٩

بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الفترة الرابعة

جميع حقوق الطبع محفوظة ©

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم

مركز المناهج

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب 719 – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

mohe.ps | mohe.pna.ps | moehe.gov.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس 2983250-2-970+ | هاتف 2983280-2-970+

المحتويات

دروس الوحدة الرابعة

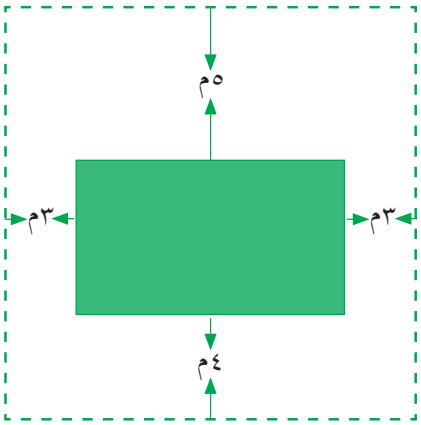
٤ – ١ ضربُ كثيراتِ الحدودِ وقسمتُها	٣	٤ – ٦ استقلال الحوادث	١٩
٤ – ٢ الاقتران التربيعيّ	٧	٤ – ٧ الدائرة	٢٣
٤ – ٣ الاقتران النسبي	١٠	٤ – ٨ الزّوايا المركزيّة والزّوايا المحيطيّة	٢٧
٤ – ٤ قوانين الاحتمالات	١٢	٤ – ٩ الشكل الرّباعيّ الدائريّ	٣١
٤ – ٥ الاحتمال المشروط	١٦	٤ – ١٠ ورقة عمل	٣٥
		٤-١١ الاختبار	٣٧

يتوقع من الطلبة بعد الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة المتمازجة والتفاعل مع أنشطتها، أن يكونوا قادرين على توظيف الاقترانات كثيرات الحدود والاحتمالات والهندسة في الحياة العملية من خلال الآتي:

١. ضرب كثيرات الحدود وقسمتها.
٢. التعرّف إلى الاقتران التربيعي، وتمثيله بيانيّاً.
٣. التعرّف إلى الاقتران النسبي.
٤. إيجاد احتمال اتّحاد حادثيْن.
٥. إيجاد احتمال تقاطع حادثيْن.
٦. إيجاد احتمال الحادث المشروط.
٧. التعرف إلى الحوادث المستقلّة.
٨. التعرّف إلى معادلة الدائرة.
٩. إيجاد معادلة الدائرة.
١٠. التعرّف إلى الزّوايا المحيطيّة، والزوايا المركزيّة.
١١. استنتاج العلاقةِ بين الزاويتيْن المركزيّة والمحيطيّة المشتركة في القوس نفسه.
١٢. استنتاج العلاقةِ بين الزاويتيْن المحيطيّتيْن المشتركتيْن في القوس نفسه.
١٣. أن يتعرف على مماس الدائرة.
١٤. التعرفّ إلى الشكل الرباعيّ الدائريّ.

(٤ – ١) ضربُ كثيراتِ الحدودِ وقسمتُها

نشاط (١): تُصدرُ إحدى البلديّات تراخيصَ البناء للمواطنين؛ لغرض تنظيم البناء، وضبطه في المدن والقرى الفلسطينيّة. يمتلك سميرٌ قطعةَ أرضٍ مربعة الشكل، ويريد بناءَ بيتٍ عليها، بحيث يترك مساحاتٍ حول البيت (ارتدادات)، يمكن تمثيلها بالشكل المجاور، إفترِض طولُ قطعة الأرض س متر.



طول البيت: (س – ٦)

عرض البيت: (س – ـــــ)

مِساحة البيت:

أولاً: ضرب كثيرات الحدود:

تعريف

ليكن ق(س)، هـ(س) كثيري حدود، **فإنّ: (ق × هـ)(س) كثير حدود**، ويكون:

(ق × هـ)(س) = ق(س) × هـ(س)

نشاط (٢): إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣، هـ(س) = ٤س + ٢ ، أكمل إيجاد:

(ق × هـ)(س) = ق(س) × هـ(س) = (س^{٢} + ٣) × (٤س + ٢)

= س^{٢} × ٤س + س^{٢} × ٢ + ـــــ × ـــــ + ـــــ × ـــــ

= ٤س^{٣} + ـــــ + ـــــ + ـــــ

لاحظ أنّ: (ق × هـ)(س) هو اقتران كثير حدود من الدرجة ـــــــــ.

أُفكّر وأُناقش

ما درجة حاصل ضرب كثيري حدود؟

ثانياً: قسمة كثيرات الحدود:

نشاط(٣): أكمل إيجاد ناتج قسمة ما يأتي:

١) $\frac{٣س^{٢}}{س} = ٣س$ ، س ≠ ٠

٢) $\frac{س^{٣}}{س^{٢}} =$ ——— ، س ≠ ٠

٣) $\frac{س^{٢} - س}{س} = \frac{س(س - ١)}{س} =$ ——— ، س ≠ ٠

٤) $\frac{٤س^{٢}}{س^{٢}} =$ ——— ، س ≠ ٠

تعريف:

ليكن ق(س)، هـ(س) كثيري حدود، فإنّ:

(ق ÷ هـ)(س) = ق(س) ÷ هـ(س)، هـ(س) ≠ صفر لكلّ س ∈ ح

مِثال: إذا كان ق(س) = ٧س + س^{٣} + ١٢ ، هـ(س) = س + ٢ ، أجدُ: ق(س) ÷ هـ(س).

يمكن إيجادُ ناتج قسمة كثيري حدود باستخدام القسمة الطويلة، إذا كانت درجةُ المقسوم أعلى، أو تساوي درجة المقسوم عليه، باتّباع الخطوات الآتية:

الحل:

١- نرتب حدود الاقترانين ق(س)، هـ(س) تنازليّاً حسب قوى س.

٢- نقسم الحدّ الأوّل في المقسوم على الحد الأوّل في المقسوم عليه، ونضعه حدّاً أوّلَ في ناتج القسمة؛ أي أنّ: س^{٣} على س يساوي س^{٢} .

٣- نضرب (س^{٢}) الذي حصلنا عليه في خطوة ٢ في كلِّ حدٍّ من حدود المقسوم عليه، ونطرح .

٤- نكرّر الخطوتين ٢، ٣ حتى نحصل على باقٍ، درجته أقلّ من درجة المقسوم عليه.

س^{٢} − ٢س + ١١

س + ٢ | س^{٣} + ٧س + ١٢

س^{٣} + ٢س^{٢}

٠ − ٢س^{٢} + ٧س + ١٢

-٢س^{٢} − ٤س

٠ + ١١س + ١٢

١١س + ٢٢

-١٠ ٠

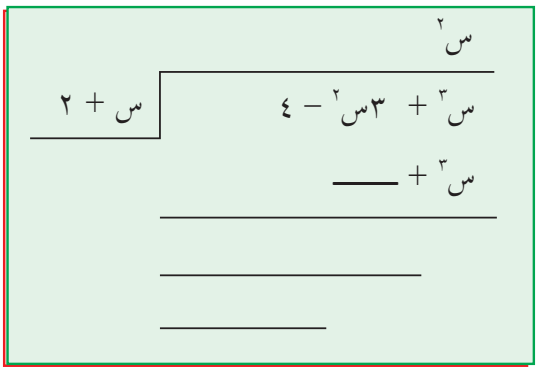
ناتج قسمة ق(س) على هـ(س) يساوي س^{٢} − ٢س + ١١ . والباقي -١٠ .

أُفكّر وأُناقش

✶ كيف نتحقّقُ من صحّة حل المثال السابق؟

✶ ما درجة ناتج قسمة أيّ كثيري حدود؟

نشاط(٤): أكمل إيجاد ناتج قسمة: (٣س^{٢} + س^{٣} − ٤) ÷ (س + ٢) .



ناتج قسمة (٣س^{٢} + س^{٣} − ٤) على (س + ٢) يساوي _____، والباقي _____.

لاحظ أنّ:

٣س^{٢} + س^{٣} − ٤ = (س + ٢) × ( )

(س+٢) عامل من عوامل ٣س^{٢} + س^{٣} − ٤

هل ناتجُ القسمةِ عاملٌ من عوامل ٣س^{٢} + س^{٣} − ٤ ؟

أتعلّم : إذا كان باقي قسمةِ اقتران كثيرِ حدود على اقترانٍ كثير حدود آخر يساوي صفراً، فإنّ المقسومَ عليه عاملٌ من عواملِ المقسوم.

تمارين ومسائل:

س١ إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٥س، هـ(س) = ٢ + س ، ك(س) = س^{٣} + ٢س + ١ ، أجد:

أ (ق × هـ)(س)　　ب (ك × هـ)(س)

س٢ أجد: (ق ÷ هـ)(س) في كلٍّ ممّا يأتي:

أ ق(س) = ٦س^{٣} + ٣س + ٢، هـ(س) = ٢س^{٢} + ١

س٣ أكتب درجة ناتج حاصل ضرب ق(س) في هـ(س) فيما يأتي، دون إجراء عمليّة الضرب:

أ ق(س) = س^{٦} − ٣، هـ(س) = س^{٣} + س^{٢} − ٤

س٤ أكتب درجة ناتج قسمة ق(س) على هـ(س) فيما يأتي، دون إجراء عمليّة القسمة:

أ ق(س)= ٢س^{٣} − ٨س^{٢} + ١ ، هـ(س) = س + ٦

س٥ أبيّنُ باستخدام القسمة الطويلة أنّ س − ٢ عامل من عوامل س^{٣} − ٨

(٤ – ٢) الاقتران التربيعيّ

نشاط(١): كثيرٌ من حركة الأشياء في الطبيعة تحصل بطريقةٍ منظّمةٍ، وضمن قوانينَ ثابتة.

ففي الشكل المجاور حركةُ المياه تشكّلُ شكلاً منظّماً.

الشكل الهندسيّ الذي تصنعه نافورةُ المياه في الشكل منحنًى مفتوحٌ إلى الأسفل .

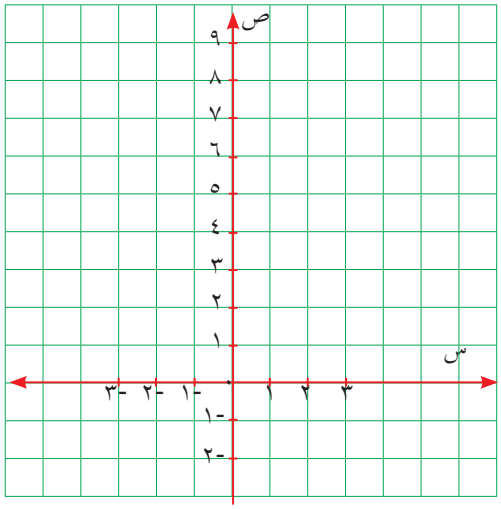
أعطِ أمثلةً أخرى لأشياء، أو لأشكالٍ لها الحركة نفسها : _____

تعريف

يُسمّى كثيرُ الحدود ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ، حيث: أ، ب، جـ أعداد حقيقيّة، أ ≠ صفر اقتراناً تربيعيّاً.

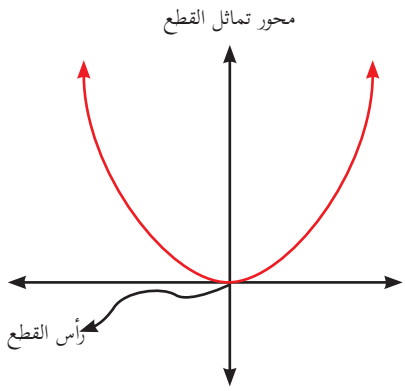
نشاط(٢): أُكمل الجدول الآتي، وأُعيّن النقاط الناتجة في المستوى:

س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = ق(س) = س^{٢}		٤			١		



أتعلّم :

عند تمثيل الاقتران التربيعيّ ق(س) = س^{٢} في المستوى الديكارتي يظهر كما في الشكل المجاور، ويُسمّى قطعاً مكافئاً. ويُسمّى هنا قطعاً مكافئاً مفتوحاً إلى الأعلى؛ لأنّ معامل س^{٢} موجب.



نشاط(٣): أُكمل خطواتِ تمثيل الاقتران التربيعيّ: ق(س) = س^{٢} + ٢س − ٣

١) أجدُ الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ، س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = −١

٢) أكوّنُ الجدول لتمثيل النقاط:

س	١	٠	١-	٢-	٣-
ص = ق(س)			٤-		

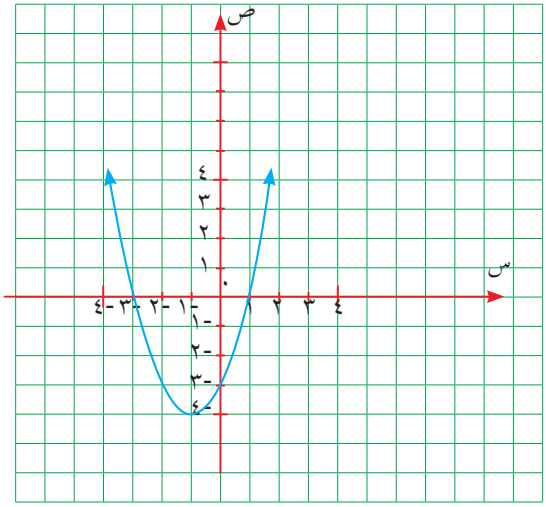
ق(-١) = (-١)^{٢} + ٢×-١ − ٣ = ٤- (-١ ، ٤-) إحداثيّات رأس القطع

ق(١) = _____ = _____ (، ١)

ق(٠) = _____ = _____ (، ٠)

ق(-٢) = _____ = _____ (، ٢-)

ق(-٣) = _____ = _____ (، ٣-)



٣) أُعيّنُ النقاط في المستوى الديكارتي، وأصلُ بينها.

٤) ما نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات؟

٥) الاقتران مفتوح لـ _____ لأن _____

٦) ما الإحداثي الصادي لرأس القطع المكافئ؟ ماذا ألاحظ؟

ألاحظ أنّ: ق(-١) = ٤-، وهي القيمة الصغرى للاقتران.

تمارين ومسائل:

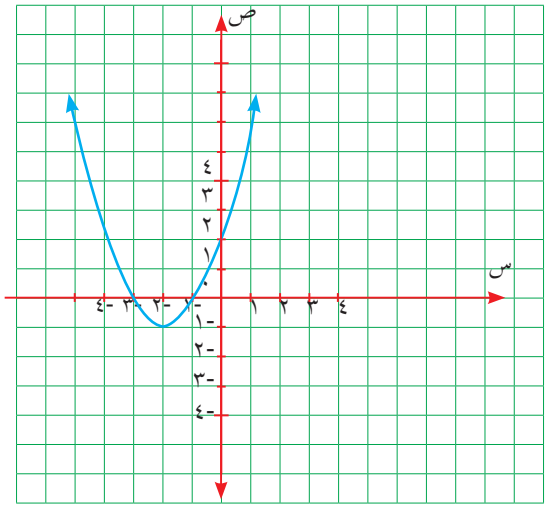
س١ أُمثّل الاقترانات الآتية في المستوى الديكارتي:

أ) ق(س) = س^{٢} + ٦س + ٩

ب) ق(س) = ٣س^{٢} − ١٢س

جـ) ق(س) = ١ − س^{٢}

س٢ من الشكل المجاور، أجد:



أ) إحداثيّات رأس القطع المكافئ.

ب) أصفار الاقتران.

جـ) أرسم في الشكل محور التماثل.

د) إحداثيّات نقطة تقاطعه مع محور الصّادات.

مهمة تقويمية (١):

س١ إذا كانت ق(س) = س^{٣} − ٥س^{٢} + ٣، هـ(س) = س^{٢} + ١ ، أجد:

أ) ق(س) × هـ(س) + ٥ ب) ق(س) ÷ هـ(س)

س٢ أبين باستخدام القسمة الطويلة أن (س+١) هو عامل من عوامل (س^{٣}+١).

س٣ أمثل الاقتران ق(س) = ١- س^{٢} في المستوى الديكارتي.

(٤ – ٣) الاقتران النسبي

نشاط(١): في القاعات الرئيسه يتمّ عملُ أنظمةٍ للتبريد؛للتخفيف من استهلاك الطاقة، يحاول المهندسون أنْ تكونَ نسبةُ مِساحة سطح المجسّم إلى حجمه صغيرة بالحد الكافي. هناك قاعةٌ طولُها س متر ، عرضُها س متر ، ارتفاعُها س متر.

أجد: المساحة الكليّة للقاعة =

٤س × س + ـــــ = ٦س^{٢}

حجم القاعة = س × ـــــ × ـــــ = ـــــ

نسبة المِساحة الكليّة للقاعة إلى حجمها = ـــــــــــــــــ

تعريف

يُسمّى الاقتران المكتوب على صورة ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ل(س)}}$، اقتراناً نسبيّاً، حيث هـ(س)، ل(س) اقترانان كثيرا حدود، ومجال الاقتران ق(س) هو ح ما عدا أصفار الاقتران ل(س).

نشاط(٢): ما مجال الاقترانات النسبيّة الآتية؟

١) ق(س) = $\frac{٣س^{٢} - ٤}{٢س + ٦}$

لإيجاد مجال الاقتران ق(س) نجد أصفار المقام.

لإيجاد أصفار المقام نضع : ٢س + ٦ = صفر

٢س = ـــــ

س = ـــــ

مجال ق(س) هو ح ما عدا أصفار المقام

إذن مجال ق(س) = ح _ { }

نشاط(٣): أُكمل إيجاد أصفار الاقترانات النسبيّة الآتية:

١) ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٤س - ١٢}{س^{٣} - ٢٧}$ ، س ≠ ٣

= $\frac{س^{٢} - ٤س - ١٢}{س^{٣} - ٢٧}$ = صفر

س^{٢} − ٤س − ١٢ = ـــــ

(س + ٢) × (س − ـــــ) = صفر

إمّا: س + ٢ = صفر ، أو: س − ـــــ = صفر

س = -٢ ، أو: س = ـــــ

أصفار الاقتران ق(س) هي -٢ ، ـــــ

أتعلّم: أصفار الاقتران النسبي هي تلك القيم التي تجعل قيمة البسط = صفر، ولا يكون المقام مساوياً صفر عندها.

تمارين ومسائل:

س١ أجد مجال الاقترانات النسبيّة الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{٥س + ٣س^{٢} + ٨}{٢س - \frac{١}{٢}}$

ب) ق(س) = $\frac{٤س + ١}{\sqrt{٢س + ٤}}$

جـ) ق(س) = $\frac{٣س + ١}{س(س^{٢} - ١)}$

س٢ أجد أصفار الاقترانات النسبيّة الآتية:

أ) ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٣} + ٤س}$ ، س ≠ صفر

ب) ق(س) = $\frac{س^{٣} + ٩س^{٢} + ١٨س}{س^{٢} + ١}$

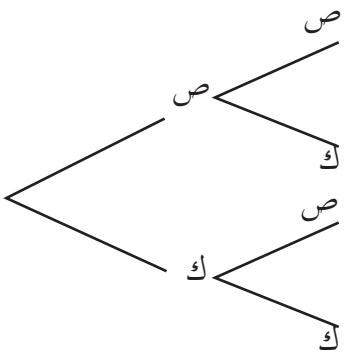
(٤ - ٤) قوانين الاحتمالات

نشاط (١): الجـنيه الفلسـطينيّ هو العـملةُ التي استخدمتها حكومة فلسطينَ في عهد الانتداب البريطاني بين عاميّ ١٩٢٧م - ١٩٤٨م.

تـم إلقـاءِ قطعـةِ نقـد معدنيـة مـن فئـة ٥٠ مـل مرّتيْـن متتاليتيْـن، وملاحظـة الوجـه الظاهـر.

ص: تعني وجه صورة عليه غصن الزيتون.

ك: تعني وجه عليه العدد ٥٠ مل



- الفراغ العيني للتجربة Ω = {(ص ، ص) ، ..... ، (ك ، ص) ، .....}

(ص ، ك) تعني:ظهور صورة في الرمية الأولى، وكتابة في الرمية الثانية.

(ك ، ص) تعني: .....

- إذا كان ح$_1$ حادث ظهور كتابة واحدة فقط ، ح$_2$ حادث ظهور صورة واحدة على الأقلّ، فإنّ:
- ح$_1$ = { (ص ، ك)، .....} ، ح$_2$ = {.....،(ك ، ص) ، ..... }
- ل(ح$_1$) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$
- ل(ح$_2$) = $\frac{\square}{\square}$

ح$_1$ ∩ ح$_2$ = {(ص ، ك) ، }

ح$_1$ ∪ ح$_2$ = { ، ، }

- ل(ح$_1$ ∩ ح$_2$) = $\frac{\square}{\square}$، ل(ح$_1$ ∪ ح$_2$) = $\frac{\square}{\square}$
- احتمال عدم وقوع الحادث ح$_2$ هو:

ل($\overline{ح_2}$) = ١ − ل(ح$_2$) = ١ − ——— = ———

أتذكّر: إذا كانت Ω هي الفضاء العينيّ لتجربةٍ عشوائيّة، بحيث إنّ كلَّ عنصرٍ في Ω له فرصة الظهور نفسها(الحدوث)، وكان الحادث ح $\subset \Omega$ ، فإنّ :

$$ل(ح) = \frac{\text{عدد عناصر ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

$$ل(\overline{ح}) = ١ - ل(ح)$$

- إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثيْن في Ω، فإنّ:

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

أتذكّر: إذا كان ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثيْن منفصليْن في Ω، فإنّ:

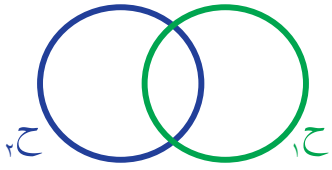
$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢)$$

نشاط (٢): إذا كان احتمالُ أنْ يُنجِزَ مقاولُ بناءٍ مشروعيْن (سكني وتجاري) معاً في الموعد المحدّد يساوي $\frac{١}{٤}$ ، واحتمالُ أنْ يُنجِزَ المشروعَ السكني يساوي $\frac{٣}{٤}$ ، واحتمالُ أنْ يُنجِزَ المشروعَ التجاري $\frac{٢}{٣}$.

- ما احتمالُ أنْ يُنجِزَ المقاولُ المشروعَ السكني فقط؟

ح$_١$: حادث إنجاز المقاول المشروع السكني.

ح$_٢$: حادث إنجاز المقاول المشروع التجاري.



احتمال أنْ يُنجَزَ المشروعُ السكني فقط يعني: أنْ يُنجَزَ المشروعُ السكني، وعدم إنجاز المشروع التجاري، وبالرموز: $ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١ \cap \overline{ح_٢})$

$$ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$

- ما احتمالُ أنْ يُنجِزَ المقاولُ المشروعَ التجاري فقط؟

احتمال أنْ يُنجِزَ المشروع التجاري فقط يعني: .....

ل(ح$_{٢}$ − ح$_{١}$) = ل(ح$_{٢}$) − ل(ح$_{٢}$ ∩ ح$_{١}$)

= $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{١}{٤}$ = ———

أَتَعَلَّمُ : ليكن ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ حادثيْن في الفضاء العيني Ω لتجربةٍ عشوائيّةٍ، فإنّ:

- $\overline{ح_{١}}$ ∪ $\overline{ح_{٢}}$ = $\overline{ح_{١} ∩ ح_{٢}}$
- $\overline{ح_{١}}$ ∩ $\overline{ح_{٢}}$ = $\overline{ح_{١} ∪ ح_{٢}}$

احتمال حدوث ح$_{١}$ وعدم حدوث ح$_{٢}$ = ل(ح$_{١}$ − ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) − ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$)

نشاط (٣): ليكنْ: ل(ح$_{١}$) = ٠,٣ ، ل(ح$_{٢}$) = ٠,٥ ، ل(ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$) = ٠,٢ ، أُكمِلُ إيجادَ ما يأتي:

- ل(ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) + ——— − ——— = ———
- ل($\overline{ح_{١}}$) = ١ − ل(ح$_{١}$) = ١ − ——— = ———
- ل(ح$_{١}$ − ح$_{٢}$) = ل(ح$_{١}$) − ل(ح$_{٢}$ ∩ ح$_{١}$)

= ٠,٣ − ٠,٢ = ———

- ل ($\overline{ح_{٢}}$ ∪ $\overline{ح_{١}}$) = ل($\overline{ح_{١} ∩ ح_{٢}}$) = ١ − ل(ح$_{٢}$ ∩ ح$_{١}$) = ١ − ——— = ٠,٨
- ل ($\overline{ح_{١}}$ ∩ $\overline{ح_{٢}}$) = ل($\overline{ح_{١} ∪ ح_{٢}}$) = ١ − ——— = ———

تمارين ومسائل:

س١ لَدى عائلةٍ ثلاثةٌ أطفال، ما احتمالُ أنْ يكونَ لديها بنتان وولد ؟

س٢ في تجربةِ رمي حجريّ نردٍ منتظميْن مرةً واحدة، وملاحظة الوجهيْن الظاهريْن،

أجدُ احتمالَ ما يأتي:

أ احتمال ظهور عدديْن مجموعهما ٧ . ب احتمال ظهور عدديْن فرديّيْن.

ج احتمال ظهور عدديْن مجموعهما ٣ على الأكثر.

س٣ إذا كان ح١ ، ح٢ حادثيْن في Ω حيث:

ل(ح١) = ٠,٦ ل(ح٢) = ٠,٣ ل(ح١ ∩ ح٢) = ٠,١٥

أحسب: أ ل(ح١ − ح٢) ب ل($\overline{ح_1}$ ∩ $\overline{ح_2}$)

مهمة تقويمية (٢):

س١ إذا كان ق (س) = $\frac{س^2 + 3}{\sqrt{2 - س}}$ أجد:

أ ق (٣) ب ق (٠)

س٢ أجد مجال الاقتران النسبي الآتية:

أ ق (س) = $\frac{2س^2 + 1}{4 - 2س^2}$

س٣ أجد أصفار الاقتران النسبي: ق (س) = $\frac{س^2}{س^3 + س + 1}$

س٤ إذا كان ل(ح١ ∪ ح٢) = ٠,٦٥ وكان ل($\overline{ح_1}$) = ٠,٤ ، ل(ح٢) = ٠,٢٥ فهل ح١ ، ح٢ حادثان منفصلان .

س٥ إذا كان احتمالُ نجاحِ طالبٍ في امتحان الفيزياء يساوي ٠,٧٥ ، واحتمالُ نجاحِه في امتحان الكيمياء يساوي ٠,٨ ، واحتمالُ نجاحِه في الامتحانيْن معاً يساوي ٠,٦٥ ، فما احتمال:

أ نجاح الطالب في أحد الامتحانين؟

ب نجاح الطالب في امتحان الكيمياء فقط؟

(٤ - ٥) الاحتمال المشروط

نشاط(١): يُمثّلُ الجدولُ الآتي بياناتِ مجموعةٍ من الطلبة في إحدى الجامعات الفلسطينيّة، لمعرفة نتائجِهم في مقرّر الإحصاء:

الكُلّيّة / النتيجة	الناجحون	الراسبون	المجموع
العلوم	٢٥	١٥	٤٠
الزّراعة	١٠	٥	١٥
الهندسة	١٥	١٠	٢٥
المجموع	٥٠	٣٠	٨٠

أُخْتيرَ أحدُ الطلبة عشوائيّاً، أجيبُ عمّا يأتي:

- احتمال أنْ يكونَ هذا الطالب من كليّة الزّراعة = $\frac{١٥}{٨٠}$
- احتمال أنْ يكونَ هذا الطالب من الناجحين = ———
- احتمال أنْ يكون هذا الطالب ناجحاً، ومن كليّة الزراعة = $\frac{١٠}{٨٠}$

هل يمكن إيجادُ احتمالِ أنْ يكون هذا الطالب من كليّة الزراعة، بشرط أنّه من الناجحين؟

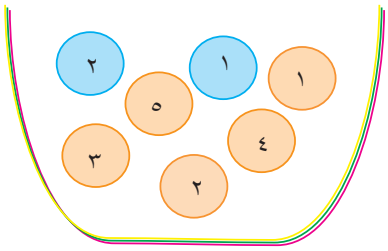
أتعلّم : **الاحتمال المشروط:** هو إيجادُ قيمةِ الاحتمالِ لحادثٍ ما، عِلماً بأنّ حادثاً آخر قد وقع.

إذا كان ح١، ح٢ حادثيْن في Ω، فإنّ احتمال وقوع ح١ بشرط وقوع ح٢ يُرمزُ له بالرمز:

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)} \quad ، \quad ل(ح_٢) \neq \text{صفر}$$

أي أنّ: $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١ / ح_٢) \times ل(ح_٢)$

مِثال: يحتوي وعاءٌ على ٥ كراتٍ برتقاليّةِ اللون مرقّمةٍ من ١ إلى ٥، وكرتين زرقاويْن مرقّمتين بالأرقام ١ ، ٢ ، كما في الشكل المجاور. إذا سحبنا كرةً عشوائيّةً، ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرةُ المسحوبةُ برتقاليّةً علماً بأنّها تحمل الرقم ٢؟



الحل: ليكن:

$ح_١$: حادث الكرة المسحوبة برتقاليّة اللون. $ح_٢$: حادث الكرة المسحوبة تحمل الرقم ٢.

ومنه: $ل(ح_٢) = \frac{٢}{٧}$ ،

$ح_١ \cap ح_٢$ تعني: أنّ الكرةَ المسحوبةَ برتقاليّةٌ، وتحمل الرقم ٢ ، إذن: $ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{١}{٧}$

احتمال أنْ تكونَ الكرةُ المسحوبةُ برتقالية، علماً بأنّها تحمل الرقم ٢ =

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)} = \frac{\frac{١}{٧}}{\square} = \frac{١}{٢} .$$

نشاط(٢): ليكنْ: $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثيْن في Ω، حيث إنّ:

$ل(ح_١) = \frac{١}{٤}$ ، $ل(ح_٢) = \frac{١}{٣}$ ، $ل(ح_١ \cup ح_٢) = \frac{٢٣}{٦٠}$ ، أُكمل إيجاد $ل(ح_١ / ح_٢)$، $ل(ح_٢ / ح_١)$:

$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) + _____ - _____ = _____$

$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)} = _____ = _____$

$ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_١)} = _____ = _____$

تمارين ومسائل:

س١ أجب عمّا يأتي:

أ) متى يكون $ل(ح_١ / ح_٢)$ = صفر ب) متى يكون $ل(ح_١ / ح_٢) = ١$ جـ) أعطي أمثلة على كل حالة للفرعين السابقين.

س٢ يحتوي صندوقٌ على ٧ كراتٍ بيضاءِ اللون، مرقّمةٍ من ١ إلى ٧، وعلى ١٣ كرةً سوداءِ اللون مرقّمةٍ من ١ إلى ١٣، سُحِبتْ كرةٌ بشكلٍ عشوائيّ.

- ما احتمالُ أنْ تكونَ الكرةُ سوداءَ علماً بأنّها تحمل العدد ٣؟

نشاط (١): من أجل تمثيل الشعب يتم إجراء الانتخابات، أُجرِيتْ انتخاباتُ البلديّات في فلسطين عام ٢٠١٧، وتنافست ثلاثُ قوائمَ من مدينة نابُلْسَ، وأربعُ قوائمَ من مدينة الخليل، تمّ اختيارُ مرشّحٍ من كلّ قائمةٍ عشوائيّاً، لحضورِ مؤتمرٍ حول دوْرِ البلديّات في خدمة المجتمع.

Ω = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (،) ، (١ ، ٤) ، (،) ، (٢ ، ٢) ، (،) ، (،) ، (،) ، (٣ ، ١) ، (،) ، (٣ ، ٣) ، (،) } ، المسقط الأول يمثّل رقمَ قائمةِ مرشّحِ مدينةِ نابُلْس، والمسقط الثاني يمثّل رقمَ قائمةِ مرشّحِ مدينةِ الخليل.

ما احتمال أنْ يكونَ مرشّحُ مدينةِ نابلسَ من القائمة الثالثة؟

ح١ : تُمثّلُ حادثَ أنْ يكونَ مرشّحُ مدينةِ نابلسَ من القائمة الثالثة،

ح١ = {(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) } ، ومنه: ل(ح١) = $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$.

ما احتمالُ اختيارِ مرشّحِ مدينةِ الخليل من القائمة الرابعة؟

لتكن: ح٢ تمثّل حادثَ أنْ يكونَ مرشّحُ مدينةِ الخليل من القائمة الرابعة.

ح٢ = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤) } ، ومنه ل(ح٢) = $\frac{٣}{١٢}$ = ———

إذا تمّ اختيارُ مرشّحيْن من المدينتيْن بشكلٍ عشوائيّ، ما احتمالُ أنْ يكونَ المرشّحُ الأوّلُ من القائمة الثالثة لمدينة نابلس، وأنْ يكونَ المرشّحُ الثاني من القائمة الرابعة لمدينة الخليل؟

المطلوب: احتمال حدوث الحادثيْن معاً؛ أي ل(ح١ ∩ ح٢)

ح٢ ∩ ح١ = {(،)} ، ل(ح١ ∩ ح٢) = $\frac{١}{١٢}$

أجد : ل(ح١) × ل(ح٢) = $\frac{١}{٣}$ × ——— = $\frac{١}{١٢}$

ما العلاقةُ بين: ل(ح١ ∩ ح٢)، ل(ح١) × ل(ح٢)؟ ———

هل يتأثّرُ اختيارُ مرشّحِ مدينةِ نابلسَ باختيار مرشّحِ الخليل؟———

هل يتأثّرُ حدوثُ ح١ بحدوثِ ح٢؟———

أجد: ل(ح٢ / ح١) = $\frac{\text{ل(ح١ ∩ ح٢)}}{\text{ل(ح١)}}$ = $\frac{\square}{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{١}{٤}$ ،

ل(ح١ / ح٢) = $\frac{\text{ل(ح١ ∩ ح٢)}}{\text{ل(ح٢)}}$ = ——— = $\frac{١}{٣}$

ما العلاقةُ بين: ل(ح٢/ح١) ، ل(ح٢)؟، وبين: ل(ح١/ح٢)، ل(ح١)؟ ———

نلاحظ أنّ: حادث اختيار المرشّح من إحدى قوائم مدينة نابلس لا يؤثّرُ على حادث اختيار، أو عدم اختيار المرشّح =من مدينة الخليل ، وتُسمّى مثلُ هذه الحوادث حوادثَ مستقلّة .

أتعلّم : يُقال أنّ ح١ ، ح٢ حادثان مستقلّان، إذا كان وقوعُ أيٍّ منهما لا يؤثّر على وقوعِ، أو عدمِ وقوع الحادث الآخر؛ أي أنّ :

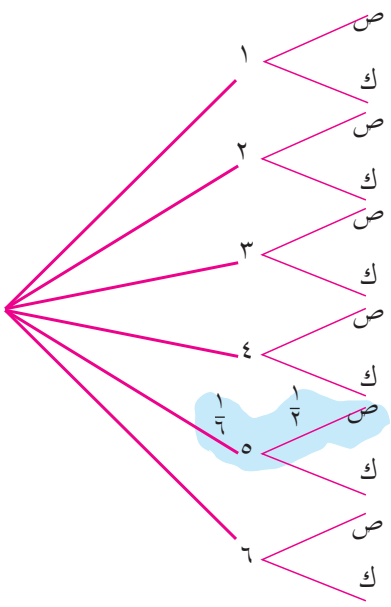
ل(ح١/ح٢) = ل(ح١)

ل(ح٢/ح١) = ل(ح٢)

وكذلك ل(ح١ ∩ ح٢) = ل(ح١) × ل(ح٢) .

مِثال: في تجربةِ رمي حجرِ نردٍ، ثمّ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ، وملاحظة الوجهيْن الظاهريْن، ما احتمالُ ظهورِ الرقم ٥ على حجر النرد، وظهور صورةٍ على قطعة النقد؟

Ω = {(١ ، ص) ، (١ ، ك) ، (٢ ، ص) ، (٢ ، ك)، (٣ ، ص) ، (٣ ، ك) ، (٤ ، ص) ، (٤ ، ك) ، (٥ ، ص) ، (٥ ، ك) ، (٦ ، ص) ، (٦ ، ك)}



ليكن ح١ : حادث ظهور الرقم ٥ على حجر النرد.

ح٢ : حادث ظهور صورة على قطعة النقد.

والمطلوب: ل(ح١ ∩ ح٢)

لاحظ أنّ الحادثين ح١ و ح٢ مستقلّان ، فلا يتأثر رمي قطعةِ النقد برمي حجرِ النرد، فنجد احتمالَ كلٍّ منهما دون الاعتماد على الآخر: ل(ح١) = ١/٦ ، ل(ح٢) = ١/٢

وبما أنّ ح١، ح٢ مستقلان، ينتج أنّ:

ل(ح١ ∩ ح٢) = ل(ح١) × ل(ح٢) = ١/٦ × ١/٢ = ١/١٢ .

أُفكّر وأُناقش هل يمكنك إيجاد: ل(ح١ ∩ ح٢) بطريقةٍ أخرى؟

نشاط (٢): إذا كان ل(ح١) = ٠,٥ ، ل(ح٢) = ٠,٧،

وكان ل(ح١ ∪ ح٢) = ٠,٨٥، أُبيّنُ أنّ ح١ ، ح٢ حادثان مستقلّان.

ل(ح١) × ل(ح٢) = ——— × ——— = ———

ل(ح١ ∪ ح٢) = ل(ح١) + ل(ح٢) − ل(ح١ ∩ ح٢)

٠,٨٥ = ٠,٥ + ٠,٧ − ل(ح١ ∩ ح٢)

ل(ح١ ∩ ح٢) = ٠,٣٥

نلاحظ أنّ: ل(ح١ ∩ ح٢) = ل(ح١) × ل(ح٢)، أي أنّ: الحادثين ح١ ، ح٢ مستقلّان.

نشاط(٣): إذا كان ل(ح١) = ٠,٤ ، ل(ح٢) = ٠,٥ وكان ح١ ، ح٢ حادثيْن مستقلّيْن، أجد قيمةَ ما يأتي:

- ل(ح١ ∩ ح٢) = ——— × ——— = ——— × ٠,٤ = ———
- ل(ح١ ∪ ح٢) = ——— + ——— − ——— = ٠,٩ − ——— = ———
- ل(ح١ / $\overline{ح_٢}$) = ———

تمارين ومسائل:

س١ إذا كان: ل(ح١) = ٠,٦، ل(ح٢) = ٠,٥ ، وكان ل(ح١ ∪ ح٢) = ٠,٨،

أُبيّنُ أنّ: ح١ ، ح٢ حادثان مستقلّان.

س٢ يحتوي صندوقٌ على ٥ كراتٍ زرقاءِ اللون، و٧ كراتٍ خضراءِ اللون،

سُحبت كرتان على التوالي، مع إرجاع. أحسبُ احتمال ما يأتي:

أ) أنْ تكونَ الكرةُ الأولى زرقاءَ، والثانيةُ خضراء.

ب) أنْ تكونَ الكرتان من اللون نفسِه.

مهمة تقويمية (٣):

س١ صندوقان يحتوي الأول على ٤ كراتٍ بيضاءِ اللون، و٥ كراتٍ سوداءِ اللون، ويحتوي الثاني على ٣ كراتٍ بيضاءِ اللون، و٣ كرات سوداءِ اللون، وجميعُ الكرات في الصندوقيْن متماثلاتٌ في الحجم:

إذا سُحبتْ كرةٌ واحدةٌ من كلٍّ صندوقٍ، فما احتمالُ أنْ تكون الكرتان المسحوبتان سوداويْن؟

س٢ **إذا كان ل (ح$_١$) = ٠,٩ ، ل (ح$_٢$) = ٠,٨ ، ل (ح$_١$-ح$_٢$) = ٠,٣ فما قيمة: ل (ح$_١$/ح$_٢$)؟**

س٣ **إذا كان ل($\overline{ح_٢}$/ ح$_١$) = ٠,٣، ل(ح$_١$) = ٠,٤، وكان ح$_١$،ح$_٢$ حادثين مستقلين، فما قيمة ل(ح$_١$∩ح$_٢$)؟**

نشاط (١): تربيةُ الخيولِ والاعتناء بها إرثٌ عربيٌّ يقومَ الرَجُلِ بمسكِ طَرْفِ حبلٍ يمتدُّ إلى رسنِ الحصانِ الّذي يدورُ ببعدٍ ثابتٍ عن الرَجُلِ.

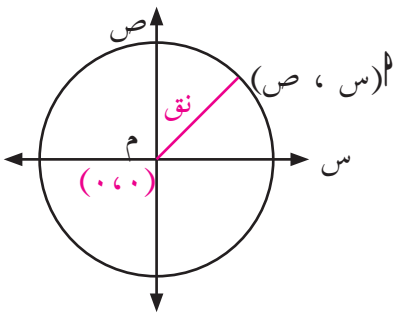
- ما شكلُ المسارِ الناتجِ من حركةِ الحصانِ حولَ الرَجُلِ؟
- ماذا يُمثّل موقعُ قدمي الرَجُلِ بالنسبةِ للمسارِ؟
- ماذا يُسمّى البعدُ الثابتُ بينَ موقعِ الرَجُلِ ومسار الحصانِ؟

نلاحظ أنّ: المسار الذي يشكّله الحصانُ من دورانه حول نقطةٍ ثابتةٍ (موقع الرَجُلِ) هو دائرة مركزها النقطة الثابتة ونصف قطرها ———.

أتعلّم : المحل الهندسي: هو مسارُ نقطةٍ تتحرّكُ في المستوى الديكارتي لرسم منحنى تحت شروطٍ معيّنة، حيث تُنتِجُ هذه المساراتُ أشكالاً هندسيّة.

الدائرة: هي المحلُّ الهندسيّ (المسار) لنقطةٍ تتحرّك في المستوى، بحيث تبعدُ بعداً ثابتاً عن نقطةٍ ثابتةٍ، تُسمّى مركزَ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز م. يُسمّى البعدُ الثابتُ نصفَ قطرِ الدائرة ، ويُرمز له بالرمز نق.

نشاط (٢): يُمثّل الشكل المجاور دائرةً مركزُها نقطةُ الأصل م، والنقطة أ(س ، ص) تقع على الدائرة، م أ هو نصفُ قطرِ الدائرة.



باستخدام قانون المسافة بين نقطتين، فإنّ:

م أ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

م أ = $\sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢}$

م أ = ———————— ، ولكن: م أ = نق

بتربيع الطرفيْن أحصل على المعادلة : ————————

أتعلّم : الصورة العامّة لمعادلة الدائرة، التي مركزها نقطة الأصل (٠ ، ٠)، ونصف قطرها نق هي: $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

مِثال (١): أكتبُ معادلةَ الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٤ سم.

الحل: معادلة الدائرة: $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

$$س^{٢} + ص^{٢} = ٤^{٢}$$

$$س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$$

طول م ا باستخدام قانون المسافة بين نقطتين:

$$م ا = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

م ا = ــــــــــــــــــــــــــــــ ، ولكن: م ا = هو نصف قطر

ومنها: نق = ــــــــــــــــــــ

بتربيع الطرفيْن أحصل على المعادلة : ــــــــــــــــــــــــــــــ

أتعلّم : **الصورة العامّة** لمعادلة الدائرة التي مركزُها النقطة (د ، هـ)، ونصف قطرها نق هي : **$(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$**

مِثال (٢): أكتبُ معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٢ ، ١)، وطول نصف قطرها ٣ سم.

الحل: **معادلة الدائرة:** $(س - د)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$

$$(س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٣^{٢}$$

ملاحظة: عند فكّ الأقواس في معادلة الدائرة السابقة نحصل على الصورة:

$$س^{٢} - ٤ س + ٤ + ص^{٢} - ٢ ص + ١ = ٩$$

$$س^{٢} - ٤ س + ص^{٢} - ٢ ص + ٥ = ٩$$

$$س^{٢} - ٤ س + ص^{٢} - ٢ ص = ٤$$

نشاط (٣): عند فكّ الأقواس في المعادلة التي على الصورة:(س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

نحصل على: س^{٢} – ——— + د^{٢} + ص^{٢} – ——— + هـ^{٢} = نق^{٢}

س^{٢} – ——— + د^{٢} + ص^{٢} – ——— + هـ^{٢} – نق^{٢} = صفر

بفرض أنّ: -د = ل ، -هـ = ك، د^{٢} + هـ^{٢} – نق^{٢} = جـ

تنتج الصورة : ———————————

ماذا تلاحظ على معامل س^{٢}، معامل ص^{٢} ؟

هل يوجد الحدُّ س ص في المعادلة؟

أَتَعَلَّم : الصورة القياسيّة لمعادلة الدائرة هي : **س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠**

ويكون فيها مركزُ الدائرة (-ل ، -ك) ، نصف قطرها نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$

لاحظ أنّ : ل^{٢} + ك^{٢} – جـ > صفر

تمارين ومسائل:

س١ أجدُ معادلةَ الدائرة في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي:

أ) مركزُها (٠،٠)، وطولُ نصفِ قطرها ٥سم.

ب) مركزُها (-٣ ،٢)، وطولُ قطرِها ٦سم.

جـ) مركزُها (- ٢ ، -٧)، وتمرُّ في النقطة (٤، -٨).

س٢ أجدُ مركز الدائرة، وطول نصف قطرها في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي :

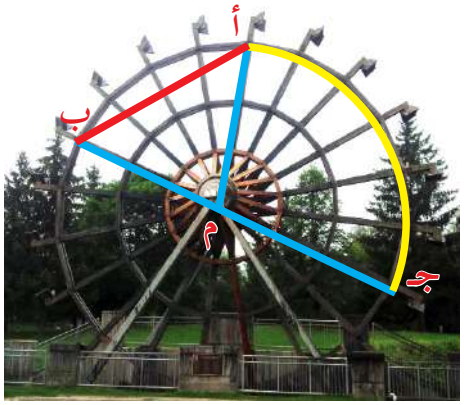
أ) س^{٢} + ص^{٢} – ١ = ٠

ب) (س – ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٤٢

جـ) ٦س^{٢} + ٦ص^{٢} = ٣٦

(٤ - ٨) الزّوايا المركزيّة والزّوايا المحيطيّة

نشاط (١): المحافظة على عمارةِ الأرض، والاعتناء بها من ضرورات بقائنا عليها، فـ«على هذه الأرض ما يستحقّ الحياة» .اعتمد الفلّاح قديماً على قوّةِ دفعِ المياه الناتجة من دولاب المياه لتحريك طاحونة القمح، تأمّل دولابَ المياه في الشكل المجاور، ثم أجبْ:



في الدائرة التي مركزها م.

تُسمّى القطعةُ أ م نصفَ قطرِ الدائرة،

بينما القطعة ب جـ _____

أجـ قوس في الدائرة.

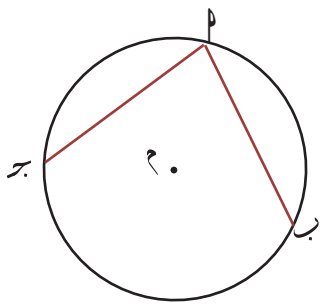
أذكرُ أسماءَ أربعِ زوايا في الشكل المجاور: _____، _____، _____، _____

ألاحظ: موقع رأس الزّوايا في الشكل السابق.

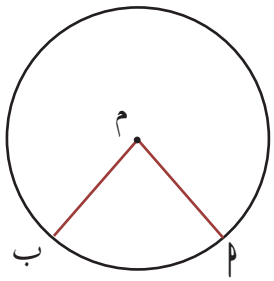
تعريف

الزاوية المركزيّة: هي الزاوية التي يقع رأسُها في مركز الدائرة، وضلعاها أنصافُ أقطارٍ في الدائرة.

الزاوية المحيطيّة: هي الزاوية التي يقع رأسُها على الدائرة، وضلعاها أوتارٌ في الدائرة.

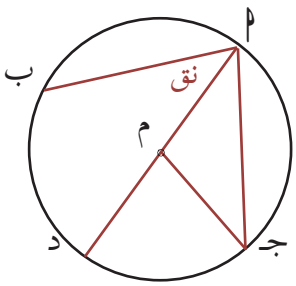


الزاوية ب أ جـ (محيطيّة)



الزاوية أ م ب (مركزيّة)

نشاط (٢): في الشكل المجاور دائرة مركزها م :

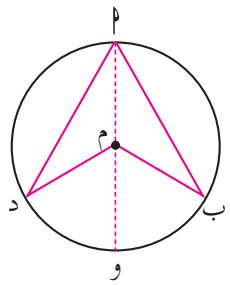


تُسمّى الزاويةُ جـ م د زاويةً _____، لماذا؟

تُسمّى الزاويةُ أ م د زاويةً مركزيّة، لماذا ؟

أذكرُ أسماءَ زاويتيْن محيطيّتيْن _____ ، _____ .

نشاط (٣): في الشكل المقابل، إذا كانت م مركز الدائرة، وكان ∠ ب أ م = ٣٠°،
∠د أ م = ٣٥° أجد: ∠ب م د .



الزاوية ب م و خارجة عن المثلث أ ب م

إذن: ∠ ب م و = ∠ أ ب م + ∠ ب أ م

ولكن : ∠ أ ب م = ∠ ب أ م؛ لأنّ _____

ومنه : ∠ ب م و = _____ = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

لإيجاد: ∠ د م و = ٢ × _____ = ٢ × _____ = _____

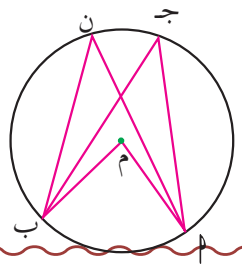
∠ ب م د = ∠ ب م و + ∠ و م د = ٦٠° + _____ = _____

وينتج أنّ: ∠ ب م د = ٢ × ∠ _____

لاحظ أنّ: الزاويةَ ب م د زاويةٌ مركزيّةٌ، والزاويةَ ب أ د زاويةٌ محيطيّةٌ، مرسومتان على القوس نفسه، ما العلاقة بين قياس الزاويتيْن؟

أتعلّم : قياسُ الزاويةِ المركزيّة تساوي ضعفَي قياسِ الزاوية المحيطيّة المشترِكة معها في القوس نفسه.

نشاط (٤): أتأمّلُ الشكل المجاور، فيه م مركز الدائرة، وقياس الزاوية أ م ب = ٨٠°،
أجدُ: قياس الزاوية أ ن ب، وَ قياس الزاوية أ جـ ب



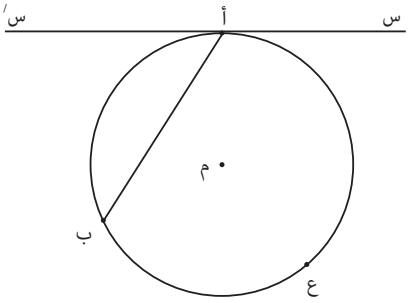
∠ أ جـ ب = _____ لماذا ؟

∠ أ ن ب = ٤٠° ما العلاقة بين الزاويتيْن: أ جـ ب ، أ ن ب ؟

أتعلّم : أي زاويتان محيطيّتان مرسومتان على قوس واحد في الدائرة متساويتان في القياس.

أتعلّم : مماس الدائرة هو المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة تُعرف بنقطة تماسه معها (نقطة تماس).

نشاط (٥): الشكل المرسوم جانباً يمثل دائرة مركزها م ، فيها س س/ مماس للدائرة في النقطة أ.

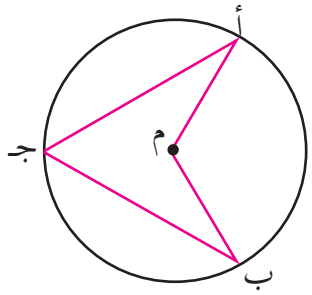


أب وتر في الدائرة.

تُسمى الزاوية س/ أب زاوية مماسية

الزاوية المماسية هي .....

تمارين ومسائل:



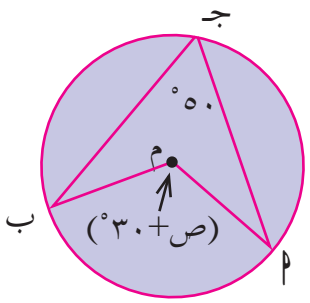
س١ الشكل المجاور فيه م مركز الدائرة، فإذا كان قياس

∠ (أ م ب) = ١٣٠°، أجدُ ∠ (أ جـ ب).

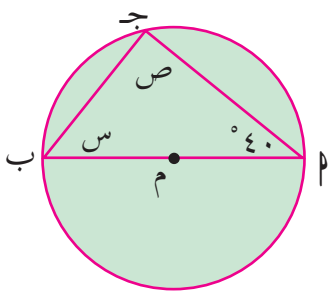
س٢ أبيّنُ أنّ قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على قطر الدائرة تساوي ٩٠°.

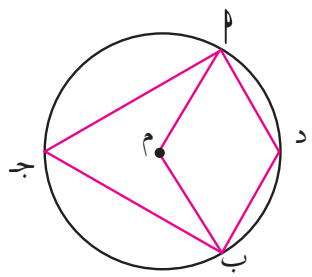
س٣ أجدُ قيمةَ المجهولِ في الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة:

١



٢



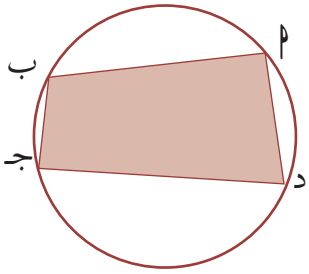


س٤ في الشكل المجاور دائرة مركزها م، فيها :

∠ (أ د ب) = ١٤٠°

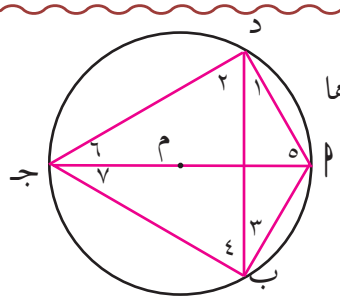
أجد: ∠ (أ م ب) المنعكسة، و∠ (أ جـ ب) .

نشاط (١): يتكوّن الزيّ التراثيّ الشعبيّ في فلسطين من أثوابٍ مطرّزةٍ يدويّاً، بخيوط الحرير أو الصوف، ويتّخذ التطريزُ تصاميمَ وأشكالاً مختلفةً من منطقة إلى أخرى، تتكون من أشكالٍ هندسيّةٍ، ورسوماتٍ، إذا أحطنا الشكل الرباعي في المطرّزة بدائرة، بحيث تمرُّ بجميع رؤوسه، فماذا نُسمّي هذا الشكل؟



في الشكل المقابل رؤوس الشكل الرّباعيّ ــــــــــ تقع على الدائرة التي مركزها م، فيُسمّى الشكل أ ب جـ د شكلًا رباعيّاً دائريّاً.

أَتَعَلَّم : الشكل الرباعيّ الدائريّ: هو شكلٌ رباعيّ تقع رؤوسُه الأربعة على الدائرة.



نشاط (٢): أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ دائرةٍ مركزها م، أجدُ مجموعَ قياسِ الزاويتيْن المتقابلتيْن د، ب.

∠ ٣ = ∠ ٦ (محيطيّتان على قوس واحد)

∠ ٤ = ــــــ لماذا؟

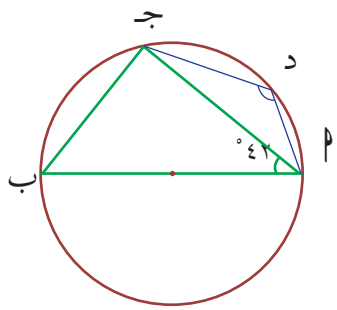
لكن∠١ + ∠٢ + ∠ ٥ = ∠٦ = ــــــ (مجموع زوايا المثلث)

إذن: ∠١ + ∠٢ + ∠٣ + ∠٤ = ١٨٠°

إذن: مجموع قياس الزاويتيْن د، ب = ــــــــــ

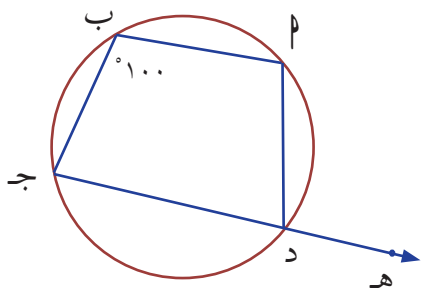
أتعلّم : كلُّ زاويتيْن متقابلتيْن في الشكل الرباعيّ الدائريّ متكاملتان (مجموعهما ١٨٠°).
إذا كان مجموعُ زاويتين متقابلتين في شكلٍ رباعيّ = ١٨٠°، فإنّ هذا الشكل رباعيٌّ دائريّ.

نشاط (٣): أ ب جـ د شكلٌ رباعيّ دائريّ، فيه:
الضلع أ ب قطر في الدائرة.
أجد: ∠ (أ د جـ) ،إذا كان ∠ (جـ أ ب) = ٤٢°
∠ (أ جـ ب) = ———— . لماذا؟
المثلث أ ب جـ فيه:
∠ (أ ب جـ) = ———— − (٤٢° + ٩٠°) = ————
ومنه: ∠ (أ د جـ) = ١٨٠° − ٤٨° = ١٣٢° . لماذا؟



أُفكّر وأُناقش
هل كلُّ معيّنٍ شكلٌ رباعيّ دائريّ؟

نشاط (٤): في الشكل المقابل أجد ∠ أ د هـ .
∠ أ د جـ = ٨٠°، لماذا ؟----------
∠ أ د هـ = ———— . لماذا؟
∠ أ د هـ تقع على امتداد أحدِ أضلاع الشكل الرباعيّ والضلع المجاور له. ماذا تُسمّى أ د هـ بالنسبة إلى الشكل الرباعي أ ب جـ د؟



تعريف

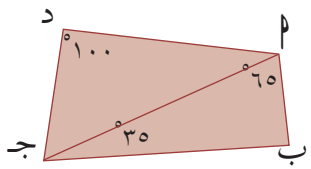
إذا مُدّ أحدُ أضلاعِ الشكل الرباعيّ على استقامته، فإنّ الزاويةَ المحصورةَ بين امتداد الضلع والضلع المجاور له تُسمّى **الزاويةَ الخارجةَ** عن الشكل الرباعي.

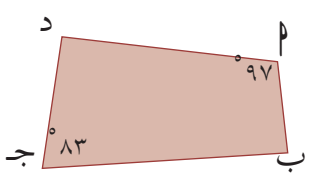
وقياس الزاوية الخارجة للشكل الرباعي الدائري = قياس الزاوية الداخليّة المقابلة للمجاورة لها.

ملاحظة: إذا كانت إحدى زوايا الشكل الرباعي الدائري قائمةً، فإنّ قُطرَ الشكل الرباعي المقابل لهذه الزاوية القائمة هو قطر الدائرة.

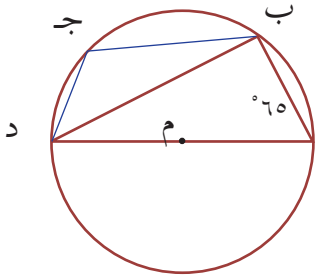
تمارين ومسائل:

س١ أبيّنُ أيّ الأشكال الآتية تمثل شكلًا رباعيّاً دائريّاً.





س٢ أ ب جـ د شكلٌ رباعيٌّ دائريّ، فيه قياس الزاوية ب د جـ = ٣٠°،
أجد قياس الزاوية ب جـ د ، وقياس الزاوية أ ب جـ.



مهمة تقويمية (٤):

س١ أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٦٤$ ؟

أ) ٥سم　　ب) ٢سم　　جـ) ٦٤سم　　د) ٨ سم

(٢) ما قياس الزاوية المحيطيّة المرسومة على قطر الدائرة؟

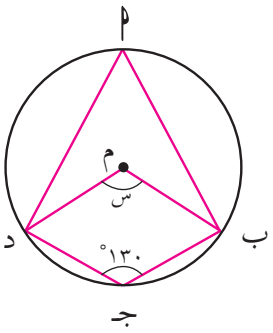
أ) ٩٠°　　ب) ٣٠°　　جـ) ٦٠°　　د) ٨٠°

(٣) في الشكل المجاور:

إذا كان م مركز دائرة، فيها ∠ (ب جـ د) = ١٣٠°، فما قيمة س؟

أ) ٥٠°　　ب) ١٠٥°

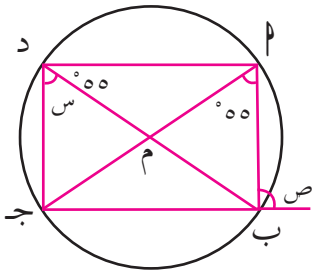
جـ) ٢٣٠°　　د) ١٠٠°

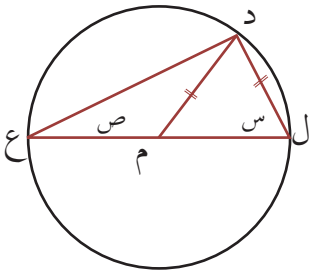


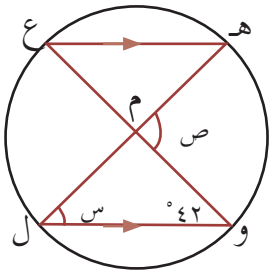
س٢ أجد معادلة الدائرة في ما يأتي:

(أ) مركزها (-٥،١) ، وتمرّ بالنقطة (٢، ٤)

س٣ أجد قياسات الزوايا المجهولة في الأشكال الآتية:







(٤-١٠)

ورقة عمل الوحدة الرابعة

س١: أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

١- قياس زاوية مركزيّة في دائرة مركزها م =١٠٠°، فما قياس الزاوية المحيطيّة المشتركة معها في القوس؟

أ) ١٠° ب) ٥٠° جـ)١٠٠° د)٢٠°

٢- ما العلاقة بين كلّ زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري؟

أ) مجموعهما ٣٦٠° ب) متساويتين جـ) متكاملتين د) متتامتين

٣- إذا كان ح١ ، ح٢ حادثين منفصلين في Ω، وكان ل(ح١) = $\frac{٢}{٣}$

ل(ح٢) = $\frac{١}{٤}$ ، فما قيمة ل(ح١ ∩ ح٢)؟

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١١}{١٢}$ جـ) $\frac{٥}{١٢}$ د) صفر

٤- إذا كان ح١ ، ح٢ حادثين مستقلين في Ω، لتجربةٍ عشوائيّةٍ ما، وكان ل(ح١) = ٠,٥

ل(ح٢) = ٠,٤، فما قيمة ل(ح١ ∪ ح٢)؟

أ) ٠,٧ ب) ٠,٩ جـ) ٠,٥ د) ٠,٤

٥- درجة كثير الحدود ق(س) تساوي ٥ ، ودرجة كثير الحدود هـ(س) تساوي ٣ ، فما درجة حاصل ضربهما ؟

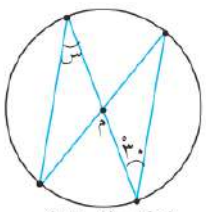
أ) ٢ ب) ٥ جـ) ٨ د) ١٥

س٢: أجدُ ناتج القسمة والباقي عند قسمة ق (س) على هـ (س) في كلّ من الحالات الآتية باستخدام القسمة الطويلة:

ق (س) = ٢س٢ + ٢س - ٣ ، هـ (س) = س + ٣

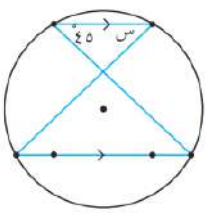
س٣: أجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية، حيث م مركز الدائرة:

أ



الشكل (٤-١٢)

ب



الشكل (٤-١٣)

س٤ : أجد معادلة الدائرة الآتية:

نهايتا قطرٍ فيها النقطتان: أ (٧ ، ١٢) ، ب(-٥ ، -٤)

س٥ : إذا كان ح١ ، ح٢ حادثين في Ω، وكان ل(ح١) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ح١ / ح٢) = $\frac{١}{٢}$ ،

ل(ح٢) = $\frac{١}{٥}$. أحسبُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

أ ل(ح١ ∩ ح٢)　　ب ل(ح٢ / ح١)　　جـ ل($\overline{ح}$١ / $\overline{ح}$٢)

س٦ : إذا كان ل(ح١) = ٠,٤، ل(ح١ / ح٢) = ٠,٤، ل(ح٢ / ح١) = ٠,٥

أ هل ح١ ، ح٢ مستقلان؟　　ب ما قيمةُ ل(ح٢)؟

س٧ : إذا كانت ق(س) = س٣ − ٥س٢ + ٣، هـ(س) = س٢ +١ ، أجد:

أ ق(س) × هـ(س) + ٥　　ب ق(س) ÷ هـ(س)

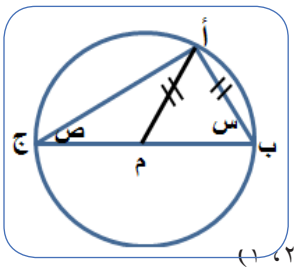
س١ ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

١) ما مجال الاقتران: ق(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س}+٢)}$ هو؟

أ) ح - {-٢}　　ب) ح - {٠}　　ج) ح - {٠، -٢}　　د) ح - {٠، ٢}

٢) في الشكل المجاور، دائرة مركزها م، إذا كان طول $\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{أ م}}$
فإن قياس الزاوية ص هو:

أ) ٩٠°　　ب) ١٢٠°　　ج) ٦٠°　　د) ٣٠°



٣) مركز الدائرة التي معادلتها: (س - ١)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٣٦ هو:

أ) (-١، ٢)　　ب) (١، -٢)　　ج) (-١، -٢)　　د) (-٢، ١)

٤) إذا كان ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حادثين منفصلين، ما قيمة: ل (ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$)؟

أ) Ø　　ب) Ω　　ج) ١　　د) صفر

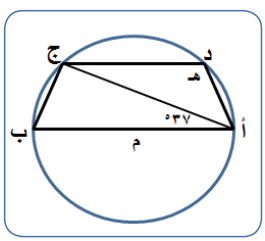
٥) أيّ من الآتية يعدّ متطابقة مثلثية؟

أ) جاس = $\frac{١}{٢}$　　ب) جتا^{٢}س-جا^{٢}س = ١　　ج) جتا^{٢}س+جا^{٢}س = ١　　د) جتاس-جاس = ١

٦) إذا كان ح$_{١}$، ح$_{٢}$ حادثين مستقلين في Ω لتجربة عشوائية ما، وكان: ل (ح$_{١}$) = ٠,٥، ل (ح$_{٢}$) = ٠,٤ فما قيمة ل (ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$)؟

أ) ٠,٧　　ب) ٠,٩　　ج) ٠,٥　　د) ٠,٤

س٢: في الشكل الآتي أوجد قياس الزوايا المجهولة، علماً بانّ النقطة م تدل على مركز الدائرة؟



∢ هـ = ...

س٣: تقدّم ٢٠ طالباً لامتحانيّ رياضيات وعلوم، فإذا نجح نصف الطلبة في العلوم، وثلاثة أرباع الطلبة في الرياضيات، وكان عدد الناجحين في المادتين معاً عشرة طلاب:

- ما احتمال أن ينجح في إحدى المادتين؟

س٤: ما صفر/أصفار الاقتران النسبي ق (س) = $\frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١}$ ؟

س٥: أمثل الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٤ وأجد القيمة الصغرى له.

س٦: اذا كان ق(س) = ٦س^{٣} + ٥س^{٢} - ١، هـ(س) = ٣س^{٢} + س + ٤، ك(س) = ٢س^{٢} - ٤ اقترانات كثيرة حدود، فأوجد ما يأتي، وحدد درجة الناتج:

أ) هـ(س) x ٤ ك(س)　　ب) (ق ÷ ك) (س)