right] & ١ < س \geq ٣ \\ س^{٣} & ٣ < س \geq ٥ \end{cases}$ = $\begin{cases} -١ & ، \quad ١ < س < ٣ \\ ٠ & ، \quad س = ٣ \\ س^{٣} & ، \quad ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

$\lim_{س \to -٣^-} ن(س) = -١$ ، $\lim_{س \to +٣} ن(س) = ٢٧$ ، $ن(٣) = ٠ \leftarrow$ $ن(س)$ غير متصل عند س=٣

ومنها فان $ن'(٣)$ غير موجودة

$$ن'(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < س < ٣ \\ ٣س^٢ & ، ٣ < س < ٥ \end{cases}$$

$$ن''(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < س < ٣ \\ ٦س & ، ٣ < س < ٥ \end{cases}$$



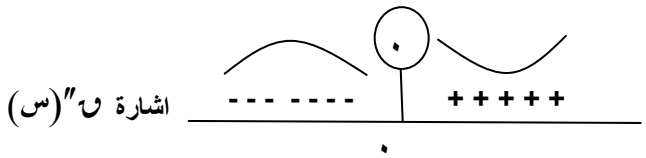
$ن''(س) = ٦س = ٠ \leftarrow س = ٠ \notin]٣،٥[$

$ن(س)$ اقتران ثابت في $[١،٣]$ ، و مقعر الى اعلى في $]٣،٥[$

السؤال الثاني : أ) $ن(س) = س^٣ + س$ متصل على ع لانه كثير حدود

$ن'(س) = ٣س^٢ + ١ \leftarrow ن''(س) = ٦س$

$ن''(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$

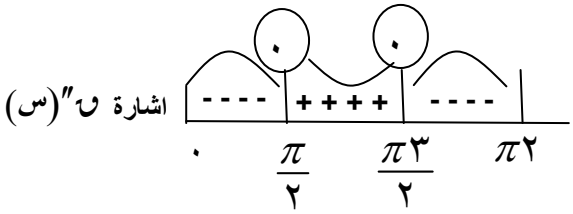


$(٠،٠) = (ن(٠)،٠)$ نقطة انعطاف لان الاقتران متصل عندها ويغير من مجال تقعره

ب) $ن(س) = جتاس$ متصل في $[٠،٢\pi]$

$ن'(س) = -جاس \leftarrow ن''(س) = -جتاس$ ، $س \in]٠،٢\pi[$

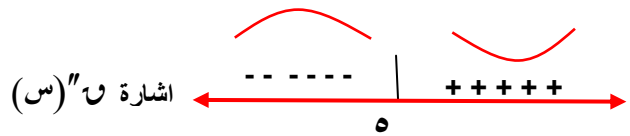
$ن''(س) = ٠ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ ، $س = \frac{\pi ٣}{٢}$



نقاط الانعطاف هي : $\left(\frac{\pi}{٢}، ن(\frac{\pi}{٢})\right) = \left(٠، \frac{\pi}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{\pi ٣}{٢}، ن(\frac{\pi ٣}{٢})\right) = \left(٠، \frac{\pi ٣}{٢}\right)$

لأن الاقتران متصل عندها ويغير من اتجاه تقعره .

ج) $ن(س) = \sqrt[٣]{٥ - س}$ ، $\leftarrow$ ، $ن'(س) = \frac{١}{٣}(٥ - س)^{\frac{-٢}{٣}}$



$$ن''(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{-٢}{٣} (٥-س)^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{(٥-س)^{٥}}}$$

$$ن''(س) \neq ٠ \quad \forall س \in ع$$

اذن يوجد نقطة انعطاف عندما س = ٥ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره وهي (٥،٠)

السؤال الثالث :

أ) $ن(س) = س^{٣} + ٦س^{٢} \leftarrow ن'(س) = ٣س^{٢} + ١٢س \leftarrow ن''(س) = ٦س + ١٢$

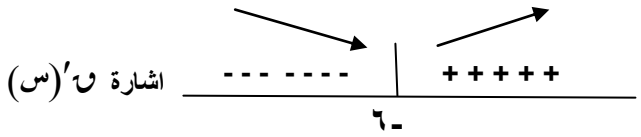
$ن'(س) = ٠ \leftarrow ٠ = ٣س(س+٤) \leftarrow س = ٠ ، س = -٤$

$ن''(٠) = ١٢ > ٠ \leftarrow ن(٠) = ٠$ **قيمة صغرى محلية**

$ن''(-٤) = -١٢ < ٠ \leftarrow ن(-٤) = ٣٢$ **قيمة عظمى محلية**

ب) $ن(س) = |س+٦| = \begin{cases} س+٦ & ، س > -٦ \\ -س-٦ & ، س \leq -٦ \end{cases}$ **متصل على ع**

$ن'(س) = \begin{cases} ١ & ، س > -٦ \\ -١ & ، س < -٦ \end{cases}$



$ن'(-٦)$ **غير موجودة اذن** $ن''(-٦)$ **غير موجودة**

فشل اختبار المشتقة الثانية ومنها فإن $ن(-٦) = ٠$ **قيمة صغرى محلية وهي صغرى مطلقة**

السؤال الرابع:

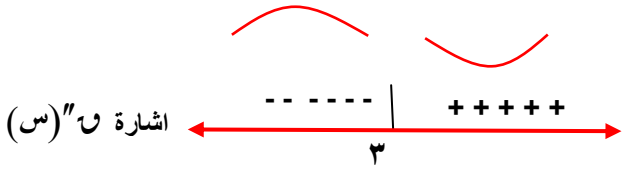
$ن(س) = أ س^{٢} + س^{٣}$ **له عند س= -١ نقطة انعطاف** $\leftarrow ن''(-١) = ٠$

$ن'(س) = ٢أس + ٣س^{٢}$

$ن''(س) = ٢أ + ٦س \Leftarrow ن''(-١) = -٢أ + ٦$

$٠ = -٢أ + ٦ \leftarrow أ = ٣$

السؤال الخامس:



ن′(٠) = ن′(٦) = ٠

أ) من اشارة ن″(س)

ن(س) مقعر إلى أسفل في]-∞،٣[ومقعر إلى اعلى في]٣،∞[

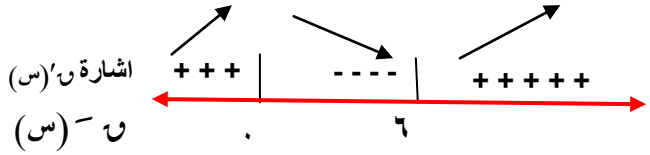
يوجد نقطة انعطاف عندما س=٣ لان ق متصل (المشتقة موجودة)

ويغير من مجال تقعره هي (٣،ن(٣)) .

ب) ن′(٠) = ٠ ، ن″(٠) > ٠ ⇐ ن(٠) قيمة عظمى محلية

ن′(٦) = ٠ ، ن″(٦) < ٠ ⇐ ن(٦) قيمة صغرى محلية

ج) ن(س) متزايد في]-∞،٠[



وأيضا في]٦،∞[ومتناقص في[٠،٦]

السؤال السادس:

المعطيات: ن(س) = ا س ٣ + ب س ٢ + جس + د : ا،ب،جـ،د ∈ ح

منحنى ق يمر بالنقطة (١، ٥) ← ق(١)=٥

(٢، ١) نقطة انعطاف ← ق(٢)=١ ، ن″(٢) = ٠

معادلة المماس عند (٢، ١) هي ٣س+ص=٧ ← ن′(٢) = -٣

الحل: ن(١) = ا + ب + جـ + د ⇐ ا + ب + جـ + د = ٥ ---------- ١

ن(٢) = ٨ا + ٤ب + ٢جـ + د ⇐ ٨ا + ٤ب + ٢جـ + د = ١ ---------- ٢

ن′(س) = ٣ا س ٢ + ٢ب س + جـ

ن′(٢) = ١٢ ا + ٤ب + جـ ⇐ ١٢ ا + ٤ب + جـ = -٣ ---------- ٣

ن″(س) = ٦ا س + ٢ب

ن″(٢) = ١٢ ا + ٢ب ⇐ ١٢ ا + ٢ب = ٠ ---------- ٤

بحل نظام المعادلات نحصل على

ا = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ١٥ ، د = ١٠

إذن ن(س) = س ٣ - ٦ س ٢ + ١٥ س + ١٠

السؤال السابع :

المعطيات: $ن(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} + ك(س)$

(١ ، ٢) نقطة انعطاف افقي للاقتران ق(س) $\Leftarrow ن(١) = ٢ ، ن'(١) = ٠ ، ن''(١) = ٠$

$ع(س) = ك^{٢}(س)$ **احسب** $ع''(١)$

الحل: $ن(١) = ١^{٤} - ٤ \times ١^{٣} + ك(س) \Leftarrow ٢ = ١ - ٤ + ك(١) \Leftarrow ك(١) = ٥$

$ن'(س) = ٤س^{٣} - ١٢س + ك'(س)$

$ن'(١) = ٤ - ١٢ + ك'(١) \Leftarrow ٠ = -٨ + ك'(١) \Leftarrow ك'(١) = ٨$

$ن''(س) = ١٢س^{٢} - ٢٤س + ك''(س)$

$ن''(١) = ١٢ - ٢٤ + ك''(س) \Leftarrow ٠ = -١٢ + ك''(١) \leftarrow ك''(١) = ١٢$

$ع(س) = ك^{٢}(س)$

$ع'(س) = ٢ك(س) \times ك'(س)$

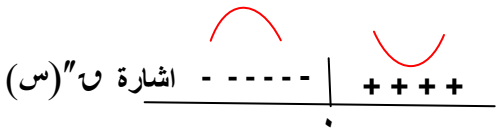
$ع''(س) = ٢ك(س) \times ك''(س) + ٢\left(ك'(س)\right)^{٢}$

$ع''(١) = ٢ك(١) \times ك''(١) + ٢\left(ك'(١)\right)^{٢}$

$= ٢ \times ٥ \times ١٢ + ٢(٨)^{٢} = ١٢٠ + ١٢٨ = ٢٤٨$

السؤال الثامن: **المعطيات: ق(٠)=٠ ، $ن'(١) = ٠ ، ن'(-٢) = ٠$**

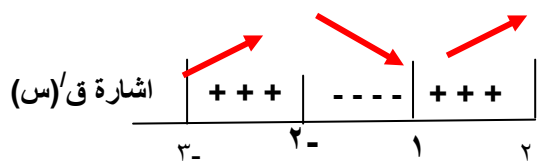
أ) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيمة قصوى هي س=١ ،س=-٢ بحيث ق(١) قيمة صغرى محلية و ق(-٢) قيمة عظمى محلية (ظهر ذلك من خلال اختبار المشتقة الثانية) اما ق(-٣) قيمة صغرى محلية ، ق(٢) قيمة عظمى محلية (يظهر ذلك من خلال إشارة المشتقة الاولي لان اختبار المشتقة الثانية يفشل).



ب) للاقتران نقطة انعطاف عند س=٠ هي (٠،٠) ، ق متصل عندها ويغير من مجال تقعره

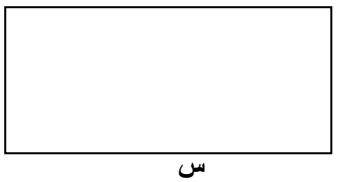
ج) ق(س) متزايد $[-٣، -٢]$

كذلك في $[١، ٢]$ **ومتناقص في** $[-٢، ١]$



تمارين (٢-٥) تطبيقات القيم القصوى صفحة ٩٣

السؤال الأول :



الحل : محيط المستطيل = الطولين + العرضين

٨٠=٢س+٢ص

٤٠=س+ص ومنها ص= ٤٠- س

مساحة المستطيل = الطول × العرض

م= س× ص

م= س(٤٠ – س) **٠<س<٤٠**

م= ٤٠س- س^{٢}

$\frac{ء م}{ء س} = ٤٠ - ٢س$

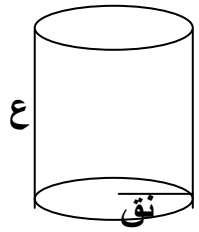
صفر = ٤٠- ٢س ومنها س= ٢٠

$\frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}} = -٢ \Leftarrow \left| \frac{ء^{٢} م}{ء س^{٢}} \right|_{س=٢٠} = -٢ < ٠$

إذن المساحة أكبر ما يمكن عندما س= ٢٠ م ومنها ص= ٢٠ م

ومنها مساحة اكبر حديقة ٤٠٠ متر مربع

السؤال الثاني :



الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$١٩٢\pi = نق^{٢} \times \pi \times ع \Leftarrow ع = \frac{١٩٢}{نق^{٢}}$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة (لأنها مفتوحة من أعلى)

$م = ٢ نق \pi \times ع + نق^{٢} \pi$

التكلفة ت = ٢ نق ع π + نق^{٢} π ×٣ل ، بفرض أن اسم^{٢} من الجوانب يكلّف ل إذن اسم^{٢} من القاعدة يكلف ٣ ل

$ت = ٢\pi \times نق ع + ٣ل\pi نق^{٢}$

$ت = ٢\pi \times نق \frac{١٩٢}{نق^{٢}} + ٣ل\pi نق^{٢}$

$ت = ٣٨٤\pi \times \frac{١}{نق} + ٣ل\pi \times نق^{٢}$ ، $نق > ٠$

$\frac{ء ت}{ء نق} = ٣٨٤\pi \times \frac{-١}{نق^{٢}} + ٣ل\pi \times ٢ نق = \frac{-٣٨٤\pi ل}{نق^{٢}} + ٦ل\pi نق$

$$\frac{-٣٨٤\ ل\ \pi}{نو^{٢}} + ٦\pi\ ل نو = ٠ \quad \text{ومنها ينتج أن} \quad ٦\pi ل نو = \frac{٣٨٤\ ل\ \pi}{نو^{٢}}$$

$$٦٤ = نو^{٣} \Leftarrow نو = ٤ \text{سم}$$

$$\frac{د^{٢}ت}{د نو^{٢}} = -٣٨٤\pi \times \frac{-٢نو}{نو^{٤}} + ٦\pi ل = \frac{٧٦٨\pi ل}{نو^{٣}} + ٦\pi ل$$

$$\left|\frac{د^{٢}ت}{د نو^{٢}}\right|_{نو=٢} = ١٩٢\pi \quad < ٠ \Leftarrow \text{التكلفة أقل ما يمكن عندما نق= ٤سم}$$

$$ع = \frac{١٩٢}{نو^{٢}} = \frac{١٩٢}{١٦} = ١٢ \text{سم}$$

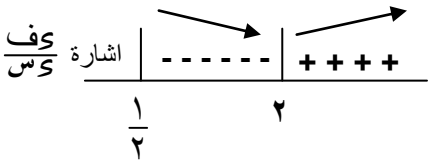
إذن ابعاد الاسطوانة الاقل تكلفة هي نصف قطر القاعدة=٤سم وارتفاعها ١٢سم

السؤال الثالث : $ص = ن(س) = \sqrt{٢س - ١}$

$$ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + (ص - ٠)^{٢} = (س - ٣)^{٢} + ص^{٢}$$

$$ف^{٢} = (س - ٣)^{٢} + ٢س - ١ \ ، \ س \leq \frac{١}{٢}$$

$$٢ف \frac{دف}{دس} = ٢(س - ٣) + ٢ \ ، \ س < \frac{١}{٢}$$



$$\frac{دف}{دس} = \frac{س - ٢}{ف}$$

$$\frac{دف}{دس} = ٠ \leftarrow ٠ = \frac{س - ٢}{ف} \leftarrow ٠ = س - ٢ \leftarrow س = ٢$$

المسافة اقل ما يمكن عندما $س = ٢ \leftarrow ص = \sqrt{٣} \leftarrow و = (٢، \sqrt{٣})$

السؤال الرابع :

$$ف = ا جتا\frac{\pi}{٤}ن + ب جا\frac{\pi}{٤}ن$$

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٢) - ف(٠)}{٢ - ٠}$$

$$\frac{\left(أ جتا\frac{\pi}{٢}+ب جا\frac{\pi}{٢}\right)-\left(أ جتا(٠)+ب جا(٠)\right)}{٢}=١٠$$

$$٢٠=ب-أ \text{ ---------- } (١)$$

$$ع=\frac{ف}{ن}=أ\times^{-}جا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}+ب\times جتا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}$$

$$ع=\frac{\pi^{٢}أ^{-}}{٤}\times^{-}جا\frac{\pi}{٤}ن+\frac{\pi ب}{٤}جتا\frac{\pi}{٤}ن$$

سرعة الجسم اقل ما يمكن عند $ن=١\leftarrow ع'(١)=٠$

$$ع'(ن)=\frac{\pi^{٢}أ^{-}}{٤}\times جتا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}+\frac{\pi ب}{٤}\times^{-}جا\frac{\pi}{٤}ن\times\frac{\pi}{٤}$$

$$ع'(ن)=أ^{-}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times جتا\frac{\pi}{٤}ن+ب^{-}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}جا\frac{\pi}{٤}ن$$

$$ع'(١)=أ^{-}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times جتا\frac{\pi}{٤}+ب^{-}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}جا\frac{\pi}{٤}$$

$$٠=أ^{-}\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times\frac{١}{\sqrt{٢}}-ب\left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}\times\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

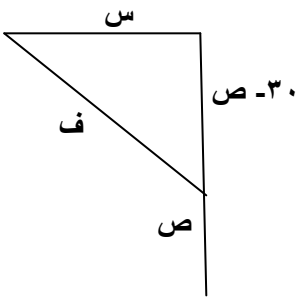
$$٠=أ-ب\leftarrow أ=ب^{-} \text{ ---------- } (٢)$$

نعوض قيمة $أ$ **من ٢ في ١**

$$٢٠=ب-(ب^{-})\leftarrow ٢٠=٢ب\leftarrow ب=١٠$$

$$٢٠=ب-أ\leftarrow ٢٠=١٠-أ\leftarrow أ=١٠^{-}$$

السؤال الخامس:



$$ف^{٢}=(٣٠-ص)^{٢}+س^{٢}$$

$$\frac{س}{ن}=١٠\leftarrow س=١٠ن\ ،\ \frac{ص}{ن}=٢٠\leftarrow ص=٢٠ن$$

$$ف^{٢}=(٣٠-٢٠ن)^{٢}+(١٠ن)^{٢}$$

$$٢ف\frac{ف}{ن}=٢(٣٠-٢٠ن)\times^{-}٢٠+٢(١٠ن)\times١٠$$

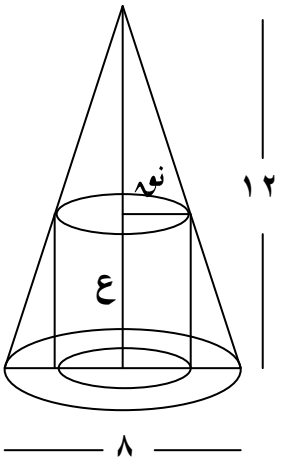
$$\frac{ف}{ن} = -٦٠٠ + ٥٤٠٠ + ١٠٠ ن$$

$$\frac{ف}{ن} = \frac{-٦٠٠ + ٥٥٠٠ ن}{ف}$$

$$\frac{ف}{ن} = ٠ \Leftarrow ن = \frac{٦٠٠}{٥٠٠} = \frac{٦}{٥} = ١.٢ \text{ ساعة = ساعة و ١٢ دقيقة}$$

المسافة بين الباخرتين اقل ما يمكن الساعة الواحدة و ١٢ دقيقة

السؤال السادس:



حجم الاسطوانة = $\pi \times \text{نق}^{٢} \times ع$

من تشابه المثلثات

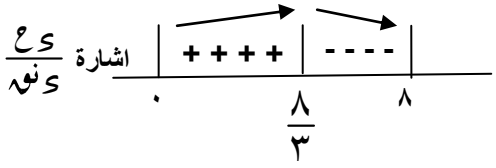
$$\frac{\text{نق}}{٤} = \frac{ع - ١٢}{١٢} \quad \text{ومنها} \quad \text{نق} = \frac{ع - ١٢}{٣}$$

$$ع = ١٢ - ٣\text{نق}$$

$$ح = \pi \text{نق}^{٢} (١٢ - ٣\text{نق}) \quad ، \quad ٠ < \text{نق} < ٤$$

$$ح = ١٢ \pi \text{نق}^{٢} - ٣ \pi \text{نق}^{٣}$$

$$\frac{د ح}{د \text{نق}} = ٢٤ \pi \text{نق} - ٩ \pi \text{نق}^{٢}$$

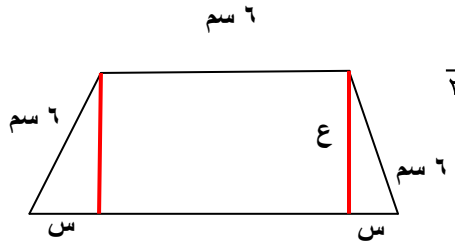


$$٠ = ٣ \pi \text{نق} (٨ - ٣\text{نق}) \quad \text{ومنها} \quad \text{نق} = ٠ \text{ ترفض أو } \text{نق} = \frac{٨}{٣}$$

إذن الحجم أكبر ما يمكن عندما $\text{نق} = \frac{٨}{٣}$ **فيكون أكبر حجم=** $\left(\frac{٨}{٣} \times ٣ - ١٢\right)\left(\frac{٦٤}{٩}\right)\pi$

$$= \pi \left(\frac{٦٤}{٩}\right)(٤) = \frac{٢٥٦ \pi}{٩} \text{ سم}^{٣}$$

السؤال السابع :



مساحة شبه المنحرف $= \frac{١}{٢}(٢س + ٦ + ٦) ع$ ، $ع = \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$

$$م = (س + ٦) \sqrt{٣٦ - س^{٢}}$$

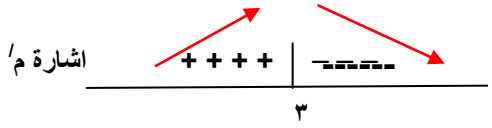
$$م' = \sqrt{٣٦ - س^{٢}} + (س + ٦) \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٣٦ - س^{٢}}}$$

م ´ = $\frac{-٢س^{٢}-٦س+٣٦}{\sqrt{٣٦-س^{٢}}}$ = ٠

$-٢س^{٢}-٦س+٣٦=٠$

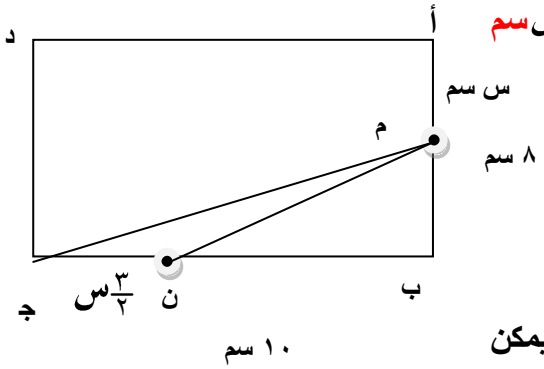
$(س+٦)(س-٣)=٠$

س = -٦ ، ٣



عندما س= ٣ يوجد قيمة عظمى وتكون اكبر مساحة ممكنة = ٢٧ $\sqrt{٣}$ وحدة مساحة

السؤال الثامن : نفرض أ م = س سم ، فيكون ب م = ٨-س سم



م = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٣}{٢}$س(٨-س))

م = $\frac{١}{٢}$ (١٢س - $\frac{٣}{٢}$$س^{٢}$)

م ´ = $\frac{١}{٢}$ (١٢ - ٣س) = ٠ ومنها س=٤

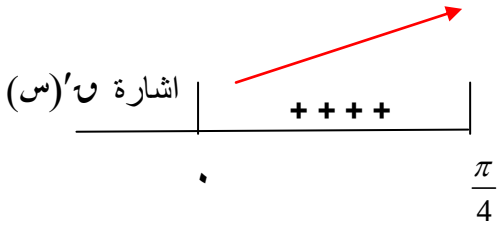
يوجد عندما س=٤ قيمة عظمى تجعل مساحة المثلث اكبر ما يمكن

تمارين عامة (الوحدة الثانية) صفحة ٩٤

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
رمز الإجابة	جـ	ب	ب	ب	د	جـ	ا	د	أ	جـ	د	جـ	جـ	أ

لسؤال الثاني :



ه ´ (س) = ن´(س) = جتاس - جاس = ٠ ← س = $\frac{\pi}{٤}$

نلاحظ ان ه ´ (س) > ٠ ∀س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

ومنها ق(س) متزايد على $\left[٠ ، \frac{\pi}{٤}\right]$

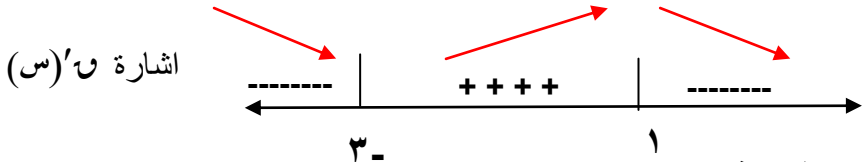
مكتبة الملتقى التربوي

السؤال الثالث:

$$ن(س)=\frac{س+١}{س^{٢}+٣} \leftarrow ن'(س)=\frac{س^{٢}+٣-(س+١)\times٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$$

$$ن'(س)=\frac{س^{٢}+٣-(س+١)\times٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}=\frac{٣-س^{٢}-٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$$

$$ن'(س)=٠ \leftarrow (س-١)(٣-س^{-})=٠ \leftarrow س=١ ، س=-٣$$



ق متزايد في الفترة $[-٣، ١]$ ومتناقص في $]-\infty، -٣[$ و $]١، \infty[$

$هـ(-٣)=\frac{-١}{٦}$ قيمة صغرى محلية ، $هـ(١)=\frac{١}{٢}$ قيمة عظمى محلية

السؤال الرابع :

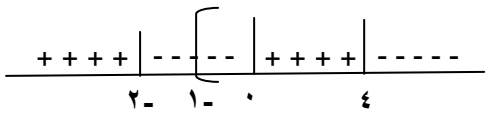
$ن(س)=س^{٢}-٣س-أ$ يحقق رول $[-١، أ]$ أوجد أ

ق يحقق رول ومنها ق متصل وقابل للاشتقاق على $[-١، أ]$ و $ن(-١)=ن(أ)$

$$ن(-١)=١+٣-أ=٤-أ$$

$$ن(أ)=أ^{٢}-٣أ-أ=أ^{٢}-٤أ$$

$$ن(-١)=ن(أ) \Leftarrow (٤-أ)=(أ^{٢}-٤أ)$$



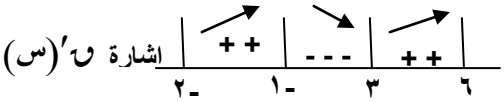
$أ^{٢}-٣أ-٤=٠$ ومن $أ=٤$ ، $أ=-١$ (تهمل)

السؤال الخامس :

أ) $ن(س)=س^{٣}-٣س^{٢}-٩س+٥$ ، $[-٢، ٦]$

$$ن'(س)=٣س^{٢}-٦س-٩$$

$$٠=س^{٢}-٢س-٣=(س-٣)(س+١)$$



النقط الحرجة عند س= -٢ ، -١ ، ٣، ٦

ق(-٢)= -٨ -٣×٤-٩×٢+٥= -٨ -١٢+١٨+٥ = ٣

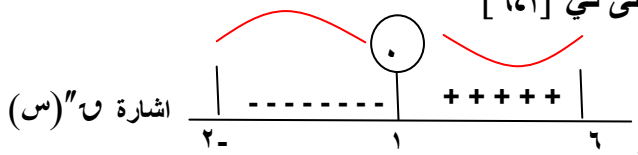
ق(-١) = -١-٣+٩+٥=١٠

ق(٣)= ٢٧-٣×٩-٢٧+٥=٥+٢٧-٢٧=-٢٢ قيمة صغرى مطلقة

ق(٦)= ٦×٣٦-٣×٣٦-٩×٦+٥=١٠٨-٥٤+٥ =١١٣-٥٤=٥٩ قيمة عظمى مطلقة

ب) $ن''(س) = ٦س - ٦ = ٠ \leftarrow س = ١$

ق مقعر الى اسفل في $[-\infty، ١]$ ومقعر الى اعلى في $[١، \infty]$



ج) (١، -٦) نقطة انعطاف ،متصل ويغير من تقعره

ظل زاوية الانعطاف = $ن'(١) = -٢$

السؤال السادس:

أ) اشارة $ن''(س)$

منحنى ق(س) مقعر الى اعلى في $[-\infty، -٢]$ كذلك في $[١، \infty]$ ومقعر الى اسفل في $[-٢، ١]$

ب) للاقتران نقاط انعطاف عند س= -٢ ، س=١ لان ق متصل ويغير من مجال تقعره

السؤال السابع:

ق كثير حدود معرف على $[-٢، ٦]$ يقع منحناه في الربع الاول ومنها ق> ٠ في $[-٢، ٦]$

ق متناقص على مجاله ومنها $ن' < ٠$ في $]-٢، ٦[$

هـ(س) =١- س ومنها هـ < صفر في $[-٢، ٦]$

$هـ' = -١ < ٠$ في $]-٢، ٦[$ بين أن ك = ق×هـ متناقص في $]-٢، ٦[$

$(ن \times هـ)'(س) = ن(س).هـ'(س) - هـ(س).ن'(س)$

اشارة $(ن \times هـ)'(س)$ = موجب×سالب – سالب ×سالب= سالب

إذن ق×هـ متناقص في $[-٢، ٦]$

السؤال الثامن:

$نق^٢ + (ع - ١٠)^٢ = ١٠٠$ ومنها $نق^٢ = ١٠٠ - (ع^٢ - ٢٠ع + ١٠٠)$ اذن $نق^٢ = ٢٠ع - ع^٢$

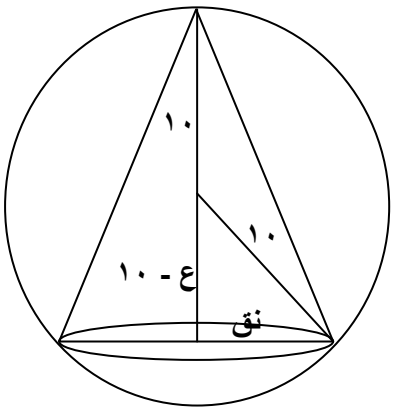
$ح = \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع = \frac{\pi}{٣} ع (٢٠ع - ع^٢) \times ع$

$\leftarrow ح = \frac{\pi}{٣} (٢٠ع^٢ - ع^٣)$

$\frac{ح}{ع} = \frac{\pi}{٣} (٤٠ع - ٣ع^٢) \leftarrow \frac{\pi}{٣} ع(٤٠ - ٣ع) = ٠$

ع = ٠ ترفض أو $ع = \frac{٤٠}{٣}$ سم

$\frac{ح^٢}{ع^٢} = \frac{\pi}{٣} (٤٠ - ٤٦)$



$$\left.\frac{د ح^{٢}}{د ع^{٢}}\right|_{ع=\frac{٤٠}{٣}} = \left(\frac{٤٠}{٣}\times ٦ - ٤٠\right)\frac{\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣}\times ٤٠^{-} < ٠$$

إذن الحجم اكبر ما يمكن عندما $ع = \frac{٤٠}{٣}$ سم نوه $= \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$

السؤال التاسع:

$$ن(س) = جتاس - هـ(س) + ٣س \quad ،س \in \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$$

اثبت أن (ق+هـ)(س) متزايد في $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$(ن + هـ)(س) = جتاس + ٣س$$

$$(ن + هـ)'(س) = -جاس + ٣ > ٠ \quad \forall س \in \left[٠، \frac{\pi}{٢}\right[$$

لأن $+جاس < ١ \Leftarrow -جاس + ٣ > -١ + ٣ = ٢$

إذن ق+هـ متزايد في $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$

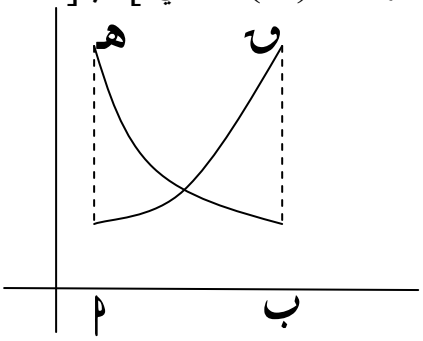
السؤال العاشر:

بين أن $\frac{ن'(س)}{هـ(س)}$ **اقتران متزايد على** [أ،ب]

ق> ٠ ، هـ > ٠ يقعان في الربع الاول

ق متزايد في [أ،ب] ن′(س)> ٠ في]أ،ب[، ق مقعر الى أعلى ومنها ن ″(س)> ٠ في]أ،ب[

هـ متناقص في [أ،ب] ومنها هـ ′(س)> ٠ في]أ،ب[



$$\left(\frac{ن'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{هـ(س)ن''(س) - ن'(س)هـ'(س)}{هـ^{٢}(س)}$$

اشارة $\left(\frac{ن'(س)}{هـ(س)}\right)' = \frac{(-\times+)-(+\times+)}{+} =$ **موجب**

إذن $\frac{ن'(س)}{هـ(س)}$ **متزايد** [أ،ب]

السؤال الحادي عشر :

$ن(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء$

$ن(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ء$

$ن'(س) = ٣أ س^{٢} + ٢ب س + جـ$

$ن'(٢) = ٠ \Leftarrow ١٢ أ + ٤ × ٢ ب + ٠ + جـ = ٣ \Leftarrow ١٢ أ + جـ = -٣$

$ن''(س) = ٦ أ س + ٢ ب$

$ن''(٠) = ٢ ب = ٠ \Leftarrow ب = ٠$

$ن(٠) = ٣ \Leftarrow ٣ = ء$

$ن(٢) = -١ \Leftarrow ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء = -١$

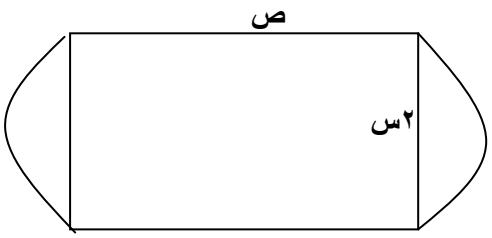
$٨ أ + ٢ جـ = -٤$

$ن'(٢) = ٠ \Leftarrow ١٢ أ + ٤ × ٢ ب + جـ = ٠ \Leftarrow ١٢ أ + جـ = ٠$

وبحل المعادلتين ينتج ان $أ = \frac{١}{٤}$ ، $جـ = -٣$

$ن(س) = \frac{١}{٤} س^{٣} - ٣س + ٣$

السؤال الثاني عشر :



محيط الدائرة = $٢ نق = \pi$

$= \pi س٢$

محيط الشكل = $\pi س٢ + ٢ص$

$\pi س٢ + ٢ص = ٤٠٠$

$\pi س + ص = ٢٠٠ \Leftarrow ص = ٢٠٠ - \pi س$

مساحة المستطيل = $٢س + ص$

$م = ٢س + ص = ٢س (٢٠٠ - \pi س)$

$م = ٤٠٠ س - ٢ \pi س^{٢}$

$\frac{د م}{د س} = ٤٠٠ - ٤ \pi س \leftarrow \frac{د م}{د س} = ٠ \leftarrow س = \frac{١٠٠}{\pi} م$

$\frac{د^{٢} م}{د س^{٢}} \Big|_{س = \frac{١٠٠}{\pi}} = -٤ \pi < ٠ \leftarrow$ **المساحة اكبر ما يمكن عندما** $س = \frac{١٠٠}{\pi}$

الابعاد التي تجعل مساحة المستطيل اكبر ما يمكن هي

طول المستطيل = $٢٠٠ - \pi \times \frac{١٠٠}{\pi} = ١٠٠ م$ **و عرض المستطيل =** $\frac{٢٠٠}{\pi} م$

السؤال الثالث عشر:

محيط المثلث الأول = س ومنه طول الضلع = $\frac{س}{3}$ ، مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{3}}{36}$س^2

محيط المثلث الثاني =١٨ – س ومنه طول الضلع = $\frac{١٨-س}{3}$ ،

مساحة المثلث الأول $\frac{\sqrt{3}}{36}$ (١٨–س)^2

م= مجموع مساحتيهما = $\frac{\sqrt{3}}{36}$س^2 + $\frac{\sqrt{3}}{36}$ (١٨–س)^2

$$م' = \frac{\sqrt{3}}{18}س - \frac{\sqrt{3}}{18}(١٨-س)$$

م' = ٠ ⟸ س=٩

م'' = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ > ٠ س=٩ قيمة صغرى محلية

محيط المثلث الأول =٩سم ومحيط المثلث الثاني=٩ سم وبالتالي طول ضلع كل من المثلثين =٣ سم

حلول الوحدة الثالثة / المصفوفات

تمارين (٣ – ١) صفحة ١٠٤

السؤال الأول:

أ) لتكن مصفوفة الانتاج هي $أ = \begin{bmatrix} ٨٠٠ & ٦٠٠ & ٧٥٠ \\ ٩٠٠ & ٤٥٠ & ٦٥٠ \end{bmatrix}$ **وهي من الرتبة ٢×٣**

ب) مجموع مدخلات العمود الثاني يمثل انتاج فرع طولكرم

السؤال الثاني:

١) المصفوفة أ من الرتبة ٤×٣

٢) $أ_{٣١} + أ_{١٢} = -٤ + ٦ = ٢$

٣) بما أن $(أ_{٢٣})^3 = ٢٧$ **، فإن** $(-س)^3 = ٢٧$ **ومنه** $س = -٣$

السؤال الثالث:

بما أن $\begin{bmatrix} ٢ & س^2 + ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٥ & س - ١ \end{bmatrix}$ **فإن :**

س^2 + ١ = ١٠ ومنها س = ±٣ ، وكذلك س – ١ = ٢ ، ومنه س = ٣ ، أي س = ٣ فقط .

السؤال الرابع

نفرض المصفوفة ب مصفوفةً مربعةً من الرتبة ٢ فتكون مدخلاتها على النحو $أ_{يهـ} = ٢^{ي-هـ}$ أي أن $ب = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ \frac{١}{٢} & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

السؤال الخامس:

$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٢^{-} \\ ٥ & ٣^{-} & ٦ \end{bmatrix}$ ، فتكون المصفوفة ب من الرتبة ٣×٢ومدخلاتها على النحو $أ_{يهـ} = ب_{هـي}$ لجميع قيم ي ، هـ

$ب = \begin{bmatrix} ٦ & ٢- \\ ٣- & ٥ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix}$

تدريبات صفحة ١٠٨ :

التدريب الأول: أ)

$ب + ٢أ = \begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} + ٢\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١٦ \\ ٤ & ١٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

$٣أ - ٢ب = ٣\begin{bmatrix} ٢ & ٣- & ٥ \\ ١ & ٦ & ٢ \end{bmatrix} - ٢\begin{bmatrix} ٤- & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ & ١١- & ٣ \\ ١- & ٨ & ١٠- \end{bmatrix}$

ب) $جـ + ء = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٢- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤- & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٩ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix} = ٩ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} ٩ = ٩م_{٢}$

التدريب الثاني:

$٢\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - ٣س = س + م_{٢}$

ومنها $٢\begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - م_{٢} = ٤س$ أي أن $٤س = \begin{bmatrix} ٢ & ١٠- \\ ٤ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$س = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ١ & ١٠- \\ ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$

التدريب الثالث:

نفرض ان $أ = \begin{bmatrix} هـ & و \\ ع & ل \end{bmatrix}$ فيكون $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢هـ & ٢و \\ ٢ع & ٢ل \end{bmatrix}$

ومنها $هـ = -١، و = \frac{٥}{٢}$، $ع = \frac{-١}{٢}$، $ل = \frac{-٣}{٢}$ أي أن $أ = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٢} & -١ \\ \frac{-٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$

التدريب الرابع: $س \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣ \end{bmatrix} + ص \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix}$ أي أن $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٩ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ص \\ ٥ص \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٣س \end{bmatrix}$

ومنها $ص = ٣ ، س = -٦$

التدريب الخامس:

$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$ $\quad ٣س - ص = \begin{bmatrix} ٣ & -٥ \\ ٨ & -٥ \end{bmatrix}$

$س + ٢ص = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & -١١ \end{bmatrix}$

$٦س - ٢ص = \begin{bmatrix} ٦ & -١٠ \\ ١٦ & -١٠ \end{bmatrix}$ وبحل المعادلتين ينتج $٧س = \begin{bmatrix} ٧ & -٧ \\ ١٤ & -٢١ \end{bmatrix}$ أي أن

$س = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٣ \end{bmatrix}$، $ص = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{bmatrix}$

تمارين (٣ – ٢) صفحة ١١٣

السؤال الأول:

أ) $ب_{٤×٥}$ $\quad$ ب) $ب_{٥×٣}$

السؤال الثاني: أ) $أ . ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & -٢ \\ ٤ & ٠ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٠ & ٢٤ & ٢٧ \\ -٦ & -١٢ & ١١ \end{bmatrix}$

ب) جـ . ب =
$$\begin{bmatrix} ٣٠^- & ٦ & ١١^- \\ ٢٩ & ١٨ & ٣٥ \\ ١٠ & ١٢ & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢^- & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٤^- & ١ \\ ٥ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

ج) $أ^{٢} = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٢^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٦ \\ ٩^- & ١٠^- \end{bmatrix}$

السؤال الثالث:

$$\begin{bmatrix} ٦٤ & ٢٠ \\ ٣٤^- & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ + ٤س + ٢٥ & ١٨ + س ص + ٤٠ \\ ١٦^- + ٤ص + ٦^- & ٥ \end{bmatrix}$$

من تساوي مصفوفتين ينتج أن:

$٣ + ٤س + ٢٥ = ٢٠$
$٤س + ٢٨ = ٢٠$
$٤س = ٨^-$
$س = ٢^-$

،

$٣٤^- = ١٦^- + ٤ص + ٦^-$
$٣٤^- = ٢٢^- + ٤ص$
$٤ص = ١٢^-$
$ص = ٣^-$

السؤال الرابع: $س = [٢ \quad ٣ \quad ١-] \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}$

$$س = [١١ \quad ١٣] = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} [٤٠ \quad ٣٥] = ٥[٨ \quad ٧] = ٥ص$$

السؤال الخامس: إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$، فبيّن أن: $أ^{٢} - ب^{٢} \neq (أ-ب)(أ+ب)$

الحل:

$$أ^{٢} - ب^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} - ب^{٢} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ١٨ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & ٤ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١^- & ١ \\ ٩^- & ٣^- \end{bmatrix} \text{------(١)}$$

$$(أ-ب)(أ+ب) = \left(\begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} ٢ & ١^- \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١^- & ٣ \\ ١^- & ١^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١٠^- & ٢^- \end{bmatrix} \quad \text{-----(٢)}$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$أ^٢ - ب^٢ \neq (أ-ب)(أ+ب)$$

السؤال السادس:

$$\text{اذا كانت } أ^٢ = ب \Leftarrow \begin{bmatrix} س^٢ & ٠ \\ ١ & س+١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$$

فإن $س^٢ = ١$ وبالتالي $س = \pm ١$

أو $س + ١ = ٥$ ومنها $س = ٤$

بالتعويض لا توجد أي قيمة لـ س تحقق أن: $أ^٢ = ب$

مجموعة الحل= $\varnothing$

السؤال السابع: $أ = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣^- \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣\sqrt{} & ١^- \end{bmatrix}$

أ) نفرض $ع = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$

$$أ + ع = ب \cdot ع \Leftarrow \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

ومنها

$$\begin{bmatrix} ٢ + س \\ ٣^- + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣س + ٢ص \\ س \end{bmatrix}$$

ومن تساوي مصفوفتين:

$٢ + س = ٣س + ٢ص$ ، $٣^- + ص = س$

$س + ص = ١$ ، $-س + ص = ٣$

وبحل المعادلتين بالجمع ينتج أن:

$٢ص = ٤ \Leftarrow ص = ٢$

وبالتعويض س= −١ ومنها $\begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} = ع$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix} = ج^{٣}$$

ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix} = م$ $\quad ج = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & -٣ \end{bmatrix}$

تمارين (٣ – ٣) صفحة ١١٩

السؤال الأول :جد قيمة كل من المحددات الآتية :

أ):
$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & ٥ & ٦ \\ ٢ & ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -٤\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} - ٣\begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$= -٢٨ - ٤٨ + ٧٦ = ٠$$

ب)
$$\begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ٨ & ٤ \end{vmatrix} = -١٦ + ١٦ = ٣٢$$

حـ) $|م_{٣}| = ٥^{٣}|م_{٣}| = ١٢٥(١) = ١٢٥$

السؤال الثاني : بما أن
$$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٥ & س & ٤ \\ ٣ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & -١ \\ ١ & س \end{vmatrix}$$

$$٢\begin{vmatrix} س & ٥ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} - (-١)\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ٤ & س \\ ١ & ٦ \end{vmatrix} = ١ + س^{٢}$$

$$\Leftarrow ٦س - ٦٠ + ٧ + ٧٢ - ٣س = ١ + س^{٢}$$

$$٠ = ١٨ - ٣س - س^{٢}$$

$$٠ = (٦ - س)(٣ + س)$$

$$س = ٦ ، -٣$$

السؤال الثالث

$$|\text{أ}^{3}| = |\text{أ}|^{9} = |\text{أ}|^{5} \Leftarrow 4 = |\text{أ}| 6$$

$$|\text{أ}\cdot\text{ب}| = |\text{أ}|.|\text{ب}| = 12^{-}$$

$$\Leftarrow 6|\text{ب}| = 12^{-} \Leftarrow |\text{ب}| = 2^{-}$$

$$|2\text{أ}| + |5\text{ب}| = 4|\text{أ}| + 25|\text{ب}| = 24 + 50^{-} = 26^{-}$$

السؤال الرابع : إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & 2 \\ 2 & \text{س} \end{bmatrix}$ **، وكان** $|\text{أ}^{3}| = 125$ **، فما قيمة/ قيم س؟**

الحل: $|\text{أ}^{3}| = 125 \Leftarrow |\text{أ}|^{3} = 125 \Leftarrow |\text{أ}| = 5$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{س} & 2 \\ 2 & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س}^{2} - 4 = 5$ **أي أن** $\text{س}^{2} = 9$ **ومنها س =** ± 3

السؤال الخامس : لمعرفة معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣،٢)، (٥، ٧).

نقوم بايجاد المحدد عن طريق مدخلات العمود الثالث:

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1^{-} \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$11 - 7\text{س} + 5\text{ص} + 2\text{س} - 3\text{ص} = 0$$

$$\Leftarrow -5\text{س} + 2\text{ص} + 11 = 0$$

أو

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \text{س} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + \text{ص}^{-} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftarrow -5\text{س} + 2\text{ص} + 11 = 0$$

السؤال السادس :

أ) أ) $\begin{vmatrix} 2 & 4^{-} \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$ **ضرب الصف الأول في (-٢) وإضافته للصف الثاني أي** -2 **ص**$_{1}$**+ص**$_{2}$ $\begin{vmatrix} 2 & 4^{-} \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٥ & ١٥ \end{vmatrix} = ٠$ إخراج عامل مشترك من كل من الصفين الأول والثاني فتتساوى المدخلات المتناظرة في الصفين فتصبح قيمته صفرا.

ج) $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ \\ ٩ & ١١ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٦ & ٧ \\ ١١ & ٩ \end{vmatrix}$ (تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة المحدد تضرب بـ (−١))

السؤال السابع :

أ) $\begin{vmatrix} ب+جـ & ا & ١ \\ ا+ب & جـ & ١ \\ ا+جـ & ب & ١ \end{vmatrix} = ٠$

بجمع العمودين الأول والثاني

$\xleftarrow{ع_٢ + ع_١}$ $\begin{vmatrix} ب+جـ+ا & ا & ١ \\ ا+ب+جـ & جـ & ١ \\ ا+جـ+ب & ب & ١ \end{vmatrix}$ وبأخذ (أ + ب + جـ) عامل مشترك من ع١ ينتج أن:

$= ٠$ لأن به ع١ =ع٣ $\begin{vmatrix} ١ & ا & ١ \\ ١ & جـ & ١ \\ ١ & ب & ١ \end{vmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ١٠ \end{vmatrix} = -٢٠٠$

بما أن المصفوفة هي مصفوفة مثلثية علوية فإن محددها يساوي حاصل ضرب المدخلات على القطر الرئيسي = ٥ × −٤ × ١٠ = −٢٠٠

تمارين(٣ – ٤) صفحة ١٢٥

السؤال الأول $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٨^{-} \\ ٣ & ٦ \end{bmatrix}$: $|أ| = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨ \neq ٠$ لها نظير ضربي.

$ب = \begin{bmatrix} جاس & ٣ \\ ١ & ١^{-} \end{bmatrix}$ $|ب| = جاس + ٣ \neq ٠$ لها نظير ضربي.

$جـ = \begin{bmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ \end{bmatrix}$ $|جـ| = ٩ - ٩ = ٠$ ليس لها نظير ضربي.

$د = \begin{bmatrix} ٢ & ١^{-} & ٣ \\ ٦ & ٣^{-} & ٩ \\ ٢ & ٧ & ١^{-} \end{bmatrix}$

$|د| = ٢(٣ - ٦٣) + ١(١٨ - ٦^{-}) + ٣(٤٢ + ٦) = ١٢٠^{-} = ١٢٤ + ٢٤ - ٠$

ليس لها نظير ضربي.

السؤال الثاني: $أ = \begin{bmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{bmatrix}$ $ب = \begin{bmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{bmatrix}$

بما أن أ مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا.

$|أ| = \begin{vmatrix} ك & ك \\ ٤ & ٢ك \end{vmatrix} = ٢ك^{٢} - ٤ك = ٠$

$٢ك(ك - ٢) = ٠ \Leftarrow ك = ٠ ،، ٢$

وبما أن ب مصفوفة منفردة اذن محددها يساوي صفرا. $|ب| = \begin{vmatrix} ك & ٤ \\ ١ & ك \end{vmatrix} = ٠$

$ك^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow ك = \pm ٢$

السؤال الثالث: $أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ،

$|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ \times ٤ - ٢ \times ٥ = ٢$

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = أ^{-1}$$

$$\left| أ^{-1} \right| = \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(أ^{-1})^{-1} = 2 \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = أ$$

السؤال الرابع : $أ = \begin{bmatrix} س & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\left| أ^{-1} \right| = \frac{1}{5}$

$$|أ| = \frac{1}{\left| أ^{-1} \right|} \Leftarrow |أ| = 5$$

٣ س – ١٠ = ٥ ⇐ ٣ س = ١٥ ⇐ س = ٥

السؤال الخامس: $أ = \begin{bmatrix} س & -3 \\ 1 & ص \end{bmatrix}$ ، $\left| أ^{-1} \right| = \left| \text{أ} \right|$

بما أن: $|أ| = \frac{1}{\left| أ^{-1} \right|} \Leftarrow |أ| \times \left| أ^{-1} \right| = 1$

لكن $|أ| = \left| أ^{-1} \right| \Leftarrow |أ| . |أ| = 1 \Leftarrow |أ|^{2} = 1$

بما أن: $|أ| = س ص + 3$ **إذن** $(س ص + 3)^{2} = 1$

إما $س ص + 3 = 1 \Leftarrow س ص = -2$

أو $س ص + 3 = -1 \Leftarrow س ص = -4$

السؤال السادس : $أ = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، **أ.جـ = ب.**

$$|أ| = 1 \times 2 - 4 \times 3 = -10 \neq 0$$

الحل: $أ^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

أ.جـ = ب ⇐ أ غير منفردة

$$أ^{-1}.أ.ب = أ^{-1}.أ.جـ$$

$$ب = جـ$$

$$أ^{-1}.أ.ب = أ^{-1}.أ.جـ$$

$$ب = أ^{-1}.جـ$$

$$جـ^{-1} = (ب^{-1}.أ^{-1})^{-1} = أ.ب^{-1}$$

$$جـ^{-1} = أ.ب^{-1} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٦ & ٨ \\ ٥ & -٥ \end{bmatrix}$$

السؤال السابع : لإثبات أن : $(كأ)^{-1} = \frac{١}{ك}(أ^{-1})$.

نفرض أن: $أ = \begin{bmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{bmatrix}$ **ومنها** $كأ = \begin{bmatrix} كس & كص \\ كع & كل \end{bmatrix}$

$$|كأ| = ك^{٢}(س ل - ص ع) = ك^{٢}|أ| \Leftarrow$$

$$(كأ)^{-1} = \frac{١}{ك^{٢}|أ|}\begin{bmatrix} كل & -كص \\ -كع & كس \end{bmatrix} = \frac{١}{ك|أ|}\begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{ك}(\frac{١}{|أ|}\begin{bmatrix} ل & -ص \\ -ع & س \end{bmatrix}) = \frac{١}{ك}(أ^{-1})$$

السؤال الثامن :بما أن $أ.ب = أ.جـ$ **، بما أن** $أ$ **غير منفردة ، فإن** $أ^{-1}$ **موجودة**

$$أ.ب = أ.جـ \Leftarrow أ^{-1}.أ.ب = أ^{-1}.أ.جـ$$

$$ب = جـ \Leftarrow ب.أ = جـ.أ$$

تمارين (٣ – ٥) صفحة ١٣١

السؤال الأول

أ) $س - ص = ٣$

$٢س + ص = ٦$

$$\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = ١\times١ - ٢\times^{-}١ = ٣ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ^{-}٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ^{-}٢ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ٣ \\ ٦ \end{bmatrix} = \frac{١}{٣}\begin{bmatrix} ٩ \\ ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٠ \end{bmatrix}$$

ومنها س= ٣، ص = ٠

ب) $س + ص = ٢$ ، $١٠س + ص = ١١$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{vmatrix} = -٩ \quad \text{فتكون} \quad أ^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{^{-}١}{٩} \\ \frac{^{-}١٠}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{^{-}١}{٩} \\ \frac{^{-}١٠}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١٠ & ١ \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{^{-}١}{٩} \\ \frac{^{-}١٠}{٩} & \frac{١٠}{٩} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ٢ \\ ١١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ١ \end{bmatrix} \quad \text{ومنه} س = ١ ، ص = ١$$

السؤال الثاني :

أ) $س - ص = ٥$

$س + ٢ص = ٢$

$$أ = \begin{bmatrix} ^{-}١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ٢ + ١ = ٣ \ ، \ |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١٠ + ٢ = ١٢$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٥ - ٢ = ^{-}٣$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{١٢}{٣} = ٤ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{^{-}٣}{٣} = -١$$

ب) س + ص = −٣ ،

٢ص + س = −٢

$$\begin{bmatrix} -٣ \\ -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١ \quad ، \quad |أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ -٢ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \quad ، \quad |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix} = ١$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٤}{١} = -٤ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١}{١} = ١$$

السؤال الثالث : $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix}$ ، $|أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix}$ ،

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = -١ \quad ، \quad |أ_{س}| = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ -٣ & ١ \end{vmatrix} = -٤ \quad ، \quad |أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ -٣ & -١ \end{vmatrix} = -١$$

$$س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-٤}{-١} = ٤ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{-١}{-١} = ١$$

السؤال الرابع :

أ) ٣س − ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

المصفوفة الممتدة للنظام هي $\bar{أ} = \left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات على النحو الآتي:**

$$\left[\begin{array}{cc|c} ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٣}ص_{١}} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ١ & ٢ & ٥ \end{array}\right] \xleftarrow{-ص_{١}+ص_{٢}} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & \frac{٧}{٣} & \frac{١٤}{٣} \end{array}\right]$$

$$\xleftarrow{\frac{٣}{٧}ص_{٢}} \left[\begin{array}{cc|c} ١ & -\frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right]$$

ومنها تكون ص = ٢ ، **وبالتعويض العكسي** $س - \frac{١}{٣}(٢) = \frac{١}{٣} \Leftarrow$ **س = ١**

ب) س − ص + ع = ٦ ، س + ٢ص + ع = ٣ ، ٢س + ص − ع = ٠

نكون المصفوفة الممتدة أ = $\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right]$ ونجري العمليات الآتية:

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[-٢ص_١ + ص_٣]{-ص_١ + ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٣ & -٣ & -١٢ \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & -٣ & -١٢ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٣}ص_٢} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٣ & -٣ & -١٢ \end{array}\right] \xleftarrow{-٣ص_٢ + ص_٣} \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & -٣ & -٩ \end{array}\right]$

ومنها −٣ ع=−٩ ومنها ع= ٣

وبالتعويض العكسي: ص=−١

س+ ١+٣ =٦ ومنها س =٢

تمارين عامة(الوحدة الثالثة) صفحة ١٣٢

السؤال الأول (الموضوعي)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	جـ	جـ	جـ	ء	أ	ب	ء	ب	ء	أ

السؤال الثاني:

بما أن $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & -١ \\ س & -٤ \end{vmatrix}$ ، ٧ = فإن

$$\begin{vmatrix} س & ١ \\ ص & ٢ \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٧ = ص - ٢س$$

$$\begin{vmatrix} ص & ١- \\ س & ٤- \end{vmatrix} = ٧ \Leftarrow ٧ = ص٤ + س-$$

وبحل المعادلتين معاً ينتج أن:

س=٥، ص=٣

السؤال الثالث : $\begin{bmatrix} ٥ & ٣- \\ ٤ & ٢- \end{bmatrix} = أ$

$$|أ| = ١٠ + ١٢- = ٢- \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{٢-}\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$$

أ) $$|أ|.أ^{-١} = ٢-.\frac{١}{٢-}\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}$$

ب) $$|٣أ| = ٩|أ| = ٩ \times ٢- = ١٨-$$

جـ) $$(-٢أ)^{-١} = أ^{-١}\frac{١}{٢-} = \frac{١}{٢-}.\frac{١}{٢-}\begin{bmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥-}{٤} & ١ \\ \frac{٣-}{٤} & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع : **لإيجاد قيم س التي تجعل** $\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = ٩-.$

فإن :

$$\begin{vmatrix} ١ & س & ٢ \\ س & ٣ & س \\ ٤ & س & ٥ \end{vmatrix} = ٩- \Leftarrow ١\begin{vmatrix} ٣ & س \\ س & ٥ \end{vmatrix} + س^{-}\begin{vmatrix} س & س \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} س & س \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ٩-$$

$$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س(س) + ٢(س^{٢} - ١٢) = ٩-$$

$$\Leftarrow ١٥ - س^{٢} - س^{٢} + ٢س^{٢} - ٢٤ = ٩-$$

إذن -٩ = -٩

وهذا يعني أن: س هي أي عدد حقيقي.

السؤال الخامس :

أ) لحل المعادلة المصفوفية $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix}$ (باستخدام النظير الضربي)

فإن :

$$|أ| = ٤ - ٦ = -٢ \neq ٠$$

$$أ^{-١} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ \frac{١}{-٢} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{-٢} \begin{bmatrix} -٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ \frac{١}{-٢} & \frac{٣}{٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

ومنها س= −٥، ص = ٤

ب) لحل المعادلة المصفوفية

$$[س \quad ص] \cdot \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٣ \\ ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix} = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

فإن:

$$[س \quad ص] \cdot \begin{bmatrix} ٣ & -٣ & ٩ \\ -٤ & ٠ & -٨ \end{bmatrix} = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$[٣س - ٤ص \quad -٣س \quad ٩س - ٨ص] = [٤ \quad -٣ \quad ١١]$$

$$-٣س = -٣ \Leftarrow س = ١$$

$$٣س - ٤ص = ٤ \Leftarrow ٣ - ٤ص = ٤ \Leftarrow ص = \frac{-١}{٤}$$

السؤال السادس : $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ٤ & \text{ص} \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix}$

بما أن: $\text{أ}\cdot\text{أ}^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & \text{ص} \\ -٥ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤\text{س} - ١٥ & \text{س ص} + ١٢ \\ ٠ & ٥\text{ص} + ١٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ومنها ٤س – ١٥ = ١ ⇐ س = ٤

٥ ص + ١٦ = ١ ⇐ ص = – ٣

السؤال السابع : $\text{أ} \times \text{ب} = \text{و}$ ،

نفرض أن : كلا من المصفوفتين لها نظير ضربي وليكن $\text{أ}^{-١}$ ، $\text{ب}^{-١}$

بما أن : $\text{أ} \times \text{ب} = \text{و} \Leftarrow \text{أ}^{-١}(\text{أ}\cdot\text{ب}) = \text{أ}^{-١}\cdot\text{و} = \text{و}$

أي أن $(\text{أ}^{-١}\cdot\text{أ})\cdot\text{ب} = \text{م}\cdot\text{ب} = \text{و}$

كما أن $(\text{أ}\cdot\text{ب})\cdot\text{ب}^{-١} = \text{و}\cdot\text{ب}^{-١} = \text{و}$ **ونستنتج أن** $\text{أ} = \text{و}$

وهذا يناقض الفرض بأن إحدى المصفوفتين على الأقل منفردة .

السؤال الثامن :

أ) $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ن} & -١ \\ ٣ & \text{ك} \end{bmatrix}$ ، $|\text{أ}_{\text{س}}| = \begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix}$ ⇐ ، $|\text{أ}_{\text{ص}}| = \begin{vmatrix} \text{ن} & ٥ \\ \text{ك} & ٣ \end{vmatrix}$

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٦ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٦ + ٢ = ٨ \Leftarrow \text{ك} = ٢ \text{ ، } \text{ن} = ٦ \text{ ومنها}$$

ب) $\text{س} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{س}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{٨}{٨} = ١$ ، $\text{ص} = \dfrac{|\text{أ}_{\text{ص}}|}{|\text{أ}|} = \dfrac{٨}{٨} = ١$

السؤال التاسع :

$$\left|أ^{-١}\right| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} = ٢ - ٣ = -١ \Leftarrow \quad أ = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$$

$$أ^{٢} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ & ١١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$$

$$\left|أ^{٢}\right| = ٣٢ - ٣٣ = -١ \Leftarrow \quad (أ^{٢})^{-١} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١١ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$(أ^{-١})^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ١١ & ٤ \end{bmatrix} \quad \text{ألاحظ أن: } (أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$$

السؤال العاشر : لحل المعادلتين بطريقة كريمر : ٣س+ ٢ ص= -٤ ، ٥ ص + س = ٣(نرتب أولا)

$$أ = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = ٢ - ١٥ = -١٣$$

$$|أ_{س}| = \begin{vmatrix} -٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = -٨ - ٦ = -١٤ \qquad س = \frac{|أ_{س}|}{|أ|} = \frac{-١٤}{-١٣} = ١$$

$$|أ_{ص}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ + ٤ = ١٣ \quad ، \quad ص = \frac{|أ_{ص}|}{|أ|} = \frac{١٣}{-١٣} = -١$$

السؤال الحادي عشر : لحل النظام الآتي بطريقة جاوس :

$$س - ص + ٤ع = ٩ \quad ، \quad ٢س + ٣ص + ٢ع = ٢ \quad ، \quad ٣ص + س - ع = -٤$$

نكون المصفوفة ال ممتدة $\tilde{أ} = \left[\begin{array}{ccc|c} ١ & -١ & ٤ & ٩ \\ ٢ & ٣ & ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & -١ & -٤ \end{array}\right]$ **ونجري العمليات الآتية:**

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٣ & ٢ \\ -٤ & -١ & ٣ & ١ \end{array}\right] \xleftarrow[-ص١+ص٣]{-٢ص١+ص٢} \left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ -١٦ & -٦ & ٥ & ٠ \\ -١٣ & -٥ & ٤ & ٠ \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٩ & ٤ & -١ & ١ \\ \frac{-١٦}{٥} & \frac{-٦}{٥} & ١ & ٠ \\ -١٣ & -٥ & ٤ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow{\frac{١}{٥}ص٢}$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \frac{٢٩}{٥} & \frac{١٤}{٥} & ٠ & ١ \\ \frac{-١٦}{٥} & \frac{-٦}{٥} & ١ & ٠ \\ \frac{-١}{٥} & \frac{-١}{٥} & ٠ & ٠ \end{array}\right] \xleftarrow[-٤ص٢+ص٣]{ص٢+ص١}$$

ومنها $\frac{-١}{٥}ع = \frac{-١}{٥}$ ومنها ع = ١

وبالتعويض العكسي: ص + $\frac{-٦}{٥}$ ع = $\frac{-١٦}{٥}$ ⇐ ص = -٢

س+ $\frac{١٤}{٥}$ ع = $\frac{٢٩}{٥}$ ⇐ س =٣

السؤال الثاني عشر : $\begin{vmatrix} س & ٢ & ١١ \\ ٠ & -٤ & ٩ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢}س \end{vmatrix} = -٥٠$

حسب خصائص المحددات فإن محدد المصفوفة القطرية العلوية يساوي حاصل ضرب مدخلات

القطر الرئيسي أي أن $س \times -٤ \times \frac{١}{٢}س = -٥٠$ **ومنها** $س^{٢} = ٢٥$ **أي أن** $س = \pm ٥$

اجابات الفصل الثاني

الفرع العلمي والصناعي

مكتبة الملتقى التربوي

حلول الوحدة الرابعة

تمارين ومسائل (٤-١) صفحة ١٤٢

السؤال الاول

ا) $م(س) = \frac{١}{٣}(٢ + س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ ، $ن(س) = س\sqrt{٢ + س^{٢}}$

$م'(س) = \frac{١}{٢}(٢ + س^{٢})^{\frac{١}{٢}}(٢س) = س\sqrt{٢ + س^{٢}} = ن(س)$

أي أن $م(س)$ اقتران أصلي للاقتران $ن(س)$

ب) $م(س) = قا^{٣}س$ ، $ن(س) = ٣قا^{٢}س ظاس$

$م'(س) = ٣قا^{٢}س قاس ظاس = ٣قا^{٣}س ظاس \neq ن(س)$

أي أن $م(س)$ ليس اقترانا أصليا للاقتران $ن(س)$

ج) $م(س) = لـو_{هـ}(س^{٣} + هـ^{٣س})$ ، $ن(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}}$

$م'(س) = \frac{٣س^{٢} + ٢هـ^{٢س}}{س^{٣} + هـ^{٢س}} = ن(س)$

أي أن $م(س)$ اقتران أصلي للاقتران $ن(س)$

السؤال الثاني:

بما أن $م(س)$ ، $هـ(س)$ اقترانين أصليين فإن $م(٣) - هـ(٣) = جـ$

ومنها $م(٣) - هـ(٣) = ٣ - ٤ = -١ = جـ$

$هـ(س) = س^{٢} - ٤س + ٦ - ١ = س^{٢} - ٤س + ٧$

$هـ(١) = ١ - ٤ + ٧ = ٤$

السؤال الثالث:

$(٣م - هـ)'(٤) = ٣م'(٤) - هـ'(٤) = ٣ \times ٧ - ٧ = ١٤$

لأن $م'(٤) = هـ'(٤) = ن(٤) = ٧$ حيث $ن(س)$ متصل عند س = ٤

السؤال الرابع:

بما أن $م(س)$ **هو احد الاقترانات الأصلية للاقتران المتصل** $ن(س)$ **فإن** $م'(س) = ن(س)$

$م'(س) = ٢(قا^{٢}س - قاس ظاس)$

$= ٢(\frac{١}{جتا^{٢}س} - \frac{جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{جتا^{٢}س})$

$= ٢(\frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{١-جا^{٢}س}) = ٢(\frac{١-جاس}{(١+جاس)(١-جاس)}) = \frac{٢}{(١+جاس)}$ **ومنها** $ن(س)$ **يكون** $ا = ٢$

السؤال الخامس:

$\int هـ(س)ds = اس^{٣} + جس$ **وباشتقاق الطرفين ينتج** $هـ(س) = ٣اس^{٢} + ج$

بما أن $هـ(-١) = ٤$ **فإن** $٣ا + ج = ٤$ **.....(١)**

كذلك $هـ'(س) = ٦اس$ ، **وبما أن** $هـ'(٢) = ٢٤$ **فإن** $١٢ا = ٢٤$ **.....(٢)**

وبحل المعادلتين ينتج أن $ا = ٢$ ، $ج = -٢$

تمارين ومسائل (٤-٢) صفحة ١٤٦

السؤال الأول

أ) $\int ٨ds = ٨س + ج$

ب) $\int (٧س^{٢} - ٤س + \frac{٣}{س^{٤}})ds = \int (٧س^{٢} - ٤س + ٣س^{-٤})ds$

$= \frac{٧}{٣}س^{٣} - ٢س^{٢} + \frac{-١}{٣س^{٣}} + ج$

ج) $\int (٣ + س)\sqrt{س}ds = \int (٣س^{\frac{١}{٢}} + س^{\frac{٣}{٢}})ds = ٢س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

د) $\int (٥س + قاس ظاس)ds = \frac{٥}{٢}س^{٢} + قاس + ج$

هـ) $\int \frac{س - ١}{١ - \sqrt{س}^{٣}}ds = \int \frac{(\sqrt{س}^{٣} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} + س^{\frac{١}{٣}} + ١)}{١ - \sqrt{س}^{٣}}ds$

$= \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + س + ج$

و) $\int \frac{٢س^{٣}+٥س^{٢}-١}{س^{٢}}$ ءس $= \int (٢س+٥-س^{-٢})$ ءس $= س^{٢}+٥س+\frac{١}{س}+$جـ

ز) $\int \frac{١}{جتا^{٢}س}$ ءس $= \int قا^{٢}س$ ءس $=$ ظاس $+$جـ

حـ) $\int (٥هـ^{س}+\frac{٢}{س})$ ءس $= \int (٥هـ^{س}+\frac{٢}{س})$ ءس $=٥هـ^{س}+٢$ لـو$_{هـ}$ $|س|+$جـ

السؤال الثاني:

بتكامل الطرفين $\int$ ن$´$(س) $+$ هـ^{س}) ءس $= \int$ جتاس ءس

ومنها ن(س) $+$ هـ^{س} $=$ جاس $+$جـ **أي أن** ن(س) $=$ جاس $-$ هـ$^{س}+$جـ

وبما أن ن(٠) $=-١$ **فإن** جـ $=٠$ **ومنها** ن(س) $=$ جاس $-$ هـ^{س}

السؤال الثالث:

$\int$ ن(س) ءس $=$ جاس $-$ جتاس $+٢$ **وباشتقاق الطرفين ينتج أن:**

ن(س) $=$ جتاس $+$ جاس **ومنها** ن$´$(س) $=-$ جاس $+$ جتاس

ن($\frac{\pi}{٢}$) $-$ ن$´$($\frac{\pi}{٢}$) $=$ (جتا$\frac{\pi}{٢}+$جا$\frac{\pi}{٢}$) $-(-$جا$\frac{\pi}{٢}+$جتا$\frac{\pi}{٢}$) $=٢$ **وهو المطلوب.**

السؤال الرابع:

بما أن $\int$ ن$´$(س) $+س^{٢}$) ءس $=٢س^{٣}+$جـ$س^{٢}+٢$ **فإن**

ن(س) $+\frac{١}{٣}س^{٣}+$جـ$_{١}=٢س^{٣}+$جـ$س^{٢}+٢$

ن(س) $=\frac{٥}{٣}س^{٣}+$جـ$س^{٢}+٢-$جـ$_{١}$

ن$´$(س) $=٥س^{٢}+٢$جـ$س$

ن$´$(١) $=٥+٢$جـ $=٤$ **ومنها** جـ $=\frac{-١}{٢}$

ن(س) $=\frac{٥}{٣}س^{٣}-\frac{١}{٢}س^{٢}+٢-$جـ$_{١}$

لكن ن(٢) $=\frac{٤٠}{٣}-٢+٢-$جـ$_{١}=٦$ **ومنها** جـ$_{١}=\frac{٢٢}{٣}$

فيكون ن(س) $=\frac{٥}{٣}س^{٣}-\frac{١}{٢}س^{٢}-\frac{١٦}{٣}$ ، ن(١$-$) $=-\frac{٥}{٣}-\frac{١}{٢}-\frac{١٦}{٣}=\frac{-١٥}{٢}$

تمارين ومسائل (٤-٣) صفحة ١٥١

السؤال الأول:

ميل المماس = $ن'(س) = س(٣س - ٢) = ٣س^{٢} - ٢س$

$\int ن'(س) ؤس = \int (٣س^{٢} - ٢س) ؤس$ **ومنها**

$ن(س) = س^{٣} - س^{٢} + جـ$ ، **لكن** $ن(٢) = ٥$ **فيكون** $٥ = ٨ - ٤ + جـ$ **ومنها** $جـ = ١$

فيصبح $ن(س) = س^{٣} - س^{٢} + ١$

السؤال الثاني:

بما أن $س + ص = ٤$ **هو مماس لمنحنى** $ن(س)$ **عندما** $س = ١$ **فإن** $ن'(١) = -١$ **(ميل المماس)**

أي أن $ا - ٣ = -١$ **ومنها** $ا = ٢$ **فيصبح** $هـ'(س) = ٢س - ٣س^{٢}$

$\int هـ'(س) = \int (٢س - ٣س^{٢}) ؤس$ **ومنها** $هـ(س) = س^{٢} - س^{٣} + جـ$

لكن نقطة التماس هي $(١، ٣)$ **ومنها** $هـ(س) = س^{٢} - س^{٣} + ٣$

السؤال الثالث:

ميل المماس = $ن'(س) = ٢\sqrt{ا س}$

$\int ن'(س) ؤس = \int ٢\sqrt{ا س} ؤس$ **ومنها** $ن(س) = \sqrt{ا} س^{٢} + جـ$

وبما أن $ن(٠) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$ ، **كما أن** $ن(١) = ٢$ **فإن** $٢ = \sqrt{ا}$ **أي أن** $ا = ٤$

فيصبح $ن(س) = ٢س^{٢}$

السؤال الرابع:

$ن'(س) = \int ن''(س) ؤس = \int جتاس ؤس = جاس + جـ$

وبما أن $ن'(\pi) = ٢$ **فإن** $جـ = ٢$ **وتصبح** $ن'(س) = جاس + ٢$

كما أن $ن(س) = \int ن'(س) ؤس = \int (جاس + ٢) ؤس = -جتاس + ٢س + ء$

لكن $ن(\pi) = ١$ **فيكون** $ن(\pi) = ١ + ٢\pi + ء = ١$ **ومنها** $ء = -٢\pi$ **فيكون**

$ن(س) = -جتاس + ٢س - ٢\pi$

السؤال الخامس:

$ت = \frac{ع}{ن ع} = ن$ ومنها $\int ع = \int ن ع ن$

أي أن $ع = \frac{1}{2} ن^{2} + ج$ وبما أن سرعته الابتدائية مقدارها ٣ م/ ث، فإن $ج = ٣$

فيكون $ع = \frac{1}{2} ن^{2} + ٣$، ويكون $ع(٥) = \frac{٢٥}{٢} + ٣ = \frac{٣١}{٢}$ م/ث

كما أن $ع = \frac{ف}{ن ع} = \frac{1}{2} ن^{2} + ٣$ ومنها $ف = \int (\frac{1}{2} ن^{2} + ٣) ع ن$ وبتكامل الطرفين ينتج:

$ف = \frac{1}{6} ن^{3} + ٣ ن + ع$ وبما أن $ف(٠) = ٠$ فيكون $ف = \frac{1}{6} ن^{3} + ٣ ن$

$ف(٥) = \frac{١٢٥}{٦} + ١٥ = \frac{٢١٥}{٦}$ مترا

السؤال السادس:

نفرض حجم الوعاء $ع$ فيكون $\frac{ع}{ن ع} = ٢ ن + ٥٠$ ومنها $\int ع = \int (٢ ن + ٥٠) ع ن$ وينتج أن $ع = ن^{2} + ٥٠ ن + ج$

وبما أنه فارغ فإن $ع(٠) = ٠$ فيكون $ع = ن^{2} + ٥٠ ن$ ولمعرفة الزمن اللازم لملء الوعاء يكون $١٤٠٠ = ن^{2} + ٥٠ ن$ وبحل المعادلة ينتج أن $ن = ٢٠$ ثانية .

أي أن الوعاء يمتلئ بعد ٢٠ ثانية .

السؤال السابع:

ميل المماس $= ق'(س) = \left(\frac{1}{\sqrt{س}} + \sqrt{س} \right)$ ومنها

$$\int ق'(س) ع س = \int \left(س^{-\frac{1}{2}} + س^{\frac{1}{2}} \right) ع س$$

وينتج أن $ق(س) = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ٢ س^{\frac{1}{2}} + ج$ وبما أنه يمر بالنقطة $(١ ، \frac{2}{3})$ فإن :

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} + ٢ + ج$، أي أن $ج = -٢$ فيكون $ق(س) = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ٢ س^{\frac{1}{2}} - ٢$

السؤال الثامن:

نفرض ف : ازاحة الجسم عن قمة البرج فيكون ع $= \frac{د ف}{د ن} = -١٠ ن + ٤٠$ **ومنها**

$$ف = \int (-١٠ ن + ٤٠) د ن$$

أي أن $ف = -٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + ج$، **لكن** $ف(٠) = ٠$

فيكون $ف = -٥ ن^{٢} + ٤٠ ن$ **وعندما** $ف = -٤٥$ **فإن الجسم يصل الأرض ومنها**

$ف = -٥ ن^{٢} + ٤٠ ن = -٤٥$ **أي أن** $٥ ن^{٢} - ٤٠ ن - ٤٥ = ٠$ **ومنها** $ن = ٩$ **ثانية**

السؤال التاسع: $د ص = د س (ص + س ص)$

ومنها يكون $د ص = د س (ص + ١) س$

أي أن $د ص = د س (ص + ١)$ **ومنها** $\int د ص = \int \frac{١}{س} د س (ص + ١)$

فينتج $ص = \frac{١}{٢} ص^{٢} + ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} |س| + ج$

لكن عندما $س = ١ ، ص = ٢$ **فإن** $ج = ٤$

فيكون $ص = \frac{١}{٢} ص^{٢} + ص = \frac{١}{٢} لـو_{هـ} |س| + ٤$ **ونجد ص بإكمال المربع في ص**

تمارين (٤-٤ أ) صفحة ١٥٦

السؤال الاول:

أ) $$\int \frac{٤}{(س + ٢)^{٥}} د س = \int ٤ (س + ٢)^{-٥} د س = -(س + ٢)^{-٤} + ج$$

ب) $$\int (١ - س) جا (س^{٢} - ٢ س) د س$$

نفرض $ص = (س^{٢} - ٢ س)$ **فيكون** $د ص = (٢ س - ٢) د س$ **ومنها** $د س = \frac{د ص}{(٢ س - ٢)}$

$$\int (١ - س) جا (س^{٢} - ٢ س) د س = \int (١ - س) جا ص \frac{د ص}{٢ (س - ١)}$$

$$= \frac{-١}{٢} \int جا ص د ص = \frac{١}{٢} جتا ص + ج = \frac{١}{٢} جتا (س^{٢} - ٢ س) + ج$$

ج) $$\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} د س$$

نفرض $ص = لـو_{هـ} س$ **ومنها** $د ص = \frac{١}{س} د س$ ، **أي أن** $س د ص = د س$

$$\int \frac{لـو_{هـ} س}{س} د س = \int ص س د ص = \frac{ص^{٢}}{٢} + ج = \frac{(لـو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + ج$$

د) $\int (س^{٢}+٢)\sqrt{س+١}\,د س$

نفرض $ص = س+١$ **فيكون** $د ص = د س$ **ويكون**

$$\int (س^{٢}+٢)\sqrt{س+١}\,د س = \int (ص^{٢}-٢ص+٣)ص^{\frac{١}{٢}}\,د ص = \int (ص^{\frac{٥}{٢}}-٢ص^{\frac{٣}{٢}}+٣ص^{\frac{١}{٢}})د ص$$

$$= \frac{٢}{٧}ص^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٤}{٥}ص^{\frac{٥}{٢}}+٢ص^{\frac{٣}{٢}}+جـ = \frac{٢}{٧}(س+١)^{\frac{٧}{٢}}-\frac{٤}{٥}(س+١)^{\frac{٥}{٢}}+٢(س+١)^{\frac{٣}{٢}}+جـ$$

هـ) $\int (س+٢)^{٢}(س-١)^{٦}\,د س$

نفرض $ص = س-١$ **فيكون** $د ص = د س$

$$\int (س+٢)^{٢}(س-١)^{٦}\,د س = \int (ص+٣)^{٢}ص^{٦}\,د ص$$

$$= \int (ص^{٨}+٦ص^{٧}+٩ص^{٦})د ص = \frac{ص^{٩}}{٩}+\frac{٦ص^{٨}}{٨}+\frac{٩ص^{٧}}{٧}+جـ$$

$$= \frac{(س-١)^{٩}}{٩}+\frac{٦(س-١)^{٨}}{٨}+\frac{٩(س-١)^{٧}}{٧}+جـ$$

و) $\int جتا^{٤}س\,د س = \int (جتا^{٢}س)^{٢}\,د س$

$$= \int (\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}جتا٢س)^{٢}\,د س = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٤}جتا^{٢}٢س)د س$$

$$= \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٤}جتا^{٢}٢س)د س = \int (\frac{١}{٤}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}جتا٤س)د س$$

$$\int (\frac{٣}{٨}+\frac{١}{٢}جتا٢س+\frac{١}{٨}جتا٤س)د س = \frac{٣}{٨}س+\frac{١}{٤}جا٢س+\frac{١}{٣٢}جا٤س+جـ$$

ز) $\int \frac{١}{١+جاس}\,د س = \int \frac{١-جاس}{(١+جاس)(١-جاس)}\,د س$

$$= \int \frac{١-جاس}{(١-جا^{٢}س)}\,د س = \int \frac{١-جاس}{جتا^{٢}س}\,د س = \int (قا^{٢}س-قاسظاس)د س$$

$$= ظاس-قاس+جـ$$

ح) $\int \frac{هـ^{٢س}}{هـ^{س}+هـ^{٢س}}\,د س = \int \frac{(هـ^{س})^{٢}}{هـ^{س}+(هـ^{س})^{٢}}\,د س =$

$$\int \frac{(هـ^{س})^{٢}}{هـ^{س}(١+هـ^{س})}\,د س = \int \frac{(هـ^{س})}{(١+هـ^{س})}\,د س = لـو_{هـ}(١+هـ^{س})+جـ$$

السؤال الثاني:

أ) $\int \frac{1}{س^{2}} \sqrt{\frac{1}{س}+1}\, ؤس = \int \sqrt{\frac{س+1}{س^{5}}}\, ؤس$

نفرض $ص = \frac{1}{س}+1$ **فيكون** $ؤص = -س^{-2}\, ؤس$

ومنها $\int \frac{1}{س^{2}} \sqrt{\frac{1}{س}+1}\, ؤس = \int ص^{\frac{1}{2}} (-ؤص)$

$= -\int ص^{\frac{1}{2}}\, ؤص = -\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + ج = -\frac{2}{3}(\frac{1}{س}+1)^{\frac{3}{2}} + ج$

ب) $\int \frac{1}{س^{2}} جا\frac{1}{س}\, ؤس$

نفرض $ص = \frac{1}{س}$ ، **فيكون** $ؤص = -س^{-2}\, ؤس$

$\int \frac{1}{س^{2}} جا\frac{1}{س}\, ؤس = \int \frac{1}{س^{2}} جاص \times -س^{2}\, ؤص = -\int جاص\, ؤص = جتاص + ج = جتا\frac{1}{س} + ج$

ج) $\int (جاس + قتاس)^{2}\, ؤس = \int (جا^{2}س + 2 + قتا^{2}س)\, ؤس = \int جا^{2}س\, ؤس + 2س - ظتاس + ج$

لكن $\int جا^{2}س\, ؤس = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} جتا2س)\, ؤس = \frac{1}{2}س - \frac{1}{4} جا2س$

$\int (جاس + قتاس)^{2}\, ؤس = \frac{5}{2}س - \frac{1}{4} جا2س - ظتاس + ج$

د) $\int \frac{(س+2)^{5}}{س^{7}}\, ؤس = \int \frac{(س+2)^{5}}{س^{5} \times س^{2}}\, ؤس = \int \frac{(\frac{س+2}{س})^{5}}{س^{2}}\, ؤس = \int \frac{(1+\frac{2}{س})^{5}}{س^{2}}\, ؤس$

نفرض $ص = 1 + \frac{2}{س}$ **ومنها يكون** $ؤص = -س^{-2}\, ؤس = 2ؤس$

أي أن $\int \frac{(س+2)^{5}}{س^{7}}\, ؤس = \int \frac{(1+\frac{2}{س})^{5}}{س^{2}}\, ؤس = \int \frac{ص^{5}}{س^{2}} \times \frac{-س^{2}}{2}\, ؤص$

$= \frac{-1}{2} \int ص^{5}\, ؤص = \frac{-1}{12} ص^{6} + ج = \frac{-1}{12}(1+\frac{2}{س})^{6} + ج$

هـ) $\int س^{2}(س^{7} + س^{3})^{\frac{1}{4}}\, ؤس = \int س^{2}(س^{3}(س^{4}+1))^{\frac{1}{4}}\, ؤس = \int س^{3}(س^{4}+1)^{\frac{1}{4}}\, ؤس$

نفرض $ص = 1 + س^{4}$ **فيكون** $ؤس = \frac{ؤص}{4س^{3}}$

ومنها $\int س^{2}(س^{7} + س^{3})^{\frac{1}{4}}\, ؤس = \int س^{3}(س^{4}+1)^{\frac{1}{4}}\, ؤس = \frac{1}{4} \int ص^{\frac{1}{4}}\, ؤص = \frac{3}{16}(س^{4}+1)^{\frac{4}{3}} + ج$

و) $\int$ظا^{٣}س ؤس $= \int$ظاس ظا^{٢}س ؤس $= \int$ظاس(قا^{٢}س $-$ ١) ؤس $= \int$ظاس قا^{٢}س ؤس $- \int$ظاس ؤس

نفرض ص $=$ ظاس **ومنها** $\frac{\text{ؤص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} =$ ؤس **فيكون**

$\int$ظا^{٣}س ؤس $= \int$ظاس قا^{٢}س ؤس $- \int$ظاس ؤس $= \int$ص ؤص $- \int$ظاس ؤس $= \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} +$ لـو$_{\text{هـ}}$ \|جتاس\| $+$ جـ

$= \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} +$ لـو$_{\text{هـ}}$ \|جتاس\| $+$ جـ

تمارين (٤ – ٤ ب) صفحة ١٦٠

السؤال الاول:

أ) $\int$س لـو$_{\text{هـ}}$ س ؤس

نفرض أن: ن $=$ لـو$_{\text{هـ}}$ س ؤع $=$ س ؤس

$\therefore$ ؤن $= \frac{١}{\text{س}}$ ؤس ع $= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$\int$س لـو$_{\text{هـ}}$ س ؤس $= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لـو$_{\text{هـ}}$ س $- \int \frac{١}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ ؤس $= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ لـو$_{\text{هـ}}$ س $- \frac{\text{س}^{٢}}{٤} +$ جـ

ب) $\int$س قا^{٢}س ؤس

نفرض أن: ن $=$ س ؤع $=$ قا^{٢}س ؤس

$\therefore$ ؤن $=$ ؤس ع $=$ ظاس

$\int$س قا^{٢}س ؤس $=$ س ظاس $- \int$ظاس ؤس $=$ س ظاس $+$ لـو$_{\text{هـ}}$ \|جتاس\| $+$ جـ

$\int$لـو$_{\text{هـ}}$(س$+$٢) ؤس $= \int$٣ لـو$_{\text{هـ}}$(س$+$٢) ؤس

ج)

نفرض أن: ن $=$ ٣ لـو$_{\text{هـ}}$(س $+$ ٢) ؤع $=$ ؤس

$\therefore$ ؤن $= \frac{٣}{\text{س} + ٢}$ ؤس ع $=$ س

$\int$لـو$_{\text{هـ}}$(س$+$٢) ؤس $=$ ٣س لـو$_{\text{هـ}}$(س$+$٢) $- \int \frac{٣\text{س}}{\text{س} + ٢}$ ؤس

$$= ٣س لـو_{هـ}(س+٢) - \int \left(\frac{٦}{س+٢} - \frac{٣س+٦}{س+٢}\right) ؤس$$

$$= ٣س لـو_{هـ}(س+٢) - ٣\int \frac{س+٢}{س+٢} ؤس + \int \frac{٦}{س+٢} ؤس$$

$$= ٣س لـو_{هـ}|س+٢| - ٣س + ٦ لـو_{هـ}|س+٢| + جـ$$

$$\int س جا٢س ؤس$$

د)

نفرض أن: $ن = س$ $\quad$ $ؤع = جا٢س ؤس$

$ؤن = ؤس$ $\quad$ $ع = -\frac{١}{٢} جتا٢س$

$$\int س جا٢س ؤس = -\frac{١}{٢} س جتا٢س + \frac{١}{٢}\int جتا٢س ؤس = -\frac{١}{٢} س جتا٢س + \frac{١}{٤} جا٢س + جـ$$

هـ) $\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١} ؤس = \int س^{٢} \times س هـ^{س^{٢}+١} ؤس$

نكامل بالتعويض بفرض أن $ص = س^{٢} + ١$ **ومنها** $ؤس = \frac{ؤص}{٢س}$

$$\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١} ؤس = \int س^{٢} \times س هـ^{ص} \frac{ؤص}{٢س}$$

$$= \frac{١}{٢}\int (ص-١) \times هـ^{ص} ؤص$$ **وهنا نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ن = \frac{١}{٢}(ص-١)$ $\quad$ $ؤع = هـ^{ص} ؤص$

$ؤن = \frac{١}{٢} ؤص$ $\quad$ $ع = هـ^{ص}$

$$\int س^{٣} هـ^{س^{٢}+١} ؤس = \frac{١}{٢}(ص-١) هـ^{ص} - \frac{١}{٢} هـ^{ص} + جـ = \frac{١}{٢} س^{٢} هـ^{س^{٢}+١} - \frac{١}{٢} هـ^{س^{٢}+١} + جـ$$

و) $\int جا \sqrt{س+١} ؤس$

نفرض $ص = \sqrt{س+١}$ **ومنها** $٢ص ؤص = ؤس$

$$\int جا \sqrt{س+١} ؤس = \int ٢ص جاص ؤص$$ **ثم نكامل بالأجزاء**

نفرض أن: $ن = ٢ص$ $\quad$ $ؤع = جاص ؤص$

$ؤن = ٢ؤص$ $\quad$ $ع = -جتاص$

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+1}\,d\text{س} = -2\text{ص}\,\text{جتاص} + 2\,\text{جاص} + \text{ج}$$
$$= -2\sqrt{\text{س}+1}\,\,\text{جتا}\sqrt{\text{س}+1} + 2\,\text{جا}\sqrt{\text{س}+1} + \text{ج}$$

ز) $$\int \frac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,d\text{س} = \int 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{س}+1)^{-2}\,d\text{س}$$

نفرض أن: $\text{ب} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $d\text{ع} = (\text{س}+1)^{-2}\,d\text{س}$

$\therefore d\text{ب} = (2\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})\,d\text{س}$ $\quad$ $\text{ع} = \frac{-1}{\text{س}+1}$

$$\int \frac{2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+1)^2}\,d\text{س} = \int 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{س}+1)^{-2}\,d\text{س} = \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{(2\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})}{\text{س}+1}\,d\text{س}$$
$$= \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{(2\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}})}{\text{س}+1}\,d\text{س}$$
$$= \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + \int \frac{2\,\text{هـ}^{\text{س}}\,(1+\text{س})}{\text{س}+1}\,d\text{س} = \frac{-2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+1} + 2\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$$

ح) $$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,d\text{س} = \int \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,d\text{س}$$

نفرض أن: $\text{ب} = \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $d\text{ع} = \text{جا}2\text{س}\,d\text{س}$

$\therefore d\text{ب} = \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,d\text{س}$ $\quad$ $\text{ع} = -\frac{1}{2}\,\text{جتا}2\text{س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,d\text{س} = \int \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,d\text{س} = -\frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} + \int \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س}\,d\text{س}$$

ثم نكامل بالأجزاء مرة أخرى للمقدار $\int \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س}\,d\text{س}$

نفرض أن: $\text{ب} = \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ $\quad$ $d\text{ع} = \text{جتا}2\text{س}\,d\text{س}$

$\therefore d\text{ب} = \frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,d\text{س}$ $\quad$ $\text{ع} = \frac{1}{2}\,\text{جا}2\text{س}$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,d\text{س} = \int \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,d\text{س} = -\frac{1}{4}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س} + \frac{1}{8}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} - \int \frac{1}{8}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,d\text{س}$$

ومنها $$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س}\,d\text{س} = -\frac{2}{5}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا}2\text{س} + \frac{1}{5}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}2\text{س} + \text{ج}$$

ط) $$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,(\text{قتاس} - \text{قتاس}\,\text{ظتاس})\,d\text{س} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قتاس}\,d\text{س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{قتاس}\,\text{ظتاس}\,d\text{س}$$

نفرض أن: $\text{ب} = \text{قتاس}$ $\quad$ $d\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}\,d\text{س}$

$\therefore d\text{ب} = -\text{قتاس}\,\text{ظتاس}\,d\text{س}$

$$\int هـ^{س}(\text{قتاس}-\text{قتاس ظتاس})\,د س = \int هـ^{س}\,\text{قتاس}\,د س - \int هـ^{س}\,\text{قتاس ظتاس}\,د س$$

$$= هـ^{س}\,\text{قتاس} + \int هـ^{س}\,\text{قتاس ظتاس}\,د س - \int هـ^{س}\,\text{قتاس ظتاس}\,د س$$

$$\int هـ^{س}(\text{قتاس}-\text{قتاس ظتاس})\,د س = هـ^{س}\,\text{قتاس} + جـ$$

ي) $\int \frac{١}{س^{٣}}\,\text{جتا}\left(\frac{١}{س}\right)\,د س$

نفرض $ص = \frac{١}{س}$ **ومنها** $د ص = -\frac{١}{س^{٢}}\,د س$

$$\int \frac{١}{س^{٣}}\,\text{جتا}\left(\frac{١}{س}\right)\,د س = -\int ص\,\text{جتا}\,ص\,د ص$$

ثم نكامل الناتج بالأجزاء فيكون الجواب $\int \frac{١}{س^{٣}}\,\text{جتا}\left(\frac{١}{س}\right)\,د س = -\frac{١}{س}\,\text{جا}\frac{١}{س} - \text{جتا}\frac{١}{س} + جـ$

السؤال الثاني:

نفرض أن: $ن = \text{لـو}_{هـ} س$ $\qquad د ع = س^{ن}\,د س$

$\therefore د ن = \frac{١}{س}\,د س$ $\qquad ع = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

$$\int س^{ن}\,\text{لـو}_{هـ} س\,د س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}\,\text{لـو}_{هـ} س - \int \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \times \frac{١}{س}\,د س$$

$$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١}\,\text{لـو}_{هـ} س - \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}(\text{لـو}_{هـ} س - \frac{١}{ن+١}) + جـ$$

تمارين (٤ - ٤ ج) صفحة ١٦٥

السؤال الأول:

أ) $\int \frac{س+٢}{س^{٢}-٢س-٣}\,د س = \int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)}\,د س$

$$\frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+١}$$ **ومنها يكون** $س+٢ = أ(س+١) + ب(س-٣)$

وتكون $أ = \frac{٥}{٤}$، $ب = \frac{-١}{٤}$ **ومنها**

$$\int \frac{س+٢}{(س-٣)(س+١)}\,د س = \int \frac{\frac{٥}{٤}}{س-٣}\,د س + \int \frac{\frac{-١}{٤}}{س+١}\,د س = \frac{٥}{٤}\,\text{لـو}_{هـ}|س-٣| + \frac{-١}{٤}\,\text{لـو}_{هـ}|س+١| + جـ$$

ب) $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}$ د س . بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام،

فنجري القسمة المطولة $س^{٢}+٢ \overline{)س^{٢}+س-٦}$ وينتج أن

$$\frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}=١+\frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)}$$

ومنها $\frac{-س+٨}{(س+٣)(س-٢)}=\frac{أ}{س+٣}+\frac{ب}{س-٢}$، وبعد الحل ينتج أن $أ=\frac{-١١}{٥}$، $ب=\frac{٦}{٥}$

ويكون $\int \frac{س^{٢}+٢}{س^{٢}+س-٦}$ د س $=س+\frac{-١١}{٥}$ لـو$_{هـ}|س+٣|+\frac{٦}{٥}$ لـو$_{هـ}|س-٢|+$جـ

ج) $\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}$ د س نفرض $ص=\sqrt{س}$ ومنها $٢ص$ د ص $=$ د س

$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}$ د س $=\int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢}$ د ص وبإجراء القسمة المطولة ينتج أن:

$$\frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-ص-٢}=٢+\frac{٤+٢ص}{ص^{٢}-ص-٢}=٢+\frac{أ}{ص-٢}+\frac{ب}{ص+١}$$

$\int \frac{\sqrt{س}}{س-\sqrt{س}-٢}$ د س $=٢\sqrt{س}+\frac{٨}{٣}$ لـو$_{هـ}(\sqrt{س}-٢)-\frac{٢}{٣}$ لـو$_{هـ}(\sqrt{س}+١)+$جـ

د) $\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}$ د س

$\frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}=\frac{أ}{س}+\frac{ب}{س-١}+\frac{جـ}{س+١}$ وينتج أن $أ=-٢$، $ب=\frac{٣}{٢}$، $جـ=\frac{١}{٢}$

$\int \frac{س+٢}{(س^{٢}-س)(س+١)}$ د س $=-٢$ لـو$_{هـ}|س|+\frac{٣}{٢}$ لـو$_{هـ}|س-١|+\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}|س+١|+$جـ

هـ) $\int$ قتاس د س $=\int \frac{قتاس(قتاس+ظتاس)}{قتاس+ظتاس}$ د س

$=\int \frac{قتا^{٢}س+قتاس ظتاس}{قتاس+ظتاس}$ د س $=-$ لـو$_{هـ}|قتاس+ظتاس|+$جـ

و) $\int \frac{1}{س - س(لـو_{٥} س)^{٢}} د س$

الحل: نفرض ص = لـو$_{٥}$ س **ومنها** س د ص = د س

$\int \frac{س}{س - س ص^{٢}} د ص = \int \frac{١}{١ - ص^{٢}} د ص = \int \frac{-١}{ص^{٢} - ١} د ص$

$\frac{-١}{ص^{٢} - ١} = \frac{أ}{ص - ١} + \frac{ب}{ص + ١}$ **ومنها**

$\int \frac{١}{س - س(لـو_{٥} س)^{٢}} د س = \frac{-١}{٢} لـو_{٥} |لـو_{٥} س - ١| + \frac{١}{٢} لـو_{٥} |١ + لـو_{٥} س| + جـ$

ز) $\int \frac{-س + ٧}{س^{٢} + س - ٢} د س$

$\frac{-س + ٧}{(س - ١)(س + ٢)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ٢}$ **ومنها** أ = ٢، ب = −٣

وينتج أن $\int \frac{-س + ٧}{س^{٢} + س - ٢} د س = ٢ لـو_{٥} |س - ١| - ٣ لـو_{٥} |س + ٢| + جـ$

ح) $\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} د س$ **نفرض** ص = جتاس **ومنها** $\frac{د ص}{-جاس} = د س$

$\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} د س = \int \frac{جاس}{١٦ - ص^{٢}} \frac{د ص}{-جاس} = \int \frac{د ص}{ص^{٢} - ١٦}$

$\frac{١}{ص^{٢} - ١٦} = \frac{أ}{ص - ٤} + \frac{ب}{ص + ٤}$ **ومنها** أ = $\frac{١}{٨}$ ، ب = $\frac{-١}{٨}$

$\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} د س = \frac{١}{٨} لـو_{٥} |ص - ٤| - \frac{١}{٨} لـو_{٥} |ص + ٤| + جـ$

أي أن $\int \frac{جاس}{١٦ - جتا^{٢} س} د س = \frac{١}{٨} لـو_{٥} |جتاس - ٤| - \frac{١}{٨} لـو_{٥} |جتاس + ٤| + جـ$

ط) $\int \frac{قتا^{٢} س}{٢ - قتا^{٢} س} د س = \int \frac{قتا^{٢} س}{١ - ظتا^{٢} س} د س$ ، **نفرض** ص = ظتاس **ومنها** $\frac{د ص}{-قتا^{٢} س} = د س$

$\int \frac{قتا^{٢} س}{٢ - قتا^{٢} س} د س = \int \frac{قتا^{٢} س}{١ - ص^{٢}} \frac{د ص}{-قتا^{٢} س} = \int \frac{١}{ص^{٢} - ١} د ص$ **ثم نكامل بالكسور الجزئية**

$$\frac{1}{ص^{2}-1}=\frac{أ}{ص-1}+\frac{ب}{ص+1}$$ وينتج أن $أ=\frac{1}{2}$، $ب=\frac{-1}{2}$ فيكون

$$\int \frac{قتا^{2} س}{2-قتا^{2} س}\,ds=\int \frac{\frac{1}{2}}{ص-1}\,ds-\int \frac{\frac{1}{2}}{ص+1}\,ds=\frac{1}{2}لـو_{هـ}|ظتاس-1|-\frac{1}{2}لـو_{هـ}|ظتاس+1|+جـ$$

ي) $$\int \frac{س^{2}}{س^{6}+س^{3}}\,ds=\int \frac{س^{2}}{س^{3}(س^{3}+1)}\,ds=\int \frac{1}{س(س^{3}+1)}\,ds$$

نفرض $ص=س^{3}+1$ ومنها $\frac{ds}{3س^{2}}=ds$ فيكون $$\int \frac{س^{2}}{س^{6}+س^{3}}\,ds=\int \frac{ds}{3ص(ص-1)}$$

وينتج أن $$\int \frac{س^{2}}{س^{6}+س^{3}}\,ds=\frac{1}{3}(لـو_{هـ}|س^{3}|-لـو_{هـ}|س^{3}+1|)+جـ$$

السؤال الثاني:

بما أن $\sqrt[3]{س}\,ds=ds-ds$ فإن $\frac{1}{6}ds=\frac{1}{(\sqrt[3]{س}+1)}\,ds$ ومنها

$$\frac{1}{6}\int ds=\int \frac{1}{(\sqrt[3]{س}+1)}\,ds$$ أي أن $\frac{1}{6}ص=\int \frac{1}{(\sqrt[3]{س}+1)}\,ds$ ونفرض $ع=\sqrt{س}+1$

فينتج أن $(ع-2)ds=ds$ أي أن $\frac{1}{6}ص=\int \frac{(ع-2)ds}{ع}=ع-2لـو_{هـ}|ع|+جـ$

وينتج أن $\frac{1}{6}ص=2(\sqrt{س}+1)-2لـو_{هـ}|\sqrt{س}+1|+جـ$

وعندما ص = 2 ، س = 0 فإن $\frac{1}{3}=2(1)+جـ$ ومنها $جـ=\frac{-5}{3}$

$$\frac{1}{6}ص=2(\sqrt{س}+1)-2لـو_{هـ}|\sqrt{س}+1|-\frac{5}{3}$$

تمارين عامة(الوحدة الرابعة): صفحة ١٦٦

السؤال الأول: الموضوعي

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
الاجابة	ج	د	ج	ب	ب

السؤال الثاني:

يكون م(س) اقترانا أصليا للاقتران ن(س) اذا كان م´(س) = ن(س)

وبما أن $م´(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{-س^{٢}-١}} = \frac{-س}{\sqrt{-س^{٢}-١}} = ه(س)$

السؤال الثالث:

$ن(س) = \int ن´(س) ؤس = \int (س^{٢} + ٣جاس) ؤس = ه(س) + جـ$ ومنها

$ن´(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٣جتاس + جـ$، وبما أن ن´(٠) = ٣ فتكون جـ = ٦

أي أن $ن´(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - ٣جتاس + ٦$

كما أن $ن(س) = \int ن´(س) ؤس = \frac{س^{٤}}{١٢} - ٣جاس + ٦س + ء$

وبما أن ن(٠) = ٢ فإن ء = ٢ ومنها $ن(س) = \frac{س^{٤}}{١٢} - ٣جاس + ٦س + ٢$

السؤال الرابع

$ف(ن) = \int ٤ ؤن = \int (٤ن + لـو_{هـ}(ن + ١)) ؤن$

$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لـو_{هـ}(ن + ١) - ن + لـو_{هـ}(ن + ١) + جـ$

وبما أن ف(١) = ٨، فإن جـ = ٧ - لـو_{هـ}٤ فيكون

$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ن لـو_{هـ}(ن + ١) - ن + لـو_{هـ}(ن + ١) + ٧ - لـو_{هـ}٤$

ف(٣) = ٢٢ + ٣ لـو_{هـ}٤ مترا

السؤال الخامس:

بما أن $\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{٣س^{٢} - ٢}{(٢س^{٣} - ٤س)^{٤}}$ فإن $\int ؤص = \int \frac{٣س^{٢} - ٢}{(٢س^{٣} - ٤س)^{٤}} ؤس$

نفرض ع = ٢س^{٣} − ٤س فيكون $\frac{ع د}{٢(٣س^{٢}-٢)}$ = س د ومنها يكون

$$ص = \int \frac{٣س^{٢}-٢}{(ع)^{٤}} \times \frac{ع د}{٢(٣س^{٢}-٢)} = \frac{١}{٢}\int ع^{-٤}\, د ع = \frac{-١}{٣ع^{٣}} + جـ$$

أي أن $ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣}-٤س)^{٣}} + جـ$

وعندما ص=١ ، س = ١ يكون $ص = \frac{-١}{٦(٢س^{٣}-٤س)^{٣}} + \frac{٤٧}{٤٨}$

السؤال السادس:

١) $\int س \sqrt{س^{٢}-٣}\, د س$

نفرض $ص = س^{٢}-٣$ فيكون $\frac{د ص}{٢س} = د س$ فيكون $\int س ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{د ص}{٢س} = \frac{١}{٣}(س^{٢}-٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

٢) $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}\, د س = \int \frac{١}{س(س^{٩}+١)}\, د س$ نفرض $ص = س^{٩}+١$ فيكون $د س = \frac{د ص}{٩س^{٨}}$

أي أن $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}\, د س = \int \frac{١}{س(س^{٩}+١)}\, د س = \frac{١}{٩}\int \frac{١}{ص(ص-١)}\, د ص$

وبالكسور الجزئية ينتج أن: $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}\, د س = \frac{١}{٩}(لـو_{هـ}|س^{٩}| - لـو_{هـ}|س^{٩}+١|) + جـ$

٣) $\int قا^{٢}\sqrt{س}\, د س$ نفرض $ص = \sqrt{س}$ فيكون $د س = ٢ص د ص$ أي أن

$\int قا^{٢}\sqrt{س}\, د س = \int ٢ص قا^{٢} ص\, د ص$ ثم نكامل بالأجزاء

نفرض أن: $ق = ٢ص$ $د ع = قا^{٢} ص\, د ص$

$\therefore ق د = ٢د ص$ $ع = ظا ص$

$$\int قا^{٢}\sqrt{س}\, د س = \int ٢ص قا^{٢} ص\, د ص = ٢ص ظا ص - ٢\int ظا ص\, د ص$$

$$= ٢\sqrt{س} ظا \sqrt{س} + ٢ لـو_{هـ}|جتا \sqrt{س}| + جـ$$

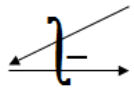
$$\int قا(٣س+١) ظا(٣س+١)\, د س = \frac{١}{٣} قا(٣س+١) + جـ$$

٥) $\int (س^{٢}+١) جتا س\, د س$ نكامل بالأجزاء مرتين فينتج أن :

$$\int (س^{٢}+١) جتا س\, د س = (س^{٢}+١) جا س + ٢س جتا س - ٢ جا س + جـ$$

٦) $\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) د س

نفرض أن: ص = لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) ، د ص = $\frac{٢س}{س^{٢}-١}$ د س ∴



ع = س ، د ع = د س

$\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) د س = س لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) − $\int \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}-١}$ د س

ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية وينتج أن: $\int$ لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) د س

= س لـو$_{هـ}$ (س^{٢} − ١) − ٢س + لـو$_{هـ}$ |س + ١| − لـو$_{هـ}$ |س − ١| + جـ

٧) $\int \frac{س^{٢}+١}{س^{٣}+س}$ د س = $\int \frac{١}{س}$ د س = لـو$_{هـ}$ |س| + جـ

٨) $\int \frac{ق^{٤}س}{١-ظا^{٢}س}$ د س نفرض ص = ظاس فيكون $\frac{د ص}{ق^{٢}س}$ = د س

$\int \frac{ق^{٤}س}{١-ظا^{٢}س}$ د س = $\int \frac{ق^{٢}س}{١-ص^{٢}}$ د ص = $\int \frac{١+ص^{٢}}{١-ص^{٢}}$ د ص ثم نقسم ونكامل بالكسور الجزئية

وينتج $\int \frac{ق^{٤}س}{١-ظا^{٢}س}$ د س = − ظاس − لـو$_{هـ}$ |١ − ظاس| + لـو$_{هـ}$ |١ + ظاس| + جـ

٩) $\int$ (جتا^{٤}س − جا^{٤}س) د س = $\int$ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)(جتا^{٢}س + جا^{٢}س) د س

= $\int$ جتا٢س د س = $\frac{١}{٢}$ جا٢س + جـ

١٠) $\int$ (قتاس + ظتاس)^{٨} قتاس د س = $\int$ (قتاس + ظتاس)^{٧} (قتاس + ظتاس) قتاس د س

= $\int$ (قتاس + ظتاس)^{٧} (قتا^{٢}س + ظتاس قتاس) د س = − $\frac{١}{٨}$ (قتاس + ظتاس)^{٨} + جـ

١١) $\int$ (س^{٨} − ٦س)^{٦} د س = $\int$ (س(س^{٧} − ٦))^{٦} د س = $\int$ س^{٦} (س^{٧} − ٦)^{٦} د س

= $\frac{١}{٧}$ $\int$ ٧س^{٦} (س^{٧} − ٦)^{٦} د س = $\frac{١}{٤٩}$ (س^{٧} − ٦)^{٧} + جـ

السؤال السابع:

بما أن ع = أ$\sqrt{ف}$ فإن $\frac{د ف}{د ن}$ = أ$\sqrt{ف}$ ومنها $\frac{د ف}{\sqrt{ف}}$ = أ د ن

ف$^{-\frac{١}{٢}}$ د ف = أ د ن ويكون ٢ف$^{\frac{١}{٢}}$ = أ ن + جـ

لكن ف(٢) = ٩ ومنها ٢أ + جـ = ٦ ، كذلك ف(٤) = ١٦ فيكون ٤أ + جـ = ٨

وبحل المعادلتين ينتج أن أ = ١

السؤال الثامن:

بما أن $س^{٢}\,ص - لـو_{هـ} س\,ص = ٠$ **فإن** $\int ص = \int \frac{لـو_{هـ} س}{س^{٢}}\,س$

ومنها $ص = \int \frac{لـو_{هـ} س}{س^{٢}}\,س$ **فنكامل بالتعويض بوضع** $ع = لـو_{هـ} س$

فينتج أن $ص = \int هـ^{-ع}\,ع$ **وبعد اجراء التكامل بالأجزاء ينتج أن**

$ص = \frac{-لـو_{هـ} س}{س} - \frac{١}{س} + جـ$ **وعندما ص=٠ ، س = هـ فإن:**

$ص = \frac{-لـو_{هـ} س}{س} - \frac{١}{س} + \frac{٢}{هـ}$

السؤال التاسع:

نكامل الطرفين بالنسبة ل س

$\int س\,ق'(س)\,س + \int ق(س)\,س = \int جتاس\,س$

وبتكامل الجزء الأول $\int س\,ق'(س)\,س$ **بالأجزاء ينتج أن**

$س\,ق(س) - \int ق(س)\,س + \int ق(س)\,س = جاس + جـ$

أي أن $س\,ق(س) = جاس + جـ$ **وبما أن** $ق(\pi) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$

$ق(س) = \frac{جاس}{س}$

حل آخر: بما أن $س\,ق'(س) + ١ \times ق(س) = جتاس$ **فإن** $(س\,ق(س))' = جتاس$ **ومنه**

$\int (س\,ق(س))'\,س = \int جتاس\,س$

أي أن $س\,ق(س) = جاس + جـ$ **وبما أن** $ق(\pi) = ٠$ **فإن** $جـ = ٠$ **ومنها يكون** $ق(س) = \frac{جاس}{س}$

حلول الوحدة الخامسة

تمارين (٥-١) صفحة ١٧٦

السؤال الأول: أ) $س_{٢} = -١ + \frac{٢}{٦} \times ٢ = ٠$

ب) **الفترة الجزئية الرابعة** $= [\frac{١}{٢}، ١]$

السؤال الثاني: $س_{٤} = جـ + \frac{٧-جـ}{١٠} \times ٤ = ٤$ ومنها $جـ = ٢$

السؤال الثالث: $\sigma_{٤} = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$ لأن طول الفترة الجزئية يساوي ١ ، فتكون

$$ر(\sigma_{٤}، ب) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٤} ب(س_{ر}^{*}) = ١ \times (ب(٢) + ب(٣) + ب(٤) + ب(٥))$$

$$ر(\sigma_{٤}، ب) = ١ \times (-٢ + ٣ - + ١٠ - + ١٩ -) = -٣٠$$

السؤال الرابع: $ب(س) = ٢ + هـ^{س}$ ، طول الفترة الجزئية = ١

فتكون $\sigma_{٣} = \{-١، ٠، ١، ٢\}$

$$ر(\sigma_{٣}، ب) = ١ \times \sum_{ر=١}^{ر=٣} ب(س_{ر}^{*}) = ١ \times (ب(-١) + ب(٠) + ب(١)) = ٧ + هـ + \frac{١}{هـ}$$

السؤال الخامس: $ب(س) = \frac{س^{٣}}{س + ٢}$ ، $\sigma_{٥} = \{-١، ٠، ١، ٢، ٣، ٦، ٨\}$

الفترات الجزئية هي : $[-١، ٠]، [٠، ٢]، [٢، ٣]، [٣، ٦][٦، ٨]$

$$ر(\sigma_{٥}، ب) = -١ \times ١ + ٠ \times ٢ + \frac{١٢}{٤} \times ١ + \frac{١٣}{٥} \times ٣ + \frac{١٦}{٨} \times ٢$$

ومنها يكون $٦و٥ = \frac{١٢٨}{١٠}$ **ومنها** $ا = ٢$

السؤال السادس: $س_{٢} = ا + \frac{ب-ا}{٨} \times ٢ = ٢$ ومنها $ا + ب = ١٣$

، $س_{٤} = ا + \frac{ب-ا}{١٢} \times ٤ = ٤$ ومنها $ا + ب = ١٢$ **وبحل المعادلتين ينتج أن :**

$ا = -٤$ ، $ب = ٢٠$

السؤال السابع : $ب(س) = جاس$ ، $\sigma_{٤} = \{٠، \frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٢}\}$

$$ر(\sigma_{٤}، ب) = \frac{\pi}{٦} \times جا٠ + \frac{\pi}{١٢} \times جا\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{١٢} \times جا\frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٦} \times جا\frac{\pi}{٣}$$

$$= \frac{\pi}{٦} \times ٠ + \frac{\pi}{١٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\pi}{١٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\pi}{٢٤} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = (١ + \sqrt{٢} + ٢\sqrt{٣}) \frac{\pi}{٢٤}$$

السؤال الثامن : طول الفترة الجزئية $= \frac{١}{ن}$

$$ل = ح(ب، ن\sigma) = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_ر) \quad ، \quad ك = ح(ب، ن\sigma) = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_{ر-١})$$

$$ل - ك = \frac{١}{ن} \left(\sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_ر) - \sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س_{ر-١}) \right)$$

$$ل = \frac{١}{ن} \left(ب(س_١) + ب(س_٢) + ب(س_٣) + \ldots + ب(س_ن) \right)$$

$$ك = \frac{١}{ن} \left(ب(س_٠) + ب(س_١) + ب(س_٢) + \ldots + ب(س_{ن-١}) \right)$$

وبالطرح ينتج أن $ل - ك = \frac{١}{ن} \left(ب(س_ن) - ب(س_٠) \right) = \frac{١}{ن} (ب(١) - ب(٠))$

تمارين (٥-٢) صفحة ١٨١

السؤال الأول: $ح(ب، ن\sigma) = \sum_{ر=١}^{ن=ن} ب(س^*_ر) \frac{ب - ا}{ن}$ ، $س^*_ر = س_ر = -١ + \frac{٤}{ن} ر$

ويكون $ب(س_ر) = -١ + \frac{٤}{ن} ر = ٧ - \frac{٢٠}{ن} ر$

$$ح(ب، ن\sigma) = \frac{٤}{ن} \sum_{ر=١}^{ن=ن} (٧ - \frac{٢٠}{ن} ر) = \frac{٤}{ن} (٧ن - \frac{٢٠}{ن} \frac{ن(ن+١)}{٢}) = -١٢ - \frac{٤٠}{ن}$$

السؤال الثاني: $ح(ب، ن\sigma) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} ب(س^*_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} (ا هـ(س^*_ر) + ب)$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} ا هـ(س^*_ر) + \sum_{ر=١}^{ن} ب) = ا(\frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} هـ(س^*_ر)) + ب$$

$$= ا ح(هـ، ن\sigma) + ب$$

السؤال الثالث: $\int_{1}^{ب} ٢س\,ع س = \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ن(س_ر^*) = \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن} ٢ \sum (١ + \frac{ب-١}{ن} ر)$

$= \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن} ٢ \sum + ٢ (ر \frac{ب-١}{ن}) = \lim_{ن\to\infty} \frac{ب-١}{ن} (٢ + ٢ \frac{ب-١}{ن} (\frac{ن(ن+١)}{٢})$

بالاختصار والتبسيط ينتج ان $\int_{1}^{ب} ٢س\,ع س = ٢(ب-١) + (ب-١)^{٢}$ = $\lim_{ن\to\infty} (\frac{٢}{ن} + ٣٥) = ٣٥$

وبحل المعادلة ينتج القيمة المطلوبة ب=٦

السؤال الرابع: **نستخدم تعريف التكامل المحدود (ريمان)وينتج ان**

أ) $\int_{-١}^{٤} \frac{١}{٢} ع س$ ، $ق(ن، \sigma) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٥}{ن} ن(س_ر^*)$

$= \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٥}{ن} = \frac{١}{٢} \sum_{ر=١}^{ن} \frac{٥}{ن} ن(-١ + ر \frac{٥}{ن}) = \frac{٥}{٢}$

وينتج أن $\int_{-١}^{٤} \frac{١}{٢} ع س = \lim_{ن\to\infty} ق(ن، \sigma) = \lim_{ن\to\infty} \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢}$

ب) $ق(ن، \sigma) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} ن(س_ر^*) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} ن(١ + ر \frac{١}{ن})$

$= \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} (٤ - ٦)((ر \frac{١}{ن} + ١)) = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{١}{ن} (-٢ - (ر \frac{-٦}{ن}))$

$= \frac{١}{ن} (-٢ن - ٥(\frac{ن(ن+١)}{٢} \frac{٦}{ن}) = \frac{٣}{ن} - ٥-$

$\int_{١}^{٢} (٤ - ٦س) ع س = \lim_{ن\to\infty} ق(ن، \sigma) = -٥$

السؤال الخامس: لاحظ ان $ن(س) = \frac{جتا^{٣}س - ١}{جتاس - ١} = \frac{(جتاس - ١)(جتا^{٢}س + جتاس + ١)}{جتاس - ١}$ ،

نفرض $هـ(س) = جتا^{٢}س + جتاس + ١$ معرفا على الفترة $\left[\frac{-\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right]$ ، فيكون $ن(س) = هـ(س)$

$\forall س \in \left[\frac{-\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right] - \{٠\}$

بما ان $هـ(س)$ متصلا على مجاله فهو قابل للتكامل ايضا

حسب النظرية فان $ن(س)$ قابل للتكامل على الفترة $\left[\frac{-\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢}\right]$

تمارين (٥ــــ٣) صفحة ١٨٦

السؤال الأول: أ) $\int_{٠}^{٤} (٣ + \sqrt{س})^{٢} ء س = \int_{٠}^{٤} (٩ + ٦\sqrt{س} + س) ء س =$

$$= \int_{٠}^{٤} (٩ + ٦س^{\frac{١}{٢}} + س) ء س = ٩س + ٤س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{٢}}{٢}\Big|_{٠}^{٤} = ٧٦$$

ب) $\int_{١}^{٢} س(س^{٢} - ٣)^{٣} ء س$ ، بفرض $ص = (س^{٢} - ٣)$ واجراء التكامل بالتعويض ينتج

$$\int_{١}^{٢} س(س^{٢} - ٣)^{٣} ء س = \frac{١}{٢} \int_{-٢}^{١} ص^{٣} ء ص = \frac{١^{٤} - (-٢)^{٤}}{٨} = \frac{-١٥}{٨}$$

ج) $\int_{١}^{هـ} لـو_{هـ} س ء س$

بالأجزاء $ن = لـو_{هـ} س$ ، $ء ن = \frac{١}{س} ء س$

$ء ف = ء س$ ، $ف = س$

$$\int_{١}^{هـ} لـو_{هـ} س ء س = س لـو_{هـ} س - س\Big|_{١}^{هـ} = هـ - ٠ - (هـ - ١) = ١$$

د) $\int_{0}^{2} ١٢ س^{٢} (س-١)^{٣} \, ds$ بفرض $س-١ = ص$ ، $ds = ds$

$$\int_{0}^{2} ١٢ س^{٢} (س-١)^{٣} \, ds = \int_{-١}^{١} ١٢ (ص+١)^{٢} (ص)^{٣} \, ds$$

$$= \int_{-١}^{١} ١٢ (ص^{٢} + ٢ص + ١) ص^{٣} \, ds = \int_{-١}^{١} ١٢ \, (ص^{٥} + ٢ص^{٤} + ص^{٣}) ds$$

$$= ١٢ (\frac{١}{٦} + ٢ \times \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤}) - ١٢ (\frac{(-١)^{٦}}{٦} + ٢ \times \frac{(-١)^{٥}}{٥} + \frac{(-١)^{٤}}{٤}) = ١٢ \times \frac{٤}{٥} = ٩٦$$

السؤال الثاني : $ن(س) = \frac{س}{س+١}$ ، في الفترة $[٠ ، ٤]$

$$ت(س) = \int_{ب}^{س} ن(ص) \, ds = \int_{ب}^{س} \frac{ص}{ص+١} \, ds$$

$$= \int_{ب}^{س} \frac{ص+١-١}{ص+١} \, ds = \int_{ب}^{س} ١ \, ds - \int_{ب}^{س} \frac{١}{ص+١} \, ds$$

$$= (ص - لـو_{هـ} |ص+١|) \Big|_{ب}^{س} = س - لـو_{هـ} |س+١|$$

السؤال الثالث: بما أن $ت(-٢) = ٠$ فإن $٢(-٢)^{٢} + ا = ٠$ ومنها $ا = -٨$

كما أن ت(س) متصل دائما على مجاله

$ت(٣^{-}) = ت(٣^{+})$ ومنها $١٠ = ٣ب + ١$ ، ومنها تكون $ب = ٣$

السؤال الرابع : $ت(س) = \int_{\frac{١}{٢}}^{س} ن(ص) \, ds = س + جا \pi س + جـ$

لمعرفة قيمة الثابت جـ ، فإن $ت(\frac{١}{٢}) = ٠$ ومنها $\frac{١}{٢} + ١ + جـ = ٠ \Leftarrow جـ = \frac{-٣}{٢}$

$ت'(س) = ن(س) = ١ + \pi$ جتاπ س

لإيجاد ن(٢) نعوض بدل س (١) فينتج ان $= ن(٢) = ١ + \pi$ جتا$٢\pi = ١ + \pi$

السؤال الخامس: $ت'(س) = (أ + هـ^{س})$

$ت'(٢) = (أ + هـ^{٢}) = -١$ ومنها $أ = -١ - هـ^{٢}$

السؤال السادس : $\int_{٠}^{١} (س^{٢} - ٢س)(س - ١)^{٥}$ دس

نفرض ص $= س - ١$ ، **فيكون** دص $=$ دس ، **وعندما** س= ٠ **فإن** ص= -١ ، **وعندما** س= ١ **فإن** ص= ٠

أي أن $\int_{-١}^{١} (ص + ١)(ص - ١)(ص)^{٥}$ دص $= \int_{-١}^{٠} (ص^{٢} - ١)(ص)^{٥}$ دص

$= \int_{-١}^{٠} (ص^{٧} - ص^{٥})$ دص $= \left| \frac{ص^{٨}}{٨} - \frac{ص^{٦}}{٦} \right|_{-١}^{٠} = \frac{١}{٢٤}$

تمارين (٥-٤) صفحة ١٩٣

السؤال الاول: أ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا^{٢}س دس $= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{١}{٢}(١ -$ جتا٢س) دس $= \frac{\pi}{٢} - \frac{\pi ٢}{٢}$ جا $= ٠ - \frac{\pi}{٢}$

ب) $\int_{٠}^{٢} (١ + هـ^{س})^{٢}$ دس $= \int_{٠}^{٢} (١ + ٢هـ^{س} + هـ^{٢س})$ دس $= (س + ٢هـ^{س} + \frac{١}{٢} هـ^{٢س}) \Big|_{٠}^{٢}$

$= (٢ + ٢هـ^{٢} + \frac{هـ^{٤}}{٢}) - (٠ + ٢هـ^{٠} + \frac{هـ^{٠ \times ٢}}{٢}) = \frac{هـ^{٤}}{٢} + ٢هـ^{٢} - \frac{١}{٢}$

جـ) $\int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (س + ١)(س^{٢} + ٤)$ دس $= \int_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} (س^{٣} + س^{٢} + ٤س + ٤)$ دس

$= (\frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢} + ٤س) \Big|_{-\sqrt{٣}}^{\sqrt{٣}} = ١٠\sqrt{٣}$

د) $\int_{-٢}^{١} \frac{س^{٣}-٢٧}{س^{٢}+٣س+٩}\,ds = \int_{-٢}^{١} \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{س^{٢}+٣س+٩}\,ds$

$= \int_{-٢}^{١} (س-٣)\,ds = \left(\frac{س^{٢}}{٢}-٣س\right)\Big|_{-٢}^{١} = \frac{-٢١}{٢}$

السؤال الثاني: أ) **نفرض** $ق(س) = س^{٢}+٢-(٢س-١) = س^{٢}-٢س+٣$

لاحظ ان $ق(س) \geq ٠$ **دائما لان المميز سالب ومنها** $(س^{٢}+٢)-(٢س-١) \geq ٠$

$(س^{٢}+٢) \geq (٢س-١)\ \forall س \in [١،٢]$ أي ان $\int_{١}^{٢}(س^{٢}+٢)\,ds \geq \int_{١}^{٢}(٢س-١)\,ds$

ب) **لا حظ ان** $س^{٢}+٢ \geq ٠$ ، $\forall س، ع \in$ ، **و حسب خاصية المقارنة**

$\int_{٢}^{٣}(س^{٢}+٢س)\,ds \geq ٠$

السؤال الثالث: أ) $\int_{١}^{٧} س^{٣}\,ds = \int_{١}^{٥} س^{٣}\,ds + \int_{٥}^{٧} س^{٣}\,ds$

ب) $\int_{١}^{٢} |س+٢|\,ds - \int_{٤}^{٢} |س+٢|\,ds$

$= \int_{١}^{٢} |س+٢|\,ds + \int_{٢}^{٤} |س+٢|\,ds = \int_{١}^{٤} |س+٢|\,ds$

ج) $\int_{١}^{٣} س^{٢}\,ds - \int_{٣}^{١} ٤\,ds + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds =$

$= \int_{١}^{٣} س^{٢}\,ds + \int_{١}^{٣} ٤\,ds + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds = \int_{١}^{٣}(س^{٢}+٤)\,ds + \int_{٣}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds$

$= \int_{١}^{٥}(س^{٢}+٤)\,ds$

د) $\int_{٢}^{٧}(س-١)\,ود س + \int_{٧}^{٧}\frac{١-س^{٢}}{س+١}\,ود س = \int_{٢}^{٧}(س-١)\,ود س + \int_{٧}^{٧}\frac{(س-١)(س+١)}{س+١}\,ود س$

$= \int_{٢}^{٧}(س-١)\,ود س + \int_{٧}^{٧}(١-س)\,ود س = \int_{٢}^{٧}(س-١)\,ود س + \int_{٧}^{٧}(س-١)\,ود س$

$= \int_{٢}^{٧}(س-١)\,ود س$

السؤال الرابع: $\int_{١}^{٧} و(س)\,ود س = ٧$

أ) $\int_{١}^{٢}(٢و(س) - ٣س + ١)\,ود س = ٢\int_{١}^{٢} و(س)\,ود س - ٣\int_{١}^{٢} س\,ود س + \int_{١}^{٢} ود س$

$= ٢ \times ٧ - ٣(١ ٢) + ٤ = -١٨$

ب) $\int_{١}^{١٢}و(س)\,ود س = ١٢ا = ٧ \times ١٢ا = ١$ ومنها $ا = \frac{١}{١٢}$

السؤال الخامس: $\forall س \in [\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٤}]$ ، جتاس ≤ جاس

$-$جتاس ≥ $-$جاس

١ $-$ جتاس ≥ ١ $-$ جاس

ومنها $\frac{٢}{١-\text{جتاس}} \leq \frac{٢}{١-\text{جاس}}$

$\frac{-٢}{١-\text{جتاس}} \geq \frac{-٢}{١-\text{جاس}}$

$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}\frac{-٢}{١-\text{جتاس}}\,ود س \geq \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}\frac{-٢}{١-\text{جاس}}\,ود س$

السؤال السادس: $\int_{1}^{0} ن(س)\,ءس = ٨$

أ) $\int_{1}^{0} (٣ن(س) - ٢)\,ءس = ٣\int_{1}^{0} ن(س)\,ءس - ٢\int_{1}^{0} ءس$

$٣ \times ٨ - ٢ \times ٤ = ١٦$

ب) $\int_{٣}^{٧} (٤ن(س - ٢) - ٢س)\,ءس$

بفرض ص $= س - ٢$ وتبديل حدود التكامل يصبح $\int_{٣}^{٧} ن(س - ٢)\,ءس = \int_{1}^{0} ن(ص)\,ءص$

$\int_{٣}^{٧} (٤ن(س - ٢) - ٢س)\,ءس = ٤\int_{1}^{0} ن(ص)\,ءص - ٢\int_{٣}^{٧} س\,ءس = ٤ \times ٨ - ٤٠ = -٨$

السؤال السابع:

$\int_{٢}^{٧} ٣ن(س)\,ءس = ٩ ، \int_{٢}^{٤} ٥ن(س)\,ءس = ١٠$

$\int_{٤}^{٧} ٢ن(س)\,ءس = ٢\int_{٤}^{٧} ن(س)\,ءس = ٢(\int_{٤}^{٢} ن(س)\,ءس + \int_{٢}^{٧} ن(س)\,ءس)$

$٢(-\int_{٢}^{٤} ن(س)\,ءس + \int_{٢}^{٧} ن(س)\,ءس)$

$٢(-٢ + ٣) = ٢$

السؤال الثامن: $\int_{1}^{٣} ن(س)\,ءس = ١٨$

$\int_{1}^{٢} (أس + ١)\,ءس + ٣\int_{٢}^{٣} س^{٢}\,ءس = ١٨$

$أ(\frac{-٤}{٢}) + ١ + (٨ - ٢٧) = ١٨$

$\frac{أ٣}{٢} = -٢ \Leftarrow أ = -\frac{٤}{٣}$

السؤال التاسع: $\int_{-1}^{2} 3ع^2 \, دع = ع^3 \Big|_{-1}^{2} = 9$ فيكون

$$\int_{1}^{ب} (4س - \int_{-1}^{2} 3ع^2 \, دع) دس = \int_{1}^{ب} (4س - 9) دس = 12$$

ومنها $2ب^2 - 9ب - 5 = 0$ أي أن $(2ب + 1)(ب - 5) = 0$

$ب = -\frac{1}{2}$ ، $ب = 5$

السؤال العاشر: $ن(س) = |س - 2| = \begin{cases} 2 - س ، 0 \leq س \leq 2 \\ س - 2 ، 2 \leq س \leq 5 \end{cases}$

١) عندما $0 \leq س \leq 2$ ، فإن $ت(س) = \int_{0}^{س} ن(ص) \, دص = \int_{0}^{س} (2 - ص) دص = 2س - \frac{س^2}{2}$

٢) عندما $2 \leq س \leq 5$ فإن $ت(س) = \int_{0}^{2} ن(ص) \, دص = \int_{0}^{2} (2 - ص) دس + \int_{2}^{س} ن(ص) \, دص$

$= ت(2) + \int_{2}^{س} (ص - 2) دص = 2 + (\frac{س^2}{2} - 2س + 2)$ ومنها

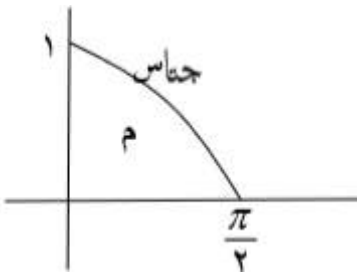
$$ت(س) = \begin{cases} 2س - \frac{س^2}{2} ، 0 \leq س < 2 \\ \frac{س^2}{2} - 2س + 4 ، 2 \leq س \leq 5 \end{cases}$$

تمارين (٥-٤أ) صفحة ٢٠٠

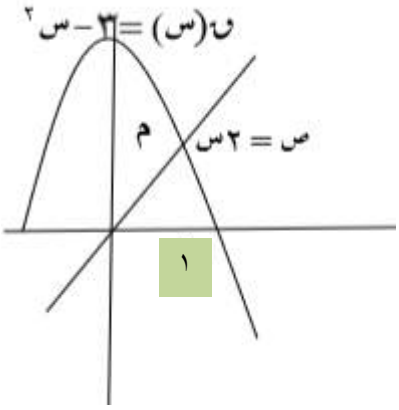
السؤال الاول :

$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |ن(س)| دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس دس$

$= جا\frac{\pi}{2} - جا(0) = 1$ وحدة مساحة



السؤال الثاني: معادلة المستقيم



المار بالنقطتين أ(٠،٠) ، ب(١، ٢) هي

$$\frac{\text{ص}-٠}{\text{س}-٠}=\frac{٢-٠}{١-٠}\Leftarrow \text{ص}=٢\text{س}$$

نجد نقاط تقاطع ق(س) والمستقيم ص = ٢س ⇐ هـ(س) = ٢س

$$٣-\text{س}^{٢}=٢\text{س}$$

$$\Leftarrow ٠=\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣=(\text{س}+٣)(\text{س}-١)$$

⇐ **س=١ أو س= -٣ ترفض**

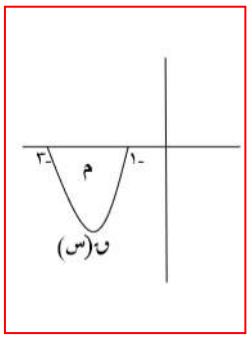
$$\text{م}=\int_{٠}^{١}\left|\text{ن}(\text{س})-\text{هـ}(\text{س})\right|\text{د س}=\int_{٠}^{١}\left(٣-\text{س}^{٢}-٢\text{س}\right)\text{د س}$$

$$=٣(١-٠)-\frac{١-٠}{٣}-٢\times\frac{١-٠}{٢}=\frac{٥}{٣}\text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الثالث:

$$\text{ن}(\text{س})=\left(\text{س}^{٢}-٩\right)\left(\text{س}^{٢}-١\right)\Leftarrow ٠=(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)(\text{س}-١)(\text{س}+١)$$

ومنها س=٣ أو س=١ ترفض لأن المساحة في الربع الثالث ، س=-٣ ، س=-١



$$\text{م}=\int_{-٣}^{-١}\left|\text{ن}(\text{س})\right|\text{د س}=\int_{-٣}^{-١}\left(\text{س}^{٢}-١\right)\left(\text{س}^{٢}-٩\right)\text{د س}$$

$$=\int_{-٣}^{-١}\left(\text{س}^{٤}-١٠\,\text{س}^{٢}+٩\right)\text{د س}=$$

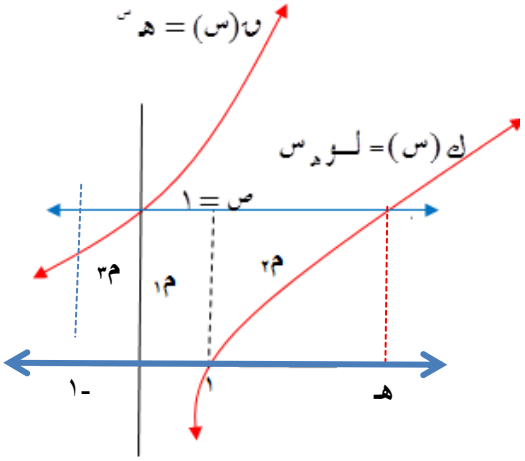
$$=\left(\left(٣+١^{-}\right)\times٩+\frac{\left(٣^{-}\right)^{٣}-\left(١^{-}\right)^{٣}}{٣}\times١٠-\frac{\left(٣^{-}\right)^{٥}-\left(١^{-}\right)^{٥}}{٥}\right)^{-}=\frac{٣٠٤}{١٥}\text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الرابع :

نجد نقاط التقاطع بين

أولا : ق، ص $\Leftarrow$ هـ^{س} = ١ $\Leftarrow$ س = ٠

ثانيا : ك ، ص $\Leftarrow$ لـو$_{هـ}$ س = ١ $\Leftarrow$ س = هـ



م = م١ + م٢ + م٣

$$م_{١} = \int_{٠}^{١} ١ \, ءس = ١(١-٠) = ١ \text{ وحدة مساحة}$$

$$م_{٢} = \int_{١}^{هـ} (١ - لـو_{هـ} س) \, ءس = \int_{١}^{هـ} ١ \, ءس - \int_{١}^{هـ} لـو_{هـ} س \, ءس$$

$$= ١(هـ-١) - \left(س لـو_{هـ} س |_{١}^{هـ} - \int_{١}^{هـ} س \times \frac{١}{س} \, ءس \right)$$

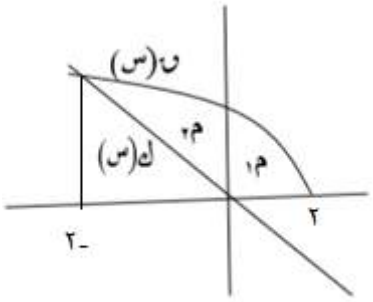
$$= هـ - ١ - (هـ - ١(هـ - ٠)) = هـ - ٢ \text{ وحدة مساحة}$$

$$م_{٣} = \int_{-١}^{٠} هـ^{س} \, ءس = هـ^{س} |_{-١}^{٠} = \left(١ - \frac{١}{هـ}\right)$$

$$م = م_{١} + م_{٢} + م_{٣} = ١ + هـ - ٢ + ١ - \frac{١}{هـ} = هـ - \frac{١}{هـ} \text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الخامس:

نجد نقاط التقاطع بين ن(س) ، ك(س) $\Leftarrow$ $س^{٢} = ٢ - س$



$\leftarrow$ س = -٢ أو س= ١ ترفض

م = م١ + م٢

$$م_{١} = \int_{٠}^{٢} ن(س) \, ءس = \int_{٠}^{٢} |٢ - \sqrt{س}| \, ءس$$

$$= \left| \frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-١ \times \frac{٣}{٢}} \right|_{٠}^{٢} = \left| -\frac{٢}{٣} (٢ - \sqrt{س})^{٣} \right|_{٠}^{٢}$$

$$= -\frac{٢}{٣}(-٢\sqrt{٢}) = \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

$$م_{٢} = \int_{-٢}^{٠} \left| ن(س) - ك(س) \right| د س = \int_{-٢}^{٠} \left(\sqrt{٢ - س} - \left(\frac{-س}{٢} \right) \right) د س$$

$$= \left| \frac{(٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-١ \times \frac{٣}{٢}} + \frac{س^{٢}}{٢} \right|_{-٢}^{٠} = \frac{-٢}{٣}(٢ - \sqrt{٢}٨) + \frac{٠ - ٤}{٢} = \frac{١٠}{٣} - \frac{\sqrt{٢}٤}{٣}$$ وحدة مساحة

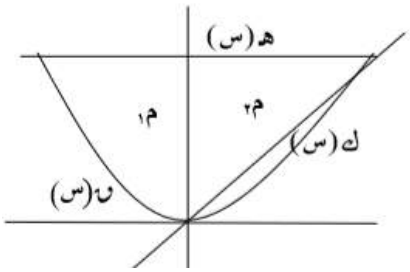
$$م = \frac{\sqrt{٢}٤}{٣} + \frac{١٠}{٣} - \frac{\sqrt{٢}٤}{٣} = \frac{١٠}{٣}$$ وحدة مساحة

السؤال السادس:

$ن(س) = هـ(س) \leftarrow س = \pm ٢$

$ن(س) = ك(س) \leftarrow س^{٢} = ٢س \leftarrow س = ٠$ أو $س = ٢$

$هـ(س) = ك(س) \leftarrow س = ٢$



م = م١ + م٢

$$م_{١} = \int_{-٢}^{٠} \left(هـ(س) - ن(س) \right) د س = \int_{-٢}^{٠} \left(٤ - س^{٢} \right) د س$$

$$= ٤(٠ + ٢) + \frac{٠ - (-٢)^{٣}}{٣} = ٨ - \frac{٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$$ وحدة مساحة

$$م_{٢} = \int_{٠}^{٢} \left(هـ(س) - ك(س) \right) د س$$

$$= \int_{٠}^{٢} (٤ - ٢س) د س = ٤(٢ - ٠) - ٢ \times \frac{٠ - ٤}{٢} = ٤$$ وحدة مساحة

$$م = \frac{١٦}{٣} + ٤ = \frac{٢٨}{٣}$$ وحدة مساحة

تمارين (٥-٤ب) صفحة ٢٠٥

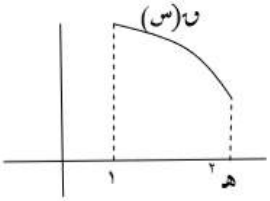
السؤال الأول: $ن(س) = ٤$ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س=٥ حول السينات

الحل : $ح = \pi \int_{٠}^{٥} ن^{٢}(س) د س = \pi \int_{٠}^{٥} ١٦ د س$

$= ١٦ \pi (٥ - ٠) = ٨٠ \pi$ وحدة حجم

السؤال الثاني:

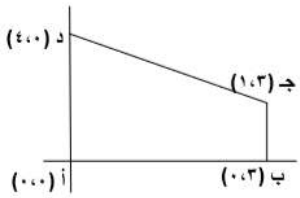
$ن(س) = \frac{٤}{\sqrt{س}}$ ومحور السينات والمستقيمين $س = ١ ، س = هـ^{٢}$ حول السينات



الحل : $ح = \pi \int_{١}^{هـ^{٢}} ن^{٢}(س) ء س = \pi \int_{١}^{هـ^{٢}} \frac{١٦}{س} ء س$

$= ١٦\pi (لـو_{هـ} هـ^{٢} - لـو_{هـ} ١) = ١٦\pi (٢ - ٠) = ٣٢\pi$ وحدة حجم

السؤال الثالث:



معادلة المستقيم جـ د هي

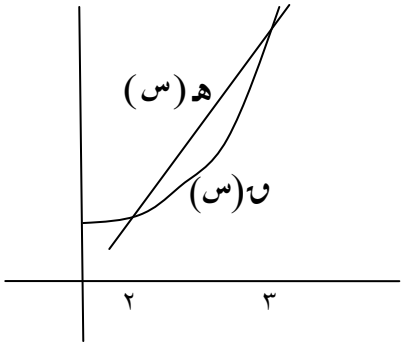
$\frac{ص - ٤}{س - ٠} = \frac{١ - ٤}{٠ - ٣} \leftarrow \frac{ص - ٤}{س - ٠} = ^{-}١ \leftarrow ص = ^{-}س + ٤$

$ح = \pi \int_{٠}^{٣} (٤ + ^{-}س)^{٢} ء س = \left| \frac{\pi (٤ + ^{-}س)^{٣}}{٣ \times ^{-}١} \right|_{٠}^{٣}$

$\frac{\pi^{-}}{٣}(١ - ٤^{٣}) = \frac{\pi ٦٣}{٣} = ٢١\pi$ وحدة حجم

السؤال الرابع :

$ن(س) = س^{٢} + ٦$ ، $هـ(س) = ٥س$ حول السينات



الحل : نجد نقاط التقاطع بين $ن(س)$ ، $هـ(س)$

$س^{٢} + ٦ = ٥س \leftarrow س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

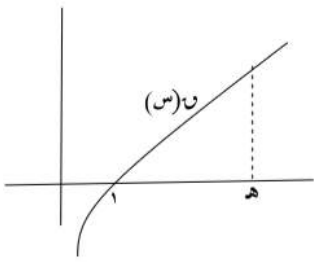
$\Leftarrow (س - ٢)(س - ٣) = ٠ \leftarrow س = ٢ ، س = ٣$

$= \pi \int_{٢}^{٣} (هـ^{٢}(س) - ن^{٢}(س)) ء س$

$= \pi \int_{٢}^{٣} (٢٥س^{٢} - (س^{٤} + ١٢س^{٢} + ٣٦)) ء س = \pi \int_{٢}^{٣} (١٣س^{٢} - س^{٤} - ٣٦) ء س$

$= \pi \left(١٣ \times \frac{٣^{٣} - ٢^{٣}}{٣} - \frac{٣^{٥} - ٢^{٥}}{٥} - ٣٦(٣ - ٢) \right) = \frac{\pi ٦٢}{١٥}$ وحدة حجم

السؤال الخامس:



ن(س)=لـو$_{هـ}$ س ومحور السينات ، س = ١، س = هـ

ع = $\pi \int_{١}^{هـ} ن^{٢}(س) ءس = \pi \int_{١}^{هـ} (لـو_{هـ} س)^{٢} ءس$ بالتعويض

نفرض أن

ص=لـو$_{هـ}$ س $\Leftarrow$ س = هـ^{ص}

ءص=$\frac{١}{س}$ءس $\Leftarrow$ هـ^{ص}ءص = ءس

عندما س=١ $\Leftarrow$ ص = ٠ ، س=هـ $\Leftarrow$ ص = ١

ع = $\pi \int_{٠}^{١} ص^{٢} \times هـ^{ص} ءس$ **نكامل بالأجزاء**

نفرض أن ن(س)=ص^{٢} $\Leftarrow$ ءن = ٢صءص

ونفرض أن ءو= هـ^{ص}ءص $\Leftarrow$ و= هـ^{ص}

$$ع = \pi \left(ص^{٢} هـ^{ص} \Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} ءص \right) = \pi \left(هـ - ٠ - \int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} ءص \right)$$

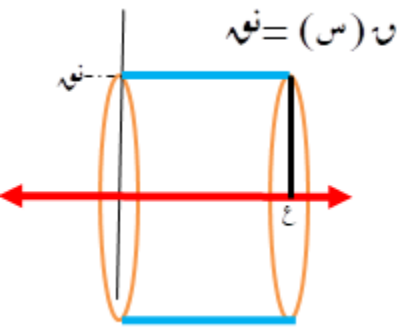
نجد $\int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} ءص$ **بالأجزاء**

نفرض أن ن=٢ص $\Leftarrow$ ءن = ٢ءص ، ءو= هـ^{ص}ءص $\Leftarrow$ و= هـ^{ص}

$$\int_{٠}^{١} ٢ص \times هـ^{ص} ءص = ٢ص \times هـ^{ص} \Big|_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} ٢هـ^{ص} ءص = ٢هـ - ٠ - ٢(هـ - ١) = ٢$$

ع = π (هـ − ٢) **وحدة حجم**

السؤال السادس :



الحل: نجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين
ن(س) =نهـ ومحوري الاحداثيات والمستقيم س = ع دورة كاملة حول محور السينات

ع = $\pi \int_{٠}^{ع} ن^{٢}(س) ءس = \pi \int_{٠}^{ع} نهـ^{٢س} ءس$

= πنهـ^{٢} (ع − ٠) = πنهـ^{٢} ع **وحدة حجم**

السؤال السابع:

$ص(س) = \frac{٤}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ ومحور السينات والمستقيمين

س=٢ ، س=٣ دورة كاملة حول محور السينات

الحل : $ع = \pi \int_{٢}^{٣} ص^{٢}(س) \, ءس = \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{س^{٢} - ١} \, ءس$

$= \pi \int_{٢}^{٣} \frac{١٦}{(س-١)(س+١)} \, ءس$ **نكامل بالكسور الجزئية**

$$\frac{١٦}{(س-١)(س+١)} = \frac{ا}{س-١} + \frac{ب}{س+١}$$

$$١٦ = ا(س+١) + ب(س-١) \leftarrow$$

عندما $س = ١ \Leftarrow ١٦ = ٢ا \Leftarrow ا = ٨$ ، $س = -١ \Leftarrow ١٦ = -٢ب \Leftarrow ب = -٨$

$$ع = \pi \left(\int_{٢}^{٣} \frac{٨}{س-١} \, ءس + \int_{٢}^{٣} \frac{-٨}{س+١} \, ءس \right)$$

$$ح = \pi \left(٨(لـو_{هـ}(٣-١) - لـو_{هـ}(٢-١)) - ٨(لـو_{هـ}(٣+١) - لـو_{هـ}(٢+١)) \right)$$

$= ٨\pi لـو_{هـ} ٣ - ٨\pi لـو_{هـ} ٢ = ٨\pi (لـو_{هـ} \frac{٣}{٢})$ **وحدة حجم**

تمارين عامة (الوحدة الخامسة) صفحة ٢٠٦

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الاجابة	ب	أ	ج	أ	د	ج	ب	ب	ج	ج

السؤال الثاني :

$\sigma_{١٢}$ ، $س_{٣} = ٧$ ، $[ا، ب]$ **جد** ا، ب

$$س_{ر} = ا + \frac{ب - ا}{٨} ر$$

$$س_{٦} = ا + \frac{ب - ا}{١٢} \times ٦ \leftarrow ١٢ = ا + \frac{ب - ا}{٢} \leftarrow ٢٤ = ا + ب \quad \text{-----(١)}$$

$$س_{٣} = ا + \frac{ب - ا}{١٢} \times ٣ \leftarrow ٧ = ا + \frac{ب - ا}{٤} \leftarrow ٢٨ = ا + ب \quad \text{-----(٢)}$$

$$٢٨ = ٩ + ب$$
$$٢٤ = ١ + ب$$

$$٤ = ٩ \leftarrow ١ = ٢ \Leftarrow ٢٤ = ٢ + ب \leftarrow ب = ٢٢$$

السؤال الثالث:

$$هـ(س) = ٣ن(س) + س$$

$$م(\sigma_{٤}\ ،ن(س)) = ٦\ ،\ س \in [١\ ،٢]$$

$$م(\sigma_{٤}\ ،ن(س)) = \frac{١٠ - ٢}{٤} = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}^{*}) \Leftarrow ٦ = \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}) \Leftarrow \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}) = ٣$$

$$م(\sigma_{٤}\ ،هـ(س)) = \frac{١٠ - ٢}{٤} \sum_{ر=١}^{٤} هـ(س_{ر}^{*}) = ٢ \sum_{ر=١}^{٤} (٣ن(س_{ر}^{*}) + س_{ر}^{*})$$

$$= ٦ \sum_{ر=١}^{٤} ن(س_{ر}) + ٢ \sum_{ر=١}^{٤} س_{ر} = ٦ \times ٣ + ٢ \sum_{ر=١}^{٤} (٢ر + ٢)$$

$$= ١٨ + ٢\left(٢ \times ٤ + ٢ \frac{٤ \times (١+٤)}{٢}\right) = ١٨ + ٥٦ = ٧٤$$

السؤال الرابع:

$$ن(س) = ٣س\ ،[١\ ،٥]\ ،س_{ر}^{*} = س_{ر}$$

$$م(\sigma_{٤}\ ،ن(س)) = \frac{ب - ١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ن(س_{ر}^{*})$$

$$= \frac{٥ - ١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ٣س_{ر} = \frac{٤}{ن} \times ٣ \sum_{ر=١}^{ن} \left(١ + ر\frac{٤}{ن}\right) = \frac{١٢}{ن}\left(ن + \frac{٤}{ن} \times \frac{ن(ن+١)}{٢}\right)$$

$$= \frac{١٢}{ن}(ن + ٢ن + ٢) = \frac{١٢}{ن}(٣ن + ٢) = ٣٦ + \frac{٢٤}{ن}$$

$$\int_{١}^{٣} س\ ٤س = \lim_{ن(س) \to \infty} م(\sigma_{ن}\ ،ن(س)) = \lim_{ن(س) \to \infty} \left(٣٦ + \frac{٢٤}{ن}\right) = ٣٦$$

السؤال الخامس :

نفرض أن $ن(س) = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٢، ٢]$

نجد القيم القصوى

$ن'(س) = \frac{-س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}} = ٠ \Leftarrow$ $س = ٠$ **ومنها تكون قيم س الحرجة هي :** $س = -٢ ، ٠ ، ٢$

$ن(-٢) = \sqrt{٤ - (-٢)^{٢}} = ٠$ ، $ن(٠) = \sqrt{٤ - (٠)^{٢}} = ٢$ ، $ن(٢) = \sqrt{٤ - (٢)^{٢}} = ٠$

اذن

$$٠ \leq ن(س) \leq ٢ \leftarrow \int_{-٢}^{٢} (٠)\,د س \leq \int_{-٢}^{٢} ن(س)\,د س \leq \int_{-٢}^{٢} ٢\,د س \leftarrow ٠ \leq \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\,د س \leq ٨$$

حل آخر: يمكن حل السؤال باستخدام المتباينات

$-٢ \leq س \leq ٢$ **ومنها** $٠ \leq س^{٢} \leq ٤$

$-٤ \leq -س^{٢} \leq ٠$ **وبإضافة ٤ ينتج أن** $٠ \leq ٤ - س^{٢} \leq ٤$

فيكون $٠ \leq \sqrt{٤ - س^{٢}} \leq ٢$ **ومنها** $\int_{-٢}^{٢} ٠\,د س \leq \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\,د س \leq \int_{-٢}^{٢} ٢\,د س$

وينتج أن $٠ \leq \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٤ - س^{٢}}\,د س \leq ٨$

السؤال السادس :

$\int_{ب}^{س} ن(س)\,د س = س^{٢} - \sqrt{س}$ $\leftarrow$ $ت(س) = س^{٢} - \sqrt{س}$

$ن(س) = ت'(س) = ٢س - \frac{١}{٢\sqrt{س}} \leftarrow ن(٤) = ٨ - \frac{١}{٤} = ٧\frac{٣}{٤}$

$ن'(س) = ٢ - \frac{١}{٢} \times \frac{-١}{٢} س^{\frac{-٣}{٢}}$

$ن'(س) = ٢ + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{س^{\frac{٣}{٢}}} \leftarrow ن'(٤) = ٢ + \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٨} = \frac{٦٥}{٣٢}$

السؤال السابع:

ت(٢)=٠ ومنها ٨+٤جـ =٠ إذن جـ =-٢

ت(س) متصل عند س=٣

أ) $\text{نهـــا}_{س\to ٣^+} ت(س) = \text{نهـــا}_{س\to ٣^-} ت(س)$

$$٩ا - ب = ١٨ + ٢ \times ^{-}٢ \times ٣ \leftarrow ٩ا - ب = ٦ \quad \text{------(١)}$$

$$ن(س) = ت'(س) = \begin{cases} ٤س + ^{-}٤ & ٣ \geq س > ٢، \\ ا & ٥ \geq س > ٣، \end{cases}$$

ت'(٣)$^{+}$ = ت'(٣)$^{-}$ ← ا = ٨ نعوض قيمة ا في معادلة (١) فنحصل على ما يلي :

$$٣ \times ٨ - ب = ٦ \leftarrow ب = ١٨$$

ب) $$\int_{٢}^{٤} ن(س)\,ى س = ت(٤) - ت(٢) = (٨ \times ٤ - ١٨) - (٠) = ١٤$$

السؤال الثامن :

أ) $$\int_{١}^{٢} ٦ه(س - ٢)^{٢}(س - ١)^{٥}\,ى س$$ ، **نفرض ان** ص = س − ١ ← س = ص + ١

ى ص=ى س ، س = ١ ← ص = ٠ ، س = ٢ ← ص = ١

$$\int_{١}^{٢} ٦ه(س - ٢)^{٢}(س - ١)^{٥}\,ى س = \int_{٠}^{١} ٦ه(ص + ١ - ٢)^{٢}(ص)^{٥}\,ى ص$$

$$= \int_{٠}^{١} ٦ه(ص - ١)^{٢}(ص)^{٥}\,ى ص = \int_{٠}^{١} ٦ه(ص^{٢} - ٢ص + ١)ص^{٥}\,ى ص$$

$$= \int_{٠}^{١} \left(٦ه ص^{٧} - ١٢ ص^{٦} + ٦ه ص^{٥}\right) ى ص = ٧ص^{٨} - ١٦ ص^{٧} + \frac{٢٨}{٣} ص^{٦} \Big|_{٠}^{١} = \frac{١}{٣}$$

ب) $$\int_{ه}^{ه^{٢}} \text{لـــو}_{ه} س\,ى س$$ **نفرض ان** ن = لـــو$_{ه}$ س ← ى ن = $\frac{١}{س}$ ى س ، ى و = ى س

$$\int_{ه}^{ه^{٢}} \text{لـــو}_{ه} س\,ى س = س\,\text{لـــو}_{ه} س \Big|_{ه}^{ه^{٢}} - \int_{ه}^{ه^{٢}} \frac{١}{س} \times س\,ى س = ٢ه^{٢} - ه^{٢} - ه + ه = ه^{٢}$$

ج) $\int_{٣}^{\infty} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,ءس = \int_{٣}^{\infty} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,ءس$

$$\frac{س+٥}{س(س-١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١} \leftarrow س+٥ = أ(س-١) + بس$$

عندما $س = ٠ \leftarrow ٥ = -أ \leftarrow أ = -٥$ ، $س = ١ \leftarrow ١+٥ = ب \leftarrow ب = ٦$

$$\int_{٣}^{\infty} \frac{س+٥}{س^{٢}-س}\,ءس = \int_{٣}^{\infty} \frac{س+٥}{س(س-١)}\,ءس = \int_{٣}^{\infty} \frac{أ}{س}\,ءس + \int_{٣}^{\infty} \frac{ب}{س-١}\,ءس$$

$$= -\int_{٣}^{\infty} \frac{٥}{س}\,ءس + \int_{٣}^{\infty} \frac{٦}{س-١}\,ءس = -٥(لـو_{هـ}٥ - لـو_{هـ}٣) + ٦(لـو_{هـ}٤ - لـو_{هـ}٢)$$

$$= ٥لـو_{هـ}\frac{٣}{٥} + ٦لـو_{هـ}٢$$

د) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+س^{٢}}\,ءس = \int_{٠}^{٢} |س| \sqrt{س^{٢}+١}\,ءس = \int_{٠}^{٢} س\sqrt{س^{٢}+١}\,ءس$ نكامل بالتعويض

نفرض ان $ص = س^{٢}+١ \leftarrow ءص = ٢سءس \leftarrow ءس = \frac{ءص}{٢س}$

عندما $س = ٠ \leftarrow ص = ١$ ، عندما $س = ٢ \leftarrow ص = ٥$ ،

$$\int_{٠}^{٢} \sqrt{س^{٤}+س^{٢}}\,ءس = \int_{٠}^{٢} س\sqrt{س^{٢}+١}\,ءس = \int_{١}^{٥} س\sqrt{ص}\,\frac{ءص}{٢س}$$

$$= \int_{١}^{٥} \frac{١}{٢}\sqrt{ص}\,ءص = \frac{١}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}\Big|_{١}^{٥} = \frac{١}{٣}\left(\left(\sqrt{٥}\right)^{٣}-١\right)$$

هـ) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}\sqrt{س^{٢}+١}}\,ءس = \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٣}\times\sqrt{\frac{١}{س^{٢}}+١}}\,ءس$ نكامل بالتعويض

نفرض ان $ص = ١ + \frac{١}{س^{٢}} \leftarrow ءص = \frac{-٢س}{س^{٤}}ءس \leftarrow -\frac{س^{٣}}{٢}ءص = ءس$

$$\int \frac{1}{س^{2}\sqrt{س^{2}+1}}\,د س = \int \frac{1}{س^{3}\times \sqrt{\frac{1}{س^{2}}+1}}\,د س = \int \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{ص}}\,د ص$$

$$= -\frac{1}{2}\int ص^{-\frac{1}{2}}\,د ص = -\sqrt{ص}$$

$$\therefore \int_{1}^{2} \frac{1}{س^{2}\sqrt{س^{2}+1}}\,د س = -\left[\sqrt{\frac{1}{س^{2}}+1}\right]_{1}^{2} = \frac{-\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{2}$$

السؤال التاسع :

$$\int_{7}^{3} ن(س-2)\,د س = \int_{5}^{1} ن(س)\,د س \text{ وذلك بفرض ان } ص = س-2 \leftarrow د ص = د س$$

عندما $س = 7 \leftarrow ص = 5$ ، **وعندما** $س = 3 \leftarrow ص = 1$

$$\int_{3}^{-1} هـ(س+2)\,د س = \int_{5}^{1} هـ(س)\,د س \text{ وذلك بفرض ان } ص = س+2 \leftarrow د ص = د س$$

عندما $س = 3 \leftarrow ص = 5$ ، **وعندما** $س = -1 \leftarrow ص = 1$

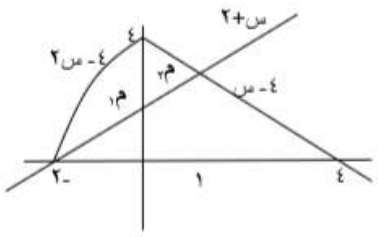
$$ن(س) \leq هـ(س) ، س \in [1،5] \leftarrow \int_{1}^{5} ن(س)\,د س \leq \int_{1}^{5} هـ(س)\,د س$$

$$\leftarrow -\int_{1}^{5} ن(س)\,د س \geq -\int_{1}^{5} هـ(س)\,د س \leftarrow \int_{5}^{1} ن(س)\,د س \geq \int_{5}^{1} هـ(س)\,د س$$

$$\leftarrow \int_{7}^{3} ن(س-2)\,د س \geq \int_{3}^{-1} هـ(س+2)\,د س \text{ وهو المطلوب}$$

مكتبة الملتقى التربوي

السؤال العاشر :



١) نجد نقاط تقاطع $ن(س)$ ، $هـ(س)$ **عندما**

$س \geq ٠ \leftarrow س + ٢ = ٤ - س^{٢} \leftarrow س^{٢} + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠ \leftarrow س = -٢$ ، $س = ١$ **ترفض**

$$\leftarrow م_{١} = \int_{-٢}^{٠} (٤ - س^{٢} - س - ٢) ءس = \int_{-٢}^{٠} (٢ - س^{٢} - س) ءس$$

$$= ٢(٠ + ٢) - \frac{٠ - (-٢)^{٣}}{٣} - \frac{٠ - (-٢)^{٢}}{٢} = \frac{١٠}{٣}$$ **وحدة مساحة**

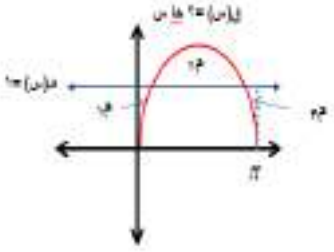
عندما $س > ٠ \leftarrow س + ٢ = ٤ - س \leftarrow ٢س = ٢ \leftarrow س = ١$

$$\leftarrow م_{٢} = \int_{٠}^{١} (٤ - س - س - ٢) ءس = \int_{٠}^{١} (٢ - ٢س) ءس$$

$$= ٢(١ - ٠) - ٢ \times \frac{١ - ٠}{٢} = ٢ - ١ = ١$$ **وحدة مساحة**

م = م١ + م٢ = $\frac{١٠}{٣} + ١ = \frac{١٣}{٣}$ **وحدة مساحة**

٢) $ن(س) = ٢جاس$ ، $هـ(س) = ١$ ، $س \in [٠ ، \pi]$



$ن(س) = هـ(س) \leftarrow ٢جاس = ١ \leftarrow جاس = \frac{١}{٢}$

$س = \frac{\pi}{٦}$ ، $س = \frac{\pi ٥}{٦}$

م = م١ + م٢+م٣

$$م_{١} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} (١ - ٢جاس) ءس = س + ٢جتاس \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$$ **وحدة مساحة**

$$م_{٢} = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi٥}{٦}} (٢جاس - ١)ءس = -٢جتاس - س \Big|_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi٥}{٦}} = ٢\sqrt{٣} - \frac{\pi٢}{٣}$$ وحدة مساحة

$$م_{٣} = \int_{\frac{\pi٥}{٦}}^{\pi} (١ - ٢جاس)ءس = س + ٢جتاس \Big|_{\frac{\pi٥}{٦}}^{\pi} = \frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢$$ وحدة مساحة

$$م = ٢(\frac{\pi}{٦} + \sqrt{٣} - ٢) + ٢\sqrt{٣} = \frac{\pi٢}{٣} - \sqrt{٣} ٤ - \frac{\pi}{٣} - ٤$$ وحدة مساحة

السؤال الحادي عشر :

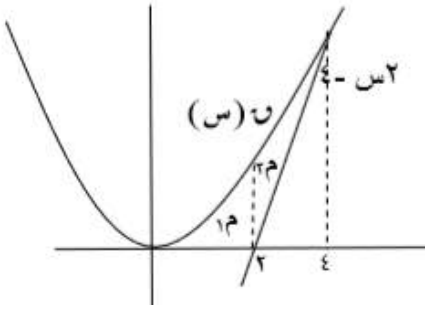
$$ب = \int_{١}^{٣} جتا^{٢}س ءس = ا ، \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + هـ^{س}) ءس$$

$$ا + ب = \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + هـ^{س}) ءس + \int_{١}^{٣} جتا^{٢}س ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} (جا^{٢}س + جتا^{٢}س + هـ^{س}) ءس$$

$$= \int_{١}^{٣} (١ + هـ^{س}) ءس = ١(٣ - ١) + هـ^{٣} - هـ^{١} = ٢ + هـ^{٣} - هـ$$

السؤال الثاني عشر :



ن(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢} والمماس المرسوم له عند (٤، ٤) ومحور السينات

ن′(س) = $\frac{١}{٢}$ س ← ميل المماس = ن′(٤) = ٢

معادلة المماس هي ص - ٤ = ٢(س - ٤)

ص = ٢س - ٤

م = م١ + م٢

$$م_{١} = \int_{٠}^{٢} ن(س) ءس = \int_{٠}^{٢} \frac{١}{٤} س^{٢} ءس$$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2^{3} - 0^{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}$ وحدة مساحة

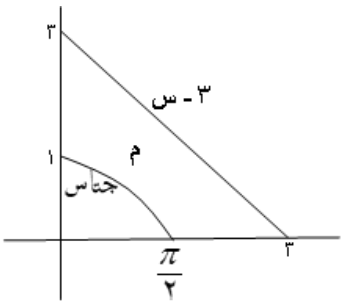
$م_{2} = \int_{2}^{4} \left(ق(س) - ص\right) د س = \int_{2}^{4} \left(\frac{1}{4} س^{2} - 2س + 4\right) د س$

$= \frac{1}{4} \times \frac{4^{3} - 2^{3}}{3} - 2 \times \frac{4^{2} - 2^{2}}{2} + 4(4-2) = \frac{2}{3}$ وحدة مساحة

$م = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ وحدة مساحة

السؤال الثالث عشر:

$ق(س) = جتاس$ ، $ص = 3 - س$ والمحورين الاحداثيين



$م = \int_{0}^{3} (3 - س) د س - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس د س$

$= 3(3-0) - \frac{3^{2} - 0^{2}}{2} - \left(جا\left(\frac{\pi}{2}\right) - جا(0)\right)$

$= 9 - \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$ وحدة مساحة

السؤال الرابع عشر:

أ) ف(٥) = بعد الجسم عن النقطة وعندما ن=٥ ثواني

$ف(٥) = \int_{0}^{5} ع(ن) د ن = \int_{0}^{2} 5ن^{2} د ن + \int_{2}^{5} (24 - 2ن) د ن$

$= 5 \times \frac{2^{3} - 0^{3}}{3} + 24(5-2) - 2 \times \frac{25 - 4}{2}$

$= 51 + \frac{40}{3} = \frac{153 + 40}{3} = \frac{193}{3}$ م

ب) $ع(ن) = 0$ عندما $0 \geq ن \geq 12 \leftarrow 5ن^{2} = 0 \leftarrow ن = 0$

عندما $2 < ن \leq 12 \leftarrow 24 - 2ن = 0 \leftarrow ن = 12$ يتوقف الجسم عن الحركة عندما ن=١٢

$ف(12) = \int_{0}^{12} ع(ن) د ن = \int_{0}^{2} 5ن^{2} د ن + \int_{2}^{12} (24 - 2ن) د ن$

$= \frac{40}{3} + 240 - 140 = 100 + \frac{40}{3} = \frac{340}{3}$ وحدة مسافة

السؤال الخامس عشر:

$ن'(س) = ن(س)$ ، $ن(س) \neq ٠$

أ) نفرض ان $ص = ن(س) \leftarrow ٥ص = ن'(س) ٥س \leftarrow ٥س = \frac{٥ص}{ن'(س)} \leftarrow ٥س = \frac{٥ص}{ص}$

$$\int (ن(س))^{ن} ٥س = \int ص^{ن} \times \frac{٥ص}{ص} = \int ص^{ن-١} \times ٥ص$$

$$= \frac{ص^{ن}}{ن} + جـ = \frac{١}{ن}(ن(س))^{ن} + جـ \quad : جـ \in ح$$

ب) $ن'(س) = ن(س) \leftarrow \frac{ن'(س)}{ن(س)} = ١$

$$\int \frac{ن'(س)}{ن(س)} ٥س = \int ١ ٥س \leftarrow \text{لو}_{هـ}|ن(س)| = س + جـ$$

$$|ن(س)| = هـ^{س+جـ} \leftarrow ن(س) = \pm هـ^{س}$$

السؤال السادس عشر :

$$\int_{ب}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢س}{س+١} ٥س = ؟ \text{ ما قيمة } \int_{ب}^{\pi} \frac{\text{جتا}س}{(س+٢)^{٢}} ٥س$$

نفرض ان $ص = ٢س \leftarrow س = \frac{ص}{٢} \leftarrow ٥س = \frac{٥ص}{٢}$

عندما $س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow ص = \pi$ ، $س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$$؟ = \int_{ب}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢س}{س+١} ٥س = \int_{ب}^{\pi} \frac{\text{جا}ص}{\frac{ص}{٢}+١} \times \frac{٥ص}{٢} \leftarrow ؟ = \int_{ب}^{\pi} \frac{\text{جا}ص}{ص+٢} \times ٥ص$$

$$\int_{ب}^{\pi} \frac{\text{جتا}س}{(س+٢)^{٢}} ٥س = \int_{ب}^{\pi} (س+٢)^{-٢} \text{جتا}س \, ٥س$$ **نكامل بالاجزاء**

نفرض ان $ن(س) = \text{جتا}س \leftarrow ٥ن = -\text{جا}س ٥س$

$$\text{ه}\,د = (س+٢)^{-٢}\,د س \leftarrow \text{ه} = -(س+٢)^{-١}$$

$$\int_{\cdot}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(س+٢)^{٢}}\,د س = \left|\frac{-\text{جتاس}}{(س+٢)}\right|_{\cdot}^{\pi} - \int_{\cdot}^{\pi} \frac{\text{جاس}}{س+٢}\,د س = \frac{١}{٢+\pi} + \frac{١}{٢} - ١$$

السؤال السابع عشر:

$$\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س)}{س^{٢}}\,د س = \int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س)}{س^{٢}}\,د س - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(س)}{س^{٢}}\,د س$$

نكامل الجزء الأول بالأجزاء $\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س)}{س^{٢}}\,د س$

نفرض أن: $ص = \frac{١}{س}$ $\quad د ع = \text{ك}'(س)\,د س$

$\therefore د ص = \frac{-١}{س^{٢}}\,د س$ $\quad ع = \text{ك}(س)$

فيكون $\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س)}{س^{٢}}\,د س = \left|\frac{\text{ك}(س)}{س}\right|_{١}^{٣} + \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(س)}{س^{٢}}\,د س - \int_{١}^{٣} \frac{\text{ك}(س)}{س^{٢}}\,د س$

ومنها $\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س)}{س^{٢}}\,د س = \frac{\text{ك}(٣)}{٣} - \frac{\text{ك}(١)}{١} = -٢ - \frac{٦}{٣} = \cdot$

حل آخر: نفرض ان $ن(س) = \frac{\text{ك}(س)}{س} \leftarrow ن'(س) = \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س) \times ١}{س^{٢}}$

$$\int_{١}^{٣} \frac{س\,\text{ك}'(س) - \text{ك}(س)}{س^{٢}}\,د س = \int_{١}^{٣} ن'(س)\,د س = ن(٣) - ن(١)$$

$$\text{ك}(٣) = ٣\,\text{ك}(١) = ٦ \leftarrow \text{ك}(٣) = ٣\,\text{ك}(١) = ٦ \text{ ، } \text{ك}(١) = ٢ \quad \frac{\text{ك}(٣)}{٣} - \frac{\text{ك}(١)}{١} = -٢ - \frac{٦}{٣} = \cdot$$

السؤال الثامن عشر :

ص = ٤ + س^{٢} ومحور السينات و المستقيمين س=١ ، س=٤

الحل : ص = ٤ + س^{٢} $\leftarrow$ ص^{٢} = $(٤ + س^{٢})^{٢}$ $\leftarrow$ $ص^{٢} = \frac{١٦ + ٨س^{٢} + س^{٤}}{س^{٢}}$

$$ص^{٢} = ١٦ س^{-٢} + ٨ + س^{٢}$$

$$ع = \pi \int_{١}^{٤} ص^{٢} ؤس = \pi \int_{١}^{٤} (١٦ س^{-٢} + ٨ + س^{٢}) ؤس$$

$$= \pi \left(\frac{-١٦}{س} + ٨س + \frac{س^{٣}}{٣} \right)_{١}^{٤} = \pi \left((-٤ + ٣٢ + \frac{٦٤}{٣}) - (-١٦ + ٨ + \frac{١}{٣}) \right)$$

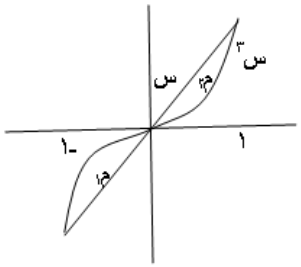
$$= ٥٧ \pi \text{ وحدة حجم}$$

السؤال التاسع عشر :

$ص_{١} = ظاس$ ، $ص_{٢} = قاس$ ، $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $س = \frac{\pi}{٦}$

$ظاس = قاس \leftarrow جاس = ١ \leftarrow س = \frac{\pi}{٢} \notin \left[\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٣} \right]$

$$ع = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (قا^{٢} س - ظا^{٢} س) ؤس = \pi \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} ١ ؤس = \pi \left(\frac{\pi}{٣} - \frac{\pi}{٦} \right) = \frac{\pi}{٦}^{٢} \text{ وحدة حجم}$$



السؤال العشرون :

$$ع = ع_{١} + ع_{٢} = ٢ع_{١} = ٢\pi \int_{-١}^{٠} (هـ^{٢}(س) - ن^{٢}(س)) ؤس$$

$$= ٢\pi \int_{٠}^{١} (س^{٢} - س^{٦}) ؤس = ٢\pi \left(\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٧}}{٧} \right)_{٠}^{١} = \frac{٨\pi}{٢١} \text{ وحدة حجم}$$

السؤال الحادي والعشرون :

معتمدا على الشكل المجاور اوجد $\int_{-١}^{٢} س ن (س^{٢} - ٣) ؤس$ **علما بأن** $م_{١} = ٤$ ، $م_{٢} = ١٢$

الحل : نفرض ان : $ص = س^{-٢} - ٣ \leftarrow ع ص = ٢ س ع س \leftarrow ع س = \frac{ع ص}{٢ س}$

عندما س = -١ فان ص = -٢ ، وعندما س = ٢ فان ص = ١

$$\int_{-١}^{٢} س ع(س) ع س = \int_{-٢}^{١} س ع(ص) \times \frac{ع ص}{٢ س} = \frac{١}{٢} \int_{-٢}^{١} ع(ص) ع ص$$

$$= \frac{١}{٢} \left(\int_{-٢}^{-١} ع(ص) ع ص + \int_{-١}^{١} ع(ص) ع ص \right) = \frac{١}{٢} (-٢^{٢} + ١^{٢}) = \frac{١}{٢} (١٢ - ٤) = -٤$$

حلول الوحدة السادسة(الأعداد المركبة)

تمارين ومسائل (٦-١) صفحة ٢١٥

السؤال الأول:

١) $٢ + \sqrt{-٢} = ٢ + \sqrt{٢} ت$

٢)
$$\sqrt{-١} \times \sqrt{٣٢} + \sqrt{-٢} \times \sqrt{٣٢} = \sqrt{-١} \times \sqrt{٢} + \sqrt{-٢} \times \sqrt{٣٢}$$
$$= ٤ \sqrt{٢} ت + \sqrt{٢} ت ٥ = ٠ + \sqrt{٢} ت ٥$$

٣)
$$\sqrt{-١} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{-١} \times \sqrt{٨} = \sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨}$$
$$= ٢ \sqrt{٢} ت \times \sqrt{٢} ت = ٤ ت^{٢} = ٤ \times -١ = -٤ = -٤ + ٠ ت$$

السؤال الثاني:

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$\frac{٢}{٥} ت - ٣ = -٣ + \frac{٢}{٥} ت$	-٣	$\frac{٢}{٥}$
$\sqrt{-٩} = \sqrt{٩} ت = ٠ + ٣ ت$	٠	٣
$-١ \sqrt{-١} = -١ ت$	١	-١
$\sqrt{-٩} \times \sqrt{-٤} = \sqrt{٣٦} ت = ٠ + ٦ ت$	٠	٦

$-٢ت=٠-٢ت$	٠	٢-
$\frac{١}{٣}=\frac{١}{٣}+٠ت$	$\frac{١}{٣}$	٠

السؤال الثالث:

البرهان : الطرف الأيمن :

$$=(١+ت+ت^{٢})^{٣}(١-ت+ت^{٢})^{٣}$$
$$=(١+ت-١)^{٣}(١-ت-١)^{٣}$$
$$=(ت)^{٣}(-ت)^{٣}$$
$$=ت^{٦}-=-(ت^{٢})^{٣}=١$$

= الطرف الأيسر

السؤال الرابع:

١) $ت^{٤٣}=ت^{٤٠}\times ت^{٣}=(ت^{٢})^{٢٠}\times -ت=١\times -ت=-ت$

٢) $\frac{١}{ت^{٦٥}}=ت^{-٦٥}=ت^{-٦٨}\times ت^{٣}=(ت^{٢})^{-٣٤}\times -ت$
$=١\times -ت=-ت$

٣) $ت^{٢٧}+\frac{١}{ت^{٢٧}}=ت^{٢٧}+ت^{-٢٧}=ت^{٢٤}\times ت^{٣}+ت^{-٢٨}\times ت$
$=(ت^{٢})^{١٢}\times -ت+(ت^{٢})^{-١٤}\times ت=-ت+ت=٠=٠+٠=٠ت$

السؤال الخامس:

البرهان : الطرف الأيمن=

$$\frac{١+٢ت^{٢}+ت^{٣}+٢ت}{ت^{٣}+ت^{٤}}=\frac{١+٢\times -١+ت+٢ت}{ت^{٣}(١+ت)}$$
$$=\frac{-١+ت}{-ت-ت^{٢}}=\frac{-١(١-ت)}{١-ت}=-١$$

= الطرف الأيسر

تمارين ومسائل (٦-٢) صفحة ٢٢٠

السؤال الأول:

أ) $٤(٢+٤ت)+٥(٣-٢ت)$

$= ٨+١٦ت+١٥-١٠ت = ٢٣+٦ت$

ب)

$(٣+٤ت)(٣-٥ت)$

$= ٩-١٥ت+٢٠ت-٢٠ت^{٢}$

$= ٩-٣ت-٢٠\times-١ = ٢٩-٣ت$

ج)

$(٣+٤ت)^{٣} = (٣+٤ت)^{٢}(٣+٤ت)$

$= (٩+٢٤ت+١٦ت^{٢})(٣+٤ت)$

$= (٩-١٦+٢٤ت)(٣+٤ت)$

$= (-٧+٢٤ت)(٣+٤ت)$

$= -٢١-٢٨ت+٧٢ت+٩٦ت^{٢}$

$= -٢١-٩٦+٤٤ت = -١١٧+٤٤ت$

د) $٤ت(١-٥ت)^{٢} = ٤ت(١-١٠ت+٢٥ت^{٢})$

$= ٤ت(١-٢٥-١٠ت) = ٤ت(-٢٤-١٠ت)$

$= -٩٦ت-٤٠ت^{٢} = -٤٠-٩٦ت$

و) $(١-ت)^{٦} = ((١-ت)^{٢})^{٣} = (١-٢ت+ت^{٢})^{٣}$

$= (١-ت^{٢})^{٣} = (-ت^{٢})^{٣} = -ت^{٨}$

$= -٨\times-ت = ٨ت$

السؤال الثاني:

$س+٢ست = -٥(س-٤ت)$

بوضع $س = ا+بت$

$\Leftarrow ا+بت+٢ت(ا+بت) = -٥(ا+بت-٤ت)$

$= ا+بت+٢ات-٢ب = -ا-٢ب+(١٢ا+ب)ت$

$= -١٥ا+(-٥ب+٢٠)ت$

$\Leftarrow ا-٢ب = -١٥ا$

$\therefore ١٦ا = ٢ب \Leftarrow ب = ١٣ا$

$$\Leftarrow \quad ب + ١٢أ = -٥ب + ٢٠$$
$$\therefore ٦ب + ١٢أ = ٢٠ \Leftarrow أ + ٣ب = ١٠$$
$$\therefore أ + ٣ \times ١٣أ = ١٠ \Leftarrow ١١أ = ١٠$$
$$\Leftarrow أ = ١، \quad ب = ٣ \qquad \therefore س = ١ + ٣ت$$

السؤال الثالث:

$$س - ص - ٢ = ص^{٢} ت - سـت$$
$$\therefore س + سـت = ص + ٢ + ص^{٢} ت$$
$$\therefore س = ص + ٢ \Leftarrow س - ص = ٢$$

$$، \quad س = ص^{٢} \Leftarrow \quad ص + ٢ = ص^{٢}$$
$$\Leftarrow ص^{٢} - ص - ٢ = ٠$$
$$(ص - ٢)(ص + ١) = ٠$$
$$\therefore ص = ٢ \Leftarrow س = ٤$$

$$، \quad ص = -١ \Leftarrow \quad س = ١$$

السؤال الرابع:

الطرف الأيمن $= ع^{٥} + ع^{٢}$

$$= ت^{٥} + ت^{٢} = ت + -١$$

الطرف الأيسر $= ع - ١ = ت + -١$

السؤال الخامس:

الطرف الأيمن $= ع^{٢} + ٢ع + ٢$

$$= (-١ + ت)^{٢} + ٢(-١ + ت) + ٢$$
$$= ١ + ت^{٢} - ٢ت - ٢ + ٢ت + ٢$$
$$= ١ - ١ - ٢ت - ٢ + ٢ت + ٢ = ٠$$

= الطرف الأيسر

السؤال السادس:

$$\frac{ت}{ت + ٣} = \frac{١ + ٣ت}{أ}$$
$$\Leftarrow أت = (ت + ٣)(١ + ٣ت)$$
$$أت = ت + ٣ت^{٢} + ٣ + ٩ت$$
$$أت = ١٠ت - ٣ + ٣$$
$$\Leftarrow أت = ١٠ت \Leftarrow أ = ١٠$$

السؤال السابع:

١) $(٢+\sqrt{٢}\,ت)^{-١} = س + ص ت$

$\Leftarrow (٢+\sqrt{٢}\,ت)(س + ص ت) = ١$

$(٢س + ٢ص ت + \sqrt{٢}\,س ت + \sqrt{٢}\,ص ت^{٢}) = ١ + ٠ت$

$٢س - \sqrt{٢}\,ص + (٢ص + \sqrt{٢}\,س) ت = ١ + ٠ت$

$\therefore ٢ص + \sqrt{٢}\,س = ٠ \Leftarrow ص = -\sqrt{٣}\,س$

$٢س - \sqrt{٢}\,ص = ١ \Leftarrow ٢س - ٢ \times \sqrt{٣}\,س = ١$

$\therefore ٢س + ٦س = ١ \Leftarrow ٨س = ١ \Leftarrow س = \frac{١}{٨}$ $\quad ص = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{٨} = \frac{-\sqrt{٣}}{٨}$

$\therefore (٢+\sqrt{٢}\,ت)^{-١} = \frac{١}{٨} - \frac{\sqrt{٣}}{٨} ت$

يمكن استخدام قاعدة النظير الضربي مباشرة

٢) $\left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)^{-١} = س + ص ت$

$\Leftarrow \left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)(س + ص ت) = ١$

$ت(س + ص ت) = ت - ٣$

$ت س + ص ت^{٢} = ت - ٣$

$\therefore ت س - ص = ت - ٣$

$\therefore س = ١ ،\ ص = ٣$

$\therefore \left(\frac{ت}{ت - ٣}\right)^{-١} = ١ + ٣ت$

٣) $((١+ت)^{١٣})^{-١} = (١+ت)^{-١٣}$

$= (١+ت)^{-١٤} \times (١+ت)$

$= ((١+ت)^{٢})^{-٧} \times (١+ت)$

$= (١ + ٢ت + ت^{٢})^{-٧} \times (١+ت)$

$= (٢ت)^{-٧} \times (١+ت)$

$= \frac{١}{١٢٨} \times ت^{-٨} \times ت \times (١+ت)$

$= \frac{ت}{١٢٨} \times (١+ت) = \frac{-١}{١٢٨} + \frac{١}{١٢٨} ت$

السؤال الثامن:

بجمع المعادلتين ينتج أن:

$$٣ع_١ = (-٨\sqrt{} + ٥٠\sqrt{})ت = (-٢\sqrt{} ٢ + ٢\sqrt{} ٥)ت = ٣\sqrt{٢}ت$$

$$\Leftarrow ع_١ = \sqrt{٢}ت$$

بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج أن:

$$\sqrt{٢}ت + ٣ع_٢ = -\sqrt{٨}ت \Leftarrow ٣ع_٢ = -\sqrt{٨}ت - \sqrt{٢}ت$$

$$\Leftarrow ٣ع_٢ = -٢\sqrt{٢}ت - \sqrt{٢}ت = -٣\sqrt{٢}ت$$

$$\Leftarrow ع_٢ = -\sqrt{٢}ت$$

تمارين ومسائل (٦-٣) صفحة ٢٢٦

السؤال الأول:

$$١ + \sqrt{-٤}\ = ١ + ٢ت$$

$$\therefore |١ + \sqrt{-٤}\ | = |١ + ٢ت|$$

$$= \sqrt{١^٢ + ٢^٢}\ = \sqrt{١ + ٤}$$

$$= \sqrt{٥}$$

السؤال الثاني:

أ) $|-ع_١ ٣| = |-٣ - ٣ت| = \sqrt{(-٣)^٢ + (-٣)^٢}\ = \sqrt{٩ + ٩}\ = \sqrt{١٨}$

ب) $ع_١ \overline{ع_١} = (١ + ت)(١ - ت) = ١ - ت^٢ = ٢$

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|٢ \times \frac{١}{٢}\right| = |١| = ١$$

حل آخر:

$$\left|\frac{١}{٢} ع_١ \overline{ع_١}\right| = \left|\frac{١}{٢}(١)^٢ + (١)^٢\right|$$

$$= \sqrt{٢ \times \frac{١}{٢}}\ = \sqrt{١}\ = ١$$

ج) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{١ - ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{١ + ت^٢ - ٢ت}{١ + ١}$

$$= \frac{-٢ت}{٢} = -ت$$

$$\therefore \left|\frac{ع_٢}{ع_١}\right| = |-ت| = \sqrt{(-١)^٢ + (٠)^٢} = \sqrt{١} = ١$$

د) $ع_١ ع_٢ = (١+ت)(١-ت) = ١ - ت^٢ = ٢$

$$|٢ع_١ ع_٢| = |٢ \times ٢| = |٤| = \sqrt{(٠)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

حل آخر:

$$|٢ع_١ ع_٢| = |٢((١)^٢ + (١)^٢)| = |٢ \times ٢|$$

$$= |٤| = \sqrt{(٠)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

السؤال الثالث: $ع = \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت$

اولا: $ع^{-١} = \frac{١}{\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت} = \frac{٥}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت}$

$$= \frac{١٥ + ٢٠ت}{٩ + ١٦} = \frac{١٥}{٢٥} + \frac{٢٠}{٢٥}ت = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت$$

ثانيا: $(٣ع)^{-١} = \left(\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}ت\right)^{-١} = \frac{١}{\frac{٩}{٥} - \frac{١٢}{٥}ت}$

$$= \frac{٥}{٩ - ١٢ت} \times \frac{٩ + ١٢ت}{٩ + ١٢ت} = \frac{٤٥ + ٦٠ت}{٨١ + ١٤٤}$$

$$= \frac{٤٥}{٢٢٥} + \frac{٦٠}{٢٢٥}ت = \frac{٣}{١٥} + \frac{٤}{١٥}ت = \frac{١}{٣}ع^{-١}$$

ثالثا: $|ع^{-١}| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢} = \sqrt{\frac{٩ + ١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٢٥}} = \sqrt{١} = ١$

رابعا : $\left|\frac{\bar{ع}}{٥}\right| = \left|\left(\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت\right)\frac{١}{٥}\right| = \left|\left(\frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}ت\right)\frac{١}{٥}\right|$

$$= \left|\frac{٣}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥}ت\right| = \sqrt{\left(\frac{٣}{٢٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٢٥}\right)^٢}$$

$$= \sqrt{\frac{٩}{٦٢٥} + \frac{١٦}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٦٢٥}} = \sqrt{\frac{١}{٢٥}} = \frac{١}{٥}$$

السؤال الرابع:

أ) $\frac{-١+\sqrt{٢}ت}{٢+ت}=\frac{-١+\sqrt{٢}ت}{٢+ت}\times\frac{٢-ت}{٢-ت}$

$=\frac{-٢+ت+٢\sqrt{٢}ت-\sqrt{٢}ت^{٢}}{١+٤}$

$=\frac{-٢+\sqrt{٢}}{٥}+\frac{١+٢\sqrt{٢}}{٥}ت$

ب) $\frac{٣+٤ت}{٣-٥ت}+\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت}=\frac{٣+٤ت}{٣-٥ت}\times\frac{٣+٥ت}{٣+٥ت}+\frac{٢+٣ت}{٢-٣ت}\times\frac{٢+٣ت}{٢+٣ت}$

$=\frac{٩+٢٧ت+٢٠ت^{٢}}{٢٥+٩}+\frac{٤+١٢ت+٩ت^{٢}}{٩+٤}$

$=\frac{-١١+٢٧ت}{٣٤}+\frac{-٥+١٢ت}{١٣}$

$=\frac{-١٤٣+١٧٠-٣٥١ت+٤٠٨ت}{٤٤٢}$

$=\frac{-٣١٣}{٤٤٢}+\frac{٧٥٩+}{٤٤٢}ت$

السؤال الخامس: نفرض أن: $ع=أ+بت$

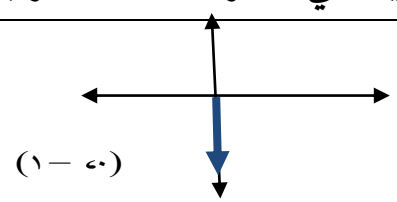
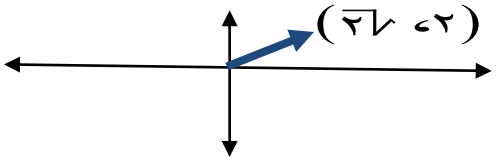
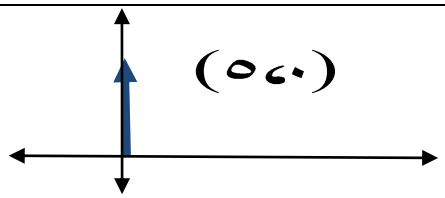
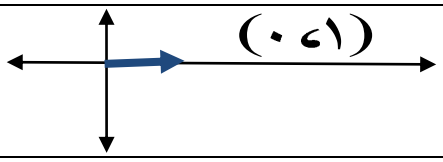
الطرف الأيمن= $ع-١=أ+بت-١\Leftarrow|ع-١|=\sqrt{(أ-١)^{٢}+ب^{٢}}$

الطرف الأيسر= $\bar{ع}-١=أ-بت-١\Leftarrow|\bar{ع}-١|=\sqrt{(أ-١)^{٢}+(-ب)^{٢}}$

$=\sqrt{(أ-١)^{٢}+ب^{٢}}$

أي ان $|ع-١|=|\bar{ع}-١|$

السؤال السادس

العدد	تمثيله في مستوى الأعداد المركبة
$ت^{٣٥} = ت^{٣٢} \times ت^{٣} = ١ \times -ت = -ت$ $= ٠ - ت = (٠، -١)$	
$٢ + \sqrt{-٢} + ٢ = ٢ + \sqrt{٢}ت = (٢، \sqrt{٢})$	
$\sqrt{-٤} + \sqrt{-٩} = \sqrt{-١} \times \sqrt{٤} + \sqrt{-١} \times \sqrt{٩}$ $= ٢ت + ٣ت = ٥ت = ٠ + ٥ت = (٥، ٠)$	
$\frac{١}{ت^{٥٢}} = ت^{-٥٢} = (ت^{٢})^{-٢٦} = ١$	

السؤال السابع:

$\because ع^{٢} = (\bar{ع})^{٢} \Leftarrow (أ + ب ت)^{٢} = (أ - ب ت)^{٢}$

$\Leftarrow أ^{٢} - ب^{٢} + ٢أب ت = أ^{٢} - ب^{٢} - ٢أب ت$

$\therefore ٢أب = -٢أب \Leftarrow ٤أب = ٠$

$\therefore أ = ٠$ $\quad \therefore ع = ب ت$ **(عدد تخيلي)**

أو $ب = ٠$ $\quad \therefore ع = أ$ **(عدد حقيقي)**

السؤال الثامن:

أ) $ع = -١ + ت$

$|ع| = \sqrt{(-١)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{٢}$

$جتاهـ = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $جاهـ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$،

$\therefore هـ = \frac{٣\pi}{٤}$ **ومنها** $ع = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}\right)$

ب) $ع = \frac{-١}{٢} + ٠ت$

$$|ع| = \sqrt{(٠)^{٢} + \left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢}} = \sqrt{\frac{١}{٤}} = \frac{١}{٢}$$

$$ظاهـ = \frac{\frac{-١}{٢}}{٠} = \text{غير معرف} \quad \therefore هـ = \pi$$

$$\therefore ع = \frac{١}{٢}(جتا\pi + ت جا\pi)$$

ج)

$$ع = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت \quad ، \quad |ع| = ١$$

$$جتاهـ = -\frac{١}{٢} \quad ، جاهـ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow هـ = \frac{٢}{٣}\pi$$

$$ع = (جتا\frac{٢}{٣}\pi + ت\ جا\frac{٢}{٣}\pi)$$

السؤال التاسع:

ا)

$$ع = ٧(جتا\frac{٣\pi}{٤} + ت جا\frac{٣\pi}{٤}) = ٧\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}ت\right)$$

$$= \frac{-٧}{\sqrt{٢}} + \frac{٧}{\sqrt{٢}}ت$$

ب)

$$ع = ٣(جتا\frac{-\pi}{٦} + ت جا\frac{-\pi}{٦}) = ٣جتا\frac{\pi}{٦} - ٣ت جا\frac{\pi}{٦}$$

$$= ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٣ \times \frac{١}{٢}ت = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}ت$$

ج)

$$ع = ٢(جتا\frac{\pi}{٤} - ت جا\frac{\pi}{٤}) = ٢\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}ت\right)$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٢}}ت = \sqrt{٢} - \sqrt{٢}ت$$

د) $ع = ٣\left(جتا\frac{\pi}{٣} + ت جا\frac{\pi}{٣}\right) = ٣\left(\frac{١}{٢} + ت\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$= \frac{٣}{٢} + ت\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

تمارين ومسائل (٦-٤) صفحة ٢٢٩

السؤال الأول:

أ) $ع^{٣} + ١ = ٠ \Leftarrow (ع+١)(ع^{٢} - ع + ١) = ٠$

$\therefore ع = -١$ أو، $ع = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢} = \frac{١}{٢} \pm ت\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الحلول = $\left\{-١ ، \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right\}$

ب) $(ع+١)^{٢} = ع \Leftarrow ع^{٢} + ٢ع + ١ = ع$

$\Leftarrow ع^{٢} + ع + ١ = ٠$

$\Leftarrow ع = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ \pm ت\sqrt{٣}}{٢}$

الحلول = $\left\{\frac{-١ - ت\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{-١ + ت\sqrt{٣}}{٢}\right\}$

ج) $(٣ - ٤ت)ع^{٢} = ت ع \Leftarrow ع((٣ - ٤ت)ع - ت) = ٠$

$\therefore ع = ٠$ أ، $ع = ت(٣ - ٤ت)$

$\Leftarrow ع = \frac{ت}{٣ - ٤ت} = \frac{ت}{٣ - ٤ت} \times \frac{٣ + ٤ت}{٣ + ٤ت} = \frac{-٤ + ٣ت}{٢٥}$

الحلول هي: $\left\{٠ ، \frac{-٤ + ٣ت}{٢٥}\right\}$

السؤال الثاني: تكون المعادلة على الصورة

$س^{٢}$ - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠

مجموع الجذرين = $٣ + ٢ت$ ، حاصل ضربهما = $٥ + ٥ت$

المعادلة هي $س^{٢} - (٣ + ٢ت)س + ٥ + ٥ت = ٠$ يوجد طرق اخرى

السؤال الثالث:

أ) $(س + ص ت)^{٢} = \frac{١}{٤} \Leftarrow س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} = \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow س^{٢} - ص^{٢} = \frac{١}{٤}$ أو $٢س ص = ٠$

إما $س = ٠$ **مرفوض** أو $ص = ٠ \Leftarrow س^{٢} = \frac{١}{٤}$ $\therefore س = \pm \frac{١}{٢}$

الجذور = $\left(\frac{١}{٢} + ٠ت\right)$، $\left(-\frac{١}{٢} + ٠ت\right)$

ب) $(س + ص ت)^{٢} = -٤٩ \Leftarrow س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} = -٤٩ + ٠ت$

$\Leftarrow س^{٢} - ص^{٢} = -٤٩$ أو $٢س ص = ٠$

إما $ص = ٠$ **مرفوض** أو $س = ٠ \Leftarrow -ص^{٢} = -٤٩$ $\therefore ص = \pm ٧$

الجذور = $(٠ - ٧ت)$، $(٠ + ٧ت)$

ج) $(س + ص ت)^{٢} = ٢١ - ٠ ٢ت \Leftarrow س^{٢} + ٢س ص ت - ص^{٢} = ٢١ - ٠ ٢ت$

$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = ٢١$

أو $٢س ص = -٠ ٢ \Leftarrow س ص = -١٠ \Leftarrow ص = \frac{-١٠}{س}$

$\therefore س^{٢} - \left(\frac{-١٠}{س}\right)^{٢} = ٢١ \Leftarrow س^{٢} - \frac{١٠٠}{س^{٢}} = ٢١$

$\Leftarrow س^{٤} - ٢١ س^{٢} - ١٠٠ = ٠ \Leftarrow س^{٤} - ١٠٠ = ٢١ س^{٢}$

$\Leftarrow (س^{٢} + ٤)(س^{٢} - ٢٥) = ٠$

$\therefore س^{٢} = -٤ \Leftarrow س = \pm \sqrt{-٤} = \pm ٢ت$ **مرفوض**

أو $س^{٢} = ٢٥ \Leftarrow س = \pm \sqrt{٢٥} = \pm ٥$ **بالتعويض ينتج أن:**

$ص = \frac{-١٠}{\pm ٥} = \mp ٢$

الجذور = $(٥ - ٢ت)$، $(-٥ + ٢ت)$

السؤال الرابع:

الطرف الأيسر = $(ع^{٢} - \sqrt{٢}ع + ١)(ع^{٢} + \sqrt{٢}ع + ١)$

$= (ع^{٢} - \sqrt{٢}ع)(ع^{٢} + \sqrt{٢}ع + ١) + (ع^{٢} + \sqrt{٢}ع + ١)$

$= (ع^{٢} - \sqrt{٢}ع)(ع^{٢} + \sqrt{٢}ع) + (ع^{٢} - \sqrt{٢}ع) + (ع^{٢} + \sqrt{٢}ع + ١)$

$= ع^{٤} - ٢ع^{٢} + ع^{٢} - \sqrt{٢}ع + ع^{٢} + \sqrt{٢}ع + ١$

$= ع^{٤} + ١$ **=الطرف الأيمن**

ولحل المعادلة $ع^{٤} + ١ = ٠$ **في كـ نضع** $(ع^{٢} - \sqrt{٢}ع + ١)(ع^{٢} + \sqrt{٢}ع + ١) = ٠$

ومنها $(ع^{٢} - \sqrt{٢}ع + ١) = ٠$

$\Leftarrow ع = \frac{\sqrt{٢} \pm \sqrt{٢ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢} = \frac{\sqrt{٢} \pm \sqrt{-٢}}{٢} = \frac{\sqrt{٢} \pm \sqrt{٢}ت}{٢}$

أو $(ع^{٢} + \sqrt{٢}ع + ١) = ٠$

$\Leftarrow ع = \frac{-\sqrt{٢} \pm \sqrt{٢ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢} = \frac{-\sqrt{٢} \pm \sqrt{-٢}}{٢} = \frac{-\sqrt{٢} \pm \sqrt{٢}ت}{٢}$

إذن حلول المعادلة هي: $\left\{ \frac{\sqrt{٢} \pm \sqrt{٢}ت}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢} \pm \sqrt{٢}ت}{٢} \right\}$

تمارين عامة/ الأعداد المركبة صفحة ٢٣٠

السؤال الأول:

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الإجابة	ج	ج	أ	د	أ	ب	ب	أ	د

السؤال الثاني:

أ) $|ع_{١}| = |١ + ٢ت| = \sqrt{(١)^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{٥}$

ب) $|ع_{٢}| = |٢ - ت| = \sqrt{(٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{٥}$

ج) $|ع_{١} + ع_{٢}| = |٣ + ت| = \sqrt{(٣)^{٢} + (١)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

د) $|ع_{١}| + |ع_{٢}| = \sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٢٠}$ **نلاحظ أن:** $|ع_{١} + ع_{٢}| \neq |ع_{١}| + |ع_{٢}|$

السؤال الثالث:

أ) $ع + ٣ت ع = ت \Leftarrow ت = ع(١ + ٣ت)$

$$ع = \frac{ت}{١ + ٣ت} \Leftarrow \times \frac{١ - ٣ت}{١ - ٣ت} = \frac{ت}{١ + ٣ت}$$

$$\therefore ع = \frac{٣ + ت}{٩ + ١} = \frac{٣}{١٠} + \frac{١}{١٠} ت$$

ب) $ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ١ = ٠ \Leftarrow ع^{٢}(ع + ١) + ١(ع + ١) = ٠$

$$\Leftarrow (ع + ١)(ع^{٢} + ١) = ٠$$

$$\therefore ع = -١ \quad أ، \quad ع^{٢} = -١ \Leftarrow ع = \pm \sqrt{-١} = \pm ت$$

الحلول = $\{-١، ت، -ت\}$

ج) $ع^{٤} + ٥ع^{٢} + ٤ = ٠ \Leftarrow (ع^{٢} + ٤)(ع^{٢} + ١) = ٠$

$$\Leftarrow (ع^{٢} - ٤ت^{٢})(ع^{٢} - ت^{٢}) = ٠$$

ومنها $ع^{٢} = ٤ت^{٢} \Leftarrow ع = \pm ٢ت$

أو $ع^{٢} = ت^{٢} \Leftarrow ع = \pm ت$

السؤال الرابع: $(س + صت)^{٢} = ٥ + ١٢ت \Leftarrow س^{٢} + ٢سصت - ص^{٢} = ٥ + ١٢ت$

$$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = ٥ \quad ..... \quad (١)$$

$$\text{أو } ٢سص = ١٢ \Leftarrow سص = ٦ \Leftarrow ص = \frac{٦}{س}$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore س^{٢} - \frac{٣٦}{س^{٢}} = ٥ \Leftarrow س^{٤} - ٥س^{٢} - ٣٦ = ٠$$

$$\therefore (س^{٢} + ٤)(س^{٢} - ٩) = ٠ \Leftarrow (س^{٢} - ٤ت^{٢})(س^{٢} - ٩) = ٠$$

ومنها $س^{٢} = ٤ت^{٢} \Leftarrow س = \pm ٢ت$ **مرفوض لأن س عدد حقيقي**

$$\text{أو } س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = \pm ٣ \Leftarrow ص = \frac{٦}{\pm ٣} = \pm ٢$$

الجذور = $\{٣ + ٢ت، -٣ - ٢ت\}$

السؤال الخامس:

$\because$ س^{٢} + س + (ص − ١) ت = − ت س^{٢}

$\therefore$ س^{٢} + س + (ص + س^{٢} − ١) ت = ٠

ومنها س^{٢} + س = ٠ ، ص + س^{٢} − ١ = ٠ $\Leftarrow$ ص = ١ − س^{٢}

$\Leftarrow$ س (س + ١) = ٠

إذن إما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ١

أو س = − ١ $\Leftarrow$ ص = ٠

الحلول هي (٠، ١)، (٠، − ١)

السؤال السادس:

أ) ل = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت}$، م = $\frac{١ ات - ٣}{١ + ٢ت}$

ل = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} = \frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{٣-ت}{٣-ت}$

$= \frac{٥(٩-٦ت-١)}{٩+١} = \frac{٨-٦ت}{٢} = ٤ - ٣ت$

م = $\frac{١ ات - ٢}{١ + ٢ت} = \frac{١ ات - ٢}{١ + ٢ت} \times \frac{١ - ٢ت}{١ - ٢ت}$

$= \frac{١ ات + ٢٢ - ٢ - ٤ت}{١ + ٤} = \frac{٢٠ + ٥ ات}{٥} = ٤ + ٣ت = \bar{ل}$

إذن ل ، م مترافقان

ب) ل + م = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} + \frac{١ ات - ٣}{١ + ٢ت} = ٤ - ٣ت + ٤ + ٣ت = ٨$

ل م = $\frac{٥(٣-ت)}{٣+ت} \times \frac{١ ات - ٣}{١ + ٢ت} = (٤ - ٣ت)(٤ + ٣ت) = ١٦ + ٩ = ٢٥$

$\Leftarrow$ ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ل م = ٨^{٢} − ٢ × ٢٥ = ١٤

السؤال السابع:

$\frac{-ت - \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}ت} = \frac{-ت - \sqrt{٣}}{\sqrt{٣} + ١} \times \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣}ت - ١} = \frac{-ت\sqrt{٣} - ٤ت - \sqrt{٣}}{٣ + ١} = \frac{-٤ت}{٤} = -ت$

$\Leftarrow \left(\frac{-ت - \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}ت}\right)^{٧} = (-ت)^{٧} = -١ \times ت^{٤} \times ت^{٣} = -١ \times ١ \times -ت = ت$

جدول يتضمن التعديلات على الاجابات التي وردت في كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر العلمي الجديد

الوحدة	البند/ الصفحه/ رقم السؤال	الاجابه في الكتاب	التعديل	الوحدة	البند/ الصفحه/ رقم السؤال	الاجابه في الكتاب	التعديل
الاولى	(١-٧) صفحه ٢٣٤ السؤال الثاني	$\frac{1}{هـ}-1$	$\frac{1}{هـ}-1$	الرابعة	(٤-٢) صفحه ٢٤٣ السؤال الأول /هـ	$\frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}س^{\frac{4}{3}}+س+جـ$	$\frac{3}{5}س^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{4}س^{\frac{4}{3}}+س+جـ$
	(١-٧) صفحة ٢٣٤ السؤال الثالث	$\frac{3س^{2}-6س}{س^{3}-3س}$	$\frac{3س^{2}-6س}{س^{3}-3س^{2}}$		(٤ – ٤ ب) صفحه ٢٤٤ السؤال الأول د	$\frac{-1}{2}جتا2س+\frac{1}{4}جا2س+جـ$	$\frac{-1}{2}س جتا2س+\frac{1}{4}جا2س+جـ$
	تمارين عامه صفحه ٢٣٥/س١٦	$\pm\sqrt{2}$	(ن(٢)، ن(٢))، (ن(٢)، ن(-٢))، (ن(-٢)، ن(٢))، (ن(-٢)، ن(-٢))		(٤ – ٤ ج) صفحه ٢٤٥ السؤال الأول /ي	$\frac{1}{3}(لـ\|س^{3}\|-لـ\|س^{3}+1\|)+جـ$	$\frac{1}{3}(لـ\|س^{3}\|-لـ\|س^{3}+1\|)+جـ$
الثانية	(٢ – ٢) صفحة ٢٣٦ السؤال الثاني	في متزايد على ح	في متزايد على ح+		(٤ – ٤ ج) صفحه ٢٤٥ السؤال الأول /حـ	$\frac{-1}{8}لـ\|4-جتاس\|+\frac{1}{8}لـ\|4+جتاس\|+جـ$	$\frac{-1}{8}لـ\|4-جتاس\|+\frac{1}{8}لـ\|4+جتاس\|+جـ$
	(٢ – ٣) صفحة ٢٣٧ السؤال الثالث /ج		يضاف ن$(\frac{\pi 3}{2})=0$ قيمة عظمى مطلقة	الخامسة	تمارين عامه صفحه ٢٤٦ السؤال الخامس	$ص=\frac{-1}{3س^{3}(2س^{3}-4س)}+جـ$	$ص=\frac{-1}{3س^{3}(2س^{3}-4س)}+\frac{47}{48}$
	(٢ – ٤) صفحة ٢٣٨ السؤال الخامس/ أ		يضاف (٣ ، ق(٣)) نقطة انعطاف		(٥- ٤)صفحة ٢٤٧ السؤال العاشر	تعدل الفترة الثانية في ت(س) الى $س\in[2،4]$	تعدل الفترة الثانية في ت(س) الى $س\in[2،5]$
	(٢ – ٤) صفحة ٢٣٨ السؤال الثامن /أ		يضاف س=-٣ ، ٢وكذلك ق(-٣) صغرى محلية ، ق(٢) عظمى محلية	السادسة	تمارين عامه صفحه ٢٤٨ السؤال العاشر /ب	$\frac{\pi 5}{12}+2\sqrt{5}$ وحدة مساحة	$4-\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}4$ وحدة مساحة
	تمارين عامه صفحه ٢٣٩/موضوعي		تعدل اجابه الفقرة ٤ (ب)، ٥(د)، ٧(أ) ١٠(ج)		(٦ – ٣)صفحه ٢٤٩-٢٥٠/س ٣ أ	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}ن$
	تمارين عامه صفحه ٢٣٩السؤال الرابع	أ= ٤	أ= ٤ أو أ= ١٠		(٦ – ٣)صفحه ٢٤٩-٢٥٠/س ٨	$ع=\sqrt{2}(جتا\frac{\pi 7}{4}+ن جتا\frac{\pi 7}{4})$	$ع=\sqrt{2}(جتا\frac{\pi 3}{4}+ن جتا\frac{\pi 3}{4})$
الرابعة	تمارين عامه صفحه ٢٣٩السؤال الثامن	$ف=\frac{20\sqrt{2}}{3}$	$ف=\frac{20\sqrt{2}}{3}$ ف= ٤٠		(٦ – ٣)صفحه ٢٤٩-٢٥٠/س ٩ د	$\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}ن$	$\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}ن$
	(٤-٢) صفحة ٢٤٣ السؤال الأول /د	$\frac{2}{5}س^{2}+قاس+جـ$	$\frac{5}{2}س^{2}+قاس+جـ$		(٦ – ٤)صفحه ٢٥١ السؤال الثاني	$س^{2}-(3+2ن)س-(5+5ن)=0$	$س^{2}-(3+2ن)س+(5+5ن)=0$